

J. P. BENZÉCRI

## **Un algorithme pour construire une perpendiculaire commune à deux convexes**

*Les cahiers de l'analyse des données*, tome 4, n° 2 (1979),  
p. 159-173

[http://www.numdam.org/item?id=CAD\\_1979\\_\\_4\\_2\\_159\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CAD_1979__4_2_159_0)

© Les cahiers de l'analyse des données, Dunod, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Les cahiers de l'analyse des données » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

UN ALGORITHME POUR CONSTRUIRE  
UNE PERPENDICULAIRE COMMUNE  
A DEUX CONVEXES  
[PERP. COM.]

par J. P. Benzécri (1)

1 Introduction : L'analyse factorielle sous contrainte convexe.

Il est commun (cf [Corr. Esp.] , TII B n° 7) de définir l'analyse des correspondances comme la recherche des couples de fonctions sur deux ensembles I et J qui sont, en un certain sens le plus corrélées entre elles. En termes géométriques, le problème s'énonce ainsi. Dans l'espace euclidien  $L^2_{I \times J}$  de fonctions sur  $I \times J$  muni de la norme quadratique associée à la loi de probabilité  $p_{IJ}$ , on a deux sous-espaces  $H^2_I$  et  $H^2_J$ , sous-espaces des fonctions de moyenne nulle sur I et J respectivement. On recherche un couple de vecteurs unitaires  $(\varphi^I, \varphi^J)$ ,  $\varphi^I \in H^2_I$ ,  $\varphi^J \in H^2_J$ , faisant entre eux un angle minimum. Voici comment on résout ce problème. Soit  $\pi_{HJ}^{HI}$  et  $\pi_{HI}^{HJ}$  les applications de  $H^2_I$  dans  $H^2_J$  et de  $H^2_J$  dans  $H^2_I$  respectivement définies par projection orthogonale au sein de  $L^2_{IJ}$ ; on a :

$$\varphi^I = \lambda \pi_{HI}^{HJ} \circ \pi_{HJ}^{HI} \varphi^I ; \varphi^J = \lambda \pi_{HJ}^{HI} \circ \pi_{HI}^{HJ} \varphi^J ,$$

où  $\lambda$  désigne la plus forte valeur propre de l'un ou l'autre des opérateurs  $\pi \circ \pi$ . Si, (cas général), cette valeur propre est de multiplicité 1, le couple  $(\varphi^I, \varphi^J)$  le plus corrélé est déterminé de manière unique, au signe près. On sait qu'il est d'usage de considérer aussi les valeurs propres suivantes auxquelles correspondent des couples  $(\varphi^I, \varphi^J)$  dont la corrélation n'est maxima que sous la contrainte supplémentaire que les nouveaux facteurs soient orthogonaux à ceux, déjà extraits, relatifs à des valeurs propres plus élevées. Par exemple, soit  $(\varphi^I_1, \varphi^J_1)$  le premier couple extrait ; notons  $VI$  et  $VJ$  les sous-espaces de  $H^2_I$  et  $H^2_J$  orthogonaux respectivement à  $\varphi^I_1$  et  $\varphi^J_1$  :  $(\varphi^I_2, \varphi^J_2)$  sera le couple de vecteurs unitaires de  $VI$  et  $VJ$  faisant entre eux le plus petit angle ; etc.

On est ainsi amené à poser, après M. Piétri, le problème plus général suivant : soit  $CI, CJ$  deux cônes convexes fermés inclus respectivement dans  $H^2_I$  et  $H^2_J$ , chercher le couple  $(\varphi^I, \varphi^J)$ ,  $\varphi^I \in CI$ ,  $\varphi^J \in CJ$  formant un angle minimum. C'est là ce qu'on peut appeler l'analyse factorielle sous contrainte convexe. Si les convexes  $CI$  et  $CJ$  sont des sous-espaces vectoriels (ce qui est le cas, par exemple dans la recherche de  $(\varphi^I_2, \varphi^J_2)$  où  $CI = VI$  et  $CJ = VJ$ ) on n'a pas un problème géométrique nouveau :

(1) Professeur de statistique. Université Pierre et Marie Curie.

il s'agit toujours de la figure formée par deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien ; l'on extraira une suite de couples de facteurs etc. Ce problème de l'analyse factorielle sous contrainte linéaire a d'ailleurs été traité par Madame Nora, comme il est exposé dans la leçon [Red. Tens.], TIII, B n° 6 § 5 ; là, le point de vue est différent, (on recherche non des couples de fonctions le plus corrélées, mais l'approximation d'un tenseur), mais les résultats comme les données sont équivalents. Le cas général de deux cônes convexes CI et CJ pose, au contraire un problème géométrique nouveau. Voici la solution qu'en a inspiré à M. Piétri la recherche itérative des vecteurs propres.

On sait que pour tout convexe fermé K d'un espace de Hilbert H est définie de manière unique, sur H tout entier, une application projection orthogonale sur K ; (application qui à tout point M de H fait correspondre le point  $\pi(M)$  de K qui en est le plus proche). Notons donc  $\pi_{CJ}^{CI}$  et  $\pi_{CI}^{CJ}$  les applications de CI dans CJ et CJ dans CI respectivement définies par projection orthogonale au sein de  $L_{IJ}^2$ . Soit  $(\varphi^I, \varphi^J)$ ,  $\varphi^I \in CI, \varphi^J \in CJ$ , un couple de vecteurs unitaires réalisant l'angle minimum  $\theta$ . On a :

$$\varphi^I = \cos \theta \pi_{CI}^{CJ} \varphi^J ; \varphi^J = \cos \theta \pi_{CJ}^{CI} \varphi^I$$

(car si les rayons définis par  $\varphi^I$  et  $\varphi^J$  n'étaient pas projection orthogonale l'un de l'autre, on aurait, e.g. en gardant  $\varphi^I$  et prenant  $\varphi'^J$  parallèle à  $\pi \varphi^I$  et unitaire, un couple  $(\varphi^I, \varphi'^J)$  d'angle inférieur à  $\theta$ ). On a aussi :

$$\varphi^I = \cos^2 \theta \pi_{CI}^{CJ} \circ \pi_{CJ}^{CI} \varphi^I ; \varphi^J = \cos^2 \theta \pi_{CJ}^{CI} \circ \pi_{CI}^{CJ} \varphi^J.$$

Ceci dit on construit comme suit une suite de couples  $(\varphi_n^I, \varphi_n^J)$  destinée à converger vers un couple  $(\varphi^I, \varphi^J)$  d'angle minimum. Soit  $\varphi_0^I$  un vecteur unitaire de CI ; on pose :

$$\varphi_0^J = \pi_{CJ}^{CI} \varphi_0^I / \|\pi_{CJ}^{CI} \varphi_0^I\| ; \varphi_1^I = \pi_{CI}^{CJ} \varphi_0^J / \|\pi_{CI}^{CJ} \varphi_0^J\| ; \dots$$

$$\varphi_n^J = \pi_{CJ}^{CI} \varphi_n^I / \|\pi_{CJ}^{CI} \varphi_n^I\| ; \varphi_{n+1}^I = \pi_{CI}^{CJ} \varphi_n^J / \|\pi_{CI}^{CJ} \varphi_n^J\| ; \dots$$

La convergence de la suite des couples  $(\varphi_n^I, \varphi_n^J)$  ne semble pas toutefois d'une étude aisée. Aussi considérerons-nous d'abord un problème analogue, mais plus simple et sur lequel nous possédons des résultats plus complets.

Soit C et C' deux parties convexes d'un même espace euclidien (ou hilbertien). Notons  $\pi_{C'}^C$  et  $\pi_C^{C'}$  les projections orthogonales de C vers C' et C' vers C respectivement. On construit une suite de couples  $(M_n, M'_n)$  de points C et C' destinée à converger vers un couple  $(M, M')$  réalisant la distance minima entre C et C'. Soit  $M_0$  un point quelconque de C ; on pose :

$$M_0' = \pi_{C'}^C M_0 ; M_1 = \pi_C^{C'} M_0' ; \dots$$

$$M_n' = \pi_{C'}^C M_n ; M_{n+1} = \pi_C^{C'} M_n' ; \dots$$

L'analogie entre cet algorithme et celui proposé par M. Piétri est manifeste. Plus précisément soit dans un espace euclidien deux cônes

convexes fermés  $K$  et  $K'$ , ayant pour sommet l'origine. Soit  $C = K \cap S$  et  $C' = K' \cap S$  les bases de ces cônes dans la sphère unité  $S$  (ensemble des vecteurs de norme 1). Un rayon  $OM$  de  $K$  se projette orthogonalement sur  $K'$  suivant un rayon  $OM'$  :  $M \in C$ ,  $M' \in C'$ . On peut dire que  $M'$  est la projection orthogonale de  $M$  sur  $C'$  au sens de la géométrie riemannienne de la sphère  $S$  : i.e.,  $M'$  est le point de  $C'$  le plus proche de  $M$ , la distance étant définie comme la longueur du plus petit arc de grand cercle joignant  $M$  à  $M'$  sur  $S$ . Dans la suite nous traiterons donc de la recherche d'un couple de points réalisant la plus courte distance entre deux convexes ; d'abord en géométrie euclidienne, puis en géométrie sphérique (ou riemannienne). La droite (ou le grand cercle) joignant ces deux points n'est autre qu'une perpendiculaire commune ; d'où le titre de la présente note.

## 2 Perpendiculaire commune à deux convexes fermés de l'espace euclidien.

**2.1 Existence et unicité :** On sait que si  $K$  et  $K'$  sont des parties compactes (fermées et bornées) d'un espace hilbertien le minimum de la distance  $d(M, M')$  entre un point  $M$  de  $K$  et un point  $M'$  de  $K'$  est effectivement atteint : en effet sur le compact produit  $K \times K'$  la fonction continue  $d(M, M')$  atteint sa borne inférieure précise. Le minimum est également atteint si  $K$  est compact et que de plus est satisfaite l'une des deux conditions suivantes :

- a)  $K'$  est convexe fermé
- b)  $K'$  est fermé ; et l'espace ambiant est de dimension finie.

(En effet notons que sur le compact  $K$ , la fonction continue  $d(M, K')$ , distance de  $M$  à  $K'$  définie par limite inférieure :

$$d(M, K') = \liminf \{d(M, M') \mid M' \in K'\},$$

atteint son minimum  $d$  en un point  $H$ . Le minimum  $d$  de  $d(H, M')$  pour  $M' \in K'$ , est lui-même atteint d'une part si  $K'$  est convexe fermé au point  $H'$  projection orthogonale de  $H$  sur  $K'$  ; d'autre part si l'espace ambiant est de dimension finie parce que l'intersection  $K''$  de  $K'$  avec la boule de centre  $H$  et rayon  $2d$  est compacte et que dans  $K''$  la suite est minimisante). En revanche, entre deux parties convexes  $C$  et  $C'$  fermées mais non bornées le minimum de  $d(M, M')$  n'est pas toujours atteint, comme il apparaît sur la figure 1b, où  $C$  et  $C'$  sont deux domaines - plans limités à des courbes à asymptote parallèle. Quant à l'unicité elle n'est pas plus assurée dans le cas compact que dans le cas non compact ; comme on le voit sur les figures 1a - deux demi-plans parallèles - et 1c - deux convexes compacts - se faisant vis-à-vis suivant des facettes rectilignes parallèles. Mais le segment réalisant le minimum de la distance est unique à une translation près perpendiculaire à lui-même. De façon précise on a le scholie suivant qui précise ce qu'on peut entendre par perpendiculaire commune à deux convexes.

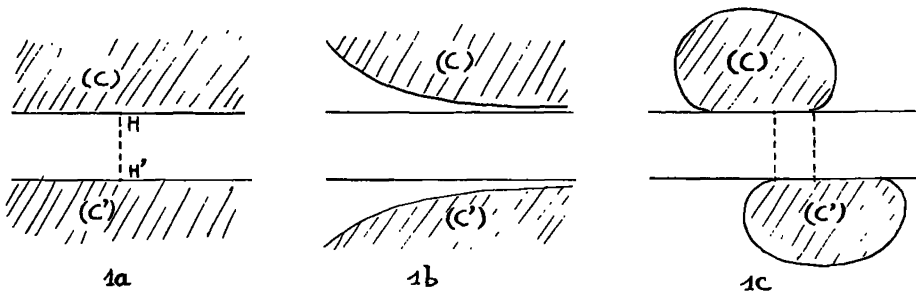


Figure 1 : existence et unicité de la perpendiculaire commune.

*Scholie 1* : Soit C et C' deux parties convexes d'un espace euclidien (ou hilbertien). H, H' deux points entre lesquels est réalisé le minimum (supposé non-nul) de la distance entre C et C' :

$$H \in C ; H' \in C' ; d(H, H') = \inf\{d(M, M') \mid M \in C, M' \in C'\};$$

soit  $\Pi$  et  $\Pi'$  les hyperplans perpendiculaires au segment HH' en ses extrémités respectives H et H' ; soit D le demi-espace fermé limité à  $\Pi$  et ne contenant pas H' ; D' le demi-espace fermé, limité à  $\Pi'$  et ne contenant pas H. Alors on a les inclusions :

$$C \subset D ; C' \subset D' ;$$

Soit de plus, deux autres points  $H_1$  et  $H'_1$  réalisant le minimum de la distance entre C et C', (i.e.  $H_1 \in C ; H'_1 \in C' ; d(H_1, H'_1) = d(H, H')$ ). Alors on a :

$$H_1 \in \Pi ; H'_1 \in \Pi' ; \overrightarrow{H_1 H'_1} = \overrightarrow{HH'}.$$

(Ici on notera  $\overrightarrow{AB}$  ou seulement AB, ou encore B-A, le vecteur translation entre deux points A et B). Le minimum de la distance n'est donc réalisé qu'en des points  $H_1, H'_1$  appartenant aux facettes  $\Pi \cap C$  et  $\Pi' \cap C'$  et situés face à face sur une même droite perpendiculaire à  $\Pi$  et  $\Pi'$ .

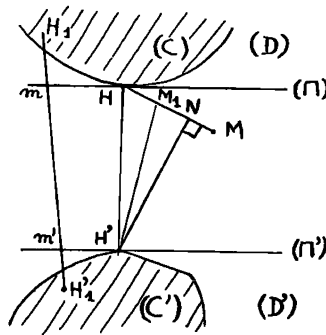


Figure 2 : la perpendiculaire commune.

*Démonstration* : Supposons, e.g., (cf fig. 2) qu'un point M de C soit situé du même côté de  $\pi$  que H'. Alors le segment (HM) sera inclus dans le convexe C ; or ce segment contient des points (ceux tels que  $M_1$  plus proche de H que le pied N de la perpendiculaire issue de H' à la droite HM) tels que  $d(H', M_1) <_S d(H', H)$  (inégalité stricte). Cela étant absurde il ne peut exister de point tel que M ; on a  $C \subset D$ . On a de même  $C' \subset D'$ . Maintenant il est évident que la distance entre un point  $H_1$  de D et un point  $H'_1$  de D' ne peut être égale à  $d(H, H')$  que si  $H_1 \in \Pi, H'_1 \in \Pi', \overrightarrow{H_1 H'_1} \text{ équi-}$ pollent à  $\overrightarrow{HH'}$  (cf fig. 1c). Ce qui achève de prouver le scholie.

On réservera désormais l'expression "perpendiculaire commune à C et C' ", pour désigner un segment HH' réalisant le minimum de la distance entre deux convexes C et C'. Pour écarter toute confusion, il faudrait préciser perpendiculaire commune minimale, les segments réalisant le maximum de la distance entre deux convexes compacts étant aussi, en un sens, des perpendiculaires communes : on a toutefois la proposition suivante qui achève de préciser la notion de perpendiculaire commune :

*Proposition 1* : Soit C et C' deux convexes fermés  $\pi_{C'}^C$  et  $\pi_C^{C'}$  les projections orthogonales de l'un vers l'autre. Soit H et H' deux points de C et C' tels que :

$$\pi_{C'}^C(H) = H' \quad ; \quad \pi_C^{C'}(H') = H \quad ;$$

alors HH' est une perpendiculaire commune au sens du scholie 1 (i.e.  $\|HH'\| = d$  distance minima entre C et C').

En effet, C' est inclus dans le demi-espace fermé D' limité à l'hyperplan  $\Pi'$  perpendiculaire à HH' en H', et ne contenant pas H ; et C est dans D limité à  $\Pi$  perpendiculaire à HH' en H.

Dans le cas où l'un au moins des convexes C et C' est compact on est assuré de l'existence d'une perpendiculaire commune HH' (cf *supra*). Si C et C' ne sont pas bornés, il se peut, cf fig. 1b, que le minimum de la distance ne soit pas atteint. Pourtant la figure 1b suggère que, même dans le cas de deux convexes fermés non bornés C et C', les hyperplans  $\Pi$  et  $\Pi'$  sont toujours définis ; ce qu'on va démontrer avec le scholie 2. Auparavant, énonçons les définitions suivantes .

*Définition 1* : Soit C un convexe de l'espace E (euclidien ou, plus généralement hilbertien) ; soit n un vecteur unitaire ; notons :

$$\begin{aligned} \inf(n,C) &= \lim \inf\{\langle n, OM \rangle \mid M \in C\} \ ; \\ D(n,C) &= \{M \mid M \in E \ ; \ \inf(n,C) \leq \langle n, OM \rangle\} \ ; \\ \Pi(n,C) &= \{M \mid M \in E \ ; \ \inf(n,C) = \langle n, OM \rangle\} \ . \end{aligned}$$

D(n,c) et  $\Pi(n,C)$  sont appelés respectivement demi-espace d'appui et hyperplan d'appui à C normal à n (la normale étant orientée vers l'intérieur de C). Si  $\inf(n,C) = -\infty$  ,  $\Pi(n,C)$  est rejeté à l'infini et  $D(n,C) = E$ .

*Définition 2* : Soit C,C' deux convexes ; n un vecteur unitaire ; on note :

$$B(n;C',C) = E - D(n,C) - D(-n,C') \ ;$$

l'ensemble ouvert B(n;C',C) (éventuellement vide) est appelé bande de séparation normale à n entre C' et C (on prendra garde que  $B(n;C',C) \neq B(n;C,C')$  ; en fait l'un au moins des deux est vide ; dans la bande B(n;C',C) si elle est non-vide, n va de C' vers C). Si B(n;C',C) est non-vide on note l(n;C',C) sa largeur (comptée dans la direction de n ; cf fig. 3).

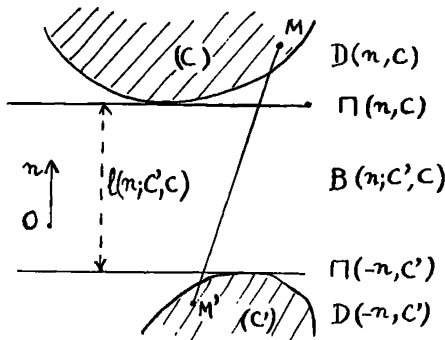


Figure 3 : une bande de séparation.

*Scholie 2* : Soit C et C' deux convexes fermés ; d la distance minima, supposée non-nulle, entre C et C' :

$$d = \lim \inf \{d(M, M') \mid M \in C, M' \in C'\}.$$

Alors il existe un vecteur unitaire n unique tel que :

1°) Quand un segment M'M reliant C' à C tend en longueur vers d, il tend en direction vers n ; de façon précise on a :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ ; \forall M \in C, \forall M' \in C' : \\ d(M', M) < d + \alpha \Rightarrow \|M'M - dn\| < \epsilon$$

(où  $\mathbb{R}^+$  est l'ensemble des réels strictement positifs et dn désigne le vecteur de largeur d porté suivant n)

2°) La bande  $B(n; C', C)$  a pour largeur  $l(n; C', C) = d$  ; et toute autre bande (n' unitaire différent de n) a une largeur strictement moindre :  $l(n'; C', C) < d$ .

On appellera dn vecteur perpendiculaire commune à C et C' et  $B(n; C', C)$  bande de séparation maximale entre C' et C.

*Démonstration* : Il est d'abord clair que quel que soit n'

$l(n'; C', C) \leq d$  : car soit  $M \in C, M' \in C'$  : si  $B(n'; C', C)$  est non-vide, sa largeur est au plus  $\langle n', M'M \rangle$ , projection de M'M sur n' ; elle est donc majorée par  $\|M'M\|$ , donc par d. Si, de plus on admet 1°, on sait qu'il existe des vecteurs M'M arbitrairement voisins de dn ; on a donc ;

$$l(n'; C', C) = \lim \inf \{ \langle n', M'M \rangle \mid M' \in C', M \in C \} \leq \langle n', dn \rangle = d \langle n', n \rangle,$$

ce qui prouve 2°. Reste à établir 1°. Pour cela, considérons le convexe différence :

$$C - C' = \{M'M \mid M \in C, M' \in C'\},$$

ensemble des vecteurs joignant C à C'. Soit  $[C - C']$  la fermeture de  $C - C'$ . La distance de l'origine à  $[C - C']$  (ou à  $[C - C']$ ) n'est autre que d : cette distance est atteinte en un point unique H-, projection orthogonale de O sur  $[C - C']$ . On n'a qu'à poser :  $OH^- = dn$  ;  $n = OH^-/d$ . Il est clair que quand  $\|M'M\|$  tend vers d, le point correspondant de  $[C - C']$  tend vers H-. Ce qui achève de prouver le scholie.

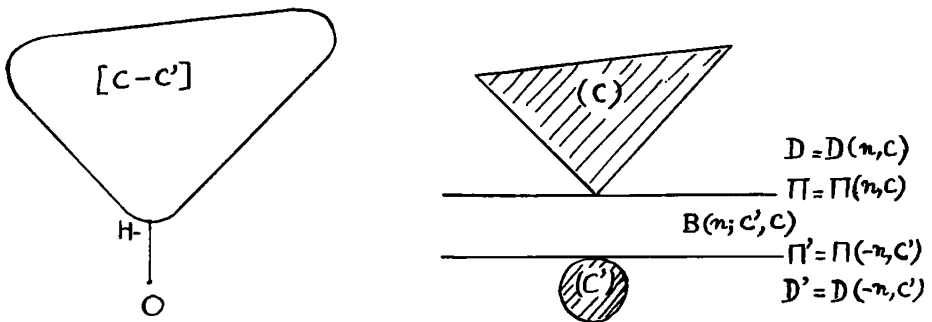


Figure 4 : convexe différence et bande de séparation maximale.

Sur la figure 4 on a illustré le scholie 2 par le cas de deux convexes compacts C et C' ; dans le cas de la figure 1b (C et C' (non compacts)) le convexe différence C - C' est un demi-plan ouvert limité à une droite horizontale située à une distance d au-dessus de l'origine.

2.2 Construction alternative de la perpendiculaire commune : Désormais, C et C' sont des convexes fermés. Dans l'espace ambiant E est définie une projection orthogonale  $\pi$  sur tout convexe fermé C ; non seulement cette projection est continue, mais elle satisfait à la condition plus forte suivante :

$$\forall Q, Q' \in E : d(\pi(Q), \pi(Q')) \leq d(Q, Q') .$$

Nous userons des projections orthogonales sur C et C' pour définir un algorithme alternatif annoncé ci-dessus (cf § 1). Les propriétés de convergence de cet algorithme vers la perpendiculaire commune font l'objet d'un théorème qui clôt le présent paragraphe.

Notons, comme ci-dessus,  $\pi_{C'}^C$  et  $\pi_C^{C'}$  les projections orthogonales de C vers C' et C' vers C respectivement. A partir d'un point  $M_0$  de C (une construction tout analogue se pourrait faire à partir d'un point  $M'_0$  de C' ; le rôle de C et C' ne se distinguant ici que par la convention de numérotation). On construit la double suite de points :

$$M_0, M'_0 = \pi_{C'}^C M_0, M_1 = \pi_C^{C'} M'_0, M'_1 = \pi_{C'}^C M_1, \dots$$

$$M_n = \pi_C^{C'} M'_{n-1}, M'_n = \pi_{C'}^C M_n, \dots ;$$

cette suite va alternativement de C à C' et de C' à C. A cette suite de points correspondent deux suites de segments orthogonaux les uns à C les autres à C' :

- $\{M_0 M'_0, M_1 M'_1, \dots, M_n M'_n, \dots\}$ : orthogonaux à C' en  $M'_0, M'_1, \dots, M'_n, \dots$
- $\{M'_0 M_1, M'_1 M_2, \dots, M'_n M_{n+1}, \dots\}$ : orthogonaux à C en  $M_1, M_2, \dots, M_{n+1}, \dots$

On désire que l'une et l'autre suite convergent vers une perpendiculaire commune HH' à C et C' (cf fig. 5).

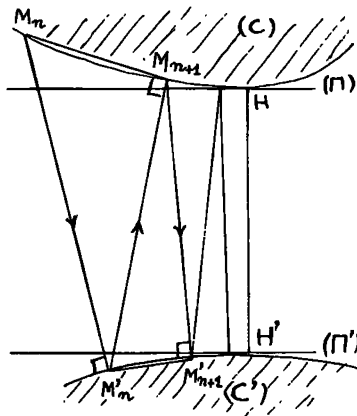


Figure 5 : la suite des projections alternatives entre deux convexes.

Une première condition de convergence est que les deux segments  $M_n M'_n$  et  $M'_n M_{n+1}$  qui se rencontrent en  $M'_n$  (comme  $M'_n M_{n+1}$  et  $M_{n+1} M'_{n+1}$  qui se rencontrent en  $M_{n+1}$ ) tendent à former un angle arbitrairement petit. En vue de quoi on observe ce qui suit.



*Scholie 3* : Sur la suite des projections alternatives entre deux convexes :

1°) La suite des longueurs des segments joignant les projections est décroissante :

$$S = \|M_0 M'_0\| > \|M'_0 M_1\| > \dots > \|M_n M'_n\| > \|M'_n M_{n+1}\| > \|M_{n+1} M'_{n+1}\| > \dots \geq d$$

2°) On a les inégalités :

$$\|M_n M_{n+1}\|^2 < \|M_n M'_n\|^2 - \|M'_n M_{n+1}\|^2$$

$$\|M'_n M'_{n+1}\|^2 < \|M'_n M_{n+1}\|^2 - \|M_{n+1} M'_{n+1}\|^2$$

3°) Quand tend vers l'infini  $\|M_n M_{n+1}\|$  et  $\|M'_n M'_{n+1}\|$  tendent vers zéro.

*Démonstration* : Les inégalités de 1° résultent immédiatement de la définition de la perpendiculaire issue d'un point à un convexe fermé. Démontrons par exemple la première des deux inégalités de 2° : on a dans le triangle  $M_n M_{n+1} M'_n$  :

$$\|M_n M'_n\|^2 = \|M_n M_{n+1}\|^2 + \|M'_n M_{n+1}\|^2 + 2 \langle M'_n M_{n+1}, M_{n+1} M_n \rangle ;$$

or le produit scalaire figurant à droite est positif, car l'angle  $M'_n M_{n+1} M_n$  est positif : en effet le convexe (C) tout entier (donc le point  $M_n$ ) est situé dans le demi-espace fermé (opposé à  $M'_n$ ) limité à l'hyperplan perpendiculaire à  $M'_n M_{n+1}$  en  $M_{n+1}$  ; d'où l'inégalité demandée :

$$\|M_n M_{n+1}\|^2 < \|M_n M'_n\|^2 - \|M'_n M_{n+1}\|^2$$

En sommant pour n variant de 0 à l'infini l'ensemble des deux séries d'inégalités de 2° on a dans le membre de gauche la somme des différences des carrés des termes successifs de la suite décroissante étudiée en 1°, d'où :

$$\sum \{ \|M_n M_{n+1}\|^2 + \|M'_n M'_{n+1}\|^2 \mid n = 0, 1, \dots \} < \delta^2 - d^2$$

Le 3° point du scholie résulte maintenant de ce que tend vers zéro le terme général d'une série sommable à termes positifs.

On sait le rôle que, dans les études de convergence, jouent (à défaut de limite) les éléments d'accumulation. Nous en rappelons la définition.

*Définition 3* : Un segment  $M'M$  joignant  $C'$  à  $C$  est appelé segment d'accumulation de la suite  $\{M_n M'_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  des segments orthogonaux à  $C'$  si :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \exists n' \in \mathbb{N} :$$

$$n < n' ; \|M_n M\| < \epsilon ; \|M'_n M'\| < \epsilon$$

(i.e. au-delà de tout rang n on a dans la suite des  $M_n M'_n$  des segments arbitrairement proches de  $MM'$ ).

Il revient au même de dire que de la suite des entiers  $\{n\}$  on peut extraire une sous-suite infinie  $\{n(p) \mid p = 0, 1, \dots, \infty\}$  telle que la suite des  $M_{n(p)} M'_{n(p)}$  converge vers  $MM'$ . On définirait pareillement un segment  $M'M$  d'accumulation de la suite  $\{M'_n M_{n+1}\}$  des segments orthogonaux à  $C$ . On notera que pour que  $M'M$  soit segment d'accumulation de la suite

des  $\{M'_n M'_n\}$  (resp.  $\{M'_n M'_{n+1}\}$ ), il suffit que  $M$  soit élément d'accumulation de la suite des  $M'_n$  (resp.  $M'$  de la suite des  $M'_n$ ). On a la proposition suivante.

*Proposition 2* : Il est équivalent de dire que  $M'M$  est segment d'accumulation de l'une ou l'autre des deux suites  $\{M'_n M'_n\}$  ou  $\{M'_n M'_{n+1}\}$ ; un tel segment d'accumulation  $M'M$  est une perpendiculaire commune à  $C$  et  $C'$ .

*Démonstration* : Soit par exemple  $M'M$  segment d'accumulation de la suite des  $\{M'_n M'_n\}$ ;  $M'M$  est aussi segment d'accumulation de la suite des  $\{M'_n M'_{n+1}\}$  parce que, d'après le scholie, pour  $n$  tendant vers l'infini,  $M'_n M'_n$  et  $M'_n M'_{n+1}$  sont arbitrairement proches. Soit maintenant  $\{n(p) | p \in \mathbb{N}\}$  une sous-suite infinie de la suite des entiers telle que :

$$p \rightarrow \infty : M_{n(p)} \rightarrow M ; M_{n(p)+1} \rightarrow M ; M'_n \rightarrow M'.$$

Par continuité des projections orthogonales on a :

$$\begin{aligned} \pi_{C'}^C(M) &= \lim\{\pi_{C'}^C(M_{n(p)}) | p \rightarrow \infty\} = \lim\{M'_{n(p)} | p \rightarrow \infty\} = M' \\ \pi_C^{C'}(M) &= \lim\{\pi_C^{C'}(M'_{n(p)}) | p \rightarrow \infty\} = \lim\{M_{n(p)+1} | p \rightarrow \infty\} = M \end{aligned}$$

La proposition 2 résulte maintenant de la proposition 1 :

L'objet de la proposition suivante est d'établir qu'en un certain sens les deux suites de segments  $\{M'_n M'_n\}$  et  $\{M'_n M'_{n+1}\}$  tendent à se rapprocher de toute perpendiculaire commune.

*Proposition 3* : Soit  $HH'$  une perpendiculaire commune à  $C$  et  $C'$ . On a la suite d'inégalités entre distances :

$$\dots \|HM'_n\| > \|H'M'_n\| > \|HM'_{n+1}\| > \|H'M'_{n+1}\| \dots$$

*Démonstration* : Il suffit d'établir l'une de ces inégalités, e.g. celle entre  $\|H'M'_n\|$  et  $\|HM'_{n+1}\|$ . Pour cela considérons la figure 6 où on a noté  $M'$  et  $M$  les intersections respectives du segment  $M'_n M'_{n+1}$  avec les plans  $\Pi'$  et  $\Pi$  perpendiculaires à  $H'H$  en  $H$  et  $H'$ ; et placé  $NK$ , droite perpendiculaire commune à  $HH'$  et  $M'_n M'_{n+1}$ . Les constructions de géométrie euclidienne tridimensionnelle auxquelles nous recourons sont légitimes, parce que les 4 points  $H, H', M'_n, M'_{n+1}$  ont pour support un sous-espace affiné tridimensionnel de l'espace ambiant où nous nous plaçons. Parce que  $M'_n M'_{n+1}$  est perpendiculaire à  $C$  en  $M'_{n+1}$ ,  $H$  et  $M'_n$  sont séparés par l'hyperplan perpendiculaire à  $M'_n M'_{n+1}$  en  $M'_{n+1}$ . Donc l'angle  $M'_n M'_{n+1} H$  (de sommet  $M'_{n+1}$ ) est obtus; et a fortiori l'angle  $M'_n M H$  (de sommet  $p$ ). Ceci prouve que la perpendiculaire commune  $NK$  à  $HH'$  et  $M'_n M'_{n+1}$  est disposée comme nous l'avons figuré :  $N$  et  $K$  extérieurs respectivement aux segments  $M'_n M'_{n+1}$  et  $H'H$ , et du même côté de  $H$  que  $M'_{n+1}$  (au-dessus de la figure).

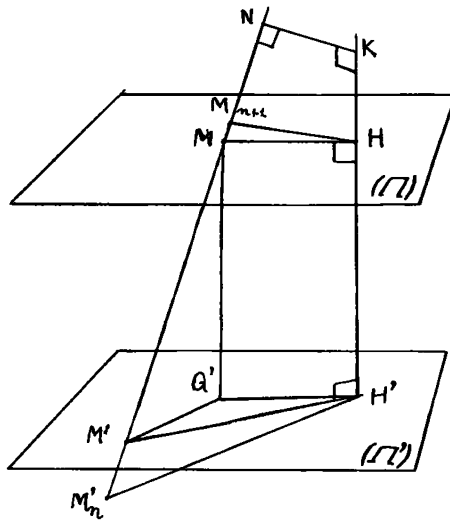


Figure 6 : Les projections alternatives s'approchent d'une perpendiculaire commune.

Il est maintenant clair que l'on a les inégalités :

$$HM_{n+1} < HM < H'M' < H'M'_{n+1}$$

(car les angles  $HM_{n+1}N$ ,  $HMN$ ,  $H'M'N$  et  $H'M'_nN$  sont aigus). La démonstration peut aussi se faire sans recourir à la figure classique de la perpendiculaire à deux droites en calculant les produits scalaires. Notons  $Q'$  la projection orthogonale  $M$  sur  $\Pi'$ . On a :  $\langle M'M, M'H' \rangle = \langle M'M, M'Q' \rangle + \langle M'M, MH \rangle$  (car  $MH = Q'H'$ ) ; le premier de ces termes est positif parce que  $M'Q'$  est projection orthogonale de  $M'M$  sur  $\Pi'$  ; le deuxième l'est aussi parce que  $M'MH$  est obtus (cf *supra*) donc l'angle  $H'M'N$  est aigu ; et, *a fortiori*, l'angle  $H'M'_nM$ . Par l'une ou l'autre voie la proposition 3 est établie.

Le théorème suivant est un corollaire facile des propositions 2 et 3 :

*Théorème* : Si l'une ou l'autre des suites  $\{M'_n M_n\}$  ou  $\{M'_n M_{n+1}\}$  admet un segment d'accumulation  $H'H$  toutes deux tendent vers ce segment qui est une perpendiculaire commune à  $C$  et  $C'$ .

Si, par exemple, l'un des deux convexes fermés  $C$  ou  $C'$  est compact, l'existence d'un segment d'accumulation  $H'H$  est assurée ; donc aussi la convergence de l'algorithme alternatif vers une perpendiculaire commune.

L'existence d'un segment d'accumulation est encore assuré si l'espace ambiant  $E$  est de dimension finie (donc localement compact) et qu'il existe au moins une perpendiculaire commune  $HH'$  ; en effet, d'après la proposition 3,  $M_n$  et  $M'_n$  restent alors à distance finie de  $H$  et  $H'$  ; ils sont donc dans une boule qui est un compact ; et l'algorithme alternatif converge vers une perpendiculaire commune à  $C$  et  $C'$ .

Si au contraire  $C$  et  $C'$  ne sont pas compacts et n'admettent pas de perpendiculaire commune mais seulement un vecteur perpendiculaire commune (cf Scholie 2), ni la suite  $\{M'_n M_n\}$  ni la suite  $\{M'_n M_{n+1}\}$  n'admettent de segment d'accumulation (ce qui, si l'espace ambiant est de dimension finie donc localement compact, entraîne que les  $M_n$  et  $M'_n$  s'éloignent indéfiniment). Il est vraisemblable que le segment  $M'_n M_n$  tend à être équipollent au vecteur perpendiculaire commune à  $C$  et  $C'$  : mais nous n'avons pas de preuve de cela.

### 3 Perpendiculaire commune à deux convexes sur la sphère.

Dans ce paragraphe, on note  $S$ , la sphère de centre  $O$  et de rayon  $1$  d'un espace  $E$  (euclidien, ou plus généralement hilbertien) :

$S = \{M | M \in E ; \|OM\|^2 = 1\}$ . Soit  $M, N$  deux points non diamétralement opposés de  $S$  ; par  $\text{acc } MN$  on désigne, en bref, le plus petit arc joignant  $M$  à  $N$  sur le grand cercle joignant ces deux points (cercle intersection de  $S$  avec le plan  $OMN$ ) ; l'arc  $MN$  est, sur la sphère  $S$ , le plus court chemin de  $M$  à  $N$ . La distance sphérique, ou distance angulaire, entre  $M$  et  $N$  est la longueur  $a(M, N)$  de l'arc  $MN$ , ou encore la mesure en radian de l'angle saillant  $MON$  ; entre un point et le point diamétralement opposé la distance est  $\pi$ . Une partie  $C$  de  $S$  est dite convexe si, pour tout couple  $(M, N)$  de points de  $C$  non diamétralement opposés, l'arc  $MN$  est inclus dans  $C$ . Il est équivalent de dire qu'une partie  $C$  de  $S$  est convexe si elle est l'intersection de  $S$  avec un cône convexe  $K$  de sommet  $O$ . Soit  $K$  et  $K'$  deux convexes fermés de sommet  $O$  ;  $C = K \cap S, C' = K' \cap S$ . Non sans rencontrer quelques obstacles, on démontre pour  $C$  et  $C'$ , l'analogue du scholie 3 de la proposition 2 du § 2.2. En revanche, nous n'avons rien su démontrer de tel que la proposition 3.

Premier obstacle : existence et unicité de la perpendiculaire issue d'un point  $M$  de  $S$  au convexe fermé  $C$ . On a le scholie suivant :

*Scholie 4* : Notons  $a(M, C) = \lim \inf \{a(M, N) | N \in C\}$ .

1°) Si il existe des rayons du cône  $K$  faisant avec  $OM$  un angle aigu, i.e. si  $a(M, C) <_S (\pi/2)$ , il existe un point  $N$  unique de  $C$  tel que  $a(M, N) = a(M, C)$  ; soit  $\pi_K(M)$  la projection orthogonale (euclidienne usuelle) de  $M$  sur le cône fermé  $K$  ; la demi-droite  $ON$  n'est autre que  $O\pi_K(M)$  : on note  $N = \pi_C(M)$ .

2°) Si  $(\pi/2) \leq a(M, C)$ ,  $\pi_K(M) = 0$  ; il peut exister une infinité de points  $N$  tels que  $a(M, N) = a(M, C)$ .

*Démonstration* : (cf fig. 7). Si  $a(M, N) <_S (\pi/2)$ ,  $\pi_K(M)$  est distinct de  $0$  car il existe sur tout rayon  $ON'$  de  $K$  faisant avec  $OM$  un angle aigu des points dont la distance euclidienne à  $M$  est inférieure à  $OM = 1$ . La demi-droite  $O\pi_K(M)$  coupe la sphère en un point  $N$  qui est l'unique point de  $C$  tel que  $a(M, N) = a(M, C)$ . En effet, s'il existait un point  $N'$  de  $C$  tel que  $a(M, N') < a(M, N)$ , la projection orthogonale de  $M$  sur la demi-droite  $ON'$  de  $K$  serait  $Q'$  avec  $\|MQ'\| \leq M\pi_K(M)$  ; ce qui d'après les propriétés de la projection orthogonale de  $M$  sur  $K$ , implique que  $Q' = \pi_K(M)$  et  $N' = N$ .

Si  $(\pi/2) \leq a(M, N)$ , on a  $\pi_K(M) = 0$  ; sur la figure 7 on s'est placé dans l'espace usuel  $E$  de dimension 3 ;  $K$  a pour frontière un cône de révolution de sommet  $O$ , d'axe  $MOP$  ; ( $OP$  intérieur au cône) ;  $C$  est une calotte sphérique de centre  $P$  ; il est clair que le point  $N$  du cercle frontière de  $C$  est tel que  $a(M, N) = a(M, C)$ .

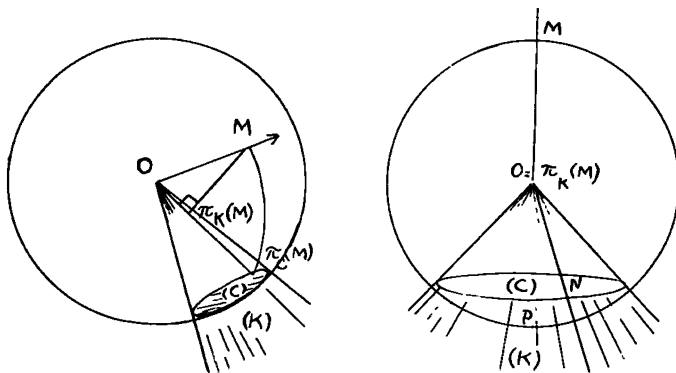


Figure 7 : d'un point à un convexe, sur la sphère, le plus court chemin n'est pas toujours unique.

Désormais nous ne considérerons de projection  $\pi_C(M)$  que si  $a(M,C) <_{\mathbb{S}} (\pi/2)$ . Pour le problème statistique posé au § 1, c'est là le seul cas intéressant : angle aigu entre vecteurs se traduit en effet par corrélation positive entre fonctions. On suppose donc que :

$$a(C,C') = \lim \inf \{ a(M,M') \mid M \in C, M' \in C' \} <_{\mathbb{S}} (\pi/2).$$

De la continuité de la projection  $\pi_K$ , il résulte que la  $\pi_C$  est elle-même continue dans le domaine ouvert où elle est définie (il n'y a toutefois pas continuité uniforme puisqu'à la frontière du domaine de définition de  $\pi_C$ , l'unicité peut disparaître).

Partant d'un point  $M_0 \in C$ , tel que  $a(M_0,C') <_{\mathbb{S}} (\pi/2)$ , on peut reprendre la construction alternative du § 2.2 dont nous conservons les notations :  $M'_0 = \pi_{C'}^C(M_0)$ ,  $M_1 = \pi_C^{C'}(M'_0)$  etc. Mais ici on rencontre un deuxième obstacle, la multiplicité des perpendiculaires communes.

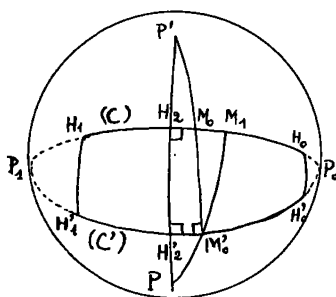


Figure 8 : Multiplicité, sur la sphère, des perpendiculaires communes entre deux convexes.

Considérons en effet la figure 8, tracée dans l'espace tridimensionnel usuel :  $P_0$  et  $P_1$  sont deux points diamétralement opposés ; dans deux demi-plans  $P_0 H_2 P_1$  et  $P_0 H'_1 P_1$  formant entre eux un angle aigu ,

on a deux arcs de grand cercle,  $P_0 H_0 H_2 H_1 P_1$  et  $P_0 H'_0 H'_2 H'_1 P_1$  ; où les points sont définis par :

$$a(P_0, H_0) = a(P_0, H'_0) <_{\mathcal{S}} a(P_1, H_1) = a(P_1, H'_1) <_{\mathcal{S}} /2 = a(P_0, H_2) = a(P_0, H'_2).$$

Pour convexes  $C$  et  $C'$  on prend les arcs  $H_0 H_1$  et  $H'_0 H'_1$ . Il est clair que la distance  $a(C, C')$  n'est réalisée qu'entre  $H_0$  et  $H'_0$  :  $a(C, C') = a(H_0, H'_0)$ . Mais chacun des trois couples  $(H_0, H'_0)$ ,  $(H_1, H'_1)$  et  $(H_2, H'_2)$  définit une perpendiculaire commune, en ce sens que :

$$\pi_{C'}^C(H_1) = H'_1 ; \pi_C^{C'}(H'_1) = H_1.$$

Le couple  $(H_1, H'_1)$  réalise un optimum local de la distance ; il n'en n'est pas ainsi de  $(H_2, H'_2)$  : on peut trouver  $M \in C$ ,  $M' \in C'$  arbitrairement voisins de  $H_2, H'_2$  et tels que  $a(M, M') <_{\mathcal{S}} a(H_2, H'_2)$ . Il est facile ici d'étudier la convergence de la construction alternative ! Soit en effet  $P$  celui des pôles du cercle de support  $C$ , qui est situé du même côté de  $C$  que  $H'_2$  ; et  $P'$  celui des pôles du cercle de support de  $C'$  qui est situé du même côté de  $C'$  que  $H_2$  :  $\pi_{C'}^C(M)$  n'est autre que l'intersection avec  $C'$  de l'arc  $P'M$  prolongé au-delà de  $M$  ; si toutefois cet arc prolongé ne coupe pas  $C'$ , mais passe entre  $P_0$  et  $H'_0$ , on a  $\pi_{C'}^C(M) = H'_0$  ; si l'arc prolongé passe entre  $P_1$  et  $H'_1$  on a  $\pi_{C'}^C(M) = H'_1$ .

On définit de même la projection  $\pi_C^{C'}$ . On voit que si l'on part d'un point  $M_0$  de l'arc  $H_0 H_2$ , il y a convergence de  $M_n M'_n$  vers  $H_0 H'_0$  ; si  $M_0$  appartient à l'arc  $H_1 H_2$ , il y a convergence vers  $H_1 H'_1$  ; la perpendiculaire commune  $H_2 H'_2$  est une solution instable. En général la convergence, si convergence il y a, pourra donc conduire à un optimum local, tel que  $H_1 H'_1$ , avec  $a(C, C') <_{\mathcal{S}} a(H_1, H'_1)$ .

Un autre exemple dont il est facile de faire l'étude complète est celui où  $K$  et  $K'$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  : on retrouve alors le cas classique de la figure formée de deux sous-espaces d'un espace euclidien ;  $\pi_K$  et  $\pi_{K'}$  sont des opérateurs linéaires ; le minimum de l'angle entre rayons de  $K$  et  $K'$  correspond aux directions propres de  $\pi_K^{K'}$  o  $\pi_{K'}^K$  et de  $\pi_{K'}^K$  o  $\pi_K^{K'}$  relatives à la plus grande valeur propre  $\cos^2 \theta_1$  ; cette valeur propre peut être multiple (non-unicité de la perpendiculaire commune) ; les valeurs propres suivantes fournissent des perpendiculaires communes instables.

Ces restrictions préliminaires faites, énonçons le scholie 5, analogue du scholie 3 :

*Scholie 5* : Sur la suite des projections alternatives entre deux convexes : (on maintient l'hypothèse :  $a(M_0, C') <_{\mathcal{S}} (\pi/2)$ ).

1°) La suite des longueurs des arcs joignant les projections est décroissante :

$$\alpha = a(M_0, M'_0) > a(M'_0, M_1) > \dots > a(M_n, M'_n) > a(M'_n, M_{n+1}) > a(M_{n+1}, M'_{n+1}) \dots$$

2°) On a les inégalités :

$$(\cos a(M_n, M'_n) / \cos a(M'_n, M_{n+1})) < \cos a(M_n, M_{n+1})$$

$$(\cos a(M'_n, M_{n+1}) / \cos a(M_{n+1}, M'_{n+1})) < \cos a(M'_n, M'_{n+1})$$

3°) Quand  $n$  tend vers l'infini,  $a(M_n, M_{n+1})$  et  $a(M'_n, M'_{n+1})$  tendent vers zéro.

*Démonstration* Les inégalités de 1° résultent immédiatement de la définition des projections orthogonales  $\Pi_C$  et  $\Pi_{C'}$ . Démontrons par exemple, la première des deux inégalités de 2°. Appliquons au trièdre  $(O; M_n, M'_n, M_{n+1})$  La formule fondamentale de la trigonométrie sphérique (cf Fig. 9) ; il vient :

$$\begin{aligned} \cos a(M_n, M'_n) &= \cos a(M'_n, M_{n+1}) \cos a(M_n, M_{n+1}) + \dots \\ &\dots \sin a(M'_n, M_{n+1}) \sin a(M_n, M_{n+1}) \cos M'_n M_{n+1} M_n. \end{aligned}$$

Dans cette formule, on a noté  $M'_n M_{n+1} M_n$  l'angle en  $M_{n+1}$  du triangle sphérique  $M'_n M_{n+1} M_n$  ; ou encore l'angle des deux demi-plans  $OM_{n+1} M'_n$  et  $OM_{n+1} M_n$ . Cet angle est obtus ; car autrement pour un point  $M$  parcourant, à partir de  $M_{n+1}$ , l'arc  $M_{n+1} M_n$  qui est inclus dans  $C$ , la distance  $a(M'_n, M)$  pourrait être inférieure à  $a(M'_n, M_{n+1})$  laquelle est, par hypothèse, le minimum  $a(M'_n, C)$ . On a donc :

$$\cos a(M_n, M'_n) < \cos a(M'_n, M_{n+1}) \cos a(M_n, M_{n+1}) ;$$

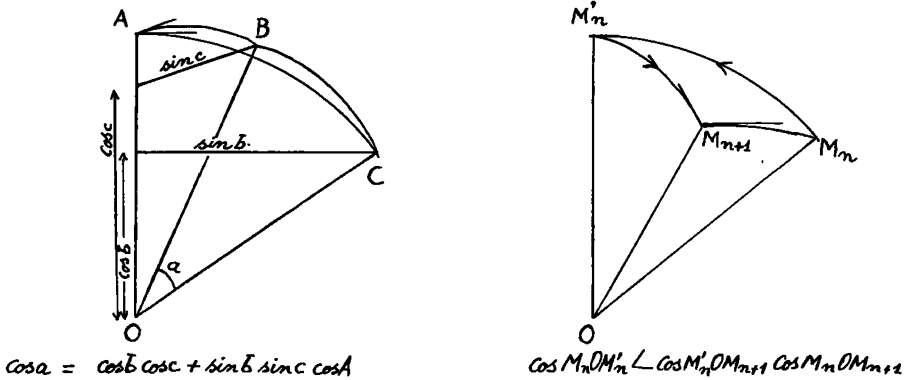


Figure 9: la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique et son application à une inégalité.

d'où l'inégalité annoncée en 2°. En multipliant, pour  $n$  variant de 0 à l'infini, l'ensemble des deux séries d'inégalités de 2°, on a dans le membre de gauche le produit des rapports des cosinus des termes successifs de la suite décroissante d'angles étudiée en 1° D'où :

$$\prod \{ \cos a(M_n, M_{n+1}) \cos a(M'_n, M'_{n+1}) \mid n=0,1,\dots \} > (\cos \alpha / \cos a(C, C'))$$

on a, à gauche, un produit infini de termes tous inférieurs à 1, qui converge vers une limite strictement positive (supérieure à  $(\cos \alpha / \cos a(C, C'))$ ). Le 3° point du scholie résulte maintenant de ce que tend vers 1 le terme général d'un tel produit infini.

On a maintenant la proposition 4, analogue à la proposition 2 :

*Proposition 4* : Il est équivalent de dire que  $M'M$  est arc d'accumulation de l'un ou l'autre des deux suites d'arcs  $\{M'_n M_n\}$  ou  $\{M_n M_{n+1}\}$  (i.e. de dire que  $M$  est élément d'accumulation de la suite  $\{M_n\}$ , ou que  $M'$  est élément d'accumulation de la suite  $\{M'_n\}$ ) ; un tel arc d'accumulation  $M'M$  est une perpendiculaire commune à  $C$  et  $C'$  au sens suivant :

$$\Pi_C^{C'}(M') = M \quad ; \quad \Pi_{C'}^C(M) = M'$$

La démonstration, fondée sur la continuité des projections , est tout analogue à celle de la proposition 2.

Dans le cas où E est de dimension finie, la sphère S est compacte et l'existence d'un arc d'accumulation est assurée ; mais, faute d'un analogue de la proposition 4 du § 2.2, nous ne savons démontrer que cet arc d'accumulation soit unique ; on ne sait donc exclure l'éventualité que, pour n tendant vers l'infini, l'arc  $M_n M'_n$  se déplace le long d'une famille continue de perpendiculaires communes (arcs d'accumulation), s'approchant indéfiniment de la famille sans se fixer jamais à une position particulière.