G. LEVY

Statistiques sur des ensembles finis

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 45 (1986), p. 1-32
<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1986__45__1_0>

STATISTIQUES SUR DES ENSEMBLES FINIS

G. LEVY
Centre de Recherche I.P.9
Université de Paris IX - Dauphine

Objectif : Nous avons l'intention d'obtenir par des procédés combinatoires certains résultats de la théorie de l'échantillonnage. Nous serons amenés à préciser les notions de familles d'échantillonnages linéairement et quadratiquement équiréparties et à rechercher des familles qui ont ces caractéristiques.
Du fait qu'on dispose d'algorithmes efficaces pour construire de telles familles, les résultats obtenus présentent un intérêt dans les méthodes de simulation puisqu'ils permettent de prévoir certaines caractéristiques de ces familles.

STATISTIQUES SUR DES ENSEMBLES FINIS

I. Définitions - Notations

Soit E une population finie de taille N que nous identifierons à

$$E = \{1, 2, \ldots N\} = [1, N]$$

Soit X un caractère à valeurs réelles dont on étudie la distribution sur E.

$X : E \to \mathbb{R}$ associe à tout élément e de E un réel X(e) que nous noterons x_e.

Soit n un entier $\leqslant$ N. On appelle échantillon de taille n de E toute application $f : I \to E$, où $I = \{1, 2, \ldots, n\} = [1, n]$.

Lorsque f est injective on parle d'échantillon ou de tirage sans remise, sinon on dit qu'il s'agit d'un échantillon avec remise.

On sait que si f est strictement croissante il lui correspond de façon bijective la partie $\{f(1), \ldots, f(n)\}$ de E de cardinal n; que si f est simplement croissante il s'agit d'un tirage avec remise ne tenant pas compte de l'ordre.

Nous serons amenés à étudier quatre familles d'échantillons ;

$\mathcal{F}_1$: ensemble E^I de toutes les applications de I dans E,

$\mathcal{F}_2$: ensemble des applications strictement croissantes de I dans E,

$\mathcal{F}_3$: ensemble des applications simplement croissantes de I dans E,

$\mathcal{F}_4$: ensemble des applications injectives de I dans E.

Soit donc $\mathfrak{F} \subset E^I$ une famille d'échantillon f.

Pour chaque échantillon f: I $\to$ E, la distribution du caractère X sur f est la suite $(x_{f(1)}, \dots, x_{f(n)})$

Nous nous intéressons aux moyennes et variances empiriquesde X sur la population E et les échantillons $f \in \mathfrak{F}$. Rappelons leurs définitions.

La moyenne de X sur E est $\mu = \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^{N} x_i)$ (1,1)

La variance de X sur E est

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \mu)^2 \qquad (1,2)$$

La moyenne de X sur l'échantillon f est

$$\bar{x}_f = \frac{1}{n} (\sum_{i=1}^{n} x_{f(i)}) \qquad (1,3)$$

sa variance est

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{f(i)} - \bar{x}_f)^2 \qquad (1,4)$$

La moyenne de $\bar{x}_f$ sur l'ensemble $\mathfrak{F}$ d'échantillons est

$$\bar{x}_{\mathfrak{F}} = E(\bar{x}_f) = \frac{1}{F} (\sum_{f \in \mathfrak{F}} \bar{x}_f) \text{ avec } F = |\mathfrak{F}| \qquad (1,5)$$

Sa variance est

$$\sigma^2_{\mathfrak{F}} = \sigma^2_{\bar{x}_f} = \frac{1}{F} \sum_{f \in \mathfrak{F}} (\bar{x}_f - E(\bar{x}_f))^2 \qquad (1,6)$$

De même la moyenne et la variance de σ_f^2 sont

$$E(\sigma_f^2) = \frac{1}{F} \sum_{f \in \mathfrak{F}} \sigma_f^2 \qquad (1,7)$$

$$\text{Var}(\sigma_f^2) = \frac{1}{F} \sum_{f \in \mathfrak{F}} (\sigma_f^2 - E(\sigma_f^2))^2 \qquad (1,8)$$

II. Etude de la moyenne d'échantillonnage $\bar{x}_{\mathfrak{F}}$

Soit $\mathfrak{F} \subset E^I$ une famille d'échantillons f.

Pour toute $f \in \mathfrak{F}$ on a $\bar{x}_f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_{f(i)}$

Du fait que $f : I \to E$ on a $1 \leqslant f(i) \leqslant N$.

Pour tout k de E, l'ensemble des i de I tels que $f(i) = k$ est $f^{-1}(k)$.

Posons $\quad a(f,k) = |f^{-1}(k)| \qquad \forall (f,k) \in \mathfrak{F} \times E \qquad (2,1)$

Alors $\quad \sum_{i \in I} x_{f(i)} = \sum_{k \in E} \left(\sum_{i \in f^{-1}(k)} x_k \right) = \sum_{k \in E} |f^{-1}(k)| \; x_k \qquad (2,2)$

et $\quad \bar{x}_f = \frac{1}{n} \sum_{k \in E} a(f,k) \; x_k \qquad (2,3)$

Les coefficients a(f,k) ont les propriétés suivantes :

puisque $\forall k,l \in E \;\; k \neq l$ entraîne $f^{-1}(k) \cap f^{-1}(l) = \emptyset \quad (2,4)$

et que $f^{-1}(E) = I$

on a $\bigcup_{k \in E} f^{-1}(k) = I$

et $\sum_{k \in E} |f^{-1}(k)| = |I| = n$

donc $\quad \forall (f,k) \in \mathfrak{F} \times E \qquad 0 \leqslant a(f,k) \leqslant n \qquad (2,5)$

$\qquad$ et $\forall f \in \mathfrak{F} \qquad \sum_{k \in E} a(f,k) = n \qquad (2,6)$

Avec ces notations, on obtient

$$\bar{x}_{\mathfrak{F}} = \frac{1}{F} \sum_{f \in \mathfrak{F}} \bar{x}_f = \frac{1}{F} \sum_{f \in \mathfrak{F}} \frac{1}{n} \sum_{k \in E} a(f,k) x_k$$

$$\bar{x}_{\mathfrak{F}} = \frac{1}{nF} \sum_{k \in E} \left(\sum_{f \in \mathfrak{F}} a(f,k) \right) x_k \qquad (2,7)$$

Posons $\forall k \in E \qquad K(k) = \sum_{f \in \mathfrak{F}} a(f,k) = \sum_{f \in \mathfrak{F}} |f^{-1}(k)| \qquad (2,8)$

Définition : On dit que la famille $\mathcal{F}$ d'échantillons est linéairement équi-répartie (l,e) si

$$\forall\ k,\ l \in E \qquad K(k) = K(l) \qquad (2,9)$$

cette valeur commune indépendante de k et l sera appelée K

$$\text{donc } \forall\ k \in E \qquad K(k) = K \qquad (2,10)$$

Donc dire que $\mathcal{F}$ est l.eq. équivaut à dire que dans $\bar{x}_{\mathcal{F}}$ tous les x_k sont affectés du même coefficient.

Propriété si $\mathcal{F}$ est linéairement équirépartie alors

$$\bar{x}_{\mathcal{F}} = \frac{K}{nF}\left(\sum_{k \in E} x_k\right) \qquad (2,11)$$

Relation entre K et F

Soit A la matrice à F lignes et N colonnes constituée des coefficients a(f,k), a(f,k) se trouvant dans la ligne de f et la colonne k.

Calculons la somme des coefficients de ce tableau :

(2,6) et (2,10) expriment que la somme des termes de chaque ligne de A vaut n et que celle des termes de chaque colonne vaut $K(k)$.

$$\sum_{(f,k) \in \mathcal{F} \times E} a(f,k) = \sum_{f \in \mathcal{F}} \left(\sum_{k \in E} a(f,k)\right) = \sum_{f \in \mathcal{F}} n \qquad \text{d'après } (2,6)$$

$$= n \left(\sum_{f \in \mathcal{F}} 1\right) = n\ |\mathcal{F}| = n\ F \qquad (2,12)$$

$$\sum_{(f,k) \in \mathcal{F} \times E} a(f,k) = \sum_{k \in E} \left(\sum_{f \in \mathcal{F}} a(f,k)\right) = \sum_{k \in E} K(k) \qquad (2,13)$$

$$\text{Donc en général} \qquad \sum_{k \in E} K(k) = nF \qquad (2,14)$$

et si $\mathcal{F}$ est linéairement équipartie

$$nF = \sum_{k \in E} K = K\left(\sum_{k \in E} 1\right) = K\ |E| = NK$$

donc si $\mathcal{F}$ est l.eq

$$N\,K = n\,F, \quad K = \frac{n}{N}\,F \tag{2,15}$$

et
$$\bar{x}_{\mathcal{F}} = \frac{K}{nF}\,\left(\sum_{k\in E} x_k\right)$$

$$\bar{x}_{\mathcal{F}} = \frac{1}{N}\,\left(\sum_{k\in E} x_k\right) = \mu \tag{2,16}$$

<u>D'où le théorème 2.1</u>: Pour toute famille d'échantillons $\mathcal{F}$ linéairement équirépartie la moyenne d'échantillonnage est égale à la moyenne de la population.

III. <u>Etude de la variance</u> $\sigma^2_{\mathcal{F}}$ <u>pour $\mathcal{F}$ linéairement équirépartie</u>

On a
$$\sigma^2_{\mathcal{F}} = \frac{1}{F} \sum_{f\in\mathcal{F}} (\bar{x}_f - \mu)^2$$

$$= \frac{1}{F}\left(\sum_{f\in\mathcal{F}} \bar{x}_f^{\,2}\right) - \mu^2$$

d'après (2,3) $\quad \bar{x}_f = \frac{1}{n} \sum_{k\in E} a(f,k)x_k$

donc
$$\bar{x}_f^{\,2} = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k\in E} a(f,k)x_k\right]\left[\sum_{l\in E} a(f,l)x_l\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{(k,l)\in E^2} a(f,k)a(f,l)x_k\,x_l$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k\in E} a^2(f,k)x_k^2 + \sum_{k\in E}\ \sum_{\substack{l\in E\\ k\neq l}} a(f,k)a(f,l)\ x_k\,x_l\right]$$

et
$$n^2 \sum_{f\in\mathcal{F}} \bar{x}_f^{\,2} = \sum_{k\in E}\left[\sum_{f\in\mathcal{F}} a^2(f,k)\right] x_k^2 + \sum_{\substack{(k,l)\in E^2\\ k\neq l}}\left[\sum_{f\in\mathcal{F}} a(f,k)a(f,l)\right]x_k x_l$$

Posons $\forall k \in E \qquad L_k = \sum_{f \in \mathfrak{F}} a^2(f,k) = \sum_{f \in \mathfrak{F}} |f^{-1}(k)|^2 \qquad (3,1)$

$$\forall (k,l) \in E^2,\ k \neq l \qquad M_{kl} = \sum_{f \in \mathfrak{F}} a(f,k)a(f,l) \qquad (3,2)$$

$$M_{kl} = \sum_{f \in \mathfrak{F}} |f^{-1}(k)| \,.\, |f^{-1}(l)| \qquad (3,3)$$

on obtient ainsi

$$n^2 \sum_f \bar{x}_f^2 = \sum_{k \in E} L_k\, x_k^2 + \sum_{\substack{(k,l) \in E^2 \\ k \neq l}} M_{kl}\, x_k\, x_l \qquad (3,4)$$

<u>Définition</u> on dit que $\mathfrak{F}$ l.eq est quadratiquement équirépartie (q,eq) si

$$\forall k,k' \in E \qquad L_k = L_{k'} \qquad (3,5)$$

$$\forall (k,l),\ (k',l') \in E^2 \quad k \neq l,\ k' \neq l' \text{ et } (k,l) \neq (k',l') \quad M_{kl} = M_{k'l'} \qquad (3,6)$$

autrement dit si

$$\forall k \in E \qquad L_k = L \qquad (3,7)$$

$$\text{et } \forall (k,l) \in E^2,\ k \neq l \quad M_{kl} = M \qquad (3,8)$$

si $\mathfrak{F}$ est q. eq alors (3,4) devient

$$n^2 \sum_f \bar{x}_f^2 = L\Big(\sum_{k \in E} x_k^2\Big) + M\Big(\sum_{\substack{(k,l) \in E^2 \\ k \neq l}} x_k\, x_l\Big) \qquad (3,9)$$

$$= L\Big(\sum_{k=1}^{N} x_k^2\Big) + 2\,M\Big(\sum_{1 \leq k < l \leq N} x_k x_l\Big) \qquad (3,10)$$

Donc si $\mathfrak{F}$ est q.eq tous les x_k^2 sont affectés du même coefficient, tous les $x_k\, x_l$ sont affectés d'un même coefficient.

Posons $S = \sum_{k=1}^{N} x_k^2$ (3,11)

$T = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant N} x_k \, x_l$ (3,12)

alors $\sigma 2 = \frac{1}{n^2 F}$ $[LS + 2\,MT] - \mu^2$ (3,13)

<u>Expression de σ^2 et $\sigma^2_{\mathfrak{F}}$</u>

On suppose dorénavant $\mathfrak{F}$ q. eq

on a $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} (x_k - \mu)^2 = \frac{1}{N}(\sum_{i=1}^{N} x_k^2) - \mu^2 = \frac{1}{N} S - \mu^2$

$$\mu = \frac{1}{N} (\sum_{k=1}^{N} x_k)$$

$$\mu^2 = \frac{1}{N^2} (\sum_{k=1}^{N} x_k^2) + 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant N} x_k \, x_l$$

$$\mu^2 = \frac{1}{N^2} (S + 2T) \qquad (3,14)$$

Donc $\sigma^2 = \frac{1}{N} S - \frac{1}{N^2} (S + 2T)$

$$\sigma^2 = \frac{N-1}{N^2} S - \frac{2}{N^2} T \qquad (3,15)$$

et $\sigma_{\mathfrak{F}}^2 = \frac{1}{n^2 F} U - \mu^2$

$$= \frac{1}{n^2 F} (LS + 2\,MT) - \frac{1}{N^2} (S + 2T)$$

$$\sigma^2_{\mathfrak{F}} = \left(\frac{L}{n^2 F} - \frac{1}{N^2} \right) S - 2 \left(\frac{1}{N^2} - \frac{M}{n^2 F} \right) T \qquad (3,16)$$

Les relations (3,15) et (3,16) expriment une similitude d'expression entre σ^2 et $\sigma^2_{\mathfrak{F}}$, que nous allons préciser.

Auparavant nous allons établir une relation entre K, L, M

Relation entre K, L, M.

Théorème : si $\mathfrak{F}$ est q.eq alors $nK = L + (N - 1)M$. (3,17)

Preuve D'après (2,16), on a

$$\forall f \in \mathfrak{F} \qquad \sum_{k \in E} a(f,k) = n$$

donc $\forall f \in \mathfrak{F}$

$$n^2 = \left[\sum_{k \in E} a(f,k) \right]^2$$

$$n^2 = \left[\sum_{k \in E} a(f,k) \right] \left[\sum_{l \in E} a(f,l) \right]$$

$$n^2 = \sum_{k \in E} a^2(f,k) + \sum_{\substack{(k,l) \in E^2 \\ k \neq l}} a(f,k).\, a(f,l)$$

et

$$\sum_{f \in \mathfrak{F}} n^2 = \sum_{k \in E} \sum_{f \in \mathfrak{F}} a^2(f,k) + \sum_{\substack{(k,l) \in E^2 \\ k \neq l}} \sum_{f \in \mathfrak{F}} a(f,k)\, a(f,l)$$

soit

$$n^2 F = \sum_{k \in E} L_k + \sum_{\substack{(k,l) \in E^2 \\ k \neq l}} M_{kl} \qquad (3,18)$$

Si $\mathfrak{F}$ est q. eq alors

$$n^2 F = L\left(\sum_{k \in E} 1 \right) + M\left(\sum_{\substack{(k,l) \in E^2 \\ k \neq l}} 1 \right)$$

$$n^2 F = NL + N(N-1)\, M \qquad (3,19)$$

Or $\quad n\,F = NK \quad$ d'après $\quad$ (2,15)

d'où le résultat (3,17) annoncé.

Relation de proportionnalité entre σ^2 et $\sigma^2_{\mathfrak{F}}$

Revenons à l'expression(3,16).Le coefficient de S est

$\alpha = \frac{L}{n^2F} - \frac{1}{N^2}$, celui de $-2T$ est $\beta = \frac{1}{N^2} - \frac{M}{n^2F}$

or d'après (3,19)

$$n^2F = N\ (L + (N-1)\ M)$$

donc $\frac{1}{N} = \frac{L}{n^2F} + \frac{(N-1)\ M}{n^2F}$

et $\alpha = \frac{L}{n^2F} - \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N} - \frac{1}{N^2} - \frac{(N-1)\ M}{n^2F}$

$$= \frac{N-1}{N^2} - \frac{(N-1)\ M}{n^2F}$$

soit $\quad \alpha = (N-1)\ [\frac{1}{N^2} - \frac{M}{n^2F}] = (N-1)\ \beta$

ainsi $\sigma^2 = \alpha S - 2T\ \beta = (N-1)\ \beta\ S - 2T\ \beta$

$$= \beta\ [\ (N-1)S - 2T\ ]$$

$$= N^2\ \beta\ \ [\frac{N-1}{N^2}\ S - \frac{2}{N^2}\ T]$$

soit $\sigma^2 = N^2\ \beta \qquad \sigma^2_{\mathfrak{F}} = \lambda^2\ \ \sigma^2$ $\qquad$ (3,20)

et $\qquad \sigma^2_{\mathfrak{F}} = [\ 1-(\frac{N}{n})^2\ \ \frac{M}{F}\ ]\ \ \sigma^2$; $\qquad$ (3,21)

ce qui établit la proportionnalité des deux variances.

Comparaisons entre F, K, L, M; σ^2 et $\sigma^2_{\mathfrak{F}}$

On sait que $\forall (f,k) \in \mathfrak{F} \times E \qquad 0 \leqslant a(f,k) \leqslant n$

$$\forall k \in E \qquad K = K(k) = \sum_{f \in \mathfrak{F}} a(f,k) \leqslant n \sum_{f \in \mathfrak{F}} 1 = n\,F.$$

$$\forall k \in E \qquad L = L_k = \sum_{f \in \mathfrak{F}} a^2(f,k) \leqslant n \sum_f a(f,k) = n\,K$$

$$\forall k,l \quad k \neq l \qquad M = M_{kl} = \sum_f a(f,k).a(f,l) \leqslant n \sum_f a(f,k) = n\,K$$

Montrons que $L \geqslant M$.

En effet $2L - 2M = L_k + L_l - 2M_{kl}$

$$= \sum_f a^2(f,k) - 2\sum_f a(f,k).a(f,l) + \sum_f a^2(f,l)$$

donc $2(L - M) = \sum_{f \in \mathfrak{F}} [\, a(f,k) - a(f,l)]^2 \geqslant 0.$ (3,22)

Cette somme est d'ailleurs strictement positive. En effet, il existe certainement $k,\ l \in E \quad k \neq l$ et une $f \in \mathfrak{F}$ telle que $a(f,k) \neq a(f,l)$. Sinon pour toute $f \in \mathfrak{F}$ et tous les éléments $k,\ l$ de E on aurait

$$|f^{-1}(k)| = |f^{-1}(l)|\ .$$

$$|f^{-1}(1)| = |f^{-1}(2)| = \ldots\ |f^{-1}(N)|$$

$$|f^{-1}(1)| + |f^{-1}(2)| + \ldots + |f^{-1}(N)| = n$$

De telles égalités ne sont compatibles que si $N = n$ et

$$f(i) = i \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant N$$

Donc : sauf si $\mathfrak{F}$ se réduit à l'application identique de E, $L - M > 0$.

De (3,19) il résulte que

$$n^2 F = N^2 M + N(L - M)$$

$$n^2 F - N^2 M = N(L - M)$$

$$\lambda^2 = 1 - \frac{N^2}{n^2}\ \frac{M}{F} = \frac{N}{n^2 F}\ (L - M)$$

Ceci établit que $\lambda^2 > 0$ en général et que

$$0 < \lambda^2 < 1. \qquad (3,23)$$

Une autre façon de retrouver (3,17)

$$\forall\, k,\ l \in E,\ k \neq l \quad M = M_{kl} = \sum_{f} a(f,k)a(f,l)$$

$$\forall\, l \in E \qquad \sum_{k \in E} M_{kl} = \sum_{k \in E} \sum_{f} a(f,k)a(f,l)$$

$$M_{ll} + \sum_{\substack{k \in E \\ k \neq l}} M_{kl} = \sum_{f} \sum_{k \in E} a(f,k)a(f,l)$$

$$= \sum_{f} a(f,l)\Big[\sum_{k \in E} a(f,k)\Big]$$

$$= n \sum_{f} a(f,l) \qquad \text{d'après } (2,16)$$

$$\forall\, l \in E \qquad M_{ll} + \sum_{\substack{k \neq l \\ k \in E}} M_{kl} = n\, K_l \qquad (3,24)$$

or $M_{ll} = L$, $M_{kl} = M$ et $K_l = K$

donc $L + (N - 1)\, M = n\, K.$

$$\forall\, l \in E \qquad L_l + \sum_{\substack{k \neq l \\ (k,l) \in E^2}} M_{kl} = n\, K_l \qquad (3,25)$$

De (3,25) on voit que la connaissance des K_l, M_{kl} entraîne celle des L_l, et que leur invariance induit celle des L_l.

IV Etude de la moyenne de $\sigma_f^{\,2}$

Résultat préliminaire

Si on a le diagramme

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dr, "g"] & \\ I \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g o f"'] & & R \end{tikzcd}$$

$I = [1,\ n\,]$, $E = [1,\ N\,]$

alors $\displaystyle I = \bigcup_{k \in E} f^{-1}(k)$, les $f^{-1}(k)$ étant disjoints donc

$$\sum_{i \in I} g(f(i)) = \sum_{k \in E} \sum_{i \in f^{-1}(k)} g(f(i))$$

$$= \sum_{k \in E} \sum_{i \in f^{-1}(k)} g(k)$$

$$= \sum_{k \in E} \Big(\sum_{i \in f^{-1}(k)} 1\Big) g(k)$$

$$= \sum_{k \in E} |f^{-1}(k)| \, g(k)$$

d'où $$\sum_{i \in I} g(f(i)) = \sum_{k \in E} a(f,k) g(k) \qquad (4,1)$$

$$\text{avec } |f^{-1}(k)| = a(f,k) \qquad (4,2)$$

par exemple $$\sum_{i \in I} g^2(f(i)) = \sum_{k \in E} a(f,k)\, g^2(k) \qquad (4,3)$$

Revenons à σ_f^2

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_{f(i)} - \bar{x}_f)^2$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x^2_{f(i)} - \bar{x}_f^2$$

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{n} \sum_{1 \in E} a(f,k) x_k^2 - \bar{x}_f^2$$

$$E(\sigma_f^2) = \frac{1}{F} \sum_f \sigma_f^2$$

$$E(\sigma_f^2) = \frac{1}{Fn} \sum_{f \in k} \Big(\sum_{E} a(f,k) x_k^2 \Big) - \frac{1}{F} \Big(\sum_f \bar{x}_f^2\Big)$$

$$= \frac{1}{nF} \sum_{k \in E} \Big(\sum_{f \in \mathfrak{F}} a(f,k) \Big) x_k^2 - \frac{1}{F} \Big(\sum_f \bar{x}_f^2 \Big)$$

Si $\mathfrak{F}$ est quadratiquement équirépartie, on a, compte tenu de (3,10) :

$$E(\sigma_f^2) = \frac{K}{nF}\left(\sum_{k \in E} x_k^2\right) - \frac{1}{n^2F}\left[L\left(\sum_{k \in E} x_k^2\right) + 2M \sum_{1 \leq k < l \leq N} x_k x_l\right]$$

$$= \frac{K}{nF} S - \frac{L}{n^2F} S - 2\frac{M}{n^2F} T$$

$$E(\sigma_f^2) = \frac{nK - L}{n^2F} S - 2\frac{M}{n^2F} T \qquad (4,4)$$

or d'après (3,7) $nK - L = (N-1)M$.

Donc $$E(\sigma_f^2) = \frac{(N-1)M}{n^2F} S - 2\frac{M}{n^2F} T$$

$$= \frac{M}{n^2F}\left[(N-1)S - 2T\right]$$

$$E(\sigma_f^2) = \frac{N^2 M}{n^2F}\left[\frac{N-1}{N^2} S - \frac{2T}{N^2}\right]$$

soit $$E(\sigma_f^2) = \left(\frac{N}{n}\right)^2 \frac{M}{F} \sigma^2 = \lambda'^2 \sigma^2 \qquad (4,5)$$

En reprenant les calculs qui ont conduit à (3,21), on voit que

$$0 < \lambda'^2 < 1 \qquad (4,6)$$

et que $$\sigma_{\mathfrak{F}}^2 + E(\sigma_f^2) = \sigma^2 \qquad (4,7)$$

<u>Résumé</u> : Soient $E = [1,N]$ et $I = [1, n]$, $n \leq N$, E^I l'ensemble des $f : I \to E$.

On appelle échantillon tout élément de E^I et famille d'échantillons toute $\mathfrak{F} \subset E^I$.

Posons $\forall k \in E \ \forall f \in \mathfrak{F}$ $\qquad a(f,k) = |f^{-1}(k)|$

$$\forall k,l \in E \quad K(k) = \sum_{f \in \mathfrak{F}} a(f,k) \qquad L_k = \sum_{f \in \mathfrak{F}} a^2(f,k), \quad M_{kl} = \sum_{\substack{l \neq k \\ f}} a(f,k)a(f,l)$$

On dit que $\mathcal{F}$ linéairement équirépartie si $\forall k \in E \quad K(k) = K$

on dit que $\mathcal{F}$ est quadratiquement équirépartie si de plus

$$\forall k \in E \quad L_k = L, \quad \forall k,l \in E \quad k \neq l \quad M_{kl} = M$$

<u>Résultats</u> F, K, L, M sont dans les relations

$$n\,F = N\,K, \qquad n\,K = L + (N-1)M$$

<u>Théorème 1</u> : Si $\mathcal{F}$ est l. eq alors $\quad E(\bar{x}_f) = \bar{x}_{\mathcal{F}} = \mu = \frac{1}{N}(\sum_{k \in E} x_k)$

<u>Théorème 2</u> : si $\mathcal{F}$ est q. eq alors

$$\mathrm{Var}\ (\bar{x}_f) = \sigma^2_{\mathcal{F}} = \lambda^2\,\sigma^2 \quad \text{avec } \lambda^2 = 1 - (\frac{N}{n})^2\ \frac{M}{F}$$

$$E(\sigma^2_f) = \lambda'^2\,\sigma^2\ , \text{ avec } \lambda^2 = 1 - \lambda'^2 \text{ et } 0 < \lambda^2, \lambda'^2 < 1$$

$$\text{et } \sigma^2 = \frac{N-1}{N^2}\ S - \frac{2}{N^2}\ T, \text{ avec } S = \sum_{k \in E} x_k^2\ ,\ T = \sum_{1 \leq k < l \leq N} x_k x_l$$

V. Etude de l'équirepartition de certaines familles

Pour n et N fixés nous allons étudier les familles $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^n_N$ suivantes :

$\mathfrak{F}_0$ = ensemble des applications constantes,

$\mathfrak{F}_1 = E^I$ = ensemble de toutes les applications ,

$\mathfrak{F}_2$ = ensemble des applications strictement croissantes (n $\leqslant$ N),

$\mathfrak{F}_3$ = ensemble des applications simplement croissantes,

$\mathfrak{F}_4$ = ensemble des applications injectives (n $\leqslant$ N)

Nous allons établir que chacune est linéairement et quadratiquement équirépartie et déterminer ses coefficients F, K, L, M, λ .

Plutôt que de les examiner à tour de rôle, nous allons nous donner des définitions et notations assez générales pour les examiner toutes de la même façon en un premier temps, puis pour prendre en compte leurs spécificités.

Définitions - Notations

Pour N et n donnés et $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^n_N$, nous posons

$$\forall k \in E, \ \forall i \in [o,n] \quad \mathfrak{F}^n_{N,i}(k) = \{ f \in \mathfrak{F}^n_N \mid |f^{-1}(k)| = i \} \tag{5,1}$$

$\forall (k,l) \in E^2$, $k \neq l$

$\forall (i,j) \in [o,n]^2$, $0 \leqslant i + j \leqslant n$.

$$\mathfrak{F}^n_{N,i,j}(k,l) = \{f \in \mathfrak{F}^n_N \mid |f^{-1}(k)| = i \text{ et } |f^{-1}(l)| = j\} \tag{5,2}$$

Pour tout k de E fixé, i parcourant [o,n] , les $\mathfrak{F}^n_{N,i}(k)$ réalisent un partage de $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^n_N$ (ils sont disjoints et leur réunion est égale à $\mathfrak{F}^n_N$)

Donc $\forall k \in E \qquad \mathcal{F} = \mathcal{F}^n_N = \bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{F}^n_{N,i}(k)$ (5,3)

$\forall k \in E \qquad F = F^n_N = \Sigma^n_{i=0} \; F^n_{N,i}(k)$, où $F = |\mathcal{F}|$ (5,4)

De même pour tout $k \in E$, tout $i \in [o,n]$, alors pour tout $l \in E - \{k\}$, j parcourant $[o,n-i]$, les $\mathcal{F}^n_{N,i,j}(k,l)$ réalisent un partage de $\mathcal{F}^n_{N,i}(k)$ et

$\forall k \in E$, $\forall l \in E - \{k\}$, $\forall i \in [o,n]$ $\mathcal{F}^n_{N,i}(k) = \bigcup_{j=o}^{n-i} \mathcal{F}^n_{N,i,j}(k,l)$ (5,5)

$$F^n_{N,i}(k) = \Sigma_{j=o}^{n-i} F^n_{N,i,j}(k,l) \qquad (5,6)$$

De plus $\forall k,l$, $k \neq l$ $\quad \mathcal{F} = \bigcup_{i=o}^{n} \mathcal{F}^n_{N,i}(k) = \bigcup_{i=o}^{n} \bigcup_{j=o}^{n-i} \mathcal{F}^n_{N,i,j}(k,l)$ (5,7)

$$= \bigcup_{\substack{(i,j) \in [o,n]^2 \\ o \leqslant i+j \leqslant n}} \mathcal{F}^n_{N,i,j}(k,l) \qquad (5,8)$$

et $\qquad F^n_N = \Sigma_{i=o}^{n} \; \Sigma_{j=o}^{n-i} \; F^n_{N,i,j}(k,l)$ (5,9)

$$= \Sigma_{\substack{(i,j) \in [o,n]^2 \\ o \leqslant i+j \leqslant n}} F^n_{N,i,j}(k,l) \qquad (5,10)$$

Nous allons être amenés à effectuer de nombreuses sommations. Elles se ramènent presque toutes au schéma suivant :

Soit $\mathcal{F}$ un ensemble et $\{\mathcal{F}_b \mid b \in B\}$ un partage de $\mathcal{F}$.

Alors pour toute h : $\mathfrak{F} \to \mathbb{R}$, on a

$$S = \sum_{f \in \mathfrak{F}} h(f) = \sum_{f \in \bigcup_{b \in B} \mathfrak{F}_b} h(f) = \sum_{b \in B} \left(\sum_{f \in \mathfrak{F}_b} h(f) \right) = \sum_{b \in B} S_b \qquad (5,11)$$

<u>Expression des coefficients F, K, L, M.</u>

Rappelons que pour $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^n_N$

$$\forall k \in E \quad K(k) = K^n_N(k) = \sum_{f \in \mathfrak{F}^n_N} |f^{-1}(k)| \qquad (5,12)$$

$$L(k) = L^n_N(k) = \sum_{f \in \mathfrak{F}^n_N} |f^{-1}(k)|^2 \qquad (5,13)$$

$\forall (k,l) \in E^2$, $k \neq l$

$$M(k,l) = M^n_N(k,l) = \sum_{f \in \mathfrak{F}^n_N} |f^{-1}(k)|\ |f^{-1}(l)| \qquad (5,14)$$

Relativement au partage (5,3), la sommation (5,12) devient

$$\forall k \in E \qquad K(k) = K^n_N(k) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{f \in \mathfrak{F}^n_{N,i}(k)} | f^{-1}(k) | \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} i \left(\sum_{f \in \mathfrak{F}^n_{N,i}(k)} 1 \right)$$

Soit $\forall k \in E \quad K(k) = K^n_N(k) = \sum_{i=0}^{n} i\, F^n_{N,i}(k)$ (5,15)

De même

$$\forall k \in E \quad L(k) = L^n_N(k) = \sum_{i=0}^{n} i^2\, F^n_{N,i}(k) \qquad (5,16)$$

Relativement aux partages (5,8) et (5,7), la sommation (5,14) devient

$\forall\ (k,l) \in E^2,\ k \neq l$

$$M(k,l) = M_N^n\ (k,l) = \sum_{\substack{(i,j)\in [o,n]^2 \\ o \leqslant i+k \leqslant n}} \ \sum_{f \in \mathcal{F}^n_{N,i,j}(k,l)} (|f^{-1}(k)| \,.\, |f^{-1}(l)|)$$

$$= \sum_{\substack{(i,j) \in [o,n]^2 \\ o \leqslant i+j \leqslant n}} i\ j\ (\sum_{f \in \mathcal{F}^n_{N,i,j}(k,l)} 1)$$

$$\text{soit}\quad M(k,l) = M_N^n\ (k,l) = \sum^{n}_{\substack{(i,j)\in [o,n]^2 \\ o \leqslant i+j \leqslant n}} ij\ F^n_{N,i,j}\ (k,l) \tag{5,17}$$

$$\text{et}\qquad M_N^n(k,l) = \sum_{i=o}^{n}\ i \sum_{j=o}^{n-i}\ j\ F^n_{N,i,j}\ (k,l) \tag{5,18}$$

En résumé, avec $I = [1,n]$, on a :

$$\forall\ k \in E, \forall\, l \in E - \{k\}\quad F = F_N^n = \sum_{i=o}^{n} F^n_{N,i}(k) \tag{5,4}$$

$$K(k) = K_N^n(k) = \sum_{i=o}^{n} i\ F^n_{N,i}(k) = \sum_{i\in I} i\ F^n_{N,i}(k) \tag{5,15}$$

$$L(l) = L_N^n(k) = \sum_{i=o}^{n} i^2\ F^n_{N,i}(k) = \sum_{i\in I} i^2\ F^n_{N,i}(k) \tag{5,16}$$

$$M(k,l) = M_N^n(k,l) = \sum_{\substack{(i,j)\in I^2 \\ 1 \leqslant i+j \leqslant n}} i\ j\ F^n_{N,i,j}(k,l) \tag{5,17}$$

$$= \sum_{i\in I} i \sum_{j=1}^{n-i} j\ F^n_{N,i,j}(k,l) \tag{5,18}$$

<u>Proposition</u> : Il suffit que les nombres $F^n_{N,i}(k)$ et $F^n_{N,i,j}(k,l)$ soient indépendants de k et l pour que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N^n$ soit linéairement et quadratiquement équirépartie.

En effet, si $\forall N, \forall\, n,\ \forall i\ \ o \leqslant i \leqslant n$, on a $\forall k \in E\ \ F^n_{N,i}(k) = F^n_{N,i}$ (5,19)

$\forall k \in E \qquad K_N^n(k) = \sum_{i\in I} i\, F_{N,i}(k) = \sum_{i\in I} i\, F_{N,i}^n$ est indépendant de k et

$$K_N^n(k) = K_N^n = \sum_{i\in I} i\, F_{N,i}^n \tag{5,20}$$

$$L_N^n(k) = L_N^n = \sum i^2\, F_{N,i}^n = L_N^n \tag{5,21}$$

De même, si $\forall N, \forall n, \forall (i,j)\in I^2 \; 1 \leq i+j \leq n$, on a $\forall (k,l)\in E^2,\; k \neq l$

$$F_{N,i,j}^n\,(k,l) = F_{N,i,j}^n \tag{5,22}$$

alors

$$M_N^n(k,l) = \sum_{\substack{(i,j)\in I^2\\ 1 \leq i+j \leq n}} ij\, F_{N,i,j}^n(k,l) = \sum_{\substack{(i,j)\in I^2\\ 1 \leq i+j \leq n}} ij\, F_{N,i,j}^n \text{ est}$$

indépendant de k,l

$$\text{et } M_N^n = \sum_{(i,j)\in I^2} ij\, F_{N,i,j}^n \;= \sum_{i\in I} i \sum_{j=1}^{n-i} j\, F_{N,i,j}^n \tag{5,23}$$

Il suffit donc d'établir l'invariance des $F_{N,i,j}^n(k)$ et $F_{N,i,j}^n(k,l)$ pour prouver l'équirépartition d'un famille $\mathcal{F} = \mathcal{F}_N^n$.

Nous allons à présent examiner les familles $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \mathcal{F}_4$.

1/ Famille $\mathcal{F}_0$ des applications constantes de $I = [1,n]$ dans $E = [1,N]$

$\mathcal{F}$ est constituée des N applications $f_k : I \to E$, $k\in E$ telles que

$$\forall e\in I \qquad f_k(e) = k.$$

De sorte que

$$\forall k\in E \quad |f_k^{-1}(k)| = n, \quad \forall l\in E - \{k\} \quad |f_k^{-1}(l)| = 0$$

Ainsi $\quad \forall k\in E \qquad F_{N,n}^n(k) = 1, \quad F_{N,i}^n(k) = 0 \;$ si $0 \leq i < n$

$$\forall k\in E \quad \forall l\in E - \{k\} \quad \forall (i,j)\in I^2 \qquad F_{N,i,j}^n(k,l) = 0$$

Les $F^n_{N,i}$ et $F^n_{N,i,j}$ sont bien indépendants de k et l. De plus

$$F = F^n_N = n \ , \ K = n \ , \ M = 0 \tag{5,24}$$

et $\mathfrak{F}_0$ est bien équirépartie.

2/ <u>Famille $\mathfrak{F}_2$ des applications strictement croissantes de I dans E</u> $(n \leq N)$

Chaque $f \in \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}^n_N$ est strictement croissante, donc injective; de sorte que

$$\forall\, k \in E \quad |f^{-1}(k)| = 0 \text{ ou } 1 \text{ et que} \tag{5,25}$$

$$\forall\, i > 1\ \mathfrak{F}^n_{N,i,j}(k) = \emptyset \text{ et } F^n_{N,i}(k) = 0 \tag{5,26}$$

De même

$$\mathfrak{F}^n_{N,i,j}(k,l) = \emptyset \text{ si } j > 1 \text{ et } F^n_{N,i,j}(k) = 0 \text{ si } i>1 \text{ ou } j>1 \tag{5,27}$$

Pour $\mathfrak{F}_2$, les relations (5,4), (5,15), (5,16), (5,17) deviennent

$$\forall\, k \in E \qquad F^n_N = F^n_{N,0}\ (k) + F^n_{N,1}(k) \tag{5,28}$$

$$K^n_N(k) = F^n_{N,1}(k) \tag{5,29}$$

$$L^n_N(k) = F^n_{N,1}(k) = K^n_N(k) \tag{5,30}$$

$$\forall\, l \in E - \{k\}\ M^n_N(k,l) = F^n_{N,1,1}(k,l) \tag{5,31}$$

Or $F^n_N = C^n_N$ (5,32)

et $\mathfrak{F}^n_{N,0}(k)$ est l'ensemble des applications strictement croissantes de I dans E $-\{k\}$

Donc

$$F^n_{N,0}\ (k) = |\mathfrak{F}^n_{N,0}(k)\ | = |\mathfrak{F}^n_{N-1}\ | = C^n_{N-1} \tag{5,33}$$

et d'après (5,28)

$$F^n_{N,1}(k) = F^n_N - F^n_{N,0}\ (k) = C^n_N - C^n_{N-1} = C^{n-1}_{N-1} \tag{5,34}$$

D'où l'invariance des $F^n_{N,i}(k)$ par rapport à k.

Quant aux $F^n_{N,i,j}(k,l)$, on obtient par utilisation de (5,6), pour $n \geqslant 2$

pour $i=0$ $\quad F^n_{N,0}(k) = F^n_{N,0,0}(k,l) + F^n_{N,0,1}(k,l)$ (5,35)

or $\mathcal{F}^n_{N,0,0}(k,l)$ est l'ensemble des applications croissantes de I dans $E-\{k,l\}$

Donc $\quad F^n_{N,0,0}(k,l) = F^n_{N-2} = C^n_{N-2}$ (5,36)

et $\quad F^n_{N,0,1}(k,l) = F^n_{N,0}(k) - F^n_{N,0,0}(k,l)$ (5,37)

$= C^n_{N-1} - C^n_{N-2}$ indépendant de k,l (5,38)

Pour i=1, (5,6) donne

$$F^n_{N,1}(k) = F^n_{N,1,0}(k,l) + F^n_{N,1,1}(k,l) \quad (5,39)$$

Donc $\quad F^n_{N,1,1}(k,l) = F^n_{N,1}(k) - F^n_{N,1,0}(k,l) = F^n_{N,1}(k) - f^n_{N,0,1}(k,l)$ (5,40)

$$= C^{n-1}_{N-1} - (C^n_{N-1} - C^n_{N-2}) = C^{n-1}_{N-1} - C^{n-1}_{N-2} = C^{n-2}_{N-2} \quad (5,41)$$

Ainsi $\forall\, k \in E \quad F^n_{N,1}(k) = C^{n-1}_{N-1} = \frac{n}{N} F^n_N$ (5,42)

$\forall\, l \in E-\{k\} \quad F^n_{N,1,1}(k,l) = C^{n-2}_{N-2} = \frac{n-1}{N-1} F^n_{N-1} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} F^n_N$ (5,43)

Aussi a-t-on :

$$F = C^n_N \;,\; K=L=C^{n-1}_{N-1} \;,\; M = C^{n-2}_{N-2} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} F \quad (5,44)$$

ce qui établit l'équirépartition de $\mathcal{F}_2$.

3/ <u>Cas de $\mathcal{F}_4$ ensemble des applications injectives de I dans E</u> $(n \leqslant N)$

Nous allons nous ramener à celui de $\mathcal{F}_2$.

Soit S l'ensemble des bijections de I.

A chaque application strictement croissante $f \in \mathcal{F}_2$ de I dans E faisons correspondre l'ensemble $\emptyset(f) = \{g = s_\circ f \mid s \in S\}$. Chaque g de $\emptyset(f)$ se déduit de f par une permutation des valeurs $f(1)\ldots f(n)$. f étant injective, g l'est aussi et $\emptyset(f) \subset \mathcal{F}_4$.

On voit facilement que $\{\emptyset(f) \mid f \in \mathcal{F}_2\}$ réalise une partition de $\mathcal{F}_4$.

De plus $\forall g \in \emptyset(f) \quad \forall k,l \in E \qquad |g^{-1}(k)| = |f^{-1}(k)| \qquad (5,45)$

$$\text{et} \quad |g^{-1}(k)| \cdot |g^{-1}(l)| = |f^{-1}(k)| \cdot |f^{-1}(l)| \qquad (5,46)$$

$$\text{et} \quad \forall f \in \mathcal{F}_2 \quad |\emptyset(f)| = |S| = n! \qquad (5,47)$$

Pour N et n fixés, on a donc

$$\mathcal{F}_n = \bigcup_{g \in \mathcal{F}_4} \{g\} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}_2} \bigcup_{g \in \emptyset(f)} \{g\} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}_2} \emptyset(f) \qquad (5,48)$$

$$F_n = \sum_{f \in \mathcal{F}_2} |\emptyset(f)| = |S|\, F_2 = n!\, F_2 \qquad (5,49)$$

$$\forall k \in E \quad K_4(k) = \sum_{g \in \mathcal{F}_4} |g^{-1}(k)| = \sum_{f \in \mathcal{F}_2} \sum_{g \in \emptyset(f)} |g^{-1}(k)| = \sum_{f \in \mathcal{F}_2} |f^{-1}(k)| \left(\sum_{g \in \emptyset(f)} 1 \right)$$

$$\text{soit} \quad K_4(k) = \sum_{f \in \mathcal{F}_2} |f^{-1}(k)|\, |\emptyset(f)| = |S| \sum_{f \in \mathcal{F}_2} |f^{-1}(k)| = |S|\, K_2(k) \qquad (5,50)$$

On montre de même que

$$L_4(k) = |S|\, L_2(k) \qquad (5,51)$$

$$M_4(k,l) = |S|\, M_2(k,l) \qquad (5,52)$$

avec F_i, $K_i(k)$, $L_i(k)$, $M_i(k,l)$ respectivement égaux à F_N^n, $K_N^n(k)$, $L_N^n(k)$ et $M_N^n(k,l)$ pour les familles $\mathcal{F}_i$, $i=1,2$.

On a donc établi l'équirépartition linéaire et quadratique de $\mathcal{F}_4$ et

$$F_N^n(k) = n!\, C_N^n = N(M-1)\ldots(N-n+1) = [N]_n \qquad (5,53)$$

$$\forall k \in E \quad K_N^n(k) = K_N^n = L_N^n(k) = L_N^n = n!\, C_{N-1}^{n-1} = \frac{n}{N}(n!\, C_N^n) = \frac{n}{N}[N]_n = \frac{n}{N} F_N^n \qquad (5,54)$$

$$\forall k \in E \ \forall l \in E - \{k\} \quad M_N^n(k,l) = n!\, C_{N-2}^{n-2} = n! \frac{n(n-1)}{N(N-1)} C_N^n = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} (n!\, C_N^n) =$$

$$= \frac{n(n-1)}{N(N-1)} [N]_n = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} F_N^n \qquad (5,55)$$

4/ Famille $\mathcal{F}_1$ des applications de I dans E

Pour établir l'invariance des $K_N^n(k)$, $L_N^n(k)$ et $M_N^n(k,l)$ nous allons procéder par récurrence sur n. Une partie des raisonnements et notations que nous allons utiliser ici servira aussi pour l'étude de $\mathcal{F}_3$.

Pour n=1 , $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_N^1 = \{f_1, f_2, \ldots f_N\}$

avec $\forall\, k \in E,\ \ f_k(1) = k$

donc $\quad |\mathcal{F}_N^1| = F_N^1 = N \qquad (5,56)$

$\forall k \in E \quad \mathcal{F}_{N,1}^1(k) = \{f_k\} \quad , F_{N,1}^1(k) = 1 = F_{N,1}^1 \qquad (5,57)$

et $\quad F_N^1 = F_{N,0}^1(k) + F_{N,1}^1(k) \quad , \quad F_{N,0}^1(k) = F_N^1 - F_{N,1}^1 = N - 1 \qquad (5,58)$

De plus $F_{N,i,j}^1(k,l) = 0$ pour $(i \geqslant 1$ et $j \geqslant 1) \qquad (5,59)$

Donc $\mathcal{F}_1$ est bien équirépartie pour n = 1. Il en est de même de $\mathcal{F}_3$ qui se confond avec $\mathcal{F}_1$ pour n = 1.

Procédons à présent par récurrence. Supposons avoir établi que

$\forall N, \forall n' \leqslant n, \ \forall i', 0 \leqslant i' \leqslant n \ , \ \forall k \in E \ \ \forall l \in E - \{k\}$

$$F_{N,i'}^{n'}(k) = F_{N,i'}^{n'} \qquad (5,60)$$

$$F_{N,i',j'}^{n'}(k,l) = F_{N,i',j'}^{n'} \qquad (5,61)$$

Il s'agit de montrer que

$\forall N, \quad \forall i \quad 0 \leqslant i \leqslant n+1, \ \forall\, k \in E\ , \quad \forall\, l \in E - \{k\}$

$$F_{N,i}^{n+1}(k) = F_{N,i}^{n+1} \qquad \text{indépendant de } k$$

$$F^{n+1}_{N,i,j}(k,l) = F^{n+1}_{N,i,j} \qquad \text{indépendant de } k,l$$

Soit $I = [1,n]$, $I' = [1,n+1] = I \cup \{n+1\}$

Pour toute $f \in \mathcal{F}^{n+1}_N$ soit $g = f_I$ la restriction de f à I et

$$h = f_{\{n+1\}} = f(n+1)$$

alors $\forall\, e \in I \quad 1 \leqslant e \leqslant n \qquad f(e) = g(e)$ et $f(n+1) = h$

on remarque que, tant pour $\mathcal{F}_1$ que pour $\mathcal{F}_3$, si $f \in \mathcal{F}_i = \mathcal{F}^{n+1}_N$, alors

g est de même nature que f et $g \in \mathcal{F}^n_N$.

Pour tout $p \in E$ soit

$$\mathcal{F}^{n+1,p}_N = \{f \in \mathcal{F}^{n+1}_N \mid f(n+1) = p\} \qquad (5,62)$$

$\{\mathcal{F}^{n+1,p}_N \mid p \in E\}$ est un partage de $\mathcal{F}^{n+1}_N$ et

$$\mathcal{F}^{n+1}_N = \bigcup_{p \in E} \mathcal{F}^{n+1,p}_N \quad , \quad F^{n+1}_N = \sum_{p \in E} F^{n+1,p}_N \qquad (5,63)$$

Posons aussi

$$\forall\, k \in E \qquad \mathcal{F}^{n+1,p}_{N,i}(k) = \{f \in \mathcal{F}^{n+1}_N \mid |f^{-1}(k)| = i \text{ et } f(n+1) = p\} \quad (5,64)$$

$$\forall\, i \quad 0 \leqslant i \leqslant n+1$$

Compte tenu de (5,1) et (5,3), on obtient

$$\forall\, k \in E \qquad \mathcal{F}^{n+1}_{N,i}(k) = \bigcup_{p \in E} \mathcal{F}^{n+1,p}_{N,i}(k) \qquad (5,65)$$

$$F^{n+1}_{N,i}(k) = \sum_{p \in E} F^{n+1,p}_{N,i}(k) \qquad (5,66)$$

Revenons maintenant au cas de l'ensemble des applications $f : I' \to E$.

Si $f \in \mathcal{F}^{n+1,p}_{N,i}(k)$ c'est que $f(n+1) = p$ et $|f^{-1}(k)| = i$.

Si $p = k$ alors $|g^{-1}(k)| = i-1$ et la restriction de f à $I-g^{-1}(k)$ est une application d'un ensemble de $n-(i-1)$ éléments dans $E - \{k\}$ qui en a $N-1$.

Donc $$|\mathcal{F}^{n+1,k}_{N,i}(k)| = F^{n-i+1}_{N-1} \qquad (5,67)$$

Si $p \neq k$ alors $|g^{-1}(k)| = i$ et la restriction de f à $I-g^{-1}(k)$ est une application d'un ensemble $N-i$ éléments dans $E-\{k,p\}$ qui en a $N-2$.

Donc $$\forall p \in E,\ p \neq k \quad |\mathcal{F}^{n+1,p}_{N,i}(k)| = F^{n-i}_{N-2} \qquad (5,68)$$

D'où $$F^{n+1}_{N,i}(k) = F^{n-i+1}_{N-1} + (N-1)\, F^{n-i}_{N-2} \qquad (5,69)$$

Ce qui établit l'invariance des $F^{n+1}_{N,i}(k)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$; si $i=n+1$ et $|f^{-1}(k)| = i = n+1$ c'est que $f(1) = ..=f(n) = f(n+1) = k$

$$\text{et } \forall k \in E \quad F^{n+1}_{N,n+1}(k) = 1 \qquad (5,70)$$

donc $\forall k \in E \quad \forall i \quad 0 \leqslant i \leqslant n+1 \qquad F^{n+1}_{N,i}(k) = F^{n+1}_{N,i}$ c.q.f.d

de cette propriété découle l'invariance des $K^n_N(k)$;

donc $$\forall k \in E \quad K^n_N(k) = \sum_{i=1}^{n} i\, F^n_{N,i}(k) = \sum_{i=1}^{n} i\, F^n_{N,i} = K^n_N \qquad (5,71)$$

et d'après (2,15) $$\sum_{i=1}^{n} i\, F^n_{N,i} = \frac{n}{N} F^n_N = \frac{n}{N}(N)^n = nN^{n-1} \qquad (5,72)$$

<u>Autre façon de calculer les $F^n_{N,i}(k)$ $0 \leqslant i \leqslant n,\ k \in E$</u>

Si $f \in \mathcal{F}^{n}_{N,i}(k)$, soit $f^{-1}(k) = J$ et $J' = I-J$. Alors $|J| = i$, $|J'| = n-i$ et

$f_{J'}$ est une application d'un ensemble de n-i éléments dans E $-\{k\}$ qui en a N-1.

Inversement $\forall\, k \in E$, $\forall\, i \in [o,n]$ il y a C_n^i sous ensembles J de I de cardinal i. Soit $J' = I-J$. Il y a F_{N-1}^{n-i} applications g de J' dans $E-\{k\}$. Pour chaque g il y a une application $f : I \to E$ telle que $f_{J'} = g$ et $f(J) = \{k\}$

Donc $\forall\, k \in E$, $\forall\, i \in [o,n]$ $\qquad F^{n}_{N,i}(k) = C_n^i\, F_{N-1}^{n-i}$ $\qquad$ (5,75)

Ce qui établit l'invariance des $F^{n}_{N,i}(k)$.

De même $\forall\, k \in E$, $\forall\, l \in E-\{k\}$, $\forall\, (i,j) \in [o,n]^2$ $\quad 0 \leq i+j \leq n$ $\qquad$ (5,76)

Si $f \in \mathcal{F}^{n}_{N,i,j}(k,l)$, soient $J = f^{-1}(k)$, $J' = f^{-1}(l)$, $J'' = J \cup J'$, $J''' = I - J''$

on a $|J| = i$, $|J'| = j$, $|J''| = i+j$, $|J'''| = n-i-j$

La restriction $f_{J'''}$ de f à J''' est une application d'un ensemble de n-i-j éléments dans $E - \{k,l\}$ qui en a N-2.

Inversement pour tous i,j,k,l tels qu'en (5,76) :

il y a C_n^{i+j} manières de choisir un ensemble J'' de cardinal i+j dans I;

pour chaque J'' il y a C_{i+j}^{i} manières de choisir un ensemble J de cardinal i dans J''.

La connaissance de J'' entraine celle de $J''' = I - J''$, celle de J entraine celle de J'.

Pour chaque couple (J'', J) il y a F_{N-2}^{n-i-j} applications g de J''' dans $E-\{k,l\}$.

Et à g on peut faire correspondre une $f : I \to E$ telle que

$$f_{J'''} = g,\ f(J) = \{k\},\ f(J') = \{l\}$$

Donc $F^{n}_{N,i,j}(k,l) = C^{i+j}_{n}\ C^{i}_{i+j}\ F^{n-i-j}_{N-2}$

$$\forall k \in E,\ \forall l \in E - \{k\} \quad F^{n}_{N,i,j}(k,l) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} F^{n-i-j}_{N-2} \qquad (5,77)$$

$\forall (i,j) \in [o,n]^2 \quad 0 \leqslant i+j \leqslant n$

Ce qui établit l'invariance de ces coefficients.

La relation (5,75) peut d'ailleurs se vérifier par récurrence. En effet

$$F^{n+1}_{N,i}(k) = F^{n}_{N,i-1}(k) + (N-1)\ F^{n}_{N,i}(k) \qquad \text{d'après } (5,66)$$

$$= (N-1)\ C^{i}_{n}(N-1)^{n-i} + C^{i-1}_{n}\ (N-1)^{n-i+1}$$

$$= (N-1)^{n+1-i}\ (C^{i}_{n} + C^{i-1}_{n}) = (N-1)^{n+1-i}\ C^{i}_{n+1} \qquad \text{c.q.f.d}$$

Il en va de même pour (5,77).

On a donc équirépartition linéaire et quadratique de $\mathcal{F}_1$. Et

$$\forall k \quad K^{n}_{N}(k) = K^{n}_{N} = \sum_{i=0}^{n} i\ F^{n}_{N,i}(k) = \sum_{i=0}^{n} i\ C^{i}_{n}(N-1)^{n-i} \qquad (5,78)$$

$$\text{or} \quad K^{n}_{N} = \frac{n}{N} F^{n}_{N} = n\ N^{n-1} \qquad (5,79)$$

$$\text{Donc} \qquad \sum_{i=0}^{n} i\ C^{i}_{n}(N-1)^{n-i} = n\ N^{n-1} \qquad (5,80)$$

$$M^{n}_{N} = M^{n}_{N}(k,l) = \sum_{i=0}^{n} i \sum_{j=0}^{n} j\ F^{n}_{N,i,j}(k,l) = \sum_{i=0}^{n} i\ \frac{n!}{i!} \sum_{j=0}^{n-i} j\ \frac{1}{j!(n-i-j)!}\ (N-2)^{n-i-j}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} i\ \frac{n!}{i!(n-i)!} \left(\sum_{j=0}^{n-i} j\ \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!}\ (N-2)^{n-i-j} \right)$$

En posant n-i=m, on obtient en utilisant (5,80)

$$\sum_{j=0}^{m} j \frac{m!}{j!(m-j)!} (N-2)^{m-j} = \sum_{j=0}^{m} j\, C_m^j\, (N-2)^{m-j} = m(N-1)^{m-1}$$

$$= (n-i)\ (N-1)^{n-i-1}\ .$$

et $M_N^n = \sum_{i=0}^{n} i\, C_n^i\, (n-i)\ (N-1)^{n-i-1} = n \sum_{i=0}^{n} i\, C_n^i (N-1)^{n-i-1} - \sum_{i=0}^{n} i^2 C_n^i\ (N-1)^{n-i-1}$

$$(N-1)M_N^n = n^2\, N^{n-1} - \sum_{i=0}^{n} i^2\, C_n^i\ (N-1)^{n-i}$$

$$= n^2\, N^{n-1} - (N-1)^n \sum_{i=0}^{n} i^2\, C_n^i\, x^i \quad , \text{ avec } x = \frac{1}{N-1}$$

Calculons $S = \sum_{i=0}^{n} i^2 C_n^i\, x^i$.

on a $(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i\, x^i$

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i\, C_n^i\, x^{i-1}$$

$$n(n-1)\ (1+x)^{n-2} = \sum_{i=0}^{n} i(i-1)\ C_n^i\, x^{i-2} = \Sigma\, i^2\, C_n^i\, x^{i-2} - \Sigma\, i\, C_n^i\, x^{i-2}$$

$$n(n-1)x^2(1+x)^{n-2} + nx(1+x)^{n-1} = \sum_{i=0}^{n} i^2\, C_n^i\, x^i$$

soit $\sum_{i=0}^{n} i^2\, C_n^i\, x^i = nx(1+x)^{n-2}\ (nx+1) \qquad \text{avec } x = \frac{1}{N-1}$

$$= \frac{n}{N-1} \left(\frac{N}{N-1}\right)^{n-2} \frac{N+n-1}{N-1} = n(N+n-1) \frac{N^{n-2}}{(N-1)^n}$$

D'où $(N-1)M_N^n = n^2\, N^{n-1} - n(N+n-1)N^{n-2} = n\, N^{n-2}\ (nN - n - N + 1) = n(n-1)\,(N-1)N^{n-2}$

et $M_N^n = n(n-1)N^{n-2}$ (5,81)

En résumé $\mathfrak{F}_1$ est bien linéairement et quadratiquement équirépartie et

$F = F_N^n = N^n$, $K = K_N^n = n\,N^{n-1}$, $M = M_N^n = n(n-1)N^{n-2} = \frac{n(n-1)}{N^2}F$

on obtient L par (3,17) $L = L_N^n = n(N+n-1)\ N^{n-2}$ (5,82)

5/ <u>Famille $\mathfrak{F}_3$ des applications croissantes.</u>

On a $F_N^n = \frac{[N]}{n!} = \frac{N(N+1)\ldots(N+n-1)}{n!} = \frac{(N+n-1)\ldots\ldots(N+1)}{n!} = C_{N+n-1}^n$ (5,83)

Nous utiliserons plusieurs fois le résultat suivant :

$\forall n \geqslant 0,\quad \forall k \geqslant 1\ S(n,k) = C_n^n + C_{n+1}^n + \ \ldots + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}$ (5,84)

La propriété est vraie pour k=1. Supposons l'avoir établie pour k-1.

Alors $S(n,k) = S(n,k-1) + C_{n+k}^n = C_{n+k}^{n+1} + C_{n+k}^n = C_{n+k+1}^{n+1}$ .c.q.f.d.

Montrons que $\forall k \in E \quad \forall i \quad 0 \leqslant i \leqslant n \quad F_{n,i}^n(k) = F_{N-1}^{n-i}$ (5,85)

En effet si $f \in \mathfrak{F}_{N,i}^n(k)$, soit $J = f^{-1}(k)$ et $J' = I-J$; alors $|J| = i$ et

$|J'| = n-i$. La restriction $f_{J'}$ de f à J' est une application croissante de J' de cardinal n-i dans E -{ k}de cardinal N-1. Inversement à partir d'une application croissante g de {1,..., n-1} dans E -{ k} on peut construire une seule application croissante $f : I \to E$ telle que $|f^{-1}(k)|=i$. On l'obtient en insérant i valeurs k consécutives dans la suite des valeurs de g.

Ainsi l'on a bien $|\mathfrak{F}_{N,i}^n(k)| = F_{N,i}^n(k) = F_{N-1}^{n-i} = C_{N-1+N-i-1}^{n-i}$

De la même façon, on établit que

$\forall k \in E \quad \forall l \in E - \{k\} \quad \forall (i,j) \in [o,n]^2 \quad 0 \leqslant i+j \leqslant n$

$$F_{N,i,j}^n(k,l) = F_{N-2}^{n-i-j} \quad (5,86)$$

De sorte que $\mathcal{F}_3$ est bien linéairement et quadratiquement équirépartie.

Calculons les coefficients de $\mathcal{F}_3$

$$K_N^n = K_N^n(k) = \sum_{i=0}^{n} i\, F_i(k) = \sum_{i=0}^{n} i\, F_{N-1}^{n-i}$$

$$\text{or } K_N^n = \frac{n}{N} F_N^n = \frac{n}{N} \times \frac{(N+n-1)\ldots \quad (N+1)N}{1.2\ldots \quad (n-1)N} = \frac{(N+n-1)\ldots(N+1)}{1.2\ldots \quad (n-1)}$$

$$= C_{N+n-1}^{n-1} = F_{N+1}^{n-1}\,.$$

D'où la relation
$$K_N^n = \sum_{i=0}^{n} i\, F_{N-1}^{n-i} = F_{N+1}^{n-1} \tag{5,86}$$

On obtient maintenant

$$M_N^n = \sum_{i=0}^{n} i \sum_{j=0}^{n-i} F_{N,i,j}^n(k,l) = \sum_{i=0}^{n} i \left(\sum_{j=0}^{n-i} j\, F_{N-2}^{n-i-j} \right)$$

En posant $m = n - i$, et en utilisant (5,86), on trouve

$$\sum_{j=0}^{m} j\, F_{N-2}^{m-j} = F_{N-2+2}^{m-1} = F_N^{n-i-1}$$

Donc
$$M_N^n = \sum_{i=0}^{n} i\, F_N^{n-i-1} = \sum_{i=0}^{n-1} i\, F_N^{n-1-i} + n\, F_N^{-1} = \sum_{i=0}^{n-1} i\, F_N^{n-1-i}$$

Car $F_N^{-1} = 0$; et en utilisant à nouveau (5,86), on arrive à

$$M_N^n = F_{N+2}^{n-1-1} = F_{N+2}^{n-2} \tag{5,87}$$

En résumé
$$K_N^n = F_{N+1}^{n-1} = \frac{n}{N} F_N^n \quad \text{et} \quad M_N^n = F_{N+2}^{n-2} = \frac{n-1}{N+1} K_N^n = \frac{n(n-1)}{N(N+1)} F_N^n \tag{5,88}$$

<u>Conclusion :</u> Chacune des familles $\mathcal{F}_i$, $0 \leqslant i \leqslant 4$, est bien linéairement et quadratiquement équirépartie. Si on désigne pour N et n fixés, par F_i, K_i, M_i et L_i les valeurs respectives de F_N^n, M_N^n, et L_N^n et en posant

$\lambda_i'^2 = (\frac{N}{n})^2 (M_i/F_i)$, $\lambda_i^2 = 1 - \lambda_i'^2$, on a le tableau

	F_i	K_i	M_i	L_i	$\lambda_i'^2$	λ_i^2
$\mathcal{F}_0$	$F_0 = N$	$K_0 = n$	0	$L_0 = n^2$	0	1
$\mathcal{F}_1$	$F_1 = N^n$	$K_1 = nN^{n-1}$	$M_1 = n(n-1)N^{n-2}$	$L_1 = n(N+n-1)N^{n-2}$	$\lambda_1'^2 = \frac{n-1}{n}$	$\lambda_1^2 = \frac{1}{n}$
$\mathcal{F}_2$ $(n \leqslant N)$	$F_2 = C_N^n$	$K_2 = C_{N-1}^{n-1}$	$M_2 = C_{N-2}^{n-2}$	$L_2 = C_{N-1}^{n-1}$	$\lambda_2'^2 = \frac{n-1}{n} \frac{N}{N-1}$	$\lambda_2^2 = \frac{N-n}{n(N-1)}$
$\mathcal{F}_3$	$F_3 = C_{N+n-1}^n$	$K_3 = \frac{n}{N} F_3$	$M_3 = \frac{n(n-1)}{N(N+1)} F_3$	$L_3 = \frac{n}{N} \frac{N-1}{N+1} F_3$	$\lambda_3'^2 = \frac{n-1}{n} \frac{N}{N+1}$	$\lambda_3^2 = \frac{N+n}{n(N+1)}$
$\mathcal{F}_4$ $(n \leqslant N)$	$F_4 = n!F_2$	$K_4 = n!K_2$	$M_4 = n!M_2$	$L_4 = n!L_2$	$\lambda_4'^2 = \lambda_2^2$	$\lambda_4^2 = \lambda_2^2$