CAHIERS DU BURO

MONIQUE HAKIM
ERIC-OLIVIER LOCHARD
JEAN-PIERRE OLIVIER
ERIC TEROUANNE

Sur les traces de Spearman (I) Le problème des communautés

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 25 (1976), p. 3-22
<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1976__25__3_0>

SUR LES TRACES DE SPEARMAN (I)

Le problème des communautés

Monique HAKIM, Eric-Olivier LOCHARD,
Jean-Pierre OLIVIER, Eric TEROUANNE

Résumé. On démontre que si A est une matrice symétrique $I \times I$ positive et T une forme linéaire strictement positive sur $\boldsymbol{R}^I$ alors T atteint son maximum en un et un seul point de l'ensemble des matrices diagonales positives D telles que $A - D$ soit positive. Pour cela on est amené à construire des matrices qui généralisent la notion de coefficient de corrélation multiple.

INTRODUCTION

L'analyse factorielle (au sens de SPEARMAN) est née avec le siècle. Plusieurs colloques internationaux l'ont choisie pour sujet. Plusieurs dizaines de livres et plusieurs centaines d'articles lui sont consacrés. Plusieurs milliers de travaux l'utilisent. Et pourtant il n'existe encore aucun modèle théorique satisfaisant.

L'analyse factorielle a une ambition plus grande que les autres analyses linéaires : elle se veut plus que descriptive, elle se veut explicative ; elle cherche à tirer de l'apparence l'essence sous la forme de facteurs qui acquièrent par elle une existence "objective", "scientifique". Dans un article ultérieur, en décortiquant un peu plus que d'habitude la pratique actuelle, nous espérons convaincre les factorialistes que nous pouvons porter le deuil d'une telle ambition.

L'analyse factorielle, telle que la montre la pratique actuelle, nous apparaît comme une méthode d'analyse des configurations comme toutes les autres méthodes basées sur l'analyse des matrices de covariance ou de corrélation, certes très différente des autres dans son esprit.

Au paragraphe 3 nous donnons et démontrons le théorème qui permet de concevoir un choix explicite des spécificités. Nous proposons d'enlever des facteurs spécifiques qui totalisent le plus de variance possible : nous traduisons cette contrainte par "il faut maximiser la trace de la matrice des spécificités". On montre qu'un tel critère amène à un choix unique des communautés.

Dans les paragraphes 1 et 2 nous développons les outils indispensables à la démonstration du théorème. Nous y construisons des matrices qui généralisent la notion de coefficient de corrélation multiple.

Le paragraphe 0 contient des notations et des rappels.

L'appendice s'est révélé nécessaire pour assurer la validité d'un résultat énoncé par ailleurs.

Nous avons têté l'idée de ces recherches au sein généreux du "Petit séminaire de statistique", en particulier l'article de Guy Romier [6] a guidé nos premiers pas. C'est à notre avis le meilleur exposé actuel sur les problèmes que pose l'analyse factorielle. A partir de cet exposé ce qu'il reste à faire est clair : étude des problèmes de rangs pour voir si un modèle thurstonien du choix des communautés est vivable, étude de la pondération des facteurs, "estimation" des facteurs, étude des algorithmes existants (en particulier que font-ils ? ?).

On pourra se faire une idée de la bibliographie des applications et des papiers théoriques à partir du livre de Rummel [8]. Dans son livre [9], Torrens-Ibern a semble-t-il, fait le point des "résultats" théoriques "acquis" à ce jour.

§ 0 – NOTATIONS ET RAPPELS DE DEFINITIONS

0. Si A est une matrice $I \times J$, où I et J sont des ensembles finis, nous désignerons par :

${}^tA$ la matrice transposée de A,

det A le déterminant de A, si $I = J$,

$A\,(i, j)$ l'élément qui est à l'intersection de la ligne i et de la colonne j de A,

rg A, le rang de A.

1. Rappelons le théorème suivant, bien connu, mais qui traîne en morceaux dans la littérature :

THEOREME 1.1. *Soient I un ensemble fini et A une matrice carrée $I \times I$, réelle, symétrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *pour tout vecteur x de $\mathbf{R}^I$, $x\ A\ {}^t x$ est positif ou nul,*

ii) *les déterminants des mineurs principaux de A sont positifs ou nuls,*

iii) *il existe une matrice B telle que $A = B\ {}^t B$,*

iv) *il existe une matrice orthogonale T telle que $T^{-1}\ A\ T$ soit une matrice diagonale à éléments positifs ou nuls.*

Définition 1.2. *Une matrice carrée réelle sera dite positive si elle est symétrique et si elle vérifie les propriétés équivalentes de la proposition précédente.*

2. Soit I un ensemble fini ; nous désignerons par

M_I l'ensemble des matrices $I \times I$ réelles,

P_I l'ensemble des matrices $I \times I$ réelles positives,

D_I^+ l'ensemble des matrices $I \times I$ réelles diagonales et positives,

$$G_I = \{(A\,,D)/A \in P_I, D \in D_I^+ \ \text{ et } \ A - D \in P_I\}\ ,$$

$\mathrm{env}_{K,I}$ l'application définie dans le paragraphe 1.

3. Une forme linéaire et strictement positive sur $\mathbf{R}^I$ est une forme linéaire T sur $\mathbf{R}^I$ telle que $T(x)$ soit strictement positive chaque fois que x n'est pas nul et que toutes ses composantes sont positives ou nulles.

4. Si A est une matrice $I \times I$ positive, nous désignons par : quad A la matrice diagonale définie dans le § 2, $\rho\, A$ la matrice diagonale définie dans le § 1, $\mathrm{diag}\, A$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont ceux de A, $\mathrm{vp}_k\, A$ la kième ($1 \leqslant k \leqslant \mathrm{card}\ I$) des valeurs propres de A supposées rangées dans l'ordre croissant.

§ 1 – CALCULS DE LONGUEURS DE PROJECTIONS ORTHOGONALES

0. Nous savons que :

THEOREME 0.1. *Soient K un espace de Hilbert et H un sous-espace fermé de K. Soit $f \in K$.*

i) *Il existe un et un seul point,* $p_H f$, *de* H *qui minimise* $\|f - h\|$ *où* h *appartient à* H,

ii) $p_H f$ *est aussi le seul point* h *de* H *vérifiant* $f - h$ *est orthogonal à* H.

Il nous est facile d'ajouter à ce théorème le

Lemme 0.2. *Sous les conditions précédentes,* $p_H f$ *est le seul point de* H *qui maximise* $< f, h > / \| h \|$, *où* $h \in H$.

Nous savons que $<f, h> / \| h \|$ est la longueur de la projection orthogonale $p_h f$ de f sur le sous-espace engendré par h. Par le théorème précédent et celui de Pythagore nous avons

$$\| p_h f \|^2 \ + \ \| f - p_h f \|^2 \ = \ \| f \|^2 .$$

Le minimum de $\| f - p_h f \|^2$ est atteint en un seul point $p_H f$ donc le maximum de $\| p_h f \|$ est atteint en ce seul point-là.

Notation 0.3. Notons $\rho\,(f, H)$ la longueur de la projection de f sur H, i.e.

$$\max_{h \in H} <f, h> / \| h \|.$$

1. Supposons maintenant que H soit un sous-espace de dimension finie de K, il est en particulier fermé. Soit $(h_i)_{i \in I}$ un systéme de générateurs de H, où I est fini. Notons A la matrice carrée, $I \times I$, positive des $< h_i, h_j >$ et σ le vecteur de $\boldsymbol{R}^I$ des $< h_i, f >$.

Lemme 1.1.

i) *Le vecteur* X *de* $\boldsymbol{R}^I$ *est solution de l'équation* (*) $A\ X = \sigma$ *si et seulement si*

$$\sum_{i \in I} (p_i\ X)\ h_i = p_H f.$$

ii) *Nous avons* $\rho\,(f, H)^2 = {}^t\beta\, A\, \beta$ *pour toute solution* β *de l'équation* (*).

i) Si X vérifie

$$\sum_{i \in I} (p_i\ X)\ h_i = p_H f \quad (**)$$

il vérifie aussi

$$\sum_{i \in I} (p_i\ X) < h_i, h_j > \ = \ < p_H f, h_j >$$

i.e. est solution de (*). D'autre part l'ensemble des X qui vérifient (*) forment un sous-espace affine de R^I de dimension card I – dim H. L'ensemble des X qui vérifient (**) forment aussi un sous-espace affine de R^I de dimension card I – dim H, comme ce dernier est contenu dans le précédent il s'ensuit qu'ils sont égaux.

ii) Si

$$\sum_{i \in I} (p_i X)\, h_i = p_H f,$$

$$\rho(f, H)^2 = \langle f, p_H f\rangle^2 / \| p_H f\|^2 = \langle p_H f, p_H f\rangle^2 / \| p_H f\|^2 = \langle p_H f, p_H f\rangle$$

$$= \sum_{i,j} (p_i X)(p_j X) \langle h_i, h_j\rangle = {}^t X A X.$$

Les résultats qui précèdent sont des généralisations bien légères des résultats connus.

2. Soit maintenant A une matrice $I \times I$ positive. Il existe une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un espace de Hilbert H telle que $A(i, j) = \langle f_i, f_j\rangle$. Pour tout $i \in I$, appelons F_i le sous-espace de H engendré par les $(f_j)_{j \in I - \{i\}}$. Le nombre réel positif $\rho(f_i, F_i)$ ne dépend pas du choix de H ni du choix de la famille $(f_i)_{i \in I}$ dans H, il ne dépend que de A.

Nous définissons ainsi pour tout $i \in I$ une application ρ_i de P_I dans R_+.

Nous allons donner une interprétation de ρ_i. Une autre interprétation en sera donnée dans un des paragraphes suivants.

Soit donc A une matrice $I \times I$ positive. Pour tout x réel considérons la matrice $A[x, i]$ définie par $A[x, i](l, j) = A(l, j)$ si $(l, j) \neq (i, i)$ et $A[x, i](i, i) = x$.

Nous avons

Proposition 2.1. *L'ensemble des x tels que la matrice $A[x, i]$ soit positive est l'intervalle $[\rho_i(A), \rightarrow[$.*

Soit $(h_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un espace de Hilbert telle que $A(i, j) = \langle h_i, h_j\rangle$ et soit $(h_i')_{i \in I}$ la famille du même espace de Hilbert où $h_j' = h_j$ si $j \neq i$ et h_i' est la projection orthogonale de h_i sur le sous-espace engendré par les $(h_j)_{j \neq i}$.

Nous avons $A\,[\rho_i\,(A), i]\,(l\,, j) = \langle h'_l\,, h'_j\rangle$, donc la matrice $A\,[\rho_i(A), i\,]$ est positive et singulière.

Remarquons que $M\,(x) = A\,[x\,, i] - A\,[\rho_i(A), i]$ est une matrice diagonale dont le seul élément éventuellement non nul est $M\,(x)\,(i\,, i) = x - \rho_i\,(A)$. Si $x \geqslant \rho_i\,(A)$, $A\,[x\,, i]$ est donc positif. Supposons que pour un $x < \rho_i\,(A)$ la matrice $A\,[x\,, i]$ soit positive, nous avons (d'après le lemme suivant et si $\mathrm{vp}_1 B$ désigne la plus petite valeur propre de la matrice symétrique B)

$$0 \leqslant \mathrm{vp}_1\; A\,[x\,, i] \leqslant \mathrm{vp}_1\; A\,[\rho_i\,(A), i] = 0.$$

Ceci entraîne que la forme linéaire det $A\,[.,\, i]$ est identiquement nulle. En développant, on voit que cette dernière assertion est équivalente à "la famille $(h_j)_{j\in I-\{i\}}$ est liée". Si $(h_j)_{j\in I-\{i\}}$ est libre c'est gagné. Sinon soit $K \subseteq I-\{i\}$ telle que la famille $(h_j)_{j\in K}$ soit une base de l'espace engendré par $(h_j)_{j\in I-\{i\}}$ et $L = K \cup \{i\}$. Posons $B = (\langle h_l\,, h_j\rangle)_{j,\,l\in L}$.

On voit sans peine que

1/ $\rho_i\,(A) = \rho_i\,(B)$,

2/ $B\,[x\,, i]$ est positive si et seulement si $A\,[x\,, i]$ l'est. On conclut.

3. Si A est une matrice symétrique nous noterons $\mathrm{vp}_k\,A$ la kième valeur propre de A, en les supposant rangées dans l'ordre croissant. Au cours de la démonstration de la proposition 2.1. nous avons utilisé le résultat suivant :

Lemme 3.1. *Soient A et B deux matrices symétriques. Nous avons*

$$\mathrm{vp}_k\,(A + B) \geqslant \mathrm{vp}_k\,A + \mathrm{vp}_1\,B.$$

Nous avons

$$X(A + B)\,{}^tX\,/\,X\,{}^tX \geqslant X A\,{}^tX\,/\,X\,{}^tX + \inf_X\, X B\,{}^tX\,/\,X\,{}^tX$$

c'est-à-dire

$$X(A + B)\,{}^tX\,/\,X\,{}^tX \geqslant X A\,{}^tX\,/\,X\,{}^tX + \mathrm{vp}_1\,B,$$

d'où le lemme en utilisant les définitions variationnelles des valeurs propres d'une matrice symétrique.

4. Nous allons maintenant généraliser ce que nous venons de faire (à partir du lemme 1.1.) avec une variable f ou un indice i au cas de plusieurs variables ou de plusieurs indices.

4.1. Soient $(f_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs d'un espace de Hilbert K et soit H un sous-espace de type fini de K engendré par la famille $(g_j)_{j \in J}$. Notons A la matrice carrée $J \times J$ positive des $<g_j, g_k>$ et σ la matrice $J \times I$ des $<g_j, h_i>$.

Lemme :

i) *La matrice $J \times I$, X, est solution de l'équation $A X = \sigma$ (*) si et seulement si, pour tout i, $\sum_j X(j, i) g_j = p_H f_i$.*

ii) *La matrice ${}^tX A X$ est égale à la matrice des $<p_H f_i, p_H f_j>$, pour tout X solution de (*).*

La démonstration est exactement la même que celle du lemme 1.1.

4.2. Soit maintenant A une matrice $I \times I$ positive. Il existe une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un espace de Hilbert H telle que $A(i, j) = <f_i, f_j>$. Pour toute partie K de I appelons $F(K)$ le sous-espace de H engendré par les $(f_j)_{j \in I-K}$. La matrice $K \times K$ positive des $<p_{F(K)} f_i, p_{F(K)} f_l>$ où i et l parcourent K ne dépend pas du choix de H ni de celui de la famille $(f_i)_{i \in I}$ dans H. Il ne dépend que de A.

Nous définissons ainsi, pour toute partie K de I, une application ρ_K de P_I dans P_K.

4.3. Nous allons généraliser ici une partie de la proposition 2.1., la fin de la généralisation sera faite au paragraphe suivant.

Soient A une matrice $I \times I$ positive et K une partie de I. Pour toute matrice symétrique, $K \times K$, B notons $A[B, K]$ la matrice $I \times I$ définie par

$$A[B, K](i, j) = A(i, j) \text{ si } (i, j) \notin K \times K$$

et

$$A[B, K](i, j) = B(i, j) \text{ si } (i, j) \in K \times K.$$

Lemme.

1/ *La matrice $\rho_K(A)$ est telle que $A[\rho_K(A), K]$ soit positive.*

2/ *Si B est une matrice $K \times K$ telle que $B \leqslant \rho_K(A)$ et que $A[B, K]$ soit positive alors $C = \rho_K(A)$.*

Si nous écrivons A sous la forme $(<h_i\,,h_j>)$ il est facile de voir que $A\,[\rho_K(A), K]$ est positive en l'interprétant comme la matrice des produits scalaires de la famille $(h_i')_{i\in I}$ définie par $h_i' = h_i$ si $i \notin K$, $h_i' = p_H\, h_i$ si $i \in K$ (où H est l'espace engendré par la famille $(h_i)_{i\notin K}$). On remarque aussi que la matrice $A\,[\rho_K(A), K]$ est de rang égal au rang de la famille $(h_i)_{i\notin K}$, soit h.

Soit B une matrice symétrique $K \times K$ telle que $A\,[B\,,K]$ soit positive et $B \leqslant \rho_K\,(A)$. Nous savons que B est positive et que le rang de $A\,[B\,,K]$ est inférieur ou égal à h. Supposons $B < \rho_K(A)$, il existe donc un i tel que $B(i,i) < \rho_K(A)(i\,,i)$. Pour tout $x \in [B(i\,,i), \rho_K(A)\,(i\,,i)]$, nous avons $B\,[x, i] \leqslant \rho_K(A)$ et $\mathrm{rg}\, A\,[B\,[x\,,i], K] = h$. Ceci entraine que pour tout x le déterminant du mineur principal d'ordre $h + 1$ de $A\,[B\,[x\,,i], K]$, défini par h lignes linéairement indépendantes parmi les $I - K$ et la ligne i, est nul, ce qui évidemment est contradictoire.

§ 2 – PROJECTION DE LA SECTION D'UN ELLIPSOIDE PAR L'HYPERPLAN CONJUGUE A UNE DIRECTION

0. 0.1. Si X est un espace vectoriel réel notons quad X l'ensemble des applications Q de X dans $\boldsymbol{R}$ vérifiant $Q\,(\lambda\, x) = \lambda^2\ Q\,(x)$ pour tout x. Nous ordonnons quad X par $Q \leqslant P$ si et seulement si $Q\,(x) \leqslant P\,(x)$, pour tout x. Dans quad X toute partie bornée supérieurement admet une borne supérieure.

0.2. Soient Y et Z deux sous-espaces supplémentaires de X. Nous avons une application $\mathrm{ext}_{Y,Z}$ (ext comme extension) de quad Y dans quad X définie par $\mathrm{ext}_{Y,Z}\, q\,(y + z) = q\,(y)$ si $y \in Y$ et $z \in Z$. Si $Q \in$ quad X l'ensemble $\mathrm{ext}_{Y,Z}^{-1}$ $([\leftarrow, Q]$ est borné supérieurement par Q/Y (la restriction de Q à Y), il admet donc une borne supérieure que nous noterons $\mathrm{env}_{Y,Z} Q$.

0.3. *Propriétés élémentaires.*

i) $\mathrm{ext}_{Y,Z}^{-1}\ ([\leftarrow, Q]) = [\leftarrow, \mathrm{env}_{Y,Z}\, Q]$,

ii) $\mathrm{ext}_{Y,Z}^{-1}$ est croissante et $\mathrm{env}_{Y,Z} \circ \mathrm{ext}_{Y,Z}$ est l'identité de quad Y,

iii) si T et U sont deux sous-espaces supplémentaires de Y

$$\mathrm{env}_{T,U} \circ \mathrm{env}_{Y,Z} = \mathrm{env}_{T,\,U+Z},$$

iv) $\mathrm{env}_{Y,Z}\, Q\,(y) = \inf\limits_{z \in Z} Q\,(y + z)$.

Ces démonstrations sont laissées au lecteur.

1. **Proposition 1.1.** *Si X est de dimension finie et si Q est une forme quadratique positive sur X alors* $\mathrm{env}_{Y,Z}$ *Q est une forme quadratique positive sur X. De plus si Q n'est pas dégénérée,* $\mathrm{env}_{Y,Z}$ *Q n'est pas dégénérée.*

Pour avoir une vision géométrique de la chose, $\mathrm{env}_{Y,Z}\ Q$ est la forme quadratique associée à l'ellipsoïde projection sur Y parallèlement à Z de l'ellipsoïde section de l'ellipsoïde définie par Q par l'hyperespace conjugué à la direction Z.

Nous devons la démonstration qui suit à Ph. REVOY, celles que nous avons faites avant étaient calculatoires et imbuvables.

La formule iv) qui précède nous guide. Soit P l'orthogonal de Z pour Q et soit p une projection orthogonale de X sur P pour Q. Nous avons (*) $\inf\limits_{z \in Z} Q\,(y + z) = Q\,(p(y))$, ce qui montre que $Q \circ p | Y$ est la borne supérieure cherchée. C'est évidemment une forme quadratique positive puisque p est linéaire.

Corollaire 1.2. *Sous les hypothèses précédentes supposons que Z soit monogène $Z = h\,R$, alors*

$$\mathrm{env}_{Y,Z}\ Q = (A - \Phi(h,.)^2/\Phi(h,h))|Y$$

où Φ est la forme bilinéaire associée à Q et avec la convention

$$\Phi(h,.)^2/\Phi(h,h) = 0 \ \underline{\text{si}}\ \Phi(h,h) = 0.$$

C'est une conséquence immédiate de (*).

2. Supposons que nous ayons une base sur X, $X = \boldsymbol{R}^I$, et soit $K \subsetneq I$. Supposons de plus que $Y = \boldsymbol{R}^K$, $Z = \boldsymbol{R}^{I-K}$. L'application $\mathrm{env}_{Y,Z}$: quad $X \to$ quad Y donne une application $P_I \to P_K$ que nous noterons $\mathrm{env}_{K,I}$.

Si $K = \{i\}$, nous noterons quad_i l'application $\mathrm{env}_{\{i\},I} : P_I \to \boldsymbol{R}_+$ et quad (comme quadrilatère) l'application $P_I \to \mathrm{D}_I^+$ qui à une matrice positive A fait correspondre la matrice diagonale des quad_i.

Proposition 2.1. *Soient A une matrice $I \times I$ positive et K une partie de I. Notons A_K le mineur principal de A défini par K. Nous avons*

$$\rho_K(A) = A_K - \mathrm{env}_{K,I}\, A.$$

En effet, par définition de $\mathrm{env}_{K,I} A$, $A_K - \mathrm{env}_{K,I} A$ est la borne inférieure des matrices symétriques B telles que $A\,[B\,,K]$ soit positive. Nous avons donc

$$A_K - \mathrm{env}_{K,I} A \leqslant \rho_K(A)$$

et

$$A[A_K - \mathrm{env}_{K,I} A, K] \geqslant 0,$$

ce qui entraine l'égalité par le lemme 4.4. du paragraphe précédent.

Remarquons qu'il serait important, pour la postérité, d'inventer un nom pertinent pour les matrices $\rho_K(A)$.

§ 3 – ETUDE DE G_I

0. Nous avons vu qu'à une matrice $I \times I$, positive, A nous devions associer une matrice $I \times I$ diagonale D positive telle que $A - D$ soit positive. Avant d'envisager un tel choix, on doit étudier l'ensemble des matrices D qui vérifient les conditions imposées. Soit $G_I(A)$ cet ensemble. On définit ainsi une relation $G_I : P_I \to D_I^+$.

Une conséquence immédiate du lemme 3.1. du § 1 est que pour tout $D \in G_I(A)$, rg $(A - D) \leqslant$ rg A. La condition : pour tout $D \in G_I(A)$, rg $(A - D)$ $=$ rg A est étudiée dans le corollaire 2.4. de ce paragraphe.

1. **Proposition 1.1.** *Soit I un ensemble fini. L'ensemble $G_I = \{(A, D) / A \in P_I$, $D \in D_I^+$ et $A - D \in P_I\}$ est une partie convexe fermée de $M_I \times M_I$. De plus la première projection $G_I \to M_I$ (qui au couple (A, D) fait correspondre A) est propre.*

Pour tout $x \in \mathbf{R}^I$ notons f_x l'application de M_I dans $\mathbf{R}$ définie par $f_x(A) = x A^t x$, et $q_x = f_x \circ d$ où d est l'application de $M_I \times M_I$ dans M_I définie par $d(A, B) = A - B$. Nous avons

$$G_I = (\bigcap_{x \in \mathbf{R}^I} q_x^{-1}([0, +\infty[) \cap P_I \times D_I^+,$$

d'où la première conclusion.

Pour se rappeler ce qu'est une application propre voir [2], chap. 1, § 10. Comme M_I est localement compact et G_I séparé nous utilisons le critère de propreté donné par la proposition 7 du n° 3 de la référence ci-dessus, c'est-à-dire : soit f une application continue de l'espace séparé X dans l'espace localement compact Y, alors f est propre si et seulement si, pour toute partie compacte K de Y, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de X.

Prenons donc une partie compacte K de M_I, et notons p la première projection de G_I dans M_I. L'ensemble $p^{-1}(K)$ est une partie fermée de G_I, par continuité de p ; pour démontrer qu'elle est compacte il nous suffit de montrer qu'elle est bornée.

Soit α un nombre réel positif, notons K_α l'ensemble des $A \in M_I$ vérifiant $|A(i,j)| \leqslant \alpha$, pour tout (i,j). Si K est une partie compacte de M_I, il existe α tel que $K \subseteq K_\alpha$. Nous avons $p^{-1}(K) \subseteq K_\alpha \times K_\alpha$. D'où la fin du lemme.

Corollaire 1.2. *Soient I un ensemble fini et $A \in P_I$, l'ensemble $G_I(A) = \{D \mid D \in D_I^+$ et $(A, D) \in G_I\}$ est convexe compact non vide.*

Plusieurs démonstrations sont possibles, en particulier c'est une conséquence du lemme précédent et du lemme 2.2. de l'appendice.

Lemme 1.3. *Soient I un ensemble fini, A et B deux éléments de P_I et $C \in [0, 1]$. Nous avons*

$$G_I(CA + (I - C)B) \supseteq C\,G_I(A) + (I - C)\,G_I(B).$$

Nous avons envie de laisser cette démonstration au lecteur.

Corollaire 1.4. *Soient I un ensemble fini et T une forme linéaire sur $\mathbf{R}^I$. L'application* max $T : P_I \to \mathbf{R}$ *définie par* max $T(A) = \sup T(G_I(A))$ *est concave.*

Nous laissons cette vérification au lecteur.

2. **Proposition 2.1.** *Soit A une matrice $I \times I$ positive. Nous avons*

$$\sup p_i\, G_I(A) = \operatorname{quad}_i A = A(i,i) - \rho_i(A) = 1/\sup\{p_i x \,/\, x A\, {}^t x = 1\}.$$

Quelques commentaires historiques s'imposent. L'inégalité $\sup p_i\, G_I(A) \leqslant A(i,i) - \rho_i(A)$, dans le cas où A est matrice de corrélation régulière se trouverait dans l'article de ROFF M. [7]. L. GUTTMAN dans son article [4] affirmerait que l'on n'a pas $\sup p_i\, G_I(A) = A(i,i) - \rho_i(A)$, si A est régulière. Nous avons retrouvé cette affirmation dans [5]. Dans la ligne de la proposition 2.1. on peut voir l'article de J.N. DARROCH [3].

Pour prouver l'égalité $\mathrm{quad}_i A = A(i, i) - \rho_i(A)$ il suffit de comparer la proposition 2.1. du § 1 et la définition de quad_i. La définition de quad_i montre aussi clairement l'égalité $\mathrm{quad}_i A = \sup p_i\, G_I(A)$. La dernière égalité passe par l'interprétation ellipsoïdique de ce qui précède et c'est clair.

Corollaire 2.2. *Soit $A \in P_I$. Soit $i \in I$. Les conditions suivantes sont équivalentes*

i) $p_i \operatorname{Ker} A \neq \{0\}$,

ii) $p_i\, G_I(A) = \{0\}$,

iii) *la ligne i de A est combinaison linéaire des autres lignes,*

iv) *pour toute famille $(h_j)_{j \in I}$ d'éléments d'un espace de Hilbert telle que $A(l, j) = \langle h_l, h_j \rangle$, h_i est combinaison linéaire des autres éléments de la famille.*

i) $\Rightarrow$ ii) Soit $x \in \operatorname{Ker} A$ tel que $p_i(x) \neq 0$ et soit $D \in G_I(A)$. Nous avons $x(A - D)\,{}^t x \geqslant 0$ donc $-x\,D\,{}^t x \geqslant 0$, i.e. $\sum_{j \in I} D(j, j)(p_j\, x)^2 \leqslant 0$ ce qui entraîne que $D(i, i)(p_i\, x)^2 = 0$.

ii) $\Rightarrow$ iv) car alors $A(i, i) = \rho_i(A)$.

iv) $\Rightarrow$ iii) il suffit de l'écrire.

iii) $\Rightarrow$ i). Soit $(\alpha_k)_{k \neq i}$ une famille de nombres telle que

$$A(i, .) = \sum_{k \neq i} \alpha_k\, A(k, .).$$

Le vecteur de $\boldsymbol{R}^I$ dont la ième composante est 1, et la kième $-\alpha_k$, est un élément de Ker A dont la ième projection n'est pas nulle.

Corollaire 2.3. *Soient A une matrice $I \times I$ positive et $K = \{i / p_i \operatorname{Ker} A = \{0\}\}$. Alors la matrice $\mathrm{env}_{K, I} A$ est régulière.*

Corollaire 2.4. *Soit A une matrice $I \times I$ positive. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) *pour tout $i \in I$, les conditions équivalentes précédentes sont vérifiées,*

ii) *pour tout $D \in G_I(A)$,* $\operatorname{rg}(A - D) = \operatorname{rg} A$,

iii) *pour tout $K \subseteq I$,* $\det(\mathrm{env}_{K, I} A) = 0$.

i) $\Rightarrow$ ii) évidemment.

non i) $\Rightarrow$ non ii). Soit $(h_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments d'un espace de Hilbert telle que $A(i, j) = \langle h_i, h_j \rangle$ et soit i tel que h_i ne soit pas combinaison linéaire des $(h_j)_{j \neq i}$. Pour tout l notons h_l' la projection de h_l sur l'espace engendré par les $(h_j)_{j \neq i}$ et $h_i'' = h_i - h_i'$.

Nous avons

$$<h_l\,, h_j> \;=\; <h'_l\,, h'_j> \text{ si } l \neq i \text{ ou } j \neq i,$$

$$<h_i\,, h_i> \;=\; <h'_i\,, h'_i> \;+\; <h''_i\,, h''_i>$$

et $$<h''_i\,,\, h''_i> \neq 0.$$

Le rang de la famille (h'_j) est égal au rang de la famille (h_j) moins 1.

i) $\Longleftrightarrow$ pour tout i, $A\,(i\,,\,i) - \rho_i(A) \;=\; 0$

$\Longleftrightarrow$ pour tout i, $\mathrm{env}_{i\,,\,I}(A) \;=\; 0$

$\Longleftrightarrow$ pour tout $K \subseteq I$, $\det_{K\,,\,I} A = 0$ (en effet si pour un $K \subseteq I, \mathrm{env}_{K,I} A$ est régulière, pour tout $L \subset K, \mathrm{env}_{L,I} A$ est régulière.

3. **Proposition 3.1.** *Soient* $A \in P_I$ *et* $D \in G_I\,(A)$.

i) *Si* T *est une forme linéaire strictement positive sur* $\boldsymbol{R}^I$ *et si* $T\,(D) = \max\, T\,(A)$ *alors* $G_I(A - D) = \{0\}$.

ii) *Si* $G_I(A - D) = \{0\}$ *alors, pour tout* $K \subseteq I$, $\det\,(\mathrm{env}_{K,\,I}\,A - \mathrm{env}_{K,I} D) = 0$.

i) Supposons $G_I(A - D) \neq \{0\}$ et soit $d \neq 0$, appartenant à $G_I\,(A - D)$. Nous avons $D + d \in G_I(A)$ et $T(D + d) = T(D) + T\,(d)$, ce qui entraine $T\,(D + d) > T\,(D)$.

ii) Résulte de résultats précédents.

Lemme 3.2. *Soient* $A \in P_I$ *et* $D \in D_I^+$, *D non nulle. Posons* $K = \{i \mid D\,(i\,,\,i) \neq 0\}$. *Alors* $\lambda\, D \in G_I(A)$ *si et seulement si* λ *est positif et inférieur à la plus petite valeur propre de* $D_K^{-1/2}\ \mathrm{env}_{K,I}\ A\ D_K^{-1/2}$ *où* D_K *est le mineur principal de* D *défini par* K.

Corollaire 3.3. *Si* $D \in G_I(A)$, $D \neq 0$, *il existe* $\lambda \geqslant 1$ *tel que* $\det(A - \lambda\, D) = 0$ *et* $\lambda\; D \in\; G_I(A)$.

4. 4.1. Nous voulons maintenant démontrer le

THEOREME. *Soient* A *une matrice carrée* $(I \times I)$ *rélle positive et* T *une forme linéaire strictement positive sur* $\boldsymbol{R}^I$. *Alors il existe une et une seule matrice diagonale positive* $(I \times I)$ D *vérifiant :*

i) $A - D$ *est positive*

ii) *si* d *est une matrice diagonale positive telle que* $A - d$ *soit positive on a* $Td \leqslant TD$.

De plus, l'application qui à A fait correspondre D est continue.

4.2. Notons mat $T(A)$ (comme maximum atteint) l'ensemble

$$G_I(A) \cap T^{-1} (\max T(A)).$$

. Au n° 1 de ce paragraphe nous avons vu que cet ensemble était non vide et convexe. Au n° 3, nous avons vu que si $D \in$ mat $T(A)$, alors $\det(A - D) = 0$ où T est la matrice diagonale où les $T(i, i)$ sont des indéterminées.

Proposition. *Soit A une matrice $I \times I$. Tout sous-espace affine contenu dans la variété* $\det(A - T) = 0$ *est contenu dans un hyperplan parallèle à un hyperplan de coordonnée.*

Soit L un sous-espace affine.

i) Pour tout couple de points D et D' de L, il existe i tel que $D(i) = D'(i)$: en effet, si $D = D'$ c'est vrai et si $D \neq D'$, le polynôme en C, $\det [A (C D_1 + (1 - C) D_2)]$, est identiquement nul. En particulier le coefficient du terme de plus haut degré en C est nul. Il est facile de voir que ce coefficient est

$$\prod_{i \in I} (D_2(i) - D_1(i)),$$

d'où la conclusion.

ii) A partir de i) nous démontrons qu'il existe i tel que $p_i(L)$ soit réduit à un point. Soit

$$h = \inf_{D, d \in L} \text{card} \{i/D(i) = d(i)\}.$$

Nous venons de voir que $k \geqslant 1$. Soient D et d deux points de L tels que card $\{i/D(i) = d(i)\} = k$. Notons $C = \{i/D(i) = d(i)\}$ et D_a la matrice $a D + (1 - a) d$ où $a \in R$. Soit H un autre point de L et supposons qu'il existe $h \in C$ vérifiant $H(h) \neq D(h)$. Alors pour tout $a \in \boldsymbol{R}$ il existe un $j \in I - C$ tel que $H(j) = D_a(j)$ parce que card $\{i/H(i) = D_a(i)\} \geqslant k$ et que $H(h) \neq D_a(h) = D(h)$. Nous venons de montrer que, sous l'hypothèse faite, la famille $(E_j)_{j \in I - C}$, définie par $E_j = \{a/a \in \boldsymbol{R}$ et $D_a(j) = H(j)\}$, recouvre $\boldsymbol{R}$. Il existe donc un A_j ayant au moins deux éléments distincts a et b. Nous avons, pour ce j, $H(j) = D_a(j) = D_b(j)$ donc $H(j) = D(j) = d(j)$ ce qui est contradictoire.

4.3. On a tout ce qu'il nous faut pour démontrer le théorème. Nous allons d'abord montrer que l'ensemble $C = \{i/p_i$ mat $T(A)$ est un point$\}$ est égal à I.

Ce qui précède montre que $C \neq \phi$. Considérons la matrice diagonale D définie par $D(i) = p_i$ mat $T(A)$ si $i \in C$ et $D(i) = 0$ si $i \notin C$. Nous avons évidement "$d \in$ mat $T(A - D)$ si et seulement si $d + D \in$ mat $T(A)$". De plus $d \in$ mat $T(A - D)$ entraine $d(i) = 0$ pour tout $i \in C$. On a tout ce qu'il nous faut pour récurrer sur le cardinal de I, la propriété étant évidemment vraie pour card $I = 1$. En effet $d \in$ mat $T(A - D)$ équivaut à $d_c \in \mathrm{env}_{C,I}(A - D)$ et $d(j) = 0$ pour $j \in C$. La continuité de l'application mat $T : P_I \to D_I^+$ se démontre en appendice au cas où $T = G_I, \varphi = T \circ p_2$.

Nous conseillons au lecteur de calculer mat $T(A)$ pour une matrice 2×2.

APPENDICE : CONTINUITE DES RELATIONS BINAIRES

0. Pour démontrer la continuité de la fonction mat T nous avons besoin d'un théorème dit du maximum, qui se trouve dans le livre de Claude Berge [1] p. 132, § 3 du chap. 6.

Mais les paragraphes 1 et 2 qui amènent à ce théorème sont parsemés de quelques coquilles. Comme nous ne connaissons pas d'autres références nous nous sentons obligés d'en donner ici une démonstration.

Nous suivons les idées et les voies de Berge.

1. Précisons des points de langage. Soient X et Y deux espaces topologiques et soit Γ une relation binaire de X vers Y ; nous dirons que

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & X \\ Y & \end{tikzcd}$$

représente Γ (ou est une représentation de Γ) lorsque G est un espace topologique, g et f des applications vérifiant $\Gamma = fg^{-1}$. Nous noterons G_Γ le graphe de Γ, G_Γ est un ensemble que nous munirons quand besoin sera d'une topologie précisée à chaque fois. Lorsqu'aucune ambiguité ne sera possible nous noterons simplement $G_\Gamma \to X$ la projection canonique de G_Γ dans X. Nous noterons par le même symbole la relation Γ et l'application de X dans $\mathcal{P}(Y)$ associée.

Lemme 1.1. Soient $\Gamma : E \to F$ une relation binaire où E et F sont des espaces topologiques. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) pour tout fermé F de Y, $\Gamma^{-1}(F)$ est fermé dans X,

ii) il existe une représentation de Γ $\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{g} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ Y & & \end{array}$ où g

est fermée (i.e. pour tout fermé F de G, $g(F)$ est fermé dans X) et où f est continue,

iii) l'application $G_\Gamma \to X$ est fermée lorsqu'on munit G_Γ de la topologie image réciproque par $G_\Gamma \to Y$ de la topologie de Y,

iv) l'application $\Gamma : X \to \mathcal{P}_\Omega(Y)$ est continue (où $\mathcal{P}_\Omega(Y)$ désigne l'ensemble des parties de Y, $\mathcal{P}(Y)$, muni de la topologie la moins fine parmi celles qui vérifient pour toute partie ouverte O de Y, $\mathcal{P}(O)$ est ouvert).

L'équivalence de i) et iii) est visible. Ensuite il suffit d'écrire iii) $\Rightarrow$ ii) et ii) $\Rightarrow$ i) pour qu'on ait les démonstrations. Pour voir l'équivalence de i) et iv) contemplons la topologie définie dans iv) sur $\mathcal{P}(Y)$. Les ouverts de cette topologie sont les réunions d'ensembles de la forme $\mathcal{P}(O)$ où O est un ouvert de Y (vérification facile : on constate d'abord que l'ensemble de ces parties vérifient les axiomes d'un ensemble d'ouverts d'une topologie sur $\mathcal{P}(Y)$, ensuite on constate que pour la topologie qui nous intéresse ces ensembles doivent être ouverts).

L'application Γ est continue si et seulement si pour tout ouvert O de Y, $\Gamma^{-1}(\mathcal{P}(O)) = \{x/\Gamma(x) \subseteq O\}$ est ouvert ce qui évidemment est équivalent à : pour tout fermé F de Y, $\Gamma^{-1}(F) = \{x/\Gamma(x) \cap F \neq \phi\}$ est fermé (Γ désignant ici la relation).

Définition 1.2. Nous dirons qu'une relation $\Gamma : X \to Y$, où X et Y sont des espaces topologiques, est d'image réciproque fermée, en abrégé I.R.F., si elle vérifie les conditions équivalentes précédentes.

Les relations I.R.F. sont appelées par Berge semi-continues supérieurement, nous préférons ici une autre terminologie à cause des risques de confusion avec d'autres notions.

Lemme 1.3. i) Soit $f : X \to \overline{R}$ une application semi-continue inférieurement (i.e. vérifiant pour tout $k \in \overline{R}$, $f^{-1}(]k, +\infty])$ est ouvert, ce qui est équivalent à : pour tout $k \in \overline{R}$, $f^{-1}([-\infty, k])$ est fermé) alors la relation $f_\geqslant : X \to \overline{R}$ définie par

$$f_\geqslant(x) = \{y/y \in \overline{R} \text{ et } y \geqslant f(x)\} \text{ est I.R.F.}$$

ii) Soit $f : X \to \overline{R}$ une application semi-continue supérieurement (i.e. vérifiant pour tout $k \in \overline{R}, f^{-1}$ $([-\infty, k[)$ est ouvert, ce qui est équivalent à, pour tout $k \in \overline{R}, f^{-1}$ $([k, +\infty])$ est fermé) alors la relation $f_{\leqslant} : X \to \overline{R}$ définie par $f_{\leqslant}(x) = \{y / y \in \overline{R}$ et $y \leqslant f(x)\}$ est I.R.F.

i) Soit F un fermé de $\overline{R}$,

$$\begin{aligned} f_{\geqslant}^{-1}(F) &= \{x / f_{\geqslant}(x) \cap F \neq \phi\} \\ &= \{x / f(x) \leqslant \sup F\} \\ &= f^{-1}([-\infty, \sup F]) \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

La démonstration de ii) est identique.

Lemme 1.4. Soit $\Gamma : X \to \overline{R}$ une relation I.R.F. telle que $\Gamma(x)$ soit non vide et fermé pour tout $x \in X$. Alors $\Gamma_m : X \to \overline{R}$ (resp. $\Gamma_M : X \to \overline{R}$) définie par $\Gamma_m(x) = \inf \Gamma(x)$ (resp. $\Gamma_M(x) = \sup \Gamma(x)$) est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement).

Ecrivons

$$\begin{aligned} \Gamma_m^{-1}([-\infty, k]) &= \{x / \Gamma_m(x) \in [-\infty, k]\} \\ &= \{x / \Gamma(x) \cap [-\infty, k] \neq \phi\} \\ &= \Gamma^{-1}([-\infty, k]) \end{aligned}$$

etc.

1.5. Les propriétés des relations I.R.F. se déduisent sans peine des propriétés des applications fermées [2] § 5, chap. 1. Remarquons que si $f : X \to Y$ est une application alors f^{-1} est I.R.F. si et seulement si f est fermée.

2. La propriété "être fermée", pour une application, n'est pas universelle, cf. toujours Bourbaki, il en est de même de la propriété "être I.R.F." pour une relation.

Définition 2.1. Nous dirons qu'une relation $\Gamma : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est universellement d'image réciproque fermée, en abrégé UIRF, si pour tout espace topologique Z la relation $\Gamma \times 1_Z$ de $X \times Z$ dans $Y \times Z$ est I.R.F.

Lemme 2.2. Soit $\Gamma : X \to Y$ une relation entre deux espaces topologiques. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) la relation Γ est UIRF,

ii) l'application $G_\Gamma \to X$ est universellement fermée lorsqu'on munit G_Γ de la topologie image réciproque, par $G_\Gamma \to Y$, de la topologie de Y,

iii) il existe une représentation de Γ par

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\quad g \quad} & X \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \\ Y & & \end{array}$$

où g est universellement fermée et f continue,

iv) la relation Γ est IRF et, pour tout $x \in X$, $\Gamma(x)$ est quasi-compact,

v) même chose et, pour toute partie quasi-compacte K de X, $\Gamma(K)$ est quasi-compacte.

i) $\Longleftrightarrow$ ii) Soit Z un espace topologique. Le graphe de $\Gamma \times 1_Z$ s'identifie naturellement à $G_\Gamma \times Z$. La projection $G_\Gamma \times Z \to X \times Z$ est identifiée naturellement à $p \times 1_Z$ où p est la projection $G_\Gamma \to X$. La topologie image réciproque, par $G_\Gamma \times Z \to Y \times Z$, de la topologie de $Y \times Z$ est justement la topologie produit de la topologie de Z par la topologie sur G_Γ image réciproque par $G_\Gamma \to Y$, de celle de Y. Cela suffit pour la démonstration.

ii) $\Rightarrow$ iii) sans problème.

iii) $\Rightarrow$ v) par [2] prop. 6 du n° 4 § 10 chap. 1 énoncé pour les applications propres mais tout aussi valable pour les applications universellement fermées.

v) $\Rightarrow$ iv) sans problème.

iv) $\Rightarrow$ ii) D'après le lemme 1.1. iii) et le théorème 1 de [2] chap. 1, § 10, n° 2 énoncé pour les applications propres mais tout aussi valable pour les applications universellement fermées, il nous suffit de démontrer que, pour tout $x \in X$, $p^{-1}(x)$ est une partie quasi-compacte de G_Γ (où p désigne la projection $G_\Gamma \to X$) muni de la topologie image réciproque habituelle depuis le début de ce bla-bla.

Soit $(0_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $p^{-1}(x)$ dans G_Γ. Nous pouvons écrire $0_i = q^{-1}(U_i)$ où q est la projection de G_Γ dans Y et U_i est un ouvert de Y.

Nous avons

$$\Gamma(x) = q\, p^{-1}(x) \subseteq q(\cup\, 0_i) = \cup\, q(0_i) \subseteq \cup\, U_i.$$

Donc il existe une partie finie J de I telle que $\Gamma(x) \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$.

Ecrivons

$$p^{-1}(x) \subseteq q^{-1}(\Gamma(x)) \subseteq q^{-1}\Big(\bigcup_{i \in J} U_i\Big) = \bigcup_{i \in J} q^{-1}(U_i) = \bigcup_{i \in J} 0_i.$$

C.Q.F.D.

Les propriétés des relations UIRF sont donc des conséquences des propriétés des applications continues et des propriétés des applications fermées. Répétons que les propriétés démontrées dans [2], § 10 du chap. 1, n° 1 et 2 pour les applications propres sont valables pour les applications universellement fermées.

La relation composée de deux relations UIRF est évidemment encore UIRF. La relation réciproque d'une immersion fermée est UIRF.

Lemme 2.3. Soit $\Gamma : E \to F$ une relation UIRF. Si F est séparé alors G_Γ est une partie fermée de $E \times F$.

En effet $G_\Gamma = (\Gamma \times 1_F)^{-1} (\Delta_F)$ où Δ_F est la diagonale de $F \times F$.

THEOREME 2.4. Soient $\Gamma : X \to Y$ une relation UIRF et $\gamma : X \to Y$ une relation à graphe fermé (G_γ est fermé dans $X \times Y$). Alors $\Gamma \cap \gamma$ est UIRF.

Notons i l'injection canonique $G_\gamma \to X \times Y$. Nous avons

$$\Gamma \cap \gamma = p \circ i \circ i^{-1} \circ (1_X \times \Gamma) \circ \Delta_X$$

où p est la projection $X \times Y \to Y$ et Δ_X la diagonale $X \to X \times X$.

THEOREME 2.5. (dit du maximum) – Soit $\varphi : X \times Y \to \overline{R}$ une application continue supérieurement. Soit $\Gamma : X \to Y$ une relation UIRF telle que $\Gamma(x) \neq 0$ pour tout $x \in X$.

Alors i) l'application qui à $x \in X$ fait correspondre

$$M(x) = \max \{\varphi(x , y)/y \in \Gamma(x)\}$$

est semi-continue supérieurement,

ii) Si de plus M est continue la relation qui à $x \in X$ fait correspondre

$$Mp(x) = \{y/y \in \Gamma(x) \text{ et } \varphi(x , y) = M(x)\}$$

est UIRF.

Soit

$$\gamma = \varphi_{\leqslant} \circ (1_X \times \Gamma) \circ \Delta_X,$$

cette relation est I.R.F. par composition et $\gamma(x)$ est fermé non vide pour tout x. Comme nous avons $M(x) = \sup \gamma(x)$, i) est conséquence du lemme 1.4.

iii) Considérons la relation $\delta : X \to Y$ définie par

$$\delta(x) = \{y / \varphi(x, y) - M(x) \geqslant 0\} .$$

Le graphe de δ est

$$\{(x, y) / (\varphi - M \circ p)(x) \geqslant 0\}$$

où p est la projection de $X \times Y$ dans X. Comme $\varphi - M \circ p$ est semi-continue supérieurement le graphe de δ est fermé.

Nous avons $M_\varphi = \delta \cap \Gamma$ d'où la conclusion par le théorème précédent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGE C. (1959). – Espaces topologiques. Dunod. Paris.

[2] BOURBAKI N. (1965). – Topologie générale. Hermann. Paris.

[3] DARROCH J.N. (1969). – Some further inequalities and an identity in factor analysis. *Psychometrika*, 5, p. 75 – 99.

[4] GUTTMAN L. (1940). – Multiple rectilinear prediction and the resolution into components. *Psychometrika*, 5, p. 75 – 99.

[5] GUTTMAN L. (1954). – Some necessary conditions for common factor analysis. *Psychometrika*, vol. 19, n° 2, p. 149 – 161.

[6] ROMIER G. (1972). – Analyse factorielle classique (de Spearman). Multigraphié. I.U.T., Dep. de Stat., place de Verdun, 38031 Grenoble CEDEX, France.

[7] ROFF M. (1935). – Some properties of the communality in multiple factor theory. *Psychometrika*, vol. 1, p. 1 – 6.

[8] RUMMEL R.J. (1970). – Applied factor analysis. Northwestern University Press.

[9] TORRENS-IBERN J. (1972). – Modèles et méthodes de l'analyse factorielle. Dunod. Paris.

M.H.
U.E.R. de Mathématique
Université Paris X
92 – NANTERRE (France)

Les autres
U.E.R. de Math. Appliquées.
aux Sciences Humaines
Université Paul Valéry
34 – MONTPELLIER – (France)