CAHIERS DU BURO

MONIQUE HAKIM
ERIC-OLIVIER LOCHARD
JEAN-PIERRE OLIVIER
ERIC TEROUANNE

Sur les traces de Spearman (II) Le problème des rangs

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 25 (1976), p. 23-37

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1976__25__23_0>

SUR LES TRACES DE SPEARMAN (II)

Le problème des rangs

Monique HAKIM, Eric-Olivier LOCHARD,
Jean-Pierre OLIVIER, Eric TEROUANNE

Résumé. On étudie et compare les propriétés des quantités $r(A) = \inf\{\mathrm{rg}\,(A - D)/D$ diagonale$\}$ et $\mathrm{rm}\,(A) = \inf\{\mathrm{rg}\,(A - D)/D$ diagonale positive et $A - D$ positive$\}$ où A est une matrice symétrique positive.

INTRODUCTION

En analyse factorielle l'étude de la variation du rang d'une matrice carrée en fonction de ses éléments diagonaux est directement issue de l'idée fixe de Spearman : obtenir *à tout prix* des matrices positives de rang 1 en extrayant des spécificités (i.e. des matrices diagonales positives) des matrices de corrélations intertests qu'il obtenait.

Après Thurstone ce problème est lié à une autre hypothèse sur les résultats expérimentaux obtenus : ils s'expliquent toujours par un très petit nombre de facteurs. On devine aussi dans les travaux des factorialistes distingués la croyance implicite que, de toute façon, les matrices de corrélations A telles que sur (A) (cf résumé) soit grand par rapport à l'ordre n de A sont rares. C'est un fait que nous contredisons au § 2 de ce papier.

Actuellement les dessinateurs de données ne jurent que par les petits rangs, mais l'analyse factorielle au sens de Spearman n'a, diantre, rien à faire avec la représentation des données. Du moins telle qu'elle (l'analyse de Spearman) est vue par ses principaux utilisateurs, encore aujourd'hui.

En bref ce problème nous paraît être un accident historique donc ce papier aussi nous paraît être un accident.

Au paragraphe 1 nous étudions la variation du rang d'une matrice carrée, en fonction de ses éléments diagonaux, sur un corps quelconque. Walter Ledermann a écrit un article en 1938 sur ce sujet [6], nous offrons un pétale de rose à quiconque énoncera clairement et démontrera surement les résultats que Ledermann a voulu nous communiquer. Ce papier ([6]) est très souvent cité et toujours mal interprété comme le montrent nos résultats.

Au paragraphe 2 nous donnons des propriétés de la quantité qui intéresse vraiment l'analyse factorielle. Les résultats sont parfois surprenants quand on les compare à ce qui se dit dans la littérature sur ce sujet.

Un travail conceptuel reste à faire qui éclairerait les résultats qui suivent.

§ 0 – NOTATIONS, RAPPELS

0.1. Si A est une matrice $I \times J$ et si $K \subseteq I$ et $L \subseteq J$, on note $A(K, L)$ le mineur de A définie par K et L.

0.2. Si A est une matrice $I \times I$ et B une matrice $J \times J$, on note $A \oplus B$ la matrice C sur $(I \amalg J) \times (I \amalg J)$ définie par $C(I, I) = A$, $C(J, J) = B$ et $C(I, J) = 0$ et $C(J, I) = 0$.

0.3. Si A est une matrice carrée réelle $I \times I$ nous dirons qu'elle est positive si

i) elle est symétrique,

ii) pour tout $x \in R^I$, ${}^t x\, A\, x \geqslant 0$.

Les caractérisations et propriétés des matrices positives sont utilisées sans vergogne.

0.4. Si A est une matrice, on note ${}^tA$ la matrice transposée : ${}^tA(i, j) = A(j, i)$.

0.5. On notera M_I (resp. S_I) l'ensemble des matrices carrées (resp. symétriques) et $I \times I$ sur le corps k.

Si k est le corps des réels R on note P_I l'ensemble des matrices positives.

On ajoute un * à M, S, P pour signaler qu'on s'intéresse aux matrices régulières.

0.6. Enfin rappelons le résultat suivant :

Si D est une matrice $I \times I$ *diagonale et si* $A \in M_I$

$$\det(A + D) = \sum_{H \subseteq I} \det A(H, H) \det D(I - H, I - H).$$

Il nous arrivera de noter D^{I-H} la quantité $\det D(I - H, I - H)$.

0.7. Si A est une matrice réelle $I \times I$ positive on note $G_I(A)$ l'ensemble des matrices diagonales positives D telles que $A - D$ soit positive. Nous avons étudié G_I dans [5].

§ 1 – LE RANG MINIMUM SANS CONTRAINTE

0. 0.1. **Définition.** *Soit* A *une matrice carrée,* $I \times I$, *sur le corps* k. *On appelle rang minimum de* A *sans contrainte et on note* $r(A)$ *la quantité* $\inf\{\mathrm{rg}(A + D)/D$ *matrice* $I \times I$, *diagonale sur* $k\}$.

0.2. *Propriétés immédiates.* Nous avons

i) $r(A \oplus B) = r(A) + r(B)$ et $r(D\,A\,T) = r(A)$ si D et T *sont deux matrices diagonales régulières,* $r(A + D) = r(A)$ *si* D *est diagonale* ;

ii) $r(A) \leqslant \mathrm{rg}\, A$ et $r(A) \leqslant \mathrm{card}\, I - 1$, *si* A *est une matrice* $I \times I$;

iii) $r(S_I^*) = \{0, \ldots, n-1\}$.

Pour montrer que $r(A) \leqslant n - 1$ il suffit de prendre pour D la matrice définie par $D(i, i) = -\sum_j A(i, j)$.

Pour montrer que $r(S_I^*) = \{0, \ldots, n\text{-}1\}$, par i) il suffit de montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe une matrice A, $n \times n$, régulière et symétrique vérifiant $r(A) = n - 1$. Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$ une famille d'éléments non nuls de k. Soit A la matrice $n \times n$ définie par $A(i, i + 1) = a_i$ et $A(i + 1, i) = a_i$ si $i \neq n$, $A(i, j) = 0$ dans les autres cas. Pour toute matrice diagonale D, les lignes 2 à n de la matrice $A + D$ sont linéairement indépendantes donc $r(A) \geqslant n - 1$. Et si le corps k est infini il est facile, pour toute matrice $n \times n, A$, de trouver D diagonale telle que $A + D$ soit régulière. L'exemple précédent est apparu pour la première fois dans la littérature dans [4]. On montre plus loin que c'est la forme typique des matrices symétriques $n \times n$, A, telles que $r(A) = n - 1$.

1. 1.1. Une propriété beaucoup moins immédiate est celle dite des rangs intermédiaires :

Théorème de Térouanne. *Soit A une matrice $n \times n$ sur le corps infini k de rang $p < n$. Alors il existe une matrice diagonale D telle que le rang de $A + TD$ soit $p + 1$, pour toute matrice diagonale régulière T.*

Pour une démonstration voir [9].

1.2. **Corollaire.** *Si A est une matrice $n \times n$ l'image par l'application* rg $(A + .)$ *de l'ensemble des matrices diagonales est* $\{r(A), \dots, n\}$.

2. 2.1. Dans [10], Tumura et Fukutomi énoncent le très joli théorème nippon qui suit, malheureusement leur démonstration est irrémédiablement fausse. Nous en donnons ici une démonstration qui est correcte.

Théorème nippon.

Soit A une matrice $n \times n$, symétrique, sur un corps infini k. Alors si $r(A) = n - 1$ sur toute ligne il y a au plus deux éléments non diagonaux non nuls.

Nous savons d'après le théorème de Térouanne que $r(A) \leqslant n - 2$ si et seulement si il existe une matrice diagonale D vérifiant $\operatorname{rg}(A + D) = n - 2$.

D'après le théorème de Kronecker [1], dire que il existe D diagonale vérifiant $\operatorname{rg}(A + D) = n - 2$ revient à dire qu'il existe D diagonale et deux éléments distincts a et b de l'ensemble des indices I tels que

$$S(a, b) = \det(A + D)(I - \{a, b\}, I - \{a, b\}) \neq 0$$

$$T(a, b) = \det(A + D)(I - \{a\}, I - \{b\}) = 0$$

$$\det(A + D)(I - \{a\}, I - \{a\}) = 0$$

$$\det(A + D)(I - \{b\}, I - \{b\}) = 0.$$

On remarquera que s'il existe D tel que les deux premières relations soient satisfaites alors il existera une solution au système : en effet les deux premières sont indépendantes de $D(a, a)$ et $D(b, b)$ et les deux dernières sont linéaires en $D(a, a)$ et $D(b, b)$ resp., le coefficient des dits étant $\det(A + D)(I - \{a, b\}, I - \{a, b\})$.

Soit $c \in I - \{a, b\}$. Développons les polynômes $S(a, b)$ et $T(a, b)$ en $D(c, c)$. Nous avons

$$S(a, b) = U(a, b, c)\, D(c, c) + V(a, b, c)$$

$$T(a, b) = W(a, b, c)\, D(c, c) + X(a, b, c).$$

Comme $U(a, b, c)$ n'est pas identiquement nul, si on peut trouver a, b, c tels que les polynômes en $(D(i,i))_{i \notin \{a,b,c\}}$, $Y(a, b, c) = V(a, b, c)$ $W(a, b, c) - U(a, b, c)\, X(a, b, c)$ et $W(a, b, c)$ ne soient pas identiquement nuls, alors on pourra trouver des $D(i, i)$, $i \notin \{a, b, c\}$ tels que $Y(a, b, c)$ $(D(i, i)_i) \neq 0$ et $W(a, b, c)\,(D(i, i)) \neq 0$. On pourra alors trouver $D(c, c)$ vérifiant $S(a, b)\,(D(i, i)_{i \notin \{a,b\}}) \neq 0$ et $T(a, b)\,(D(i, i)_{i \notin \{a,b\}}) = 0$. On aura ainsi montré que $r(A) \leqslant n-2$.

Supposons que dans la matrice A il existe une ligne l sur laquelle il y a au moins trois éléments non diagonaux non nuls. Soient a, b, c trois indices tels que $A(l, a)\, A(l, b)\, A(l, c) \neq 0$.

Par changement de variable on peut supposer que la diagonale de A est nulle, ce que nous ferons dans la suite de cette démonstration.

Procédons par ordre et posons $J = I - \{a, b\}$, $K = I - \{a, b, c\}$. Soit, $w \notin I$ et B la matrice carrée indiciée sur $J \cup \{w\}$ définie par

$$B(i, j) = A(i, j) \quad \text{si } i \neq w \text{ et } j \neq w,$$

$$B(w, j) = A(a, j) \quad \text{si } j \neq w,$$

$$B(i, w) = A(i, b) \quad \text{si } i \neq w,$$

$$B(w, w) = A(a, b).$$

Nous avons

$$U(a, b, c) = \sum_{H \subseteq K} \det A(H, H)\, D^{K-H},$$

$$V(a, b, c) = \sum_{H \subseteq K} \det A(H \cup \{c\}, H \cup \{c\})\, D^{K-H},$$

$$W(a, b, c) = \sum_{H \subseteq K} \det B(H \cup \{w\}, H \cup \{w\})\, D^{K-H},$$

$$X(a, b, c) = \sum_{H \subseteq K} \det B(H \cup \{w, c\}, H \cup \{w, c\})\, D^{K-H}.$$

Rappelons que

$$D^{K-H} = \prod_{i \in K-H} D(i, i).$$

On voit que

$$Y(a, b, c) = \sum_{\substack{E \subseteq K \\ F \subseteq K \\ E \cap F = \emptyset}} z(E, F)\, D^E (D^2)^F$$

où

$$z(E, F) = \sum_{\substack{L \subseteq K,\, H \subseteq K \\ L \cup H = K - F \\ L \,\Delta\, H = E}} \det A(H, H) \det B(L \cup \{w, c\}, L \cup \{w, c\})$$

$$- \det A(H \cup \{c\}, H \cup \{c\}) \det B(L \cup \{w\}, L \cup \{w\}).$$

On voit alors que :

– le coefficient de $D^{J - \{l\}}$ dans $W(a, b, c)$ est

$$A(l, b)\, A(l, a)$$

– celui de $(D^2)^{K - \{l\}}$ dans $Y(a, b, c)$ est

$$A(l, c)^2\, A(l, a)\, A(l, b),$$

(faire $E = \emptyset$ et $F = K - \{l\}$ dans la formule précédente), donc W et Y ne sont pas identiquement nuls.

2.2. Il nous reste à étudier le rang minimum sans contrainte des matrices symétriques telles que toute ligne ait au plus deux éléments non diagonaux non nuls. Soit A une matrice $I \times I$ symétrique vérifiant la propriété précédente. A l'aide de A on définit une relation symétrique R sur I par $R(i) = \{j / j \in I$ et $j = i$ ou $A(i, j) \neq 0\}$. On note Q la relation d'équivalence engendrée par R.

Lemme.

i) *Nous avons* $A = \bigoplus_{K \in I/Q} A(K, K)$.

ii) *Si K est une composante de I modulo Q, il existe une famille $(a_k)_{k \in K}$ de scalaires dont au plus un est nul, et une permutation transitive σ de K telles que $A(i, \sigma(i)) = a_i$ pour tout $i \in K$.*

Rappelons qu'une permutation σ est dite transitive si pour tout couple (i, j) d'éléments de K il existe une puissance de σ qui envoie i sur j.

La démonstration de i) est immédiate, celle de ii) va de soi. Elle est purement technique et n'ajoute rien à la compréhension de ce qui suit. Nous la laissons donc au lecteur.

2.3. **Corollaire.** *Avec les notations précédentes nous avons* $r(A) = n - n_1 - 2n_2$ *où* n_1 *est le nombre des classes modulo* Q *dans lesquelles il existe une ligne ayant au plus un élément non diagonal non nul, et où* n_2 *est le nombre des autres classes.*

Il suffit d'étudier le cas où I a une seule classe. Nous utilisons les notations du lemme 2.2.

Si il existe un i tel que $a_i = 0$ la famille $(A(j,.))_{j \neq i}$ est libre donc $r(A) \geqslant n - 1$.

Si pour tout i, $a_i \neq 0$, en réutilisant les notations de la démonstration du théorème nippon on voit que

$$T(i, \sigma(i)) = a_i S(i, \sigma(i)) + F(i, \sigma(i))$$

où $F(i, \sigma(i))$ est un déterminant où les lignes sont linéairement indépendantes quelle que soit la diagonale, et c'est donc une constante non nulle. Comme $S(i, \sigma(i))$ n'est pas identiquement nulle, elle prend toute les valeurs scalaires possibles, en particulier la valeur $-F(i, \sigma(i))/a_i$. C.Q.F.D.

3. 3.1. Nous allons caractériser les matrices A vérifiant $r(A) \leqslant 1$. Comme depuis 70 ans on commet quelques erreurs sur ce petit sujet, nous allons démontrer minutieusement la

Proposition

Soit A une matrice $I \times I$ sur le corps k. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $r(A) \leqslant 1$,

ii) *il existe une matrice ligne L, une matrice colonne K et une matrice diagonale D telles que*

$$A = KL + D,$$

iii) *les propriétés suivantes sont vérifiées :*

a) *si j et k sont deux points distincts de I tels que* $A(j,k)A(k,j) = 0$ *alors pour tout* $i \in I - \{j,k\}$, $A(j,i)A(i,k) = 0$,

b) *pour tout couple* (H, K) *de parties disjointes, à deux éléments, de* I *on a* $\det A(H,K) = 0$,

c) *si,* i, j, k *sont trois éléments deux à deux distincts de* I *et si* $l \notin I - \{i,j\}$ *on a*

$$A(l,j)A(j,i)A(i,k) = A(l,i)A(i,j)A(j,k).$$

Remarquons que si A est symétrique la condition "a) et b) et c)" est équivalente à "a) et b)", mais même dans ce cas la condition a) est indépendante de la condition b).

i) $\Rightarrow$ ii). Soit A une matrice de rang inférieur ou égal à 1. Il existe une colonne de A, soit K, telle que toute autre colonne de A soit un multiple de K. La matrice L est définie par $A(.,i) = L(i)K$.

ii) $\Rightarrow$ i) et iii). Sans problème.

iii) $\Rightarrow$ ii). On peut supposer que la matrice A n'est pas diagonale. Soient donc i et j deux éléments distincts de I tels que $A(j,i) \neq 0$. Nous allons montrer qu'on peut choisir la diagonale de façon à ce que les colonnes de A soient des multiples de la colonne i.

Supposons d'abord que l'indice k de la colonne est différent de i et de j. Si $A(j,k) = 0$, d'après la condition a), nous avons $A(i,k) = 0$ et d'après la condition b) nous avons $A(l,k) = 0$ pour $l \neq i$ et $l \neq k$. Nous voilà satisfait. Examinons maintenant le cas où $A(j,k)$ est non nul. Nous devons d'abord montrer que pour $l \in \{i,j,k\}$,

$$A(l,k)A(j,i) = A(j,k)A(l,i),$$

mais c'est dans la condition b). Lors nous devons choisir l'élément $A(i,i)$ de façon que :

$$A(j,k)A(i,i) = A(j,i)A(i,k).$$

Ce qui nous entraîne à vérifier une condition de cohérence entre nos choix de $A(i,i)$: si $l \notin \{i,j,k\}$ et si $A(j,l) \neq 0$, on doit avoir

$$A(j,i)A(j,k)A(i,l) = A(j,i)A(j,l)A(i,k)$$

ce qui est vérifié grâce à b).

Examinons la colonne j. Plusieurs cas sont à envisager. Si pour tout $k \notin \{i, j\}, A(j, k) = 0$, il suffit de regarder ce qui se passe dans la ligne $l \notin \{i, j\}$ et on est comblé parce que la matrice $A(I - \{i, j\}, \{i, j\})$ est de rang 1 par la condition b). Il nous reste à régler le cas où il existe un $k \notin \{i, j\}$ tel que $A(j, k)$ ne soit pas nul. Nous sommes obligés de prendre

$$A(i, i) = A(j, i) A(i, k) / A(j, k).$$

Si $A(i, k) = 0$, on a $A(i, j) = 0$ par a) et on est sauvé par b). Si $A(i, k) \neq 0$ il faut montrer qu'on peut trouver un h vérifiant

$$A(i, j) = h A(i, i) \quad \text{et} \quad A(l, j) = h A(l, i)$$

si $l \notin \{i, j\}$ mais ceci est conséquence de c). Ouf !

3.2. **Corollaire.** *Soit A une matrice $I \times I$, symétrique, sur le corps k. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) $r(A) \leqslant 1$,

ii) *il existe un scalaire h, une matrice colonne K et une matrice diagonale D tels que $A = h K {}^tK + D$,*

iii) *si j et k sont deux points distincts de I tels que $A(j, k) = 0$, alors pour tout $i \in I - \{j, k\}, A(j, i) A(i, k) = 0$, et pour tout couple (H, K) de parties disjointes, à deux éléments, de I on a* $\det A(H, K) = 0$.

Soit A une matrice symétrique de rang 1. Elle a une seule valeur propre non nulle qui est $p = \Sigma A(i, i)$. Soit K un vecteur propre non nul, i.e. un élément de $A \boldsymbol{R}^I - \{0\}$. Si $P \in \operatorname{Ker} A$, nous avons ${}^tK P = 0$; en effet

$$\begin{aligned} {}^tK P &= \sum_i K(i) P(i) \\ &= 1/p \sum_i \Big(\sum_l A(i, l)\Big) K(l) P(i) \\ &= 1/p \sum_l \Big(\sum_i A(i, l)\Big) P(i) K(l) \\ &= 1/p \sum_l \Big(\sum_i A(l, i)\Big) P(i) K(l) = 0. \end{aligned}$$

En conséquence, nous avons ${}^tK K \neq 0$ et on peut trouver h tel que $h\, {}^tK K = p$. La matrice $A - h K {}^tK$ est nulle : en effet, tout vecteur de $\boldsymbol{R}^I$ s'écrit $P + r K$ où $P \in \operatorname{Ker} A$ et $r \in k$ nous avons

$$(A - h K {}^tK)(P + r K) = \ldots = 0.$$

3.3. Soit k un corps valué non discret. Notons S_I l'ensemble des matrices $I \times I$, symétriques, à coefficient dans k. L'ensemble r^{-1} $([1\,, +\infty[)$ est ouvert dans S_I mais les ensembles r^{-1} $([k, +\infty])$ ne sont pas ouverts dans S_I dès que $\operatorname{card} I \geqslant 3$ et $k > 1$. C'est une conséquence immédiate du numéro 2 et de ce qui précède dans le numéro 3. Avec cela on construit facilement un contre-exemple au théorème du maximum [5] si on ne suppose pas que Γ est U.I.R.F. mais seulement I.R.F.

4. 4.1. Soit k un corps infini, A une matrice $I \times I$ sur k. Soit K une extension de k. Posons $rK\ (A) = \inf\{\operatorname{rg}(A + D)/D$ matrice $I \times I$ diagonale à coefficient dans $K\}$.

Avons-nous $r\,K\,(A) = r\,(A)$?

4.2. Peut-on trouver une caractérisation simple des matrices $n \times n$ de rang minimum $n - 1$? L'hypothèse "le corps est infini", dans le théorème nippon, joue-t-elle un rôle ?

4.3. Peut-on énoncer précisément et démontrer les résultats qui sont suggérés par l'article de Walter Ledermann [6] ?

4.4. Peut-on aller plus loin que les articles de Albert [2] ?

4.5. Peut-on trouver des caractérisations simples des matrices A telles que $r\,(A) = \operatorname{rg} A$? Même sous l'hypothèse "A symétrique".

§ 2 – LE RANG MINIMUM AVEC CONTRAINTES

Dans toute la suite les matrices seront à coefficients réels.

0. 0.1. **Définition.** *Soit A une matrice $I \times I$ positive. On appelle rang minimum, avec contrainte, de A et on note* $\operatorname{rm}(A)$ *la quantité*

$$\inf\{\operatorname{rg}(A - D)/D \text{ diagonale positive et } A - D \text{ positive}\}.$$

0.2. **Propriétés élémentaires.**

i) $\operatorname{rm}(A \oplus B) = \operatorname{rm} A + \operatorname{rm} B$ et $\operatorname{rm}(D\,A\,D) = \operatorname{rm} A$ *pour toute matrice diagonale positive et régulière D.*

ii) $\operatorname{rm} A \leqslant \operatorname{rg} A$ *et* $\operatorname{rm} A = \operatorname{rg} A$ *si et seulement si toute ligne de A est combinaison linéaire des autres lignes de A.*

iii) rm $(P_I^*) = \{0, \ldots, n\text{-}1\}$ *si* card $I = n$.

iv) *L'application* rm $: P_I \to N$ *est semi-continue inférieurement* (i.e. *pour tout* k, $\mathrm{rm}^{-1}\,(]k\,,+\infty])$ *est ouvert*).

i) se démontre sans problème et nous avons déjà démontré ii) dans [5].

iii) Il suffit de démontrer que, pour tout n, il existe une matrice positive A, $n \times n$, régulière telle que rm $A = n - 1$. Pour cela prenons une matrice B symétrique, $n \times n$, telle que $r(A) = n - 1$. On peut trouver D telle que $A = B + D$ soit positive et régulière. Nous avons rm $A = n - 1$.

iv) résulte du théorème du maximum ([5], théorème 2.5. de l'appendice) appliqué à $X = P_I$, $Y = M_I$, $\varphi(A, B) = \mathrm{card}\, I - \mathrm{rg}\,(A - B)$ et $\Gamma = G_I$.

0.3. On voit que si $n = \mathrm{card}\, I$, $\mathrm{rm}^{-1}\,(\{n - 1\})$ est un ouvert dont on aimerait bien avoir une caractérisation portant sur les coefficients. Est-ce un ouvert dense ? Nous espérons que non.

1. 1.1. **Proposition.** *Soit A une matrice $I \times I$ positive de rang r. S'il existe une matrice diagonale D positive telle que $A - D$ soit positive et de rang p, $p < r$, alors il existe une matrice diagonale positive, aussi proche de D que l'on veut, telle que $A - T$ soit positive et de rang $p + 1$.*

Soit H l'ensemble des $i \in I$ tels que $D(i, i) = 0$. On choisit $K \subseteq H$ tel que la famille $(A(i, I))_{i \in K}$ soit une base de l'espace engendré par les $A(i, I)$ quand i parcourt H. On choisit $L \subseteq I - H$ tel que la famille des $A(i, I)$ où i parcourt $L \cup K$ soit une base de l'espace engendré par les vecteurs lignes de $A - D$. Le cardinal de $L \cup K$ est p. On sait ([5] corollaire 2.2. du § 3) que card $H \geqslant n - r$. Nous avons évidemment card $K + (n - \mathrm{card}\, H) \geqslant r > p$ donc $p + \mathrm{card}\, H - \mathrm{card}\, K = \mathrm{card}\,(L \cup H) < n$. Prenons $i \in I - (H \cup L)$ et T une matrice diagonale telle que $0 \leqslant T(i,i) < D(i,i)$ et $T(j,j) = D(j,j)$ pour $j \neq i$. Nous avons clairement $A - T \geqslant 0$. Toute ligne de $A - T$ distincte de la ligne i appartient à l'espace engendré par les lignes dont l'indice appartient à $L \cup K$. Et comme $(A - D)(i, L \cup K)$ s'écrit comme une et une seule combinaison linéaire des $(A - T)(j, L \cup K)$ où j parcourt $L \cup K$, le vecteur $(A - T)(i, I)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $(A - T)(j, I)$ où j parcourt $L \cup K$.

1.2. **Corollaire.** *Si A est une matrice $I \times I$ positive l'image par l'application rg $(A - ?)$ de l'ensemble des matrices diagonales positives D telles que $A - D$ soit positive est* $\{\mathrm{rm}\ A, \ldots, \mathrm{rg}\ A\}$.

Le fait que pour de tels D on ait rg $(A - D) \leqslant$ rg A résulte en particulier du lemme 3.1. du § 1 de [5].

2. 2.1. Nous allons nous intéresser à la positivité et au rang minimum des matrices de la forme $A = K\,{}^tK + D$ où K est une matrice colonne et D une matrice diagonale. Commençons par en donner une caractérisation.

Lemme. *Soit A une matrice réelle symétrique. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *il existe une matrice colonne K et une matrice diagonale D telles que $A = K\,{}^tK + D$,*

ii) $r(A) \leqslant 1$ *et pour toute partie à trois éléments $\{i, j, k\}$ de l'ensemble des indices on a $A(i, j)\, A(j, k)\, A(k, i) \geqslant 0$.*

Comme dans une matrice de rang 1 les $A(i, i)$ vérifient (*) $A(j, k)\, A(i, i) = A(j, i)\, A(i, k)$ et sont positifs on voit que i) $\Rightarrow$ ii).

Si nous avons ii), la matrice A dont les éléments diagonaux d'origine sont remplacés par des $A(i, i)$ qui vérifient (*) est de rang 1 et la condition de positivité contenue dans ii) nous montre qu'on peut choisir les $A(i, i)$ positifs. En reprenant les notations de la démonstration du corollaire 3.2. du § 1, $p = \Sigma\; A(i, i)$ est alors positif, ${}^tK K$ est positif comme somme de carrés donc le h calculé est positif.

2.2. **Lemme.** *Soit $A = K\,{}^tK + U$ où K est une matrice colonne et U une matrice diagonale. La matrice A est positive si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

a) *la matrice U est positive,*

b) *il existe i tel que $U(i, i) < 0$ et pour tout $j \neq i, U(j, j) \geqslant 0$ et $U(j, j) > 0$ si $K(j) \neq 0$ et $1 + \sum\limits_k (K(k)^2 / U(k, k)) \leqslant 0$.*

Supposons A positive et soit i un indice tel que $U(i, i) < 0$. Soit j un indice différent de i. Nous avons $\det A(\{i, j\}, \{i, j\}) \geqslant 0$ c'est-à-dire $K(j)^2\, U(i, i) + K(i)^2\, U(j, j) + U(i, i)\, U(j, j) \geqslant 0$ donc si $K(j) = 0$ on a $U(j, j) \geqslant 0$, *si* $K(j) \neq 0$ et si on suppose $U(j, j) \leqslant 0$ nous avons

$$K(i)^2 > K(i)^2 + U(i, i) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad K(j)^2 \geqslant K(j)^2 + U(j, j) \geqslant 0$$

donc

$$K(j)^2\, U(i, i) + K(i)^2\, U(j, j) + U(i, i)\, U(j, j) < 0$$

ce qui est contradictoire. Nous sommes toujours dans les hypothèses précédentes. Soit H une partie de l'ensemble des indices I. Nous avons

$$\det A\,(H,H) = \sum_{E \subseteq H} \det K\,{}^tK\,(H-E,\,H-E)\,U^E.$$

Si card $(H-E) \geqslant 2$, $\det K\,{}^tK\,(H-E,\,H-E) = 0$; nous avons donc

$$\det A\,(H,H) = \prod_{j \in H} U(j,j) + \sum_{j \in H} K(j)^2 \prod_{l \in H-\{j\}} U(l,l).$$

On trouve alors la condition $1 + \sum_k K(k)^2/\,U(k,k) \leqslant 0$ en écrivant $\det A \geqslant 0$.

Inversement, plaçons-nous dans la condition b) et utilisons les calculs précédents, toujours en appelant i l'indice tel que $U\,(i,\,i) < 0$. Si $i \notin H$ $\det A\,(H,\,H) \geqslant 0$ puisque tout est positif dans son expression. Si $i \in H$ on peut écrire :

$$\det A\,(H,H) = \prod_{l \in H} U(l,l)\,[1 + K(i)^2/U(i,i) + \sum_{l \in H\text{-}\{i\}} H(l)^2/U(l,l)]$$

mais

$$1 + K(i)^2/U(i,i) + \sum_{l \in H\text{-}\{i\}} K(l)^2/U(l,l)$$

est plus petit que

$$1 + K(i)^2/U(i,i) + \sum_{l \in I\text{-}\{i\}} K(l)^2/U(l,l)$$

donc $\det A\,(H,H) \geqslant 0$.

2.3. **Lemme.** *Soit $A = K\,{}^tK + U$ où K est une matrice colonne et U une matrice diagonale. Supposons A positive et d'ordre n. Nous avons :*

i) rm $A = 0$ *si au moins $n-1$ des $K\,(i)$ sont nuls,*

ii) *si au moins deux des $K\,(i)$ sont non nuls*

rm $(A) = 1$ *si U est positive,*

rm $(A) = n - h - 1$ *si U n'est pas positive et si h désigne le nombre des i tels que $K\,(i)$ est nul.*

Nous avons à étudier le cas où aucun des $K(i)$ n'est nul et où U n'est pas positive. Soit i l'indice tel que $U(i,i) < 0$. Soit T une matrice diagonale positive. La matrice $A - T$ est positive si et seulement si pour tout $k \neq i$ $U(k,k) - T(k,k) > 0$ et

$$R = 1 + \sum_{k \in I} K(k)^2/(U(k,k) - T(k,k)) \leqslant 0.$$

Comme

$$\det(A - T) = R \prod_k (U(k,k) - T(k,k)),$$

et comme

$$\prod_k (U(k,k) - T(k,k))$$

n'est pas nul, rg $(A - T) =$ rm A entraîne que $R = 0$ et si $k \in I$ le déterminant du mineur principal défini par $I - \{i\}$ ne peut pas être nul. D'où la conclusion.

3. La fonction rm semble très difficile à calculer aussi a-t-on cherché à la borner inférieurement. Soit A une matrice symétrique, on appellera *index* de A le nombre des valeurs propres *strictement positives* de A, on notera cela ind A.

Lemme. *Soit A une matrice positive. Nous avons*

$$\operatorname{rm} A \geqslant \operatorname{ind}(A - \rho(A)).$$

Pour la définition de $\rho(A)$ voir [5] n° 2 du § 1. Le lemme est une conséquence immédiate des proposition 2.1. et 3.1. de la même référence.

On peut démontrer que l'application qui à A fait correspondre ind $(A - \rho(A))$ est semi-continue inférieurement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AITKEN A.C. (1956). – "Determinant and matrices" – Oliver and Boyd ; New-York.

[2] ALBERT A.A. (1944). – "The matrices of factor analysis" et "The minimum rank of a correlation matrix" – *Proceed. Nat. Acad. Sci.*, 30, 90 – 95 et 144 – 146.

[3] GUTTMAN L. (1954). – "Some necessary conditions for common factor analysis". *Psychometrika*, vol. 19, n° 2, p. 149 – 161.

[4] GUTTMAN L. (1958). – "To what extend can communalities reduce rank ? ". *Psychometrika*, 23, 297 – 308.

[5] HAKIM Monique, LOCHARD Eric-Olivier, OLIVIER Jean-Pierre, TEROUANNE Eric (1972). "Sur les traces de Spearman (I)" multigraphié, reproduit *in Cahiers du B.U.R.O.* n° 25.

[6] LEDERMANN W. (1938). – "On the rank of the reduced correlational matrix in multiple factor analysis". *Psychometrika*, vol. 2, n° 2, 85 – 93.

[7] LEDERMANN W. (1940). – "On the problem concerning matrices with variable diagonal elements". *Proceed. Royal Math. Soc. Edinburgh*, 1 – 17.

[8] REIERSOL O. (1950). – "On the identifiability of parameters in Thurstone multiple factor analysis". *Psychometrika*, 15, 121 – 149.

[9] TEROUANNE E. (1973). – "Le rang augmente pas à pas avec la diagonale". Multigraphié, à paraître.

[10] TUMURA Y. et FUKUTOMI K. (1968). – "On the identification in factor analysis". *Rep. Stat. Appl. Res.*, JUSE, vol. 15, n° 3, 6 – 11.

[11] MAC NEMAR Q. (1942). – "On the number of factors". *Psychometrika*, 7, 9 – 18.

M.H.
U.E.R. de Mathématique
Université Paris X
92 – NANTERRE
(France)

Les autres
U.E.R. de Math. Appliquées aux Sciences Humaines
Université Paul Valery
34 – MONTPELLIER –
(France)