A. M. Decaillot

Normes équivalentes pour l'espace des martingales bornées dans un espace d'Orlicz

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 24 (1976), p. 55-64

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1976__24__55_0>

NORMES ÉQUIVALENTES POUR L'ESPACE DES MARTINGALES BORNÉES DANS UN ESPACE D'ORLICZ

A. M. DECAILLOT

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ et un couple (Φ, Ψ) de fonctions de Young conjuguées(*). On désigne par φ [resp. ψ] la dérivée à gauche de Φ (resp. Ψ) :

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\, ds \qquad \left[\text{resp } \Psi(t) = \int_0^t \psi(s)\, ds\right]$$

On rappelle les inégalités classiques :

$$\forall u \geqslant 0 \quad \forall v \geqslant 0 \qquad u\, v \leqslant \Phi(u) + \Psi(v) \tag{1}$$

$$\forall u \geqslant 0 \qquad u\, \varphi(u) = \Phi(u) + \Psi[\varphi(u)] \tag{2}$$

On dira par la suite que la fonction Φ (resp. Ψ) est "*à croissance modérée*" si elle vérifie l'une des deux conditions équivalentes :

$$\sup_{t>0} \frac{\Phi(2t)}{\Phi(t)} = A < \infty \Leftrightarrow \sup_{t>0} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} = \alpha < \infty \tag{3}$$

$$\left[\text{resp. } \sup_{t>0} \frac{\Psi(2t)}{\Psi(t)} = B < \infty \Leftrightarrow \sup_{t>0} \frac{t\psi(t)}{\Psi(t)} = \beta < \infty\right] \tag{4}$$

L'espace $L^\Phi(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ des classes d'équivalence de v.a. réelles X définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ pour lesquelles il existe au moins un réel $a > 0$ tel que

$$E\left[\Phi\left(\frac{|X|}{a}\right)\right] \leqslant 1$$

est un sous-espace vectoriel de $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ noté L^Φ.

(*) Pour l'utilisation des fonctions de Young en probabilité, on pourra consulter [1]

En outre la formule

$$\|X\|_\Phi = \inf \left\{ a : a > 0, E \left[\Phi\left(\frac{|X|}{a}\right) \right] \leqslant 1 \right\}$$

définit une norme sur L^Φ. L'espace vectoriel L^Φ est complet et cet espace de Banach est appelé un *espace d'Orlicz.* (On a des définitions analogues pour L^Ψ et $\|\,.\,\|_\Psi$).

Il n'est pas difficile d'établir que, pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $E^{\mathcal{B}}(X) \in L^\Phi$ dès que $X \in L^\Phi$ et que

$$\|E^{\mathcal{B}}(X)\|_\Phi \leqslant \|X\|_\Phi \tag{5}$$

D'autre part si Φ est à croissance modérée, l'espace L^Φ coïncide avec l'ensemble des classes d'équivalence de v.a.r. X telles que $E(\Phi\,|X|) < \infty$.

NB On peut étendre la définition de $\|X\|_\Phi$ à toute v.a.r. X en posant $\|X\|_\Phi = +\infty$ s'il n'existe aucun réel $a > 0$ tel que $E\left[\Phi\left(\frac{|X|}{a}\right)\right] \leqslant 1$.

On vérifie immédiatement que, si X et Y sont deux v.a.r. telles que $|X| \leqslant |Y|$, on a

$$\|X\|_\Phi \leqslant \|Y\|_\Phi$$

. . .

Soit $(X_n,\, n \in \mathrm{N})$ une suite de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On désigne par $V_{(X)}$ la variation quadratique de cette suite soit :

$$V_{(X)} = X_0^2 + \sum_{\mathrm{N}} (X_{i+1} - X_i)^2$$

On notera par la suite $V_n(X) = X_0^2 + \sum_{0 \leqslant i < n} (X_{i+1} - X_i)^2$ et $X^* = \sup_{\mathrm{N}} |X_n|$.

Un résultat classique, dont la démonstration peut être trouvée en [II], nous indique que si $(X_n,\, n \in \mathrm{N})$ est une martingale définie sur

$$[\Omega, \mathcal{A}, P\ ;\ (B_n,\, n \in \mathrm{N})]$$

et si Φ est une fonction de Young à croissance modérée, il existe deux constantes c et $C > 0$ ne dépendant que de Φ telles que

$$c\,E\,(\Phi\,[V_{(X)}^{1/2}]) \leqslant E\,[\Phi\,(X^*)] \leqslant C E\,[\Phi(V_{(X)}^{1/2})] \tag{6}$$

Définition – On dira qu'une suite de v.a.r $(X_n, n \in \mathrm{N})$ est *bornée dans* L^Φ si

$$\sup_{\mathrm{N}} \|X_n\|_\Phi < \infty$$

On se propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème – Soit (Φ, Ψ) un couple de fonctions de Young conjuguées à à croissance modérée.

Pour toute martingale $(X_n, n \in \mathrm{N})$ définie sur $[\Omega, \mathcal{Q}, P, (B_n, n \in \mathrm{N})]$ on a les équivalences

$$\sup_{\mathrm{N}} \|X_n\|_\Phi < \infty \Leftrightarrow V^{1/2}_{(X)} \in L^\Phi \Leftrightarrow X^* = \sup_{\mathrm{N}} |X_n| \in L^\Phi$$

Dans l'un ou l'autre de ces cas, il existe des constantes α, β, γ ne dépendant que des fonctions Φ et Ψ telles que

$$\alpha \|V^{1/2}_{(X)}\|_\Phi \overset{(i)}{\leqslant} \|X^*\|_\Phi \overset{(ii)}{\leqslant} \beta \|V^{1/2}_{(X)}\|_\Phi \qquad \|X^*\|_\Phi \overset{(iii)}{\leqslant} \gamma \sup_{\mathrm{N}} \|X_n\|_\Phi$$

NB 1) L'équivalence $V^{1/2}_{(X)} \in L^\Phi \Leftrightarrow X^* \in L^\Phi$ est évidente, puisque d'après (6) :

$$E(\Phi[V^{1/2}_{(X)}]) < \infty \Leftrightarrow E[\Phi(X^*)] < \infty$$

2) Il est évident aussi que $X^* \in L^\Phi \Rightarrow \sup_{\mathrm{N}} \|X_n\|_\Phi < \infty$ car

$$|X_n| \leqslant \sup_{\mathrm{N}} |X_n| \Rightarrow \sup_{\mathrm{N}} \|X_n\|_\Phi \leqslant \|\sup_{\mathrm{N}} |X_n|\,\|_\Phi .$$

3) Appliquons l'inégalité (1) avec $u = t,\ v = 2\varphi(t)$:

$$\Psi[2\varphi(t)] \geqslant 2t\,\varphi(t) - \Phi(t) \geqslant 2 \int_0^t \varphi(s)\,ds - \Phi(t) = \Phi(t)$$

Si Ψ est à croissance modérée, on en déduit d'après (4) :

$$\forall t \geqslant 0 \qquad \Phi(t) \leqslant B\Psi[\varphi(t)] \tag{7}$$

Soit $(X_n, n \in \mathrm{N})$ une martingale bornée dans L^Φ. Dans [I] il est démontré que toute martingale bornée dans L^Φ est régulière, donc de la forme $X_n = E^{\mathcal{B}_n}(X_\infty)$, si l'on désigne par X_∞ la limite p.s. de X_n. De plus $X_\infty \in L^\Phi$ et le lemme de Fatou montre que

$$\|X_\infty\|_\Phi \leqslant \sup_{\mathrm{N}} \|X_n\|_\Phi \tag{8}$$

En outre, si l'on désigne par $\xi : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ la fonction croissante définie par [cf. (2)]: $\xi(u) = u\varphi(u) - \Phi(u) = \Psi[\varphi(u)]$, la v.a.r $X^* = \sup_{\mathbf{N}} |X_n|$ vérifie

$$\forall \rho > 1 \qquad E\left[\xi\left(\frac{X^*}{\rho\,\|X_\infty\|_\Phi}\right)\right] \leqslant \frac{1}{\rho - 1} \tag{9}$$

De (7) et (9) on déduit

$$\forall \rho > 1 \qquad E\left[\Phi\left(\frac{X^*}{\rho\,\|X_\infty\|_\Phi}\right)\right] \leqslant \frac{B}{\rho - 1}$$

Il suffit de choisir $\rho = 1 + B$ pour prouver que $X^* \in L^\Phi$ et que d'après (8) :

$$\|X^*\|_\Phi \leqslant (1 + B)\,\|X_\infty\|_\Phi \leqslant (1 + B) \sup_{\mathbf{N}} \|X_n\|_\Phi \tag{10}$$

Donc l'implication $\sup_{\mathbf{N}} \|X_n\|_\Phi < \infty \Rightarrow X^* \in L^\Phi$ est démontrée, ainsi que l'inégalité (iii).

D'autre part $\|X_\infty\|_\Phi \leqslant \|X^*\|_\Phi$ car $\lim_{ps} |X_n| \leqslant \sup_{\mathbf{N}} |X_n|$

En éliminant le cas trivial où $X^* \underset{p.s.}{=} 0$, il vient :

$$\forall \rho > 1 \qquad E\left[\Phi\left(\frac{X^*}{\rho\,\|X^*\|_\Phi}\right)\right] \leqslant \frac{B}{\rho - 1} \tag{11}$$

Puisque Φ est à croissance modérée, l'application de (6) à la martingale $\left(X'_n = \frac{X_n}{a},\, n \in \mathbf{N}\right)$ (a réel > 0 quelconque) permet d'écrire

$$\forall a > 0 \qquad c\,E\left[\Phi\left(\frac{V_{(X)}^{1/2}}{a}\right)\right] \leqslant E\left[\Phi\left(\frac{X^*}{a}\right)\right] \tag{12}$$

En choisissant $\rho = 1 + \frac{B}{c}$, et $a = \rho\,\|X^*\|_\Phi$, on déduit de (11) et (12) :

$$E\left[\Phi\left(\frac{V_{(X)}^{1/2}}{\left(1 + \frac{B}{c}\right)\|X^*\|_\Phi}\right)\right] \leqslant \frac{1}{c}\, E\left[\Phi\left(\frac{X^*}{\left(1 + \frac{B}{c}\right)\|X^*\|_\Phi}\right)\right] \leqslant 1$$

ce qui prouve que $V_{(X)}^{1/2} \in L^\Phi$ et que

$$\|V_{(X)}^{1/2}\|_\Phi \leqslant \left(1 + \frac{B}{c}\right)\|X^*\|_\Phi \tag{13}$$

On a donc prouvé l'implication $\sup_{\mathbf{N}} \|X_n\|_\phi < \infty \Rightarrow V_{(X)}^{1/2} \in L^\Phi$ et l'inégalité (i).

Pour démontrer l'inégalité (ii), nous utiliserons un argument de dualité qui fait intervenir les résultats suivants(¹) : pour tout couple de v.a.r $X \in L^\Phi$ et $Y \in L^\Psi$, la v.a.r XY est intégrable et vérifie

$$\|XY\|_{L^1} \leqslant 2\ \|X\|_\Phi\ \|Y\|_\Psi \tag{14}$$

Le dual fort de l'espace d'Orlicz L^Φ muni de la norme $\|.\|_\Phi$ est l'espace L^Ψ muni de la norme

$$\|Y\|'_\Psi = \sup_{X\neq 0} \frac{|E(XY)|}{\|X\|_\Phi} \tag{15}$$

Cette norme est équivalente à la norme $\|.\|_\Psi$ car

$$\forall Y \in L^\Psi \qquad \|Y\|_\Psi \leqslant \|Y\|'_\Psi \leqslant 2\|Y\|_\Psi \tag{16}$$

On peut en déduire le lemme suivant :

Lemme. – Soit $(X_n,\ n \in \mathbf{N})$ une suite adaptée de v.a.r de L^Φ telle que, quelle que soit la martingale $(Y_n, n \in \mathbf{N})$ bornée dans L^Ψ et quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on ait :

$$|E(X_n Y_n)| \leqslant D \sup_{\mathbf{N}} \|Y_n\|_\Psi \qquad (D > 0)$$

Alors la suite $(X_n, n \in \mathbf{N})$ est bornée dans L^Φ et

$$\sup_{\mathbf{N}} \|X_n\|_\Phi \leqslant D$$

Soit $Y \in L^\Psi$. Considérons la martingale $(Y_n = E^{\mathcal{B}_n}(Y), n \in \mathbf{N})$. D'après (5), elle est bornée dans L^Ψ et $\sup_{\mathbf{N}} \|Y_n\|_\Psi \leqslant \|Y\|_\Psi$. X_n étant $\mathcal{B}_n$-mesurable, on a en utilisant les hypothèses du lemme

$$|E(X_n Y_n)| = |E(X_n Y)| \leqslant D\ \ \|Y\|_\Psi$$

Donc, d'après (15) et (16) :

$$\|X_n\|_\Phi \leqslant \|X_n\|'_\Phi = \sup_{Y\neq 0} \frac{|E(X_n Y)|}{\|Y\|_\Psi} \leqslant D$$

Donc $\sup_{\mathbf{N}} \|X_n\|_\Phi \leqslant D$ ce qui démontre le lemme.

(*) Pour les démonstrations de toutes ces propriétés, on se référera à [I]

Soit $(X_n,\ n \in \mathbf{N})$ une martingale de L^Φ telle que $V_{(X)}^{1/2} \in L^\Phi$. Soit $(Y_n,\ n \in \mathbf{N})$ une martingale *bornée* dans L^Ψ, donc telle que $V_{(Y)}^{1/2} \in L^\Psi$.

Posons $\forall i \geqslant 1 \qquad \Delta X_i = X_i - X_{i-1} \qquad \Delta Y_i = Y_i - Y_{i-1}$

$$\Delta X_0 = X_0 \qquad \Delta Y_0 = Y_0$$

La propriété de martingale et l'inégalité de Schwarz permettent d'écrire

$$|E(X_n Y_n)| = \left|E\left(\sum_{i=0}^{n} \Delta X_i \Delta Y_i\right)\right| \leqslant E[V_n^{1/2}(X)\ V_n^{1/2}(Y)]$$

$$\leqslant E[V_{(X)}^{1/2}\ V_{(Y)}^{1/2}]$$

De (14) il résulte :

$$|E(X_n Y_n)| \leqslant 2\ \|V_{(X)}^{1/2}\|_\Phi\ \|V_{(Y)}^{1/2}\|_\Psi$$

Soit encore en appliquant (13) puis (10) à la martingale $(Y_n,\ n \in \mathbf{N})$ bornée dans L^Ψ :

$$|E(X_n Y_n)| \leqslant \lambda\ \|V_X^{1/2}\|_\Phi\ \sup_{\mathbf{N}} \|Y_n\|_\Psi$$

Le lemme démontré ci-dessus permet d'affirmer que la martingale $(X_n,\ n \in \mathbf{N})$ est bornée dans L^Φ et que

$$\sup_{\mathbf{N}} \|X_n\|_\Phi \leqslant \lambda\ \|V_{(X)}^{1/2}\|_\Phi$$

soit en utilisant (10)

$$\|X^*\|_\Phi \leqslant \beta\ \|V_{(X)}^{1/2}\|_\Phi$$

ce qui démontre l'inégalité (ii).

Par la suite, on sera amené à considérer certaines fonctions de Young Φ telles que la fonction $\Phi_1 = \Phi \circ \sqrt{\ }$ soit également une fonction de Young, c.à.d essentiellement soit convexe et telle que $\lim_{+\infty} \frac{1}{t}\ \Phi_1(t) = +\infty$.

Dans ce cas il est immédiat de vérifier l'équivalence

$$|X|^{1/2} \in L^\Phi \Leftrightarrow X \in L^{\Phi_1}$$

et plus précisément

$$\|\,|X|^{1/2}\|_\Phi = \|X\|_{\Phi_1}^{1/2} \tag{17}$$

D'autre part si Φ est à croissance modérée, il en est de même pour Φ_1. Si φ_1 désigne la dérivée à gauche de Φ_1, on a en effet :

$$\alpha_1 = \sup_{t>0} \frac{t\varphi_1(t)}{\Phi_1(t)} = \sup_{t>0} \frac{1}{2} \frac{\sqrt{t}\,\varphi(\sqrt{t})}{\Phi(\sqrt{t})} \leqslant \frac{\alpha}{2} < \infty \tag{18}$$

Rappelons enfin que dans [I] il est démontré la proposition suivante :

Soit Φ une fonction de Young telle que $\alpha = \sup_{t>0} \frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} < \infty$. Soit Z une v.a positive de L^Φ. Tout processus croissant $(A_n,\ n \in \mathbf{N})$ dont le potentiel $(E^{\mathcal{B}_n}(A_\infty - A_n),\ n \in \mathbf{N})$ est majoré par la martingale positive $(E^{\mathcal{B}_n}(Z), n \in \mathbf{N})$ vérifie l'inégalité :

$$\|A_\infty\|_\Phi \leqslant \alpha\ \|Z\|_\Phi \tag{19}$$

. . .

Soit $(\Phi,\ \Psi)$ un couple fonctions de Young conjuguées à croissance modérée. On suppose que $\Phi_1 = \Phi \circ \sqrt{\ }$ est également une fonction de Young.

Soit $(X_n,\ n \in \mathbf{N})$ une martingale bornée dans L^Φ, donc vérifiant l'une des conditions équivalentes :

$$V_{(X)}^{1/2} \in L^\Phi \Leftrightarrow V_{(X)} \in L^{\Phi_1}$$

Remarquons que $(X_n,\ n \in \mathbf{N})$ est de carré intégrable car $V_{(X)} \in L^{\Phi_1} \subset L^1$ implique, par récurrence sur i :

$$\forall i \in \mathbf{N} \qquad X_i \in L^2$$

Désignons par $(A_n,\ n \in \mathbf{N})$ le processus croissant de la décomposition de Doob de la sous-martingale intégrable $(X_n^2,\ n \in \mathbf{N})$

$$A_n = \sum_{m<n} E^{\mathcal{B}_m}[(X_{m+1} - X_m)^2] \qquad (A_0 = 0)$$

$$A_\infty = \sum_{\mathbf{N}} E^{\mathcal{B}_m}[(X_{m+1} - X_m)^2]$$

Comme $V_{(X)} - V_{n(X)} = \sum_{m \geqslant n} (X_{m+1} - X_m)^2$, on peut écrire :

$$E^{\mathcal{B}_n}[V - V_n] = \sum_{m \geqslant n} E^{\mathcal{B}_n}[(X_{m+1} - X_m)^2] = \sum_{m \geqslant n} E^{\mathcal{B}_n} E^{\mathcal{B}_m}[(X_{m+1} - X_m)^2]$$

$$= E^{\mathcal{B}_n}(A_\infty - A_n)$$

Par conséquent le processus croissant $(A_n, n \in \mathrm{N})$ vérifie

$$\forall n \in \mathrm{N} \qquad E^{\mathcal{B}_n}(A_\infty - A_n) \leqslant E^{\mathcal{B}_n}(V)$$

Comme $V_{(X)} \in L^{\Phi_1}$, la proposition rappelée ci-dessus permet de conclure que $A_\infty \in L^{\Phi_1}$ et que [cf. (18) et (19)] :

$$\|A_\infty\|_{\Phi_1} \leqslant \frac{\alpha}{2} \|V_{(X)}\|_{\Phi_1}$$

soit encore, ce qui est équivalent : $A_\infty^{1/2} \in L^\Phi$ et

$$\|A_\infty^{1/2}\|_\Phi \leqslant \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \|V_{(X)}^{1/2}\|_\Phi \tag{20}$$

Remarque préliminaire :

Si $(U_i\ ; i = 1, \ldots n)$ et $(W_i\ ; i = 1, \ldots n)$ sont des v.a de carré intégrable, il est immédiat de vérifier que

$$\left| \sum_{i=1}^{n} E^{\mathcal{B}_{i-1}}(U_i W_i) \right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} E^{\mathcal{B}_{i-1}}(U_i^2)} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} E^{\mathcal{B}_{i-1}}(W_i^2)} \tag{21}$$

La démonstration est analogue à celle de l'inégalité de Schwarz à partir de :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R} \qquad \sum_{i=1}^{n} E^{\mathcal{B}_{i-1}}[(U_i + \lambda W_i)^2] \geqslant 0$$

. . .

Soit (Φ, Ψ) un couple de fonctions de Young conjuguées à croissance modérée. On suppose que $\Psi_1 = \Psi \circ \sqrt{\ }$ est une fonction de Young.

Soit $(X_n, n \in \mathrm{N})$ une martingale de L^Φ de carré intégrable et telle que $X_0 = 0$ ps. On suppose de plus que $A_\infty^{1/2} \in L^\Phi$, $(A_n, n \in \mathrm{N})$ désignant le processus croissant de la décomposition de Doob de la sous-martingale $(X_n^2, n \in \mathrm{N})$.

Soit $(Y_n,\ n \in \mathbf{N})$ une martingale bornée dans L^Ψ, donc également de carré intégrable d'après la remarque faite ci-dessus. On désigne par $(A'_n,\ n \in \mathbf{N})$ le processus croissant de la décomposition de Doob de la sous-martingale $(Y_n^2,\ n \in \mathbf{N})$.

Les hypothèses faites permettent d'affirmer que $A'^{1/2}_\infty \in L^\Psi$ et que d'après (20), (13) et (10) :

$$\|A'^{1/2}_\infty\|_\Psi \leqslant c\ \|V_Y^{1/2}\|_\Psi \leqslant c' \sup_{\mathbf{N}} \|Y_n\|_\Psi$$

Posons :

$$\forall i \geqslant 1 \qquad \Delta X_i = X_i - X_{i-1} \qquad \Delta Y_i = Y_i - Y_{i-1}$$

La propriété de martingale et l'hypothèse $X_0 = 0$ ps entraînent :

$$E(X_n Y_n) = E\Big(\sum_{i=1}^n \Delta X_i\, \Delta Y_i\Big) = E\ \Big(\sum_{i=1}^n E^{\mathcal{B}_{i-1}}(\Delta X_i\, \Delta Y_i)\Big)$$

Soit d'après (21) :

$$|E(X_n Y_n)| \leqslant E\Big(\sqrt{\sum_{i=1}^n E^{\mathcal{B}_{i-1}}(\Delta X_i^2)}\ \sqrt{\sum_{i=1}^n E^{\mathcal{B}_{i-1}}(\Delta Y_i^2)}\Big) = E(\sqrt{A_n}\ \sqrt{A'_n})$$

Donc

$$|E(X_n Y_n)| \leqslant E(\sqrt{A_\infty}\ \sqrt{A'_\infty})$$

L'hypothèse $A^{1/2}_\infty \in L^\Phi$ permet d'écrire d'après (14) :

$$|E(X_n Y_n)| \leqslant 2\,\|A^{1/2}_\infty\|_\Phi\ \|A'^{1/2}_\infty\|_\Psi \leqslant k\ \|A^{1/2}_\infty\|_\Phi\ \sup_{\mathbf{N}} \|Y_n\|_\Psi$$

Donc d'après le lemme ci-dessus, $(X_n,\ n \in \mathbf{N})$ est bornée dans L^Φ et

$$\sup_{\mathbf{N}} \|X_n\|_\Phi \leqslant k\ \ \|A^{1/2}_\infty\|_\Phi$$

soit encore d'après (10)

$$\|\sup_{\mathbf{N}} |X_n|\,\|_\Phi \leqslant c\ \ \|A^{1/2}_\infty\|_\Phi$$

CONCLUSION

Soit (Φ, Ψ) un couple de fonctions de Young à croissance modérée. Soit $(X_n,\ n \in \mathbf{N})$ une martingale de L^Φ.

1) Si $\Phi \circ \sqrt{}$ est une fonction de Young et si $(X_n, n \in \mathbf{N})$ est bornée dans L^Φ, alors $A_\infty^{1/2} \in L^\Phi$ et

$$||A_\infty^{1/2}||_\Phi \leqslant c\ ||V_X^{1/2}||_\Phi$$

2) Si $\Phi \circ \sqrt{}$ est une fonction de Young, si $X_0 = 0$ et si $A_\infty^{1/2} \in L^\Phi$, alors $(X_n, n \in \mathbf{N})$ est bornée dans L^Φ et

$$||\sup_{\mathbf{N}} |X_n|\,||_\Phi \leqslant c'\ ||A_\infty^{1/2}||_\Phi$$

les constantes c et c' ne dépendant que de Φ et de Ψ

BIBLIOGRAPHIE

[I] J. NEVEU – *Martingales à temps discret* Masson 1972

[II] B.L. BURKHOLDER – *Distribution function inequalities for martingales* The Annals of Probability 1973 Vol 1 N° 1 p. 19-49

[III] P.A. MEYER – "*Martingales and Stochastic Integrals I*" Springer Berlin 1972

[IV] GARSIA Adriano M. – *On a convex function inequality for martingales.* Annals of Probability 1973 Vol. 1 N° 1, p. 171-174.

[V] GARSIA Adriano M. – *Recent progress in the theory of martingale inéqualities.* Seminar notes. To appear.