CAHIERS DU BURO

A. SERRECCHIA

Distribution de l'optimum dans un programme linéaire stochastique

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 24 (1976), p. 41-54

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1976__24__41_0>

DISTRIBUTION DE L'OPTIMUM DANS UN PROGRAMME LINÉAIRE STOCHASTIQUE

A. SERRECCHIA

INTRODUCTION

Considérons le programme linéaire suivant :

$$\min \mathcal{P}(A , b , c) : \min \{cx \mid Ax = b , x \geqslant 0\}$$

où A , b et c sont des matrices réelles de dimensions respectives $m \times n$, $m \times 1$, $1 \times n$. Si l'un au moins des éléments A, b et c contient des composantes aléatoires alors le programme $\min \mathcal{P}(A , b , c)$ est appelé *programme linéaire stochastique*. Dans ce dernier cas on démontre [7](*) que l'optimum de la forme linéaire cx sous les contraintes $Ax = b$ et $x \geqslant 0$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\bar{R}$(**). La distribution de probabilité de cette variable aléatoire, sous des conditions plus ou moins générales, a fait l'objet de nombreux travaux, notamment ceux de Babbar [1] ; Bereanu [2], [3], [4], [5] ; Prèkopa [8] ; Tintner [9], [10] ; Wagner [11] et Williams [12].

Dans cet article nous considérerons un programme linéaire stochastique lorsque le vecteur b seul est supposé aléatoire. Des hypothèses seront faites sur la matrice A et le vecteur c pour éliminer le cas d'une valeur non bornée de l'inf. de $\mathcal{P}(A , b , c)$. On donnera la fonction de répartition de l'optimum pour le programme $\min \mathcal{P}(A , b , c)$ d'abord et pour son programme dual ensuite.

(*) Les numéros entre [ ] renvoient à la bibliographie.

(**) Dans toute la suite $\bar{R}$ indiquera la droite réelle achevée : $\bar{R} = \bar{R} \cup (+\infty) \cup (-\infty)$.

I – RAPPELS DE PROGRAMMATION LINEAIRE

Les définitions et les théorèmes ci-dessous résument les notions fondamentales de programmation linéaire utilisées dans la suite.

La résolution du programme linéaire min $\mathcal{P}(A , b , c)$ revient à minimiser la fonction linéaire cx, appelée *fonction économique*, sous les contraintes : (1) $Ax = b$, (2) $x \geqslant 0$.

On appelle *solution* de $\mathcal{P}(A , b , c)$ tout vecteur $x \in R^n$ qui satisfait le système (1).

Si $\bar{x}$ est une solution de $\mathcal{P}(A , b , c)$ telle que $\bar{x} \geqslant 0$, alors $\bar{x}$ est une *solution réalisable* de $\mathcal{P}(A , b , c)$.

Soit $k \leqslant \min(m , n)$ le rang de A.

On appelle *base* de $\mathcal{P}(A , b , c)$ toute sous-matrice de A qui est carrée d'ordre k et régulière.

Chaque base de $\mathcal{P}(A , b , c)$ définit une partition de l'ensemble des composantes de x en deux classes : la classe des *variables* basiques, qui contient les composantes de x associées (au moyen du système (1)) aux colonnes de A contenues dans la base, et la classe des *variables non basiques,* définie de façon complémentaire.

Une solution $\bar{x}$ de $\mathcal{P}(A , b , c)$ est appelée *solution basique* si ses variables non basiques (par rapport à une base B donnée) sont toutes nulles.

Théorème I, 1 : Si $\mathcal{P}(A , b , c)$ admet une solution réalisable alors il admet au moins une solution basique réalisable.

On notera P l'ensemble des solutions réalisables de $\mathcal{P}(A , b , c)$.

Un vecteur $\bar{x} \in P$, tel que :

$$\forall x \in P : cx \geqslant c\bar{x}$$

est appelé *solution optimale de* $\mathcal{P}(A , b , c)$ et la valeur $c\bar{x}$ correspondante est dite *optimum* de $\mathcal{P}(A , b , c)$.

Théorème I, 2 : Si $\mathcal{P}(A , b , c)$ admet une solution optimale alors il admet au moins une solution basique optimale.

Le programme min $\mathcal{P}(A , b , c)$ est dit *défini* si l'ensemble P n'est pas vide.

Le programme défini min $\mathcal{P}(A , b , c)$ est *optimisable* si

$$\exists\ \bar{x} \in P : \min \{cx \mid x \in P\} = c\bar{x}.$$

Etant donné le programme min $\mathcal{P}(A, b, c)$, on définit son programme *dual*, noté max $\mathcal{P}_d(A, b, c)$, comme le programme suivant :

$$\max \mathcal{P}_d(A, b, c) : \{\max yb \mid yA \leqslant c\} \qquad \text{(I, 2)}$$

La résolution de (I,2) revient à maximiser la fonction linéaire yb sous la contrainte $yA \leqslant c$.

Un vecteur $\bar{y} \in R^m$, tel que $\bar{y}A \leqslant c$, est appelé *solution* de $\mathcal{P}_d(A, b, c)$.

Compte tenu de la structure particulière de $\mathcal{P}_d(A, b, c)$ toute solution sera une solution réalisable.

On notera Q l'ensemble des solutions de $\mathcal{P}_d(A, b, c)$.

Une solution $\bar{y}$ de $\mathcal{P}_d(A, b, c)$ est dite *optimale* si :

$$\forall y \in Q : yb \leqslant \bar{y}b.$$

La valeur $\bar{y}b$ sera alors l'*optimum* de $\mathcal{P}_d(A, b, c)$.

Le programme max $\mathcal{P}_d(A, b, c)$ est *défini* si l'ensemble Q n'est pas vide.

Le programme défini max $\mathcal{P}_d(A, b, c)$ est *optimisable* si

$$\exists \bar{y} \in Q : \max \{yb \mid y \in Q\} = \bar{y}b.$$

Théorème I, 3 *(d'existence)* : Etant donné deux programmes min $\mathcal{P}(A, b, c)$ et max $\mathcal{P}_d(A, b, c)$ on a les seules possibilités suivantes :

(i) Les deux programmes sont optimisables ;

(ii) Un programme n'est pas défini et l'autre est défini mais non optimisable ;

(iii) Aucun des deux programmes n'est défini.

Théorème I, 4 *(de dualité)* : Si min $\mathcal{P}(A, b, c)$ et max $\mathcal{P}_d(A, b, c)$ sont tous les deux optimisables alors :

$$\min_{x \in P} cx = \max_{y \in Q} yb$$

Relations d'exclusion : Si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ désignent deux solutions optimales, respectivement de $\mathcal{P}(A, b, c)$ et $\mathcal{P}_d(A, b, c)$, on a alors :

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \bar{x}_j > 0 \quad \Rightarrow c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,\bar{y}_i = 0$$

$$\forall j \in \{1, 2, \ldots, n\} : c_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\,\bar{y}_i > 0 \quad \Rightarrow \bar{x}_j = 0$$

où a_{ij} , c_j , $\bar{x}_j$ et $\bar{y}_i$ désignent les composantes de A , c , $\bar{x}$ et $\bar{y}$.

D'après le théorème d'existence et les relations d'exclusion, B étant une base de A, on dira que B vérifie la *condition d'optimalité* si et seulement si il existe un vecteur $y \in R^m$ tel que :

$$\begin{cases} \gamma - yB = 0 \\ r - yR \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{(I, 1)}$$

où R indique la matrice formée par les colonnes de A n'appartenant pas à B, γ et r étant les sous-vecteurs de c associés respectivement aux variables basiques et non basiques par rapport à B.

II – DEFINITION DU PROBLEME DE DISTRIBUTION

Soit $(\Omega\ ,\ \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit un vecteur aléatoire réel(*) défini sur $(\Omega\ ,\mathcal{A})$ et à valeurs dans H, ou H est un borélien de R^m pouvant éventuellement coïncider avec R^m. On notera F la fonction de répartition de $\tilde{b}$. Au vecteur $\tilde{b}$ on associe le programme linéaire stochastique :

$$\min \mathcal{P}\ (A\ ,\ \tilde{b}\ ,\ c)\ :\ \min\{\, cx \mid Ax = \tilde{b}\ ,\ x \geqslant 0\} . \qquad \text{(II, 1)}$$

A et c étant deux matrices réelles de dimensions respectives $m \times n$ et $1 \times n$. A chaque réalisation b de $\tilde{b}$ correspond, par (II, 1), le programme linéaire certain $\min \mathcal{P}\ (A\ ,\ b\ ,\ c)$ dont l'ensemble des solutions réalisables sera noté P_b. Considérons l'application $\tilde{Z}$ de H dans $\bar{R}$ ainsi définie :

$$H \xrightarrow{\tilde{z}} \bar{R} : b \rightsquigarrow \tilde{Z}(b) = \begin{cases} +\infty, \text{ si } \min \mathcal{P}(A\ ,\ b\ ,\ c) \text{ n'est pas défini} \\ -\infty, \text{ si } \min \mathcal{P}\ (A\ ,\ b\ ,\ c) \\ \qquad \text{est défini sans être optimisable} \\ \min\{cx \mid x \in P_b\}\ , \\ \qquad \text{si } \min \mathcal{P}\ (A\ ,\ b\ ,\ c) \text{ est optimisable} \end{cases} \qquad \text{(II, 2)}$$

Dans [7], on démontre que l'application $\tilde{Z}$ ci-dessus définie est mesurable, donc que $\tilde{Z}$ est une variable aléatoire à valeurs dans R. Notre problème est de déterminer la fonction de répartition de $\tilde{Z}$. En programmation stochastique un tel problème est appelé *problème de distribution.*

(*) Dans toute la suite, tout élément aléatoire sera noté par un tilde.

III – LE PROBLEME DE DISTRIBUTION DANS LE CAS OU LA MATRICE A EST CARREE ET REGULIERE

En première approximation à ce problème de distribution considérons le cas où la matrice A est carrée et régulière. Dans cette hypothèse, le système linéaire $Ax = b$, où b est une réalisation donnée de $\tilde{b}$, admet une solution et une seule :

$$x = A^{-1} b \tag{III, 1}$$

où A^{-1} indique la matrice inverse de A. La valeur $Z = \tilde{Z}(b)$ prise par la variable aléatoire (II, 2) sera donc :

$$Z = \tilde{Z}(b) = \begin{cases} cA^{-1} b & \text{si} \quad A^{-1} b \geqslant 0 \\ + \infty & \text{si} \quad A^{-1} b \not\geqslant 0 \end{cases} \tag{III, 2}$$

où la notation $A^{-1} b = x \not\geqslant 0$ signifie que l'une au moins des composantes de x est négative. Les formules (III, 1) et (III, 2) s'appliquent à toute réalisation de $\tilde{b}$ et donc la fonction de répartition de $\tilde{Z}$(*), notée G, est donnée par :

$$\forall z \in \boldsymbol{R} \ : \ G(z) = \text{Prob}\{\tilde{Z} < z\} = \text{Prob}\ [\{cA^{-1}\ \tilde{b} < z\} \cap \{A^{-1}\ \tilde{b} \geqslant 0\}] =$$

$$\int\int_{m\text{-ple}} \cdots \int\int_{S(z)} dF \tag{III, 3}$$

où $$S(z) = \{b \in H \mid (cA^{-1}\ b < z) \cap (A^{-1}\ b \geqslant 0)\}.$$

IV – LE PROBLEME DE DISTRIBUTION DANS LE CAS OU LA MATRICE A EST RECTANGULAIRE DE RANG MAXIMAL

Considérons maintenant le cas où la matrice A est rectangulaire $m \times n$ de rang égal à m. Soit q, $(1 \leqslant q \leqslant C_n^m)$, le nombre des bases de $\mathscr{R}(A\ ,\ b\ ,\ c)$. La i-ème base sera notée B_i, $(i = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ q)$. Les vecteurs γ_i, $(\gamma_i \in \boldsymbol{R}^m)$ et ξ_i, $(\xi_i \in \boldsymbol{R}^m)$ désigneront respectivement les sous-vecteurs de c et de x associés aux colonnes de B_i. A chaque base B_i on peut associer la variable aléatoire :

(*) Par extension du concept de fonction de répartition on gardera cette appellation même si $\tilde{Z}$ a une masse concentrée à l'infini, autrement dit si :

$$\text{Prob}\{b \in H \mid A^{-1}\ b \not\geqslant 0\} = \text{Prob}\{\tilde{Z} = +\infty\} = \alpha > 0$$

et la condition $\lim\limits_{z \to +\infty} G(z) = 1$ n'est donc pas vérifiée.

$$\tilde{t}_i = \gamma_i B_i^{-1} \tilde{b} \qquad (i = 1, 2, \ldots, q).$$

L'ensemble $\{B_i \mid i = 1, 2, \ldots, q\}$ définit donc le vecteur aléatoire de R^q :

$$\tilde{t} = V\tilde{b}$$

où V est la matrice $q \times m$ dont le i-ème vecteur ligne est $\gamma_i B_i^{-1}$, $(i = 1, 2, \ldots, q)$. Si b est une réalisation de $\tilde{b}$ les composantes du vecteur $t = Vb$ représentent évidemment les valeurs prises par la fonction économique de $\mathcal{P}(A, b, c)$, correspondant aux solutions basiques. Le programme min $\mathcal{P}(A, b, c)$ pourrait être défini sans être optimisable puisque la fonction économique cx pourrait ne pas être bornée sur l'ensemble P_b (non nécessairement borné) des solutions réalisables de $\mathcal{P}(A, b, c)$.

Hypothèse IV, 1 : *Le système $yA \leqslant c$ est compatible*.

D'après le théorème d'existence I, 3, il est évident que si l'hypothèse IV, 1 est vraie alors *tout programme défini* min $\mathcal{P}(A, b, c)$ *est optimisable* ; autrement dit, $\forall\, b \in H$ les deux éventualités suivantes sont seules possibles :

(1) min $\mathcal{P}(A, b, c)$ n'est pas défini.

(2) min $\mathcal{P}(A, b, c)$ est optimisable.

Hypothèse IV, 2 : *Il existe un borélien inclus dans H, noté θ, tel que :*

$$\int \underset{m\text{-ple}}{\int \cdots} \int \int_{\theta} dF > 0 \quad \text{et} \quad \min \mathcal{P}(A, b, c)$$

est défini pour tout $b \in \theta$.

Si l'hypothèse IV, 2 n'était pas vraie alors par la définition de $\tilde{Z}$ on serait évidemment dans le cas trivial où $\text{Prob}\{\tilde{Z} = +\infty\} = 1$.

Dans toute la suite on supposera vraies les hypothèses IV, 1 et IV, 2.

D'après les hypothèses IV, 1 et IV, 2, le programme min $\mathcal{P}(A, b, c)$ est optimisable pour tout $b \in \theta$, donc, par le théorème I, 2, *il existe au moins une base de A qui vérifie la condition d'optimalité* (I, 1).

Supposons que B_j soit la seule base de A qui vérifie la condition d'optimalité, $\forall\, b \in H$ on aura alors :

$$\tilde{Z}(b) = \begin{cases} +\infty, & \text{si} \quad B_j^{-1} b \ngeqslant 0 \\ t_j = \gamma_j B_j^{-1} b & \text{si} \quad B_j^{-1} b \geqslant 0 \end{cases} \tag{IV, 1}$$

et la fonction de répartition de $\tilde{Z}$ sera de même type que dans (III, 3), mais l'ensemble $S(z)$ sera défini par :

$$S(z) = \{b \in H \mid (\gamma_j B_j^{-1} b < z) \cap (B_j^{-1} b \geqslant 0)\}.$$

Soit ρ un entier tel que : $1 < \rho \leqslant q$ et soient $B_1, B_2, \ldots, B_\rho$ les bases de A qui vérifient la condition d'optimalité. Pour tout vecteur b appartenant à H on aura alors :

$$\tilde{Z}(b) = \begin{cases} +\infty, \quad \text{si} \quad b \in \left\{ b \in H \mid \bigcap_{j=1}^{\rho} (B_j^{-1} b \not\geqslant 0) \right\} \\ t_{j_1} = t_{j_2} = \ldots = t_{j_k}, \text{ si} \\ \qquad b \in \left\{ b \in H \,\middle|\, \left[\bigcap_{i=1}^{k} (B_{j_i}^{-1} b \geqslant 0) \right] \cap \left[\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \notin \{j_1, \ldots, j_k\}}}^{\rho} (B_j^{-1} b \not\geqslant 0) \right] \right\} \end{cases} \qquad \text{(IV, 2)}$$

où $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$ représente une combinaison quelconque de k indices, $(1 \leqslant k \leqslant \rho)$, de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, \rho\}$.

En effet s'il n'y a pas de solution réalisable parmi les solutions basiques associées aux bases de A qui satisfont à la condition d'optimalité, alors, d'après le théorème (I, 2), min $\mathcal{R}(A, b, c)$ n'est pas optimisable, donc, par l'hypothèse IV, 1, min $\mathcal{R}(A, b, c)$ n'est pas défini et $\tilde{Z}(b) = +\infty$.

Par contre, s'il y a des solutions réalisables parmi les solutions basiques associées aux bases qui vérifient la condition d'optimalité alors min $\mathcal{R}(A, b, c)$ est optimisable et d'après le théorème (I, 2) la valeur optimum coïncide avec les valeurs prises par la fonction économique pour les solutions basiques optimales.

Afin d'expliciter la fonction de répartition de $\tilde{\tilde{Z}}$, considérons la partition de H suivante :

$$H = \beta_{j_0} \cup \left[\bigcup_{j_1=1}^{\rho} \beta_{j_1} \right] \cup \ldots \cup \left[\bigcup_{j_1=1}^{\rho} \bigcup_{\substack{j_2=1 \\ j_2 \neq j_1}}^{\rho} \cdots \bigcup_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq j_1 \\ \cdots \\ j_k \neq j_{k-1}}}^{\rho} \beta_{j_1 j_2 \ldots j_k} \right] \cup \ldots \cup \beta_{j_1 j_2 \ldots j_\rho}$$

où :

$$\beta_{j_0} = \left\{ b \in H \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{\rho} (B_j^{-1} b \not\geqslant 0) \right\}$$

$$\beta_{j_1} = \left\{ b \in H \,\middle|\, \left[B_{j_1}^{-1} b \geqslant 0 \right] \cap \left[\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq j_1}}^{\rho} (B_j^{-1} b \not\geqslant 0) \right] \right\}, j_1 = 1, 2, \ldots, \rho$$

. . . .

. . . .

$$\beta_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \left\{ b \in H \;\middle|\; \left[\bigcap_{i=1}^{k} (B_{j_i}^{-1} b \geqslant 0) \right] \cap \left[\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \notin \{j_1, \ldots, j_k\}}}^{\rho} (B_j^{-1} b \ngeqslant 0) \right] \right\} \quad , \forall i \in \{1, \ldots, k\} : j_i \in \{1, \ldots, \rho\}$$

. . . .

$$\beta_{j_1 j_2 \ldots j_\rho} = \left\{ b \in H \;\middle|\; \bigcap_{i=1}^{\rho} (B_{j_i}^{-1} b \geqslant 0) \right\} \quad , \forall i \in \{1, 2, \ldots, \rho\} : j_i = i$$

Pour z fixé appartenant à $\boldsymbol{R}$, l'événement :

$$\{\tilde{Z} < z\}$$

peut se décomposer de la façon suivante :

$$\{\tilde{Z} < z\} = \{\tilde{Z} < z\} \cap H =$$

$$= [\{\tilde{Z} < z\} \cap \beta_{j_0}] \cup \left[\{\tilde{Z} < z\} \cap \left(\bigcup_{j_1=1}^{\rho} \beta_{j_1} \right) \right] \cup \ldots \cup \left[\{\tilde{Z} < z\} \cap \left(\bigcup_{j_1=1}^{\rho} \bigcup_{\substack{j_2=1 \\ j_2 \neq 1}}^{\rho} \cdots \bigcup_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq j_1 \\ \vdots \\ j_k \neq j_{k-1}}}^{\rho} \beta_{j_1 j_2 \ldots j_k} \right) \right] \cup \ldots \cup$$

$$\cup \ldots \cup [\{\tilde{Z} < z\} \cap \beta_{j_1 j_2 \ldots j_\rho}] = [\{\tilde{Z} < z\} \cap \beta_{j_0}] \cup \left[\bigcup_{j_1=1}^{\rho} (\beta_{j_1} \cap \{\tilde{Z} < z\}) \right] \cup \ldots \cup$$

$$\cup \ldots \cup \left[\bigcup_{j_1=1}^{\rho} \bigcup_{\substack{j_2=1 \\ j_2 \neq j_1}}^{\rho} \cdots \bigcup_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq j_1 \\ \vdots \\ j_k \neq j_{k-1}}}^{\rho} (\beta_{j_1 j_2 \ldots j_k} \cap \{\tilde{Z} < z\}) \right] \cup \ldots \cup [\beta_{j_1 j_2 \ldots j_\rho} \cap \{\tilde{Z} < z\}]$$

La fonction de répartition de $\tilde{Z}$, notée G, sera alors :

$$\forall z \in R : G(z) = \operatorname{Prob} \{\tilde{Z} < z\} = \qquad \text{(IV, 3)}$$

$$= \sum_{j_1=1}^{\rho} \iint \cdots \iint_{\beta_{j_1} \cap \{t_{j_1} < z\}} dF + \sum_{j_1=1}^{\rho} \sum_{\substack{j_2=1 \\ j_2 \neq j_1}}^{\rho} \cdots \sum_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq j_1 \\ \vdots \\ j_k \neq j_{k-1}}}^{\rho} \iint \cdots \iint_{\beta_{j_1 j_2 \ldots j_k} \cap \{t_{j_k} < z\}} dF + \ldots +$$

$$+\iint \cdots \iint_{\beta_{j_1 j_2 \ldots j_\rho} \cap \{t_{j_\rho} < z\}} dF = \sum_{k=1}^{\rho} \Bigg(\sum_{j_1=1}^{\rho} \sum_{\substack{j_2=1 \\ j_2 \neq j_1}}^{\rho} \cdots \sum_{\substack{j_k=1 \\ j_k \neq j_1 \\ \vdots \\ j_k \neq j_{k-1}}}^{\rho} \iint \cdots \iint_{\beta_{j_1 j_2 \ldots j_k} \cap \{t_{j_k} < z\}} dF \Bigg)$$

V – LE PROGRAMME STOCHASTIQUE DUAL DE min $\mathcal{P}(A , b , c)$ DANS LE CAS OU LA MATRICE A EST CARREE ET REGULIERE.

Comme $\tilde{b}$ est un vecteur aléatoire de R^m, le programme max $\mathcal{P}_d\ (A\ , b\ , c)$ est stochastique. Considérons l'application $\tilde{L}$ de H dans $\bar{R}$:

$$H \xrightarrow{\tilde{L}} R\ :\ b \rightsquigarrow \tilde{L}(b) = \begin{cases} -\infty, \text{ si max } \mathcal{P}_d(A\ , b\ , c) \text{ n'est pas défini} \\ +\infty, \text{ si max } \mathcal{P}_d\ (A\ , b\ , c) \text{ est défini sans être opt. ble} \\ \max\{yb \mid y \in Q\}\ , \text{ si max } \mathcal{P}_d\ (A\ , b\ , c) \text{ est optimisable} \end{cases} \qquad \text{(V, 1}$$

On peut démontrer que l'application $\tilde{L}$ est mesurable, donc que $\tilde{L}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\bar{R}$.

L'ensemble Q des solutions du système $yA \leqslant c$ représente un polyèdre convexe de R^m. Si la matrice A est carrée et régulière alors Q n'est pas vide car il contient au moins le point :

$$\bar{y} = cA^{-1}$$

qui est appelé *sommet* de Q. D'autre part, comme $\bar{y}$ est le seul sommet de Q, par le théorème I, 2 appliqué au programme dual, si b est une réalisation de $\tilde{b}$ telle que max$\mathcal{P}_d(A\ , b\ , c)$ est optimisable, alors :

$$\max_{y \in Q} yb = \bar{y}b. \qquad \text{(V, 2)}$$

On peut donc écrire :

$$\tilde{L}(b) = \begin{cases} \bar{y}b\ , \quad \text{si max } \mathcal{P}_d\ (A\ , b\ , c) \text{ est optimisable} \\ \\ +\infty\ , \text{ sinon.} \end{cases}$$

Proposition V, 1 : Les deux applications $\tilde{L}(b)$ et $\tilde{Z}(b)$ sont identiques; autrement dit :

$$\forall b \in H : \tilde{Z}(b) = \tilde{L}(b).$$

Démonstration : On vient de voir que $\forall b \in H$, ou bien $\max \mathcal{P}_d(A, b, c)$ est optimisable ou bien il est défini mais non optimisable ; or, si b est tel que $\max \mathcal{P}_d(A, b, c)$ est optimisable, $\min \mathcal{P}(A, b, c)$ l'est aussi en vertu du théorème d'existence ; en outre, d'après le théorème de dualité :

$$\bar{y}b = \max_{y \in Q} yb = \min_{x \in P} cx = cA^{-1}b.$$

Si, par contre, b est tel que $\max \mathcal{P}_d(A, b, c)$ n'est pas optimisable (donc $\tilde{L}(b) = +\infty$) alors par le théorème d'existence $\min \mathcal{P}(A, b, c)$ n'est pas défini, ce qui entraîne $\tilde{Z}(b) = +\infty = \tilde{L}(b)$.

De la proposition V, 1 découle donc :

$$\tilde{L}(b) = \begin{cases} \bar{y}b\,, & \text{si} \quad A^{-1}b \geqslant 0 \\ +\infty\,, & \text{sinon}. \end{cases}$$

Vérifions alors que la fonction de répartition (notée T) de $\tilde{L}$ est égale à la fonction G du § III :

$$\forall z \in \mathbf{R} : T(z) = \text{Prob}\,\{\tilde{L} < z\} = \iint_{m-ple} \cdots \iint_{\{b \in H \mid (\bar{y}b < z) \cap (A^{-1}b \geqslant 0)\}} dF =$$

$$= \iint_{m-ple} \cdots \iint_{S(Z)} dF$$

car $\bar{y}b = cA^{-1}b$.

VI – LE PROGRAMME STOCHASTIQUE DUAL DE $\min \mathcal{P}(A, b, c)$ DANS LE CAS OU LA MATRICE A EST RECTANGULAIRE DE RANG MAXIMAL.

Soit la matrice A rectangulaire de rang m. Considérons les systèmes suivants :

$$\begin{cases} yB_i = \gamma_i \\ & i = 1, 2, \ldots, q \\ yR_i \leqslant r_i \end{cases} \qquad \text{(VI, I)}$$

où B_i est la i-ème base de A et R_i représente la matrice formée par les colonnes de A non incluses dans B_i, γ_i le vecteur formé par les m composantes de c correspondant aux colonnes de B_i et r_i le vecteur formé par les composantes de c non incluses dans γ_i.

Un vecteur $y \in \boldsymbol{R}^m$ qui vérifie (VI, 1) pour un indice i fixé, $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$, est appelé *sommet* du polyèdre convexe Q et sera noté $y_{(i)}$.

D'après la définition du système (VI, 1) il est évident que une base B_i définit un sommet de Q si et seulement si B_i vérifie la condition d'optimalité (I, 1). Comme il existe au moins une base de A qui vérifie la condition d'optimalité (I, 1) il existe donc au moins un sommet de Q.

Proposition VI, 1 : Si b est une réalisation de $\tilde{b}$ telle que max $\mathscr{P}_d$ (A, b, c) est optimisable alors :

$$\exists\, i \in \{1, 2, \ldots, \rho\} : \max_{y \in Q} yb = y_{(i)} b$$

où ρ indique le nombre des sommets de Q : $1 \leqslant \rho \leqslant q$.

La proposition VI, 1 n'est rien d'autre que le théorème I, 2 appliqué au programme dual.

Le théorème d'existence et les relations d'exclusion justifient la

Définition VI, 1 : On dit que un sommet $y_{(i)}$ satisfait à la condition d'optimalité pour max $\mathscr{P}_d$ (A, b, c) si et seulement si il existe un vecteur $p \in \boldsymbol{R}^m$ tel que :

$$\begin{cases} b - pB_i = 0 \\ \quad p \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{(VI, 2)}$$

où b est une réalisation donnée de $\tilde{b}$. Le système $b - pB_i = 0$ ayant la solution unique $p = B_i^{-1} b$, la condition (VI, 2) est satisfaite si et seulement si $B_i^{-1} b \geqslant 0$.

D'après les hypothèses IV, 1 et IV, 2, pour tout $b \in \theta$ le programme min $\mathscr{P}(A, b, c)$ est optimisable et cela entraîne, par le théorème d'existence, max $\mathscr{P}_d(A, b, c)$ est optimisable. Par la proposition VI, 1, donc, pour tout $b \in \theta$ il existe au moins un sommet qui vérifie la condition d'optimalité (VI, 2). Par contre, si $b \notin \theta$ alors max $\mathscr{P}_d$ (A, b, c) n'est pas optimisable et aucun sommet ne vérifie la condition (VI, 2).

Supposons que $\forall\, b \in \theta$, $y_{(j)}$ soit le seul sommet qui vérifie la condition d'optimalité. On aura alors :

$$\tilde{L}(b) = \begin{cases} +\infty, & \text{si} \quad B_j^{-1} b \not\geqslant 0 \\ y_{(j)}\, b, & \text{si} \quad B_j^{-1} b \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{(VI, 3)}$$

et on retrouve donc (IV, 1), car $y_{(j)} b = \gamma_j\, B_j^{-1}\, b$.

Plus généralement, si $y_{(1)}, y_{(2)}, \ldots, y_{(\tau)}$, $1 \leqslant \tau \leqslant \rho$, sont les sommets qui, au moins pour une valeur $b \in \theta$, satisfont à la condition d'optimalité on aura :

$$\tilde{L}(b) = \begin{cases} +\infty, \quad \text{si} \quad b \in \left\{ b \in H \,\middle|\, \bigcap\limits_{j=1}^{\rho} (B_j^{-1}\, b \not\geqslant 0) \right\} \\ y_{(j_1)}\, b = \ldots y_{(j_h)}\, b, \quad \text{si} \quad b \in \left\{ b \in H \,\middle|\, \left[\bigcap\limits_{i=1}^{h} (B_{j_i}^{-1}\, b \geqslant 0) \right] \cap \left[\bigcap\limits_{\substack{j=1 \\ j \notin \{j_1, \ldots, j_h\}}}^{\rho} (B_j^{-1}\, b \not\geqslant 0) \right] \right\} \end{cases}$$

où $(j_1, j_2, \ldots, j_h)$ représente une combinaison quelconque de h indices $(1 \leqslant h \leqslant \tau)$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, \tau\}$.

D'après la condition (VI, 2), pour tout $b \in \theta$ on a $h = k$, k étant défini dans (IV, 2). En outre, $\forall\, i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ et $\forall\, b \in H$:

$$y_{(j_i)}\, b = \gamma_{j_i}\, B_{j_i}^{-1} = t_{j_i}.$$

On a donc démontré que *les deux variables aléatoires $\tilde{L}$ et $\tilde{Z}$ sont identiques,* ce qui pouvait être démontré, d'ailleurs, à l'aide des théorèmes d'existence et de dualité. La fonction de répartition de $\tilde{L}$ est alors égale à celle de $\tilde{Z}$, (IV, 3).

L'introduction du programme stochastique dual de min $\mathcal{R}(A, b, c)$ et le fait que les deux variables aléatoires $\tilde{L}$ et $\tilde{Z}$ sont identiques permet toutefois de donner une expression formellement plus simple de la fonction de répartition de $\tilde{Z} = \tilde{L}$.

Proposition VI, 4 : $\forall\, b \in H$, la valeur prise par $\tilde{L}$ est :

$$\tilde{L}(b) = \begin{cases} +\infty, \quad \text{si} \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, \rho\} : B_i^{-1} b \not\geqslant 0 \\ \max\,\{y_{(1)}\, b, \ldots, y_{(\rho)}\, b\} \quad \text{si} \quad \exists\, i \in \{1, 2, \ldots, \rho\} : B_i^{-1}\, b \geqslant 0. \end{cases}$$

Démonstration : En effet, pour b fixé, max $\mathcal{P}_d\,(A\,,\,b\,,\,c)$ n'est pas optimisable ($\tilde{L}\,(b) = +\infty$) si et seulement si aucun des sommets de Q ne vérifie la condition d'optimalité, donc si et seulement si

$$\forall i \in \{1\,,2\,,\ldots,\rho\} : B_i^{-1} b \not\geqslant 0\,.$$

Cela implique aussi que max $\mathcal{P}_d\,(A\,,\,b\,,\,c)$ est optimisable si et seulement si $\exists\, i \in \{1\,,2\,,\ldots,\rho\}$ tel que $B_i^{-1}\,b \geqslant 0$; dans ce cas en vertu de la proposition VI, 1 on aura $\tilde{L}\,(b) = \max\{y_{(1)}\,b\,,\ldots,y_{(\rho)}\,b\}$.

La fonction de répartition de $\tilde{Z} = \tilde{L}$ sera donc :

$$\forall\, z \in R : G(z) = \operatorname{Prob}\{\tilde{Z} < z\} = T(z) = \operatorname{Prob}\{\tilde{L} < z\} =$$

$$= \operatorname{Prob}\{\max\,(y_{(1)}\,b\,,\ldots,y_{(\rho)}\,b) < z\,,\; b \in \theta\} =$$

$$\underbrace{\iint\cdots\iint}_{m-ple}{}_{\{b\,\in H\,|\,\bigcap_{i=1}^{\rho}(y_{(i)}\,b<z)\,\cap\,(b\,\in\,\theta)\}} dF$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BABBAR, M.M. – Distribution of Solutions of a Set of Linear Equations. *Journal of the American Statistical Association* 50, 1955, pp. 854-869.

[2] BEREANU, B. – On Stochastic Linear Programming I. Distribution Problems : A Single Random Variable. *Revue de Math. Pures Appl.* 8, 1963, pp. 683-697.

[3] BEREANU, B – On the Distribution of the Optimum in Linear Programming. *Analele Univ. Bucuresti, Mathematics, Mecanics,* 14, 1965, pp. 41-48.

[4] BEREANU, B. – On Stochastic Linear Programming II. Distribution Problems : Nonstochastic technological matrix. *Rev. Roum. Math. Pures Appl.,* 11, 1966, pp. 713-725.

[5] BEREANU, B. – On Stochastic Linear Programming. The Laplace Transform of the Distribution of the Optimum and Applications. *J. Math. Anal. Appl.* 15, 1966, pp. 280-294.

[6] DE ANGELIS, V. – Metodi Matematici di Ottimizzazione, Edizioni "La Goliandica", 1970.

[7] LEMARIE, J.M. – Prévision et Décision en Programmation Linéaire Stochastique, Thèse de troisième cycle, Univ. de Grenoble, 1967.

[8] PREKOPA, A. – On the Probability Distribution of the Optimum of a Random Linear Program. *J. Siam Control, Sèrie A,* 4. 1965, pp. 211-222.

[9] TINTNER, G. – Stochastic Linear Programming with Applications to Agricultural Economics. *Proc. Second Symposium in Linear Programming I.* Washington, 1955. pp. 197-228.

[10] TINTNER, G. – A note on Stochastic Linear Programming. *Econometrica* 28. 1960. pp. 490-495.

[11] WAGNER, M.M. – On the Distributions of Solutions in Linear Programming Problems. *Journal of the American Statistical Association* 53. 1955. pp. 161-163.

[12] WILLIAMS, A.C. – On Stochastic Linear Programming. *J. Siam on Appl. Math.* 13. 1965. pp. 927-940.