G. KREWERAS

Aires des chemins surdiagonaux et application à un problème économique

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 24 (1976), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1976__24__1_0>

AIRES DES CHEMINS SURDIAGONAUX ET APPLICATION A UN PROBLÈME ÉCONOMIQUE

G. KREWERAS

I – LE PROBLEME COMBINATOIRE

Dans cet article nous considérons les points à coordonnées entières (x, y), c'est-à-dire les points de $\mathbf{Z}^2$, comme les sommets d'un graphe dont les arcs joignent chacun des sommets (x, y) aux deux sommets $(x + 1, y)$ et $(x, y + 1)$ (arcs respectivement "horizontal" et "vertical"). Nous entendons le mot *chemin* au sens usuel de la théorie des graphes (cf. [1]) ; pour leur représentation, nous pouvons imaginer les chemins comme tracés dans un plan $\mathbf{R}^2$ dans lequel $\mathbf{Z}^2$ est "plongé".

Si $0 \leqslant a < b$, on appelle *chemin strictement surdiagonal* de $(0, 0)$ à (a, b) tout chemin dont tous les arcs autres que le premier partent de points (x, y) tels que $x < y$, et l'on appelle *pont strict de portée n* tout chemin de $(0, 0)$ à (n, n) dont les $2n - 1$ premiers arcs forment un chemin strictement surdiagonal.

Il est bien connu que le nombre de chemins strictement surdiagonaux de $(0, 0)$ à (a, b) est égal à la différence de binomiaux

$$C^a_{a+b-1} - C^{a-1}_{a+b-1} = \frac{(a+b-1)!\ (b-a)}{a!\ b!}$$

et que le nombre de ponts stricts de portée n est le nombre de Catalan

$$u_{n-1} = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\ n!} \quad ;$$

cf. par exemple [2].

(*) Le présent travail a pu être réalisé grâce à l'appui de la Sous-commission franco-québécoise de coopération scientifique et technologique.

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, tout pont strict P de portée n définit avec le segment de diagonale allant de $(0, 0)$ à (n, n) un polygone ayant une aire $S(P)$, toujours multiple de $1/2$. Nous allons établir que la somme $\Sigma S(P)$ de toutes ces aires pour les u_{n-1} ponts stricts P est égale à 2^{2n-3}.

Pour cela nous décomposerons l'aire du triangle formé par $(0, 0)$, (n, n) et $(0, n)$ en aires partielles par les verticales d'abscisses entières et les horizontales d'ordonnées entières, ce qui donne une décomposition en $\dfrac{n(n-1)}{2}$ carrés d'aire 1 et n triangles rectangles isocèles d'aire $1/2$ (fig. 1) ; pour chacune de ces aires partielles nous déterminerons combien de ponts stricts P la comprennent "sous eux" (nous dirons : à combien de ponts elles "appartiennent").

Chacune des n aires triangulaires appartient à tous les ponts P ; leur contribution totale est donc

$$n \times \frac{1}{2} \times u_{n-1} = \frac{1}{2}\, C_{2n-2}^{n-1}.$$

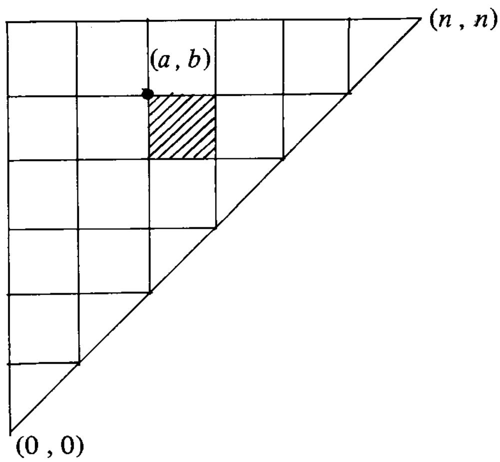

Fig. 1

Considérons maintenant l'aire du carré défini par les coordonnées (a, b) de son *sommet supérieur gauche*. Cette aire appartient non seulement à tous les ponts P_0 qui passent par le point (a, b), mais aussi à tous les ponts P_i qui passent par un point $(a - i, b + i)$, où i prend toutes les valeurs entières non-négatives acceptables.

Le nombre de ponts P_0 est égal, par suite de (1) et de la décomposition en deux tronçons par le point (a, b), au produit

$$(C^a_{a+b-1} - C^{a-1}_{a+b-1})(C^{n-b}_{2n-a-b-1} - C^{n-b-1}_{2n-a-b-1})\ ;$$

le nombre total de ponts P_i auxquels appartient l'aire du carré défini par $(a\,,\,b)$ est ainsi

$$f(a\,,\,b) = \sum_{i\geqslant 0} (C^{a-i}_{a+b-1} - C^{a-i-1}_{a+b-1})(C^{n-b-i}_{2n-a-b-1} - C^{n-b-i-1}_{2n-a-b-1})\,. \tag{2}$$

Faisons alors varier le carré $(a\,,\,b)$ par valeurs constantes de la différence $b - a$; nous poserons

$$b - a = n - h\,,$$

avec $2 \leqslant n - h \leqslant n$, c'est-à-dire $0 \leqslant h \leqslant n - 2$.

La contribution totale à $\Sigma\, S(P)$ des carrés correspondants, qui sont au nombre de $h + 1$, est égale à

$$\sum_{a=0}^{h} f(a\,,\,a + n - h)\,,$$

donc, compte tenu de (2), à la somme, pour tous les couples de valeurs acceptables de a et i, des produits

$$(C^{a-i}_{n+2a-h-1} - C^{a-i-1}_{n+2a-h-1})(C^{h-a-i}_{n-2a+h-1} - C^{h-a-i-1}_{n-2a+h-1})\,. \tag{3}$$

Il est commode de sommer d'abord par rapport à a, en laissant i constant ; on peut faire pour cela le changement de variable $a - i = \lambda$ et faire varier λ de 0 à $h - 2i = k$. On obtient ainsi la somme

$$\sum_{\lambda=0}^{k} (C^{\lambda}_{n-k+2\lambda-1} - C^{\lambda-1}_{n-k+2\lambda-1})(C^{k-\lambda}_{n+k-2\lambda-1} - C^{k-\lambda-1}_{n+k-2\lambda-1})\,. \tag{4}$$

Montrons que cette somme est égale à

$$C^k_{2n-1} - C^{k-1}_{2n-1}\,. \tag{5}$$

En effet, par suite de l'expression générale (1), (5) n'est autre que le nombre total de chemins strictement surdiagonaux du point O$(0\,,\,0)$ au point $A\,(k\,,\,2n - k)$ (fig. 2). Chacun de ces chemins rencontre la droite $y = x + n - k$ en un point au moins ; si le *dernier* de ces points est $M(\lambda\,,\,n - k + \lambda)$, il est facile de voir que les nombres de manières de réaliser les tronçons OM et MA sont donnés respectivement par la première et la deuxième parenthèse de (4).

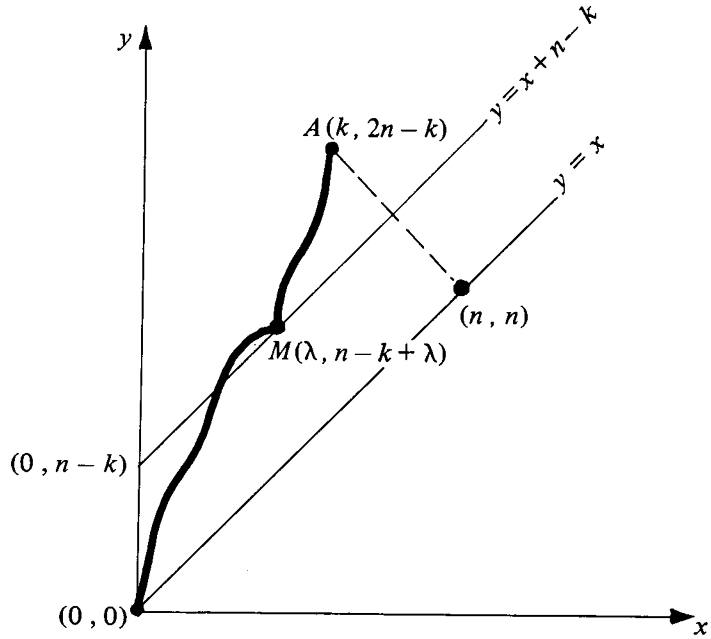

fig. 2

La sommation de (3) par rapport à a seul donne ainsi, puisque $k = h - 2i$:

$$C_{2n-1}^{h-2i} - C_{2n-1}^{h-2i-1} .$$

Si l'on somme ensuite par rapport à i, on obtient la somme alternée

$$C_{2n-1}^{h} - C_{2n-1}^{h-1} + C_{2n-1}^{h-2} - C_{2n-1}^{h-3} + \ldots + (-1)^h C_{2n-1}^{0} ,$$

qui, en vertu d'une propriété élémentaire des binomiaux, est égale à C_{2n-2}^{h} ; c'est donc C_{2n-2}^{h} qui est la contribution totale des carrés (a, b) pour lesquels $b - a = n - h$.

Puisque h varie de 0 à $n - 2$ inclus, et qu'il faut ajouter en fin de compte la contribution des triangles, qui est égale comme on l'a vu à $1/2\, C_{2n-2}^{n-1}$, on obtient finalement

$$\Sigma S(P) = C_{2n-2}^{0} + C_{2n-2}^{1} + \ldots + C_{2n-2}^{n-2} + \frac{1}{2} C_{2n-2}^{n-1} ,$$

ce qui est la moitié du développement binomial de $(1 + 1)^{2n-2}$. On a donc bien établi que

$$\Sigma S(P) = 2^{2n-3} .$$

II – APPLICATION ECONOMIQUE

Un chemin partant de $(0, 0)$ peut servir à décrire un phénomène économique dans lequel des offres et des demandes d'une unité d'un bien se succèdent aléatoirement, l'offre et la demande ayant toutes deux pour probabilité $1/2$ (c'est-à-dire les flux moyens sur le long terme étant parfaitement ajustés). On note les offres et les demandes, à partir d'un instant initial d'équilibre, et cela jusqu'au premier retour à l'équilibre, qui est observé au bout de n offres et n demandes ; l'entier n est aléatoire.

Si l'on a noté les offres par des étapes verticales et les demandes par des étapes horizontales, et si pendant la période d'observation il y a eu excès de l'offre sur la demande ("sur-offre"), le chemin obtenu est un pont strict de portée n ; s'il y a eu, au contraire, excès de la demande ("sur-demande"), le chemin est symétrique d'un pont strict de portée n par rapport à la diagonale $y = x$.

La probabilité p_n pour que la période de déséquilibre soit de *durée n* (définition conventionnelle de la durée par le nombre n qui est à la fois celui des offres et celui des demandes) est égale à la proportion de tels chemins parmi les 2^{2n} chemins possibles de $2n$ étapes partant de $(0, 0)$; c'est donc

$$p_n = \frac{2u_{n-1}}{2^{2n}} = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\,(n-1)!\,n!}\ . \tag{6}$$

Il est facile d'établir, à l'aide de l'approximation de Stirling, que la série $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$, qui a pour somme 1, a son terme général équivalent à $n^{-3/2}/2\sqrt{\pi}$; np_n est donc équivalent à $n^{-1/2}/2\sqrt{\pi}$, ce qui établit le fait bien connu que la variable aléatoire "durée du déséquilibre" a une espérance mathématique infinie (cf. [3] par exemple).

A tout instant d'une période de déséquilibre, par exemple d'une période de sur-offre, si l'on se trouve avoir atteint un point (a, b), on appellera "sur-offre instantanée" la différence $b - a$; si la période en question est représentée par un pont strict de portée n, on appellera "sur-offre moyenne pendant la période" la moyenne arithmétique des $2n$ sur-offres instantanées réalisées au bout de chacune des $2n$ étapes.

Or la somme σ des $2n$ sur-offres instantanées se trouve être le double de l'aire que nous avons appelée $S(P)$. En effet à deux instants consécutifs où les sur-offres instantanées sont u et v (avec nécessairement $|u - v| = 1$), représentés (fig. 3) par deux points U et V sur P, on peut faire correspondre le trapèze rectangle ayant pour sommets U, V et leurs projections U', V' sur la diagonale ; l'aire de ce trapèze est

$$\frac{(u\sqrt{2}/2) + (v\sqrt{2}/2)}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{u+v}{4}.$$

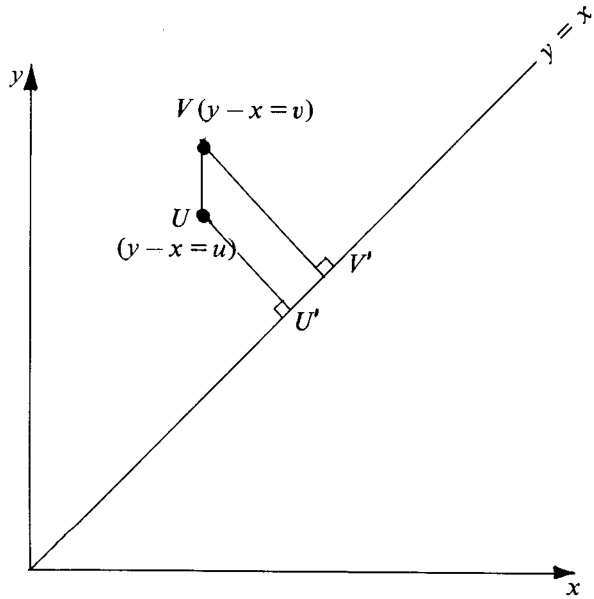

fig. 3

Dans la somme $S(P)$ des aires de tous ces trapèzes, chacune des $2n$ sur-offres instantanées apparaîtra deux fois avec le coefficient $1/4$, ce qui montre que l'on a bien

$$S(P) = \sigma/2.$$

La sur-offre moyenne $\sigma/2n$ pendant la période en question est donc égale à $S(P)/n$.

Si, sans spécifier P, on fixe n, ce qui revient à considérer parmi les périodes de sur-offre toutes celles qui sont de durée n, les u_{n-1} formes possibles du pont P se réalisent avec des probabilités égales à $1/u_{n-1}$. La "sur-offre moyenne pendant une période de sur-offre de durée n" apparaît alors comme une variable aléatoire d'espérance mathématique

$$e_n = \sum_P \frac{1}{u_{n-1}} \cdot \frac{S(P)}{n} = \frac{1}{C_{2n-2}^{n-1}} \sum_P S(P) = \frac{2^{2n-3}}{C_{2n-2}^{n-1}}.$$

Cette espérance est conditionnelle à la réalisation d'une période de déséquilibre de durée n.

Pour calculer l'espérance mathématique *générale* de la variable "déséquilibre moyen observé pendant une période de déséquilibre", il faudrait sommer la série de terme général $p_n e_n$. Mais on voit, en tenant compte de (6), que

$$p_n e_n = \frac{1}{4n} ;$$

il s'agit d'une série harmonique, et la variable en question a donc une espérance infinie.

La conclusion pratique est que, même en cas de parfait ajustement des flux moyens à long terme d'offre et de demande, on a non seulement, comme l'indique la divergence de np_n, des chances d'observer de très longues périodes de déséquilibre, mais encore, comme l'indique la divergence de $p_n e_n$, des chances d'observer, au cours d'une période, des déséquilibres moyens très importants.

III – CONJECTURE COMPLEMENTAIRE

Si l'on s'intéressait en outre (ce qui serait d'un intérêt économique moins évident) à la *variance* de la variable aléatoire "déséquilibre moyen pendant une période de déséquilibre de durée n", on serait conduit au calcul de la *somme des carrés* des aires $S(P)$. Il est curieux de noter que cette somme des carrés, ou mieux encore la moyenne arithmétique de ces carrés, paraît avoir une expression particulièrement simple, qui est la suivante :

$$\frac{1}{u_{n-1}} \Sigma [S(P)]^2 = \frac{n(2n-1)(5n-2)}{12} .$$

Cette expression se vérifie aisément à la main jusqu'à $n = 5$, et nous l'avons vérifiée à l'ordinateur jusqu'à $n = 13$; le problème de l'établir pour n quelconque demeure ouvert.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERGE C. – *Théorie des graphes et ses applications,* 2ᵉ éd., Dunod, Paris (1967).

[2] KREWERAS G. – *Sur les éventails de segments,* Cahiers du B.U.R.O., n° 15, Paris (1970), pp. 9-13.

[3] KREWERAS G. – *Graphes, chaînes de Markov et quelques applications économiques,* Dalloz, Paris (1972), pp. 26-28.