K. EGLE

Mesure d'utilité et distances sur un ensemble préordonné, application à un problème de décision

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 24 (1976), p. 19-40

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1976__24__19_0>

MESURE D'UTILITÉ
ET DISTANCES SUR UN ENSEMBLE PRÉORDONNÉ,
APPLICATION A UN PROBLÈME DE DÉCISION

K. EGLE

I – MESURE D'UTILITE SUR UN ENSEMBLE PREORDONNE

1. Catégorie des ensembles préordonnés

Nous introduirons d'abord la notion d'*ensemble préordonné* (et son interprétation dans un modèle de décision) et ensuite la notion de *morphisme de préordre,* d'une application entre ensembles préordonnés qui respecte leurs préordres.

a) Ensembles préordonnés

Considérons :

1/ un ensemble fini X, *"ensemble d'objets"* (par exemple de projets, de candidats. . .),

2/ un sous-ensemble $\mathfrak{A}$ de l'ensemble des parties de X, $\mathfrak{P}(X)$, interprété comme *"ensemble d'alternatives"* dans un modèle de décision quelconque ; une alternative $A \in \mathfrak{A}$ est alors un ensemble d'objets (p.e. un programme de production, d'investissements. . . , une équipe), 3/ une relation de préordre R dans $\mathcal{A}$; c'est une relation transitive ($R \circ R \subseteq R$) et réflexive ($\Delta_{\mathcal{A}} \subseteq R \cap R^{-1}$), où R^{-1} désigne la relation inverse et $\Delta_{\mathcal{A}}$ la diagonale de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$. R est interprétée comme relation de *"préférence"*, la relation d'équivalence $I = R \cap R^{-1}$ comme relation d'*"indifférence"* et $P = R - I$ comme relation de *"préférence stricte"*.

Appelons $(X, (\mathcal{A}, R))$ *ensemble préordonné* (par la relation de pré-ordre R dans $\mathcal{A}$, partie de $\mathcal{P}(X)$).

L'application $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$, définie par :

$$A, B \in \mathcal{A} \ : \ (A, B) \in I \Longleftrightarrow \eta(A) = \eta(B),$$

s'appelle application canonique. La relation d'ordre R_0 déduite de R par passage au quotient $\mathcal{A}/I$ s'appelle associée à R.

Désignons par $[A] = \eta(A)$ la classe d'équivalence d'un élément $A \in \mathcal{A}$.

Remarque :

Un sous-ensemble $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ est dit *cofinal* $\Longleftrightarrow$ $\forall Y \in \mathcal{A} \exists Z \in \mathcal{B}$: $(Y, Z) \in R$. Si tous les éléments d'un tel $\mathcal{B}$ sont indifférents il est évident que l'image de $\mathcal{B}$ par η est *le plus grand élément* de $\mathcal{A}/I$, un élément $b \in \mathcal{A}/I$ tel que $\forall y \in \mathcal{A}/I : (y, b) \in R_0$.

b) Morphismes et isomorphismes

Introduisons une façon d'écrire les extensions canoniques d'une application $f, f : X \to Y$. Soient

$f^2 : X \times X \to Y \times Y$ l'extension canonique de f au produit $X \times X$,

$F : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ " " " à l'ens. des parties de X,

$F^2 : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(Y)$ l'ext. can. de F au produit.

Soient $(X, (\mathcal{A}, R))$ et $(Y, (\mathcal{B}, S))$ deux ensembles préordonnés. Une application $f : X \to Y$ est dite *morphisme de préordre* ssi elle est croissante, c.a.d. ssi pour $A, B \in \mathcal{A} : (A, B) \in R \Rightarrow F^2(A, B) \in S$, ce qui est équivalent à la relation $F^2[R] \subseteq S$.

La composition de tels morphismes coïncide avec la composition de fonctions.

Finalement un *isomorphisme de préordre* est à définir comme bijection $f : X \to Y$ telle que f et f^{-1} soient croissantes, ou telle que $F^2 [R] = S$ et $(F^2)^{-1}[S] = R$.

(Si R et S sont des relations complètes, si alors $R \cup R^{-1} = \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ et $S \cup S^{-1} = \mathcal{B} \times \mathcal{B}$, on a $F[\mathcal{A}] = \mathcal{B}$ et $F^{-1}[\mathcal{B}] = \mathcal{A}$)

Pour deux relations de préordre R_1 et R_2 dans le même $\mathfrak{A}$ on dit que R_1 est *plus fine* ("moins riche") que R_2 si $R_1 \subset R_2$, ce qui revient au même de dire que l'application identique $1_X : (X, (\mathfrak{A}, R_1)) \to (X, (\mathfrak{A}, R_2))$ est un morphisme.

Les notions d'ensemble préordonné et de morphisme de préordre définissent la catégorie des ensembles (finis) préordonnés.

2. Catégorie des ensembles mesurables

Pour préparer la notion de mesure d'utilité nous voulons considérer d'abord quelques fermetures algébriques de $\mathfrak{A}$. Nous supposerons que le préordre R dans $\mathfrak{A}$ et son extension à une telle fermeture soient isotones, c.à.d. qu'ils contiennent la relation d'inclusion, définie dans $\mathfrak{P}(X)$. La définition d'une mesure d'utilité sur un semi-anneau isotonement préordonné et la définition de fonctions mesurables (par rapport à cette mesure), de fonctions alors qui respectent les structures de semi-anneau et de préordre isotone, constitueront la catégorie des ensembles mesurables.

a) Fermetures algébriques de $\mathfrak{A}$

Jusqu'ici $\mathfrak{A}$ est un sous-ensemble quelconque de $\mathfrak{P}(X)$. Introduisons maintenant quelques fermetures "simples" de $\mathfrak{A}$:

$$X(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cup \{X\}, \phi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cup \{\phi\}$$

$$\cup(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cup \{A \cup B, A, B \in \mathfrak{A}\}, \cap(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cup \{A \cap B, A, B \in \mathfrak{A}\}$$

$$-(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cup \{A - B, B \in \mathfrak{A}\}, \Delta(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cup \{A \Delta B, A, B \in \mathfrak{A}\}$$

...

Puis les fermetures "multiples" de $\mathfrak{A}$:

1/ $\gamma(\mathfrak{A})$ *semi-anneau* $S1)$ $A, B \in \gamma \Rightarrow A \cap B \in \gamma$
(engendré par $\mathfrak{A}$) $S2)$ $A, B \in \gamma, A \subset B \Rightarrow B - A \in \gamma$
Conséquences : $CS1)$ $\phi \in \gamma$
$CS2)$ $A, B \in \gamma \Rightarrow A - B, B - A \in \gamma$.

Alors $\gamma(\mathfrak{A})$ est fermé pour ϕ, $\cap$ et $-$.

2/ $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$ *semi-algèbre* : $\mathcal{L} = X(\gamma)$ (semi-anneau qui contient X)
Conséquence $CB)$ $A \in \mathcal{L} \Rightarrow A^c \in \mathcal{L}$.

3/ $\mathcal{R}(\mathfrak{A})$ *anneau* $\mathcal{R} = \cup(\gamma)$ (semi-anneau fermé pour réunion)
Conséquence $CR)$ $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{R}$

4/ $\mathsf{A}(\mathfrak{A})$ *algèbre* : $\mathsf{A} = (X, \cup)(\gamma)$ (ou $\mathsf{A} = \cup(\mathcal{L})$ ou $\mathsf{A} = X(\mathcal{R})$).

Pour ces fermetures on a le schéma :

$$\begin{tikzcd} & \gamma \arrow[dl, "X"'] \arrow[dr, "\cup"] \arrow[dd, "(X{,}\cup)"] & \\ \mathcal{L} \arrow[dr, "\cup"'] & & \mathcal{R} \arrow[dl, "X"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Toutes ces structures algébriques sont engendrées par $\mathcal{A}$ de façon unique.

b) Préordre isotone

Une relation R dans une partie $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{P}(X)$ est dite *isotone* ssi elle contient la relation d'inclusion $\subset$, ssi alors pour A , $B \in \mathcal{A}$: $A \subset B \Rightarrow (A\,,\,B) \in R$(*).

Supposons pour le reste de cette note que la relation de préordre R dans $\mathcal{A}$ soit isotone. Alors l'extension isotone de R à une fermeture quelconque de $\mathcal{A}$ est unique.

c) Mesure d'utilité

α) *Définition :*

Appelons $(X\,,(\gamma\,,R\,))$ *ensemble mesurable* si γ est (au moins) un semi-anneau et R un préordre isotone dans γ.

Soient $(X\,,(\gamma\,,R))$ un ensemble mesurable et G un groupe abélien ($\top$ sa loi de composition, 0 son élément neutre, $\bot\alpha$ l'inverse d'un élément $\alpha \in G$).

$\mu : \gamma \to G$ est une *mesure d'utilité* si et seulement si :

$M1)$ G est ordonné par l'image directe du préordre R et par le fait que $(A\,,B) \in I$ entraîne $\mu(A) = \mu(B)$,

$M2)$ $A\,,B \in \gamma : A \subset B \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) \top \mu(B - A)$.

Appelons $(X\,,[\gamma\,,R)\,,\mu\,,G])$ *ensemble avec mesure.*

β) *Conséquences élémentaires de la définition :*

$CM1)$ $\mu(\phi) = 0$, en raison de

$$(A \neq \phi\,, \in \gamma\,,\ A \subset A \Rightarrow A - A = \phi) \Rightarrow \mu(A) = \mu(A) \top \mu(\phi)\,.$$

$CM2)$ $\mu(A - B) = \mu(A) \bot \mu(A \cap B)$, en raison de

$$(A\,,B \in \gamma,\ A = (A \cap B) \cup (A - B)) \Rightarrow \mu(A) = \mu(A \cap B) \top \mu(A - B)\,.$$

En supplément pour une extension de la mesure μ à la semi-algèbre $\mathcal{L}(\gamma)$ on a :

(*) Plus précisément : ssi R contient la restriction de $\subset$ à la partie $\mathcal{A}$.

$CMB)\ \mu(A)\top\mu(A^c) = \mu(X)$,

à l'anneau $\mathcal{R}(\gamma)$:

$CMR1)\ \mu(A \cup B) = \mu(A)\top\mu(B)\perp\mu(A \cap B)$,

$CMR2)\ \mu(A \Delta B) = \mu(A \cup B)\perp\mu(A \cap B)$,

et à l'algèbre $\mathsf{A}(\mathcal{A})$: *CMB* et *CMR.*

Notons qu'une relation d'ordre O dans un groupe abélien est dite *compatible* avec la loi de composition $\top$ ssi :

$(\alpha, \beta) \in O \Rightarrow \forall \gamma \in G : (\alpha \top \gamma, \beta \top \gamma) \in O$ (invariance de translation),

et que dans un groupe *fini* l'ordre discret, $O = \Delta_G$ (diagonale de $G \times G$) est la seule relation d'ordre compatible avec $\top$.

Pour que T, l'image directe de R ($R \neq \Delta_\gamma$) par μ puisse définir dans G une extension O (par translation de T) compatible avec $\top$, il est nécessaire que G ne soit pas fini.

Remarque :

La mesure μ peut être interprétée comme mesure de *probabilité ordinale :*

X "ensemble d'événements élémentaires"

A algèbre, "ensemble d'événements"

R la relation isotone suivante :

$A, B \in \mathsf{A}$, $(A, B) \in R \iff$ "la réalisation de B est au moins aussi probable que celle de A",

$(A, B) \in I \iff$ "les réalisations de A et de B possèdent la même probabilité", $\mu(A) = \mu(B)$,

μ mesure de "probabilité ordinale"

$(X, [\mathsf{A}, R), \mu, G])$ "espace de probabilité ordinale".

d) Fonctions mesurables

α) *Décomposition canonique d'une mesure :*

$(X, (\gamma, R))$ ensemble mesurable, $\mu : \gamma \to G$ mesure

$$\begin{tikzcd}
\gamma \arrow[dr, "\eta"] \arrow[rrrd, "\mu"] & & & \\
R \arrow[dr, "\eta^2"'] & \gamma/I \arrow[r, "g"] & \mu[\gamma] \arrow[r, "j"] & G \\
& R_0 \arrow[r, "g^2"'] & T = \mu^2[R] \arrow[r, "j^2"'] & G \times G
\end{tikzcd}$$

$\mu = j \circ g \circ \eta$
η appl. canonique sur le quotient
g bijection canonique
R_0 ordre associé à R
T image directe de R par μ^2

En raison de la définition de T la bijection $g : \gamma/I \to \mu[\gamma]$ est un isomorphisme d'ordre.

β) *Mesurabilité d'une fonction :*

Soient $(X, (\gamma, R))$ et $(Y, (\tau, S))$ des ensembles mesurables.

$f : X \to Y$ est *mesurable* $\iff$ f est un morphisme de semi-anneau isotonement préordonné.

C'est alors en même temps un morphisme de préordre isotone et de semi-anneau. La première propriété s'exprime par :

$FM1)$ $F^2[R] \subseteq S$.

Reste à préciser ce qu'est –dans cette note– un morphisme de semi-anneau :

Avec F comme extension canonique de f à $\mathfrak{P}(X)$:

$FM2)$ $\forall C : C \in \tau \Rightarrow F^{-1}(C) \in \gamma$,

définition équivalente à $F^{-1}[\tau] \subseteq \gamma$.

C'est en raison des propriétés bien connues

i) $F^{-1}(C \cap D) = F^{-1}(C) \cap F^{-1}(D)$

et

ii) $C \subset D \Rightarrow F^{-1}(D - C) = F^{-1}(D) - F^{-1}(C)$,

que f^{-1} transporte la *structure* de semi-anneau.

Notons comme *théorèmes :*

$TH1)$ *Condition de compatibilité* entre les morphismes de préordre et de semi-anneau.

$$F^{-1}[\tau] \subseteq \gamma \quad \text{et} \quad F^2[R] \subseteq S \iff R \subseteq (F^{-1})^2[S] \subset (F^{-1})^2[\tau \times \tau] \subseteq \gamma \times \gamma$$

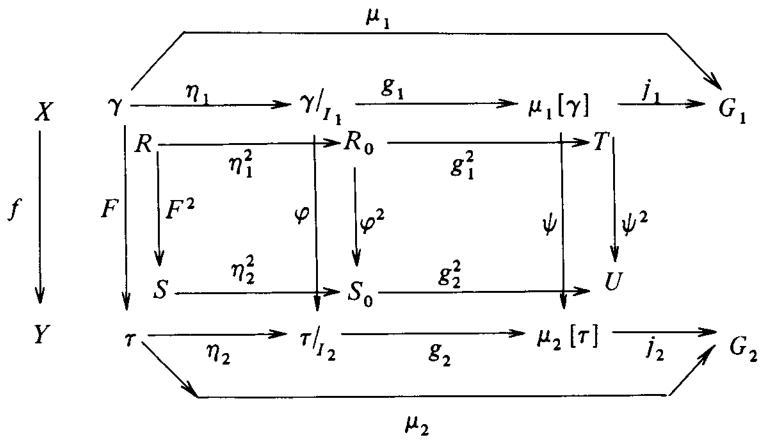
$TH2)$ $TH1 \Rightarrow R \cup R^{-1} \subseteq (F^{-1})^2[S \cup S^{-1}] \subseteq (F^{-1})^2[\tau \times \tau] \subseteq \gamma \times \gamma$.

A l'aide de *TH*2 on s'aperçoit que :

– si R est complet et f mesurable celà entraîne que S est complet et que $F^{-1}[\tau] = \gamma$.

– si R est complet et f mesurable et surjective alors S est complet et f est un isomorphisme de semi-anneau : $F[\gamma] = \tau$ et $F^{-1}[\tau] = \gamma$.

Soient $\mu_1 : \gamma \to G_1$ et $\mu_2 : \tau \to G_2$ des mesures d'utilité sur $(X, (\gamma, R))$ resp. $(Y, (\tau, S))$ et $f : X \to Y$ une fonction mesurable. En appliquant le schéma de décomposition aux μ_1 et μ_2 nous définirons successivement les fonctions φ et ψ d'après la figure suivante :



avec les symboles :

F ext. can. de f aux parties : $F^{-1}[\tau] \subseteq \gamma$,

F^2 ext. can. de F au produit : $F^2[R] \subseteq S$,

η_1 , η_2 appl. can. aux quotients suivant les équivalences I_1 , I_2 ,

R_0 , S_0 rel. associées à R, S par rapport aux ext. can. η_1^2 , η_2^2 de η_1 , η_2 : $R_0 = \eta_1^2\ [R], S_0 = \eta_2^2\ [S]$,

φ déduite de F par passage aux quotients : $\varphi^{-1}[\tau/I_2] \subseteq [\gamma/I_1]$,

φ^2 ext. can. de φ au produit : $\varphi^2\ [R_0] \subseteq S_0$,

g_1 , g_2 bijections can. associées à μ_1 , μ_2 , définissant T et U par leurs ext. can. : $T = g_1^2\,[R_0]$, $U = g_2^2\ [S_0]$,

j_1 , j_2 injections canoniques.

Définissons encore ψ (resp. ψ^{-1}), ext. can. aux images par les mesures μ_1 , μ_2 :

$$\forall C \in \tau : \psi^{-1}(\mu_2(C)) = \mu_1(F^{-1}(C)) ,$$

ou $$\forall [C] \in \tau/I_2 : \psi^{-1}(g_2([C])) = g_1(\varphi^{-1}([C])) ;$$

et ψ^2 par : $$(\psi^2)^{-1} \circ g_2^2 = g_1^2 \circ (\varphi^2)^{-1} .$$

Théorème

ψ^{-1} est un homomorphisme par rapport aux lois de composition dans G_2 et G_1, $\psi^{-1}(\alpha \top_2 \beta) = \psi^{-1}(\alpha) \top_1 \psi^{-1}(\beta)$, élément de $\mu_1[\gamma]$.

Démonstration :

$$\forall C \in \tau : \psi^{-1}(\mu_2(C)) = \mu_1(F^{-1}(C)) \quad \text{par déf.}$$

$$C, D \in \tau , C \subseteq D \Rightarrow \mu_2(D) = \mu_2(C) \top_2 \mu_2(D - C)$$

$$\Downarrow$$

$$F^{-1}(C) \subseteq F^{-1}(D) \Rightarrow \mu_1(F^{-1}(D)) =$$

$$\mu_1(F^{-1}(C)) \top_1 \mu_1(F^{-1}(D) - F^{-1}(C))$$

$$\Longleftrightarrow \psi^{-1}(\mu_2(D)) = \psi^{-1}(\mu_2(C)) \top_1 \psi^{-1}(\mu_2(D - C)) ,$$

en effet :

$$\psi^{-1}(\mu_2(C) \top_2 \mu_2(D - C)) = \psi^{-1}(\mu_2(C)) \top_1 \psi^{-1}(\mu_2(D - C)) \in \mu_1[\gamma] .$$

Théorème : $\psi^2[T] \subseteq U$.

Evident, parce que

$$\psi^2[T]_{df} = \psi^2(g_1^2[R_0]) = g_2^2(\varphi^2[R_0]) \subseteq g_2^2[S_0] = U .$$

Les ensembles mesurables $(X, (\gamma, R))$ forment avec les fonctions mesurables la catégorie des ensembles mesurables.

Remarque :

Soit $(X, (\mathsf{A}, R))$ un ensemble mesurable et A une algèbre. Alors $(X, (\mathsf{A}, R))$ est un *espace topologique.* Les fonctions mesurables sont en même temps des fonctions continues et les isomorphismes sont en même temps des homéomorphismes (applications topologiques) par rapport à cette topologie.

En effet une algèbre A satisfait aux axiomes d'un espace topologique :

*T*1) $\phi \in \mathsf{A}$, $X \in \mathsf{A}$

*T*2) $A_1, A_2 \in \mathsf{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathsf{A}$

*T*3) $A_1, A_2 \in \mathsf{A} \Rightarrow A_1 \cup A_2 \in \mathsf{A}$.

Une application mesurable $f : (X, (\mathsf{A}, R)) \to (Y, (B, S))$ satisfait à la condition de continuité pour les algèbres A et B :

$$f_1^{-1}[B] \subseteq \mathsf{A} .$$

3. Structures produits

Sur l'ensemble produit d'une famille finie d'ensembles portant la même espèce de structure nous voulons définir la structure produit de la même espèce. Il s'agit du préordre produit et de la mesure produit. La structure produit (comme structure initiale) est toujours définie de manière que les projections soient des morphismes.

Nous aurons besoin de ces structures dans le problème de décision à traiter à la fin de cette note.

a) Préordre produit

Soient $(X_i, (\mathfrak{A}_i, R_i))_J$ une famille finie, non vide, d'ensembles préordonnés et $X := \prod_J X_i$ le produit des X_i.

Définissons une fois pour toutes pour une famille de fonctions $(f_i)_J$ la notion d'extensions canoniques (qui a été introduite à la page 20 pour un cas spécial) :

$$f_i : X_i \to Y_i$$

$F_i : \mathfrak{P}(X_i) \to \mathfrak{P}(Y_i)$ l'ext. can. à l'ensemble des parties de X_i,

$f = \underset{J}{\times} f_i \, , f : \prod_J X_i \to \prod_J Y_i$ l'ext. can. au produit $X = \prod_J X_i$,

$F = \underset{J}{\times} F_i \, , F : \prod_J \mathfrak{P}(X_i) \to \prod_J \mathfrak{P}(Y_i)$ l'ext. can. au produit des $\mathfrak{P}(X_i)$.

De toute projection $pr_i, pr_i : X \to X_i$, nous déduisons l'application

$$Pr_i : \mathfrak{P}(\prod_J X_i) \to \mathfrak{P}(X_i) .$$

Définissons encore l'injection $h : \prod_J \mathfrak{P}(X_i) \to \mathfrak{P}(\prod_J X_i)$ de la manière suivante : $(A_i)_J \in \prod_J \mathfrak{P}(X_i), h((A_i)_J) = \prod_J A_i$.

Désignons par $\mathcal{R}$ l'image de $\prod_J \mathcal{P}(X_i)$ par la bijection b déduite de h. Ce n'est rien d'autre que le sous-ensemble des "rectangles" de $\mathcal{P}(\prod_J X_i)$. Evidemment

$$\forall A \in \mathcal{R},\ A = \prod_J A_i\ (A_i \in \mathcal{P}(X_i)), \qquad \text{on a } A = \prod_J Pr_i(A)\,.$$

Soit $\mathcal{A} = \prod_J \mathcal{A}_i$ l'ensemble (produit) d'alternatives ; c'est alors le produit des ensembles d'alternatives $\mathcal{A}_i$, partie de $\prod_J \mathcal{P}(X_i)$. Pour des raisons pratiques nous introduisons pour tout $i \in J$ la "projection" PR_i, restriction de $Pr_i \circ h$ à l'ensemble $\mathcal{A}$, $PR_i : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_i$.

Il est évident que

$$PR_i\,[\mathcal{A}] = \mathcal{A}_i \qquad \text{et que} \qquad PR_i^{-1}\,[\mathcal{A}_i] = \mathcal{A}\,.$$

PR_i^2 désigne l'ext. can. de PR_i au produit $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

Le *préordre produit* $R = \mathop{\times}_J R_i$ est le préordre le moins fin dans $\mathcal{A}$ tel que pour tout $i \in J$ la projection pr_i est un morphisme de préordre : $A = (A_i)_J \in \mathcal{A}, B = (B_i)_J \in \mathcal{A}, (A\,, B) \in R \Rightarrow \forall i\,, (A_i\,, B_i) = PR_i^2\,(A\,, B) \in R_i$

(équivalent à : $\forall i\,, PR_i^2[R] \subseteq R_i)$.

L'équivalence produit $I = \mathop{\times}_J I_i$ est l'équivalence la moins fine dans $\mathcal{A}$ telle que pour

$$A\,, B \in \mathcal{A}\,,\ (A\,, B) \in I \Rightarrow \forall i : (A_i\,, B_i) \in I_i\ (\forall i : PR_i^2[I] \subseteq I_i)\,.$$

$P = R - I$ est l'*ordre strict produit.*

Soit d'une part η^* l'extension canonique $\mathop{\times}_J \eta_i : \prod_J \mathcal{A}_i \to \prod_J (\mathcal{A}_i/I_i)$, d'autre part η l'application can. $\eta : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I$. D'après la bijection

$$\beta : \prod_J (\mathcal{A}_i/I_i) \to \mathcal{A}/I$$

il résulte que $\eta = \beta \circ \eta^*$. Toute classe d'équivalence $[A]$ de $\mathcal{A} = \prod_J \mathcal{A}_i$ suivant $I = \mathop{\times}_J I_i$ s'exprime alors par le vecteur de classes d'équivalence $[A_i]$ des $\mathcal{A}_i$ suivant $I_i : \mathcal{A} \ni A = (A_i)_J : ([A_i])_J \xrightarrow{\beta} [A]\,.$

Au préordre R dans $\mathfrak{A}$ est associé l'ordre R_0 dans $\mathfrak{A}/I$.

Appelons *$(X, (\mathfrak{A}, R))$ ensemble produit préordonné.*

Remarque :

Un sous-ensemble $\mathcal{L}$ de l'ensemble produit $\mathfrak{A}$ est cofinal ssi

$$\forall i\ , \mathcal{L}_i \ = PR_i\,[\mathcal{L}] \qquad \text{est cofinal dans } \mathfrak{A}_i\,.$$

Dans l'ensemble quotient $\mathfrak{A}/I$ l'élément $b = [B]$ $(B = (B_i)_J)$ est le plus grand élément $\Longleftrightarrow$ $\forall i\ ,\ b_i = [B_i]$ est le plus grand élément de $\mathfrak{A}_i/I_i$.

b) Mesure produit

Soit $(X, (\gamma_i, R_i))_J$ une famille finie, non vide d'ensembles mesurables. Compte tenu des résultats de la partie précédente il reste à définir le semi-anneau produit. Ensuite nous donnerons la définition de la mesure produit.

Citons d'abord les relations et opérations produits pour des éléments $A = (A_i)_J$, $B = (B_i)_J$ de $\prod\limits_J \mathcal{P}(X_i)$:

$$\begin{array}{llll} A \subset B \Longleftrightarrow \forall\ i, A_i \subset B_i & \qquad & A \cap B & = (A_i \cap B_i)_J \\ A = B \Longleftrightarrow \forall i, A_i = B_i & & A - B & = (A_i - B_i)_J \\ A \subset B \Longleftrightarrow \forall i, A_i \subset B_i & & A \cup B & = (A_i \cup B_i)_J \end{array}$$

α) Le semi-anneau produit :

Soient $\gamma \ = \prod\limits_J \gamma_i$ le produit des semi-anneaux $\gamma_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ et pour tout $i \in J$ $PR_i : \gamma \to \gamma_i$ la projection, restriction de $Pr_i \circ h$ à l'ensemble γ suivant la définition donnée dans a).

Il est évident que γ est le semi-anneau produit minimal tel que toutes les projections pr_i sont des morphismes de semi-anneau :

$$A_i \in \gamma_i \Rightarrow A \ = \ PR_i^{-1}\,(A_i) \in \gamma\ ,$$

où A désigne l'élément $\quad (A_k)_J = \begin{cases} A_k \in \gamma_k & k \neq i \\ \\ A_k = A_i & k = i \end{cases}$

On a $\qquad (A_i)_J = \bigcap\limits_J PR_i^{-1}\,(A_i)\,.$

γ est fermé pour l'intersection et pour la différence :

$$A = (A_i)_J \in \gamma\ ,\ B = (B_i)_J \in \gamma\ :$$

i) $A \cap B = \left[\bigcap_J PR_i^{-1}(A_i)\right] \cap \left[\bigcap_J PR_i^{-1}(B_i)\right] =$

$$= \bigcap_J PR_i^{-1}(A_i \cap B_i) \in \gamma$$

(puisque $\forall i : A_i \cap B_i \in \gamma_i$ et $\forall i : PR_i$ est morphisme)

ii) $A - B \in \gamma$ de façon analogue.

γ contient l'ensemble vide à identifier avec $(\phi)_J$.

$(X, (\gamma, R))$ est l'ensemble produit mesurable si

$$X = \prod_J X_i, \ \gamma = \prod_J \gamma_i \qquad \text{et} \qquad R = \mathop{\mathsf{X}}_J R_i .$$

β) La mesure produit :

Soit pour tout $i \in J$ $\mu_i : \gamma_i \to G_i$ une mesure d'utilité sur γ_i. Définissons le groupe produit G comme ensemble produit $G = \prod_J G_i$ avec la loi de composition $\top$:

$$\alpha = (\alpha_i)_J, \ \beta = (\beta_i)_J : \qquad \alpha \top \beta = (\alpha_i \top_i \beta_i)_J .$$

La mesure produit μ :

$$A = (A_i)_J \in \gamma : \mu(A) = (\mu_i(A_i))_J \quad \text{(élément de } G) .$$

Si $\quad A, B \in \gamma, A \subseteq B, \quad$ alors $\quad \mu(B) = \mu(A) \top \mu(B - A)$.

Donnons le symbole $\mathop{\mathsf{X}}_J \mu_i$ à la mesure ainsi définie.

Nous pouvons utiliser, pour une visualisation, la figure de la page 25 en y mettant le produit $\left(\prod_J X_i, \left[\left(\prod_J \gamma_i, \mathsf{X} R_i\right), \mathsf{X} \mu_i, \prod_J G_i\right]\right)$ comme ensemble de départ, en remplaçant f par pr_i et F par PR_i et en y mettant pour tout i $(X_i, [(\gamma_i, R_i), \mu_i, G_i])$ comme ensemble d'arrivée.

Remarque finale :

Nous venons de définir une mesure d'utilité et la catégorie des ensembles mesurables liée avec cette mesure, sous-catégorie des ensembles préordonnés. La longueur de cette partie consacrée à ces réflexions ne doit pas cacher au lecteur qu'il s'agit jusque là de structures très "faibles" et que cette mesure ne peut pas en réalité servir à grand-chose. La raison en est très simple : à l'information initiale s'exprimant par les préférences sous forme du préordre nous venons d'ajouter uniquement la propriété d'additivité qui s'impose au préordre et qui est à considérer comme information supplémentaire.

Dans la partie suivante nous suggérons d'introduire des informations supplémentaires sous forme d'une valuation du groupe G. Cette notion permet de définir une distance sur G et sur le semi-anneau γ de façon très élémentaire.

II – VALUATIONS ET DISTANCES

D'abord on définit la notion de valuation. C'est une sorte de norme adaptée au groupe ordonné G. A l'aide de cette valuation il est facile de définir une distance sur G. L'intérêt dans cette partie consiste à définir des valuations et des distances sur un ensemble produit dans le cas où une valuation et une distance est donnée sur chacune des composantes.

1. Valuations

Rappelons les propriétés de la mesure d'utilité $\mu : \gamma \to G$ sur un ensemble mesurable $(X, (\gamma, R))$:

i) $T = \mu^2 [R]$ est l'image directe de R, ordre dans le groupe abélien G. $\mu^2 [I] \subset \Delta_G$. Soit U l'extension de T par translation de T. On suppose que U est compatible avec la composition $\top$ dans G.

ii) $A, B \in \gamma : A \subset B \Rightarrow \mu(B) = \mu(A) \top \mu(B - A)$.

Soit H un groupe abélien (composition $+$) complètement ordonné par une relation d'ordre $\leqslant$.

$\epsilon : G \to H$ est une *valuation de* G si et seulement si :

$V1)$ $\alpha, \beta \in G : 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \Rightarrow \epsilon(\alpha) \leqslant \epsilon(\beta)$

$V2)$ $\epsilon \geqslant 0$

$\epsilon(0) = 0$

$V3)$ $\epsilon(\perp \alpha) = \epsilon(\alpha)$

$V4)$ $\epsilon(\alpha \top \beta) \leqslant \epsilon(\alpha) + \epsilon(\beta)$.

L'application ϵ est croissante pour des éléments positifs de $G(V1)$, en particulier pour les éléments de $\mu[\gamma]$, ϵ est non-négative $(V2)$ et positive pour des éléments $\neq 0$, symétrique $(V3)$, sous-additive $(V4)$ et vérifie les inéquations :

$$\epsilon(\alpha \perp \beta) \leqslant \epsilon(\alpha) + \epsilon(\beta)$$

$$|\epsilon(\alpha) - \epsilon(\beta)| \leqslant \epsilon(\alpha \perp \beta)(*)$$

(*) Puisque H est complètement ordonné il est réticulé et la valeur absolue d'un élément $x \in H$ est définie et égale à $|x| = \sup\{x, -x\}$.

Appelons *valuation composée* l'application $\varphi = \epsilon \circ \mu$, $\varphi : \gamma \to H$, qui a les propriétés :

$VC1)$ $(A, B) \in R \Rightarrow \varphi_A \leqslant \varphi_B$

$VC2)$ $\varphi(A) \geqslant 0$, $\varphi(\phi) = 0$

$VC3)$ $A \subseteq B \Rightarrow \varphi(B) \leqslant \varphi(A) + \varphi(B\text{-}A)$

Pour un anneau $\mathcal{R}$:

$VCR)$ $\varphi(A \cup B) \leqslant \varphi(A) + \varphi(B)$ (aussi si $A \cap B = \phi$)

Pour une semi-algèbre $\mathcal{L}$: $VCB)$ $\varphi(X) \leqslant \varphi(A) + \varphi(A^c)$

Exemple trivial :

$H = \mathbb{N} \cup \{0\}$: $\varphi(A) = \text{card}(A)$,

$\varphi(A) = f(\text{card}(A))$ (f croissant, $f(m+n) \leqslant f(m) + f(n)$)

Remarque :

L'application ϵ est à considérer comme valuation aussi dans le cas où H est une structure plus riche (corps complètement ordonné . . .) mais qui contient un groupe abélien compl. ordonné comme structure sous-jacente.

2. Distances

a) Définitions

$\delta : G \times G \to H$ est *distance* $\Longleftrightarrow \forall\, \alpha, \beta, \gamma \in G$:

$\Delta 1)$ $\delta(\alpha, \beta) \geqslant 0$

$\delta(\alpha, \beta) = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \beta$

$\Delta 2)$ $\delta(\alpha, \beta) = \delta(\beta, \alpha)$

$\Delta 3)$ $\delta(\alpha, \gamma) \leqslant \delta(\alpha, \beta) + \delta(\beta, \gamma)$

Analoguement, soit $(X, (\gamma, R))$ mesurable :

$d : \gamma \times \gamma \to H$ est *distance* $\Longleftrightarrow \forall\, A, B, C \in \gamma$:

$D1)$ $d(A, B) \geqslant 0$

$d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow (A, B) \in I$

$D2)$ $d(A, B) = d(B, A)$

$D3)$ $d(A, C) \leqslant d(A, B) + d(B, C)$

Sans la propriété $\Delta 3)$ (resp. $D3)$ δ (resp. d) est appelé "indice de distance".

b) Deux exemples

Il s'agit de distances qui peuvent être décomposées le long des deux chemins possibles indiqués dans la figure ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\gamma \times \gamma \arrow[r, "\mathcal{O}"] \arrow[d, "\mu^2"'] \arrow[ddr, "d"] & \gamma \arrow[d, "\mu"] \arrow[dd, bend left, "\varphi"] \\
G \times G \arrow[r, "\mathcal{T}"] \arrow[dr, "\delta"'] & G \arrow[d, "\epsilon"] \\
 & H
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{O}$ opération dans γ

μ^2 extension can. de μ au produit $\gamma \times \gamma$

$\mathcal{T}$ opération dans G

α) *Le chemin* $\gamma \times \gamma \xrightarrow{\mu^2} G \times G \xrightarrow{\mathcal{T}} G \xrightarrow{\epsilon} H$

Choix de $\mathcal{T}$ dans G : $\mathcal{T}(\alpha, \beta) = \alpha \perp \beta$ (avec les propriétés

$\mathcal{T}(\alpha, \beta) = \perp \mathcal{T}(\beta, \alpha)$, $\mathcal{T}(\alpha, 0) = \alpha$, $\mathcal{T}(\alpha, \beta) = 0 \Longleftrightarrow \alpha = \beta)$.

Définition des distances :

$$\delta = \epsilon \circ \mathcal{T},\ \delta(\alpha, \beta) = \epsilon(\alpha \perp \beta)$$

$$d = \delta \circ \mu^2 ,\ d(A, B) = \epsilon(\mu_A \perp \mu_B) .$$

δ est une distance sur G, elle est même invariante pour translation, c.à.d. $\delta(\alpha \top \gamma, \beta \top \gamma) = \delta(\alpha, \beta)$. En outre on a $\delta(0, \alpha) = \epsilon(\alpha)$.

Il est aussi évident que d est une distance sur γ au sens défini.

On trouve :

$d(\phi, A) = \varphi(A)$,

$A \subseteq B \Rightarrow d(A, B) = \varphi(B - A)$,

$d(A, B) = \epsilon(\mu_A \perp \mu_B) = \epsilon(\mu(A - B) \perp \mu(B - A))$ (cf. β)

β) *Le chemin* $\gamma \times \gamma \xrightarrow{\mathcal{O}} \gamma \xrightarrow{\varphi} H$

Soient $(X, (\mathcal{R}, R))$ mesurable, $\mathcal{R}$ un anneau et R une relation d'*ordre* dans $\mathcal{R}$.

Choix de $\mathcal{O}$ dans $\mathcal{R}$: $\mathcal{O}(A, B) = A \,\Delta\, B$ (avec les propriétés

$\mathcal{O}(A, B) = \mathcal{O}(B, A)$, $\mathcal{O}(A, \phi) = \phi$, $\mathcal{O}(A, B) = \phi \Longleftrightarrow A = B)$.

Définition de la distance : $d \;= \varphi \circ \ominus , d(A , B) = \varphi(A \,\Delta\, B)$.

(En raison de $d(A , B) = 0 \Rightarrow A = B$ il est nécessaire de supposer que R ne contient pas d'indifférences en dehors de la diagonale).

On trouve en outre :

$$d(\phi , A) = \varphi(A) ,$$

$$A \subseteq B \Rightarrow d(A , B) = \varphi(B - A) ,$$

$$d(A , B) = \epsilon(\mu(A - B) \top \mu(B - A)) .$$

Exemple trivial :

$$d(A , B) = \operatorname{card}(A \,\Delta\, B) ,$$

$$d(A , B) = f(\operatorname{card}(A \,\Delta\, B)) \; (f \text{ croissant}, f(m + n) \leqslant f(m) + f(n)) .$$

3. Valuations et distances sur un ensemble produit

Soient $(X_i , [(\gamma_i , R_i) , \mu_i , G_i])_J$ une famille d'ensembles avec mesures et $(X , [(\gamma , R) , \mu , G])$ l'ensemble produit avec la mesure produit $\mu = \underset{J}{\times} \mu_i$.

Supposons que sur chacune des composantes γ_i est définie une distance $d_i : \gamma_i \times \gamma_i \to H$ et par conséquent, que sur chacun des groupes G_i est définie une valuation $\epsilon_i : G_i \to H$.

La décision d'appliquer tout ϵ_i dans le même H résulte de l'intention d'introduire à ce point de façon très générale une pondération des composantes selon leur importance relative (ou une comparaison d'utilités entre les composantes).

Pour cette famille $(\epsilon_i)_J$ de valuations individuelles on définit une *valuation produit* sur le groupe produit G :

$\epsilon = \delta \circ (\underset{J}{\times} \epsilon_i)$ où $\underset{J}{\times} \epsilon_i : G \to H^{|J|}$ désigne l'extension can. de $(\epsilon_i)_J$ au produit $G = \underset{J}{\times} G_i$ et $\xi : H^{|J|} \to H$ une application non décroissante et croissante pour au moins une composante de $H^{|J|}$.

Donnons pour ξ deux exemples ; soit

$$\alpha = (\alpha_i)_J \in G , \underset{J}{\times} \epsilon_i(\alpha) = (\epsilon_i(\alpha_i))_J \in H^{|J|} :$$

i) $(\epsilon_i(\alpha_i)) J \overset{\xi_1}{\leadsto} \sum_J \epsilon_i(\alpha_i)$

ii) $(\epsilon_i(\alpha_i))_J \overset{\xi_2}{\leadsto} \sup_J \{\epsilon_i(\alpha_i)\}$.

Pour une famille $(\varphi_i)_J$ de valuations composées le semi-anneau produit $\gamma = \prod_J \gamma_i$ est valué par :

$$\varphi \; = \epsilon \circ \mu = \xi \circ \left(\underset{J}{\times} \epsilon_i) \circ (\underset{J}{\times} \mu_i \right) = \xi \circ \left(\underset{J}{\times} \epsilon_i \circ \mu_i \right) = \xi \circ \left(\underset{J}{\times} \varphi_i \right).$$

Soient $\epsilon = \bigotimes_J \epsilon_i$ et $\varphi = \bigotimes_J \varphi_i$ les symboles pour les valuations produits.

Remarque :

Les possibilités de choisir ξ se multiplient dans la mesure où la structure de H surpasse celle d'un groupe abélien compl. ordonné.

La définition suivante de distances d sur le semi-anneau produit γ et de distances δ sur le groupe produit G est fondée sur la définition précédente de la valuation produit ϵ (resp. φ).

Reprenons les exemples donnés dans 2., page 33 :

α) Soit $(\delta_i)_J$ une famille de distances de l'espèce α), p. 33 :

$$\alpha_i \, , \beta_i \in G_i : \quad \delta_i (\alpha_i \, , \beta_i) = \epsilon_i (\alpha_i \perp_i \beta_i) \, .$$

La *"distance produit"* $\delta \; = \bigotimes_J \delta_i$ sur G :

$$\alpha = (\alpha_i)_J \, , \beta = (\beta_i)_J \; G : \; \delta (\alpha \, , \beta) = \epsilon (\alpha \perp \beta) = \xi \circ (\underset{J}{\times} \epsilon_i) \, (\alpha \perp \beta) =$$
$$= \xi \, ((\epsilon_i \, (\alpha_i \perp_i \beta_i))_J) = \xi \, ((\delta_i \, (\alpha_i \, , \beta_i))_J) = \xi \circ \left(\underset{J}{\times} \delta_i \right) (\alpha \, , \beta) \; .$$

P.e. : $$\delta (\alpha \, , \beta) \; = \sum_J \delta_i (\alpha_i \, , \beta_i) \qquad (\text{suivant } \xi = \xi_1) \, ,$$

$$\delta (\alpha \, , \beta) \; = \sup_J \{ \delta_i (\alpha_i \, , \beta_i) \} \qquad (\text{suivant } \xi = \xi_2) \, .$$

Soit $(d_i)_J$ une famille de distances d'espèce α), p. 33.:

$$A_i \, , B_i \in \gamma_i : \; d_i (A_i \, , B_i) = \epsilon_i (\mu_{i_{A_i}} \perp_i \mu_{i_{B_i}}) \, .$$

La *distance produit* $d \; = \bigotimes_J d_i \quad$ sur γ :

$$A = (A_i)_J \, , B = (B_i)_J \in \gamma : \; d (A \, , B) = \delta \circ \mu^2 \, (A \, , B) = \delta \, (\mu_A \, , \mu_B) =$$
$$= \xi \, ((d_i \, (A_i \, , B_i))_J) = \xi \circ \left(\underset{J}{\times} d_i \right) (A \, , B) \, .$$

P.e. : $$d (A \, , B) \; = \sum_J d_i (A_i \, , B_i) \qquad (\xi = \xi_1) \, ,$$

$$d(A\,,B) = \sup_J \{ d_i(A_i\,,B_i)\} \qquad (\xi = \xi_2)\,.$$

β) Soient $(X_i\,,(\mathcal{R}_i\,,R_i))_J$ mesurables, $\mathcal{R}_i$ des anneaux et R_i des relations d'ordre dans $\mathcal{R}_i$.

Soit $(d_i)_J$ une famille de distances de l'espèce β), p. 33 :

$$A_i\,,B_i \in \mathcal{R}_i :\; d_i(A_i\,,B_i) = \varphi_i(A_i\;\Delta\;B_i)\,.$$

La *distance produit* $d = \bigotimes_J d_i$ sur l'anneau produit $\mathcal{R}$:

$$A = (A_i)_J\,, B = (B_i)_J \in \mathcal{R}:\; d(A\,,B) = \varphi(A\;\Delta\;B) = \xi \circ \left(\mathop{\times}_J \varphi_i\right)(A\;\Delta\;B) =$$

$$= \xi((\varphi_i(A_i\;\Delta\,B_i))_J) = \xi \circ \left(\mathop{\times}_J d_i\right)(A\,,B)\,.$$

P.e. : $$d(A\,,B) = \sum_J d_i(A_i\,,B_i) = \sum_J \varphi_i(A_i\;\Delta\;B_i) \qquad (\xi = \xi_1)\,,$$

$$d(A\,,B) = \sup_J\{ d_i(A_i\,,B_i)\} = \sup_J\{\varphi_i(A_i\;\Delta\,B_i)\} \qquad (\xi = \xi_2)\,.$$

Remarque finale :

La valuation composée $\varphi : \gamma \to H$ est une manière de compléter le préordre R dans le semi-anneau γ. Soit $\bar{R}$ le préordre complet $(R \subset \bar{R})\,, \bar{I} = \bar{R} \cap \bar{R}^{-1}$ l'indifférence et $\bar{P} = \bar{R} - \bar{I}$ l'ordre strict :

$$(A\,,B) \in \bar{P} \iff \varphi_A < \varphi_B\,,$$

$$(A\,,B) \in \bar{I} \iff \varphi_A = \varphi_B\,.$$

De même la valuation produit composée $\varphi = \bigotimes_J \varphi_i\,, \varphi = \xi \circ \left(\mathop{\times}_J \varphi_i\right)$, sert à compléter le préordre produit $R = \mathop{\times}_J R_i$ dans le semi-anneau produit $\gamma = \prod_J \gamma_i$. La fonction ξ (qui est non décroissante et strictement croissante pour au moins une composante) garantit que R est contenu dans le préordre produit complet $\bar{R}$.

III – UN PROBLEME DE DECISION ET SA SOLUTION PAR LA MINIMISATION D'UNE DISTANCE

1. Le problème

Soient $(X_i, (\gamma_i, R_i))_J$ une famille finie d'ensembles mesurables et $(X, (\gamma, R))$ l'ensemble produit mesurable. (On peut s'imaginer que tout γ_i est engendré par un ensemble $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{P}(X_i)$ et que le préordre R_i est l'extension isotone d'un préordre dans $\mathcal{A}_i$).

Nous supposons que tout γ_i contient un sous-ensemble cofinal $\mathcal{L}_i$ dont les éléments sont tous indifférents.

Rappelons que par conséquent l'élément b_i, image de $\mathcal{L}_i$ par l'application canonique η_i est le plus grand élément de l'ensemble quotient γ_i/I_i (voir p.20). En outre que $\mathcal{L} = \prod_J \mathcal{L}_i$ est l'ensemble cofinal du semi-anneau γ et b, son image par l'application canon. η est le plus grand élément de γ/I (voir p. 20).

Considérons le problème de décision où l'ensemble d'alternatives $\mathcal{C}$ est une partie de γ, $\mathcal{C} \subset \gamma$, telle que $\mathcal{C} \cap \mathcal{L} = \phi$.

Soit C l'image de $\mathcal{C}$ par passage au quotient γ/I : $C \subset \gamma/I$, C est ordonné par l'ordre R_0 associé à R, et $b \notin C$.

Si C possédait un plus grand élément par rapport à R_0, ce serait la classe d'équivalence des meilleures alternatives.

Mais en général il n'y a pas de plus grand élément dans C et le problème de prendre une décision au sens de choisir la meilleure alternative n'a pas de solution. C.à.d. dans le cadre de l'information initiale une décision n'est pas possible.

Evidemment il est nécessaire d'apporter des informations supplémentaires de sorte qu'on peut trouver une extension $\bar{R}_0$ de R_0 (resp. une extension $\bar{R}$ de R) par rapport à laquelle C (resp. $\mathcal{C}$) possède un plus grand élément, la meilleure alternative dans $\mathcal{C}$. Un tel procédé est appelé *"programme supplémentaire"* dans ce qui suit.

Si $\mathcal{C}$ possède un sous-ensemble propre $\mathcal{D}$ qui est cofinal dans $\mathcal{C}$ (par rapport à R), si alors C possède un sous-ensemble D d'éléments maximaux il suffit de restreindre ce programme à D (resp. à $\mathcal{D}$).

De toute façon le choix d'un tel programme n'est pas unique et la question de savoir si un certain programme est "raisonnable" doit rester ouverte.

Il est clair que les projections $pr_i : X \to X_i$ ne sont plus des morphismes de préordre par rapport à l'extension $\bar{R}$.

2. Un programme supplémentaire

Soient $\mathcal{D}$ un sous-ensemble cofinal de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C} \subset \gamma$ et $\mathcal{C} \cap \mathcal{L} = \phi$. Soit, pour tout $i \in J, \epsilon_i = \mathcal{D}_i \cup \mathcal{L}_i$ l'image de $\mathcal{D} \cup \mathcal{L}$ par la projection PR_i (définie sur γ, voir p. 28).

Soit,pour tout $i \in J, \varphi_i : \epsilon_i \to H$ une valuation composée de la composante ϵ_i ; c'est la composition d'une mesure d'utilité μ_i sur ϵ_i et d'une valuation ϵ_i de $\mu_i[\epsilon_i]$, partie de G_i.

Ces valuations entraînent que tout ϵ_i est complètement préordonné. Mais elles servent surtout à définir une distance quelconque d (au sens de la partie II) entre les éléments de $\mathcal{D}$ et l'ensemble cofinal $\mathcal{L}$.

Le programme supplémentaire à proposer a pour résultat un préordre complet dans $\mathcal{D}$. Soit $\bar{R}$ le préordre complet, $\bar{I}$ l'indifférence et $\bar{P} = \bar{R} - \bar{I}$ l'ordre strict :

$$B \in \mathcal{L}, D_1, D_2 \in \mathcal{D}: \quad (D_1, D_2) \in \bar{P} \iff d(D_1, B) > d(D_2, B),$$
$$(D_1, D_2) \in \bar{I} \iff d(D_1, B) = d(D_2, B).$$

Un élément D^* est la meilleure alternative, c.à.d. est le plus grand élément de $\mathcal{D}$ (et de $\mathcal{C}$) si :

$$d(D^*, B) = \inf_{D \in \mathcal{D}} . \{d(D, B)\}.$$

Citons deux programmes :

$B = (B_i)_J \in \mathcal{L}, D = (D_i)_J \in \mathcal{D}$, pour les distances voir p. 35 :

$$d(B, D) = \sum_J d_i(B_i, D_i) : \quad \inf_{D \in \mathcal{D}} \left\{ \sum_J d_i(B_i, D_i) \right\}$$

$$d(B, D) = \sup_J \{d_i(B_i, D_i)\} : \quad \inf_{D \in \mathcal{D}} \sup_J \{d_i(B_i, D_i)\}.$$

Le deuxième programme ressemble à l'approximation de Tchebychef traitée dans la théorie d'approximation.

Remarque 1 :

Cette manière de résoudre le problème de décision à l'aide des valuations a pour effet secondaire que les composantes de l'ensemble d'alternatives sont complètement préordonnées. Cela ne semble pas être tragique. On suppose dans beaucoup de cas que les composantes sont déjà complètement préordonnées à l'avance. Ce qui pèse plus lourd c'est que les valuations sont un instrument trop fort : pour se décider on n'a pas besoin d'un préordre complet dans l'ensemble cofinal $\mathcal{D}$.

Remarque 2 concernant les décisions collectives :

i) *Les relations de Pareto*

Soit $(R_k)_K$, card $K = n$, une famille de préordres complets sur le même semi-anneau γ, engendré par un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ donné.

Soient Δ_X la diagonale de X^n, j l'injection $j : \Delta_X \to X^n$,

Δ_γ la diagonale de γ^n, J l'extension de j à l'ensemble des parties de Δ_γ et J^2 l'extension de J^2 l'extension de J au produit correspondant.

$(X^n , (\gamma^n , R))$ est l'ensemble produit préordonné par le préordre R , $R = \underset{K}{\times} R_k$.

Dans la diagonale Δ_γ est induit par R un préordre R_Δ, c'est l'image réciproque de R par l'injection J^2.

Soit $(\Delta_X , (\Delta_\gamma , R_\Delta))$ la diagonale ainsi préordonnée. (Il est clair que j est un morphisme de préordre).

D'autre part la bijection $d : \Delta_X \to X$ fait correspondre à $(\Delta_X , (\Delta_\gamma , R_\Delta))$ l'ensemble $(X , (\gamma , R_c))$ de manière que R_c est l'image directe de R_Δ (c.à.d. tel que d est un isomorphisme de préordre).

On trouve :

$$R_c = \bigcap_K R_k \qquad \text{le préordre dans } \gamma ,$$

$$I_c = \bigcap_K I_k \qquad \text{l'indifférence ,}$$

$$P_c = R_c - I_c .$$

On donne l'interprétation suivante :

K est un collectif d'individus ($n \geqslant 2$) et R_k est la relation de préférence appartenant à tout individu k dans l'ensemble commun d'aternatives γ. R_c , I_c et P_c sont les relations de Pareto, R_c est la préférence collective conforme avec le principe de Pareto.

Les éléments d'un sous-ensemble cofinal $\mathcal{D}$ de γ par rapport à R_c sont dites Pareto-optimales ou économiquement efficaces. Le collectif K est confronté avec le problème de trouver une meilleure alternative, un plus grand élément dans $\mathcal{D}$. Une extension quelconque de R_c est dite relation Paretoinclusive. Il s'agit alors d'avoir un procédé (une règle de décision) qui conduit à une telle relation P-inclusive et à la spécification d'un plus grand élément dans $\mathcal{D}$.

ii) *Programme de compromis*

Pour appliquer l'idée des programmes supplémentaires à ce problème de décision collective il est pratique de considérer l'ensemble $(X^n, (\gamma^n, R))$.

L'ensemble $\mathcal{B}$ est le produit des ensembles $\mathcal{B}_k$: pour tout $k \in K, \mathcal{B}_k$ est à identifier avec le sous-ensemble d'alternatives indifférentes qui sont les meilleures dans γ d'après l'individu k. (Il est clair que $\mathcal{B}_k \subset \mathcal{D}$ ($\mathcal{D}$ cofinal dans γ) pour tout k).

$\mathcal{B}$ est en effet cofinal dans γ^n et son image par l'application canonique est un seul élément b, le plus grand dans γ/I.

Mais $\mathcal{B}$ n'appartient pas (sauf en cas d'unanimité) à la diagonale Δ_γ. Soit Δ la partie cofinale de Δ_γ par rapport à R_Δ, c.à.d. Δ est l'image de la partie cofinale $\mathcal{D}$ par d^{-1} par rapport à R_c.

Appelons *Programme de compromis* un programme supplémentaire appliqué à ce problème de décision collective. Il consiste :

1/ à définir pour tout $k \in K$ une valuation composée φ_k sur $\mathcal{D}$ et une distance $d_k : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to H$,

2/ à définir la distance produit d entre les éléments de Δ et l'ensemble cofinal $\mathcal{B}$ (des vecteurs B, dont les composantes sont les optima individuels),

3/ à déterminer la (les) meilleure(s) alternative(s) dans Δ par le programme

$$\inf_{D \in \Delta} \{d(D, B)\} \qquad (B \in \mathcal{B}).$$

C'est l'élément D^* (l'ensemble $\mathcal{D}^*$) de la diagonale le plus proche de $\mathcal{B}$.