

# CAHIERS DU BURO

G. KREWERAS

## Sur les hiérarchies de segments

*Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle.*

*Série Recherche*, tome 20 (1973), p. 3-61

[http://www.numdam.org/item?id=BURO\\_1973\\_\\_20\\_\\_3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BURO_1973__20__3_0)

© Institut Henri Poincaré — Institut de statistique de l'université de Paris, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## 1 – INTRODUCTION

Etant donné un ensemble  $E$  totalement ordonné par une relation notée  $\leq$ , nous appellerons *segment*  $[a, b]$  de  $E$  l'ensemble des  $x$  de  $E$  tels que  $a \leq x \leq b$ . Nous supposerons toujours que  $a \leq b$ , c'est-à-dire qu'il n'existe pas de "segment vide". Nous appellerons *hiérarchie*  $H$  tout ensemble de segments de  $E$  tel que, pour toute paire  $\{S, S'\}$  de segments de  $H$ , on ait soit  $S \cap S' = \emptyset$ , soit  $S \subset S'$ , soit  $S' \subset S$ . Une hiérarchie peut ne comprendre qu'un seul segment (hiérarchie-singleton) ou même n'en comprendre aucun (hiérarchie vide).

L'ensemble  $E$  considéré sera généralement celui des entiers  $\{0, 1, 2, \dots, r\}$  ou  $[0, r]$ .

Certaines hiérarchies peuvent comprendre des segments  $[a, a]$  composés d'un seul point (segments "ponctuels"). Mais il est clair que si une hiérarchie  $H$  de  $[0, r]$  ne comprend aucun segment ponctuel, la réunion de  $H$  et de n'importe quelle partie de l'ensemble des  $r + 1$  segments ponctuels est encore une hiérarchie. Nous ne considérerons donc, sauf mention expresse du contraire, que des hiérarchies formées de *segments non-ponctuels*, que nous nommerons simplement segments pour la brièveté.

Pour tout segment  $S = [a, b]$ , on aura ainsi par convention  $a < b$ . Nous appellerons  $a$  l'*origine* de  $S$  et  $b$  l'*extrémité* de  $S$ ;  $a$  et  $b$  seront appelés les *bords* de  $S$ .

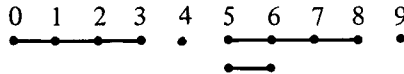


Figure 1

Nous utiliserons pour les hiérarchies de segments des représentations telles que celle de la figure 1, où  $r = 9$  et  $H = \{[0, 3], [5, 6], [5, 8]\}$ .

Nous emploierons en particulier pour les points les mots "à gauche" et "à droite" et pour les segments les verbes "commence" et "se termine". En outre il sera commode de parler des intervalles "recouverts" par un segment ou une hiérarchie ; dans la figure 1, les 10 points de  $[0, 9]$  forment 9 intervalles, dont 6 sont recouverts par  $H$ .

Nous dirons également que dans une hiérarchie  $H$  le segment  $S$  couvre le segment  $S'$  s'il n'existe dans  $H$  aucun segment  $S''$  autre que  $S$  et  $S'$  tel que  $S \supset S'' \supset S'$ . Un certain nombre de problèmes de dénombrement relatifs aux hiérarchies de segments ont été étudiés avec le vocabulaire des "parenthésages". Si l'on considère en effet une expression formée de symboles successifs, laissant  $r + 1$  emplacements possibles pour des parenthèses, toute disposition "correcte" des parenthèses est en bijection avec une hiérarchie de segments de  $[0, r]$  ; à l'ouverture et à la fermeture d'un couple de parenthèses correspondent l'origine et l'extrémité d'un segment de la hiérarchie.

Le but du présent article est d'une part de retrouver et de préciser les principaux résultats connus, qui seront mentionnés au passage, d'autre part de prolonger un travail antérieur [4] consacré aux "éventails de segments" (familles de segments à l'intérieur desquelles au contraire toute inclusion entre segments est interdite). Les méthodes employées seront le plus souvent possible de caractère bijectif ; cependant nous recourrons aussi dans certains cas aux fonctions génératrices.

## 2 – CHEMINS ROYAUX

A titre auxiliaire nous ferons dans ce paragraphe une étude rapide des "chemins royaux". Nous appellerons ainsi les chemins joignant deux sommets d'un graphe  $G$  défini comme suit : les sommets de  $G$  sont les couples  $(x, y)$  d'entiers et tout sommet  $(x, y)$  est origine de *trois* arcs, dont les extrémités sont  $(x + 1, y)$ ,  $(x, y + 1)$ ,  $(x + 1, y + 1)$ . Ces chemins ont été étudiés par divers auteurs (cf. [2] et [5]).

Nous appellerons  $R(x, y)$  le nombre de chemins dans  $G$  qui joignent  $(0, 0)$  à  $(x, y)$  ; chacun de ces chemins est formé de  $x' + y' + z$  arcs, dont  $x'$  horizontaux,  $y'$  verticaux et  $z$  obliques, avec  $x' + z = x$  et  $y' + z = y$ .

(Le nom de "chemins royaux" est suggéré par la marche du roi aux échecs).

On a évidemment

$$R(x, 0) = R(0, y) = 1 \quad (1)$$

pour tout entier  $x$  ou  $y$  positif ;

on posera également

$$R(0, 0) = 1 \text{ (chemin "vide").}$$

On a d'autre part la règle de récurrence qui résulte immédiatement de la définition :

$$R(x, y) = R(x - 1, y) + R(x, y - 1) + R(x - 1, y - 1) \quad (2)$$

A partir de (1) et (2) on forme rapidement le tableau donné ci-après pour  $0 \leq x \leq 8$  et  $0 \leq y \leq 8$  :

$R(x, y)$	$y = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8
$x = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	3	5	7	9	11	13	15	17
2	1	5	13	25	41	61	85	113	145
3	1	7	25	63	129	231	377	575	833
4	1	9	41	129	321	681	1289	2241	3649
5	1	11	61	231	681	1683	3653	7183	13073
6	1	13	85	377	1289	3653	8989	19825	40081
7	1	15	113	575	2241	7183	19825	48639	108545
8	1	17	145	833	3649	13073	40081	108545	265729

A titre d'exemple, la figure 2 représente les  $R(2, 2) = 13$  chemins royaux de  $(0, 0)$  à  $(2, 2)$  :

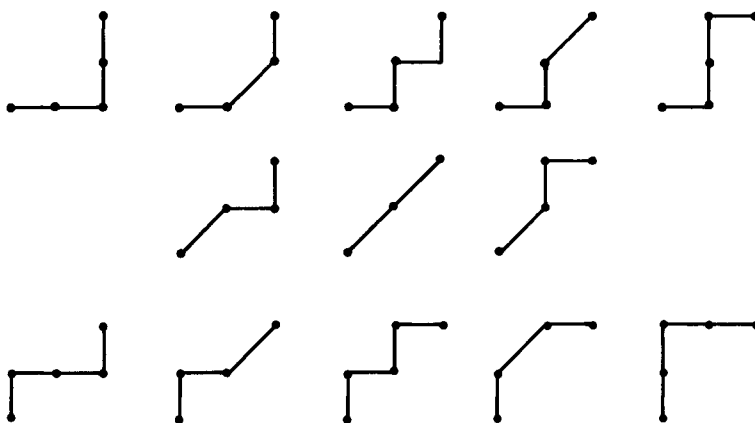


Figure 2

Pour établir quelques propriétés utiles des nombres  $R(x, y)$ , nous considérerons dans le plan  $\mathbb{N}^2$  les  $xy$  cases situées "entre" les points  $(0, 0)$  et  $(x, y)$ ; nous appellerons case  $(i, j)$  celle dont les quatre sommets sont les points

$$(i-1, j-1) \quad (i-1, j) \quad (i, j-1) \quad (i, j).$$

Nous dirons qu'une suite de  $s$  cases

$$(i_1, j_1) \dots (i_\lambda, i_\lambda) \dots (i_s, j_s)$$

est *monotone* si pour tout  $\lambda \in \{1, 2, \dots, s-1\}$  on a à la fois

$$i_\lambda < i_{\lambda+1} \quad \text{et} \quad j_\lambda < j_{\lambda+1}.$$

Il est clair que le nombre de suites monotones de  $s$  cases, définissables à partir des  $xy$  cases considérées, est égal au produit de nombres binomiaux  $C_x^s \cdot C_y^s$ : en effet il y a  $C_x^s$  manières de spécifier la suite croissante  $(i_1, i_2, \dots, i_s)$  et  $C_y^s$  manières de spécifier la suite croissante  $(j_1, j_2, \dots, j_s)$ .

Remarquons à ce propos que, si l'on s'intéressait exclusivement aux chemins sans étapes obliques, on pourrait établir comme suit une bijection entre l'ensemble de ces chemins et l'ensemble des suites monotones de cases (fig. 3).

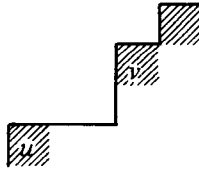


Figure 3

A tout tel chemin on ferait correspondre la suite, évidemment monotone, des cases que ce chemin "contourne par le haut" (c'est-à-dire borde à gauche puis en haut); inversement, étant donné une telle suite de cases, on peut toujours définir, pour deux cases consécutives  $u$  et  $v$  de la suite, deux tronçons de chemin consécutifs dont le premier, entièrement horizontal, commence par le bord supérieur de  $u$  et le deuxième, entièrement vertical, se termine par le bord gauche de  $v$ . Il en résulte, comme conséquence, une vérification de l'égalité bien connue

$$\sum_{s=0}^{\infty} C_x^s C_y^s = \frac{(x+y)!}{x! y!} = \binom{x+y}{x, y}; \quad (3)$$

nous sommes jusqu'à l'infini mais il est entendu que pour  $s > p \geq 0$  on a  $C_p^s = 0$ .

Si maintenant on s'intéresse à nouveau aux chemins royaux les plus généraux, on peut associer à chacun d'eux trois sortes particulières de cases (fig. 4) : celles qui sont contournées par le haut, celles qui sont coupées en diagonale, celles qui sont contournées par le bas.



Figure 4

Si l'on considère, pour un chemin donné, l'ensemble des cases des deux premières sortes, il est facile de s'assurer que ces cases peuvent être rangées en une suite monotone de  $s$  cases. (Il en serait de même pour l'ensemble des cases de la deuxième et de la troisième sorte, mais pas pour l'ensemble des cases de la première et de la troisième, comme l'illustre la figure 5).



Figure 5

Dans ce qui suit, pour un chemin royal donné, nous appellerons  $h$  le nombre de cases contournées par le haut et  $z$  le nombre de cases coupées en diagonale ;  $h + z = s$ .

Il est alors aisé de voir que si l'on se donne une suite monotone de  $s$  cases, et si l'on impose à  $h$  de ces  $s$  cases d'être contournées par le haut et aux  $z (= s - h)$  autres d'être coupées en diagonale, il existera un chemin royal et un seul qui satisfera à ces conditions ; entre deux cases consécutives de la suite monotone donnée, ce chemin devra évidemment toujours se présenter comme l'indique la figure 6.

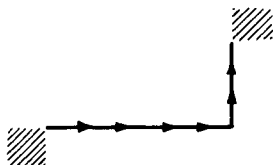


Figure 6

Or, pour chacune des  $C_x^s C_y^s$  suites monotones de  $s$  cases, il existe  $2^s$  manières de spécifier lesquelles de ces cases devront être contournées par le haut

(les autres devant être coupées en diagonale) ; il en résulte que

$$R(x, y) = \sum_{s=0}^{\infty} C_x^s C_y^s 2^s, \quad (4)$$

somme dans laquelle le nombre de termes non nuls est égal, comme dans (3), à  $1 + \inf(x, y)$ . Cette formule permet notamment un calcul de  $R(x, y)$  beaucoup plus rapide, si l'on n'a besoin que d'une valeur, que la formation du tableau.

Une autre expression de  $R(x, y)$  sous forme de somme s'obtient lorsque, au lieu de commencer par fixer  $s$ , on commence simplement par fixer le nombre  $z$  d'étapes obliques. On fixe ainsi du même coup le nombre  $x - z$  d'étapes horizontales et le nombre  $y - z$  d'étapes verticales ; il y a au total  $x + y - z$  étapes des trois espèces. Définir un chemin, dans ces conditions, c'est dire lesquelles de ces  $x + y - z$  étapes successives seront les  $x - z$  horizontales, les  $y - z$  verticales et les  $z$  obliques ; le nombre de manières distinctes de le faire est donc le nombre trinomial

$$\binom{x + y - z}{x - z \quad y - z \quad z} = \frac{(x + y - z)!}{(x - z)! (y - z)! z!}$$

On a ainsi

$$R(x, y) = \sum_{z=0}^{\infty} \binom{x + y - z}{x - z \quad y - z \quad z}, \quad (5)$$

somme dans laquelle le nombre de termes non nuls est de nouveau  $1 + \inf(x, y)$ .

Exemple : calcul de  $R(3, 4)$  par (4) et par (5).

$$\begin{aligned} R(3, 4) &= 1 \times 1 \times 1 + 3 \times 4 \times 2 + 3 \times 6 \times 4 + 1 \times 4 \times 8 \\ &= 1 + 24 + 72 + 32 = 129 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} R(3, 4) &= \binom{7}{3 \ 4 \ 0} + \binom{6}{2 \ 3 \ 1} + \binom{5}{1 \ 2 \ 2} + \binom{4}{0 \ 1 \ 3} \\ &= 35 + 60 + 30 + 4 = 129. \end{aligned} \quad (5)$$

L'égalité générale des sommes (4) et (5) est une identité dont une démonstration "directe" peut s'obtenir en utilisant à tour de rôle les deux ordres de sommation possibles dans le calcul de

$$R(x, y) = \sum_{(s, z) \in \mathbb{N}^2} C_x^s C_y^z C_s^z \quad (6)$$

Le nombre sous le signe somme dans (6) n'est autre, manifestement, que le nombre de chemins royaux pour lesquels il y a  $z$  cases coupées en diagonale et  $s - z = h$  cases contournées par le haut.

Une autre manière de faire apparaître les propriétés des nombres  $R(x, y)$  est bien entendu de former la fonction génératrice à deux variables

$$\rho(u, v) = \sum_{(x, y) \in \mathbb{N}^2} R(x, y) u^x v^y$$

Il résulte immédiatement de (2), par multiplication des deux membres par  $u^x v^y$  et sommation, que

$$\rho(u, v) = u \rho(u, v) + v \rho(u, v) + uv \rho(u, v).$$

d'où

$$\rho(u, v) = \frac{1}{1 - u - v - uv} \quad (7)$$

On peut alors développer  $\rho(u, v)$  sous la forme

$$\rho(u, v) = \sum_{r=0}^{+\infty} (u + v + uv)^r,$$

chaque terme de cette somme se développant à son tour par la formule du trinôme.

$$\frac{r!}{i! j! (r - i - j)!} u^i v^j (uv)^{r-i-j} = \binom{r}{i \ j \ r-i-j} u^{r-i} v^{r-i}$$

Il suffit ensuite de poser  $r - j = x$ ,  $r - i = y$  et  $r - i - j = z$

(d'où  $r = x + y - z$ ) pour voir que

$$\rho(u, v) = \sum_{(x, y, z)} \binom{x + y - z}{x - z \ y - z \ z} u^x v^y,$$

ce qui fait retomber sur l'expression (5).



Par contre l'expression (4) apparaît de manière peut-être un peu moins naturelle avec ce mode de calcul. On peut par exemple l'obtenir en écrivant (7) sous la forme

$$\rho(u, v) = \frac{1}{(1-u)(1-v)} \left[ 1 - \frac{2uv}{(1-u)(1-v)} \right]^{-1}$$

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2uv)^s}{(1-u)^{s+1} (1-v)^{s+1}} = \sum_{s=0}^{\infty} 2^s \frac{u^s}{(1-u)^{s+1}} \frac{v^s}{(1-v)^{s+1}} \quad (8)$$

Mais on a

$$\frac{t^s}{(1-t)^{s+1}} = \varphi_s(t) = \sum_{x=0}^{\infty} C_x^s t^x = \sum_{y=0}^{\infty} C_y^s t^y, \quad (9)$$

comme on le vérifie immédiatement en dérivant  $s$  fois la fonction  $(1-t)^{-1}$ ; il s'ensuit que (8) peut s'écrire, en tenant compte de (9),

$$\rho(u, v) = \sum_{s=0}^{\infty} 2^s \varphi_s(u) \varphi_s(v) = \sum_{(s, x, y)} 2^s C_x^s C_y^s u^x v^y;$$

et cette fois l'on retombe sur l'expression (4).

### 3 – SURDIAGONALITES NORMALE, FAIBLE, FORTE

Nous utiliserons surtout, pour l'étude des hiérarchies de segments, les chemins royaux surdiagonaux (ou ponts royaux) joignant  $(0, 0)$  à  $(r, r)$ , ou, comme nous dirons, de portée  $r$ . Nous aurons besoin de trois définitions distinctes :

(a) Les ponts *normalement* surdiagonaux seront les chemins royaux pour lesquels les "points diagonaux"  $(i, i)$  sont permis mais qui ne comportent aucun "arc diagonal" de  $(i, i)$  à  $(i+1, i+1)$ .

(b) Les ponts *faiblement* surdiagonaux seront les chemins royaux pour lesquels tout point de passage  $(i, j)$  satisfait à  $i \leq j$ , sans autre restriction.

(c) Les ponts *fortement* surdiagonaux seront les chemins royaux pour lesquels tout point de passage autre que  $(0, 0)$  et  $(r, r)$  satisfait à  $i < j$ .

Il est clair que les trois ensembles de chemins  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  respectivement définis par (a), (b), (c) satisfont à  $\mathcal{B} \supset \mathcal{A} \supset \mathcal{C}$ , et leurs cardinaux respectifs

$$a_r, b_r, c_r \quad \text{à} \quad b_r \geq a_r \geq c_r$$

Nous écrirons trivialement  $a_0 = c_0 = b_0 = 1$  ; on a immédiatement  $b_1 = 2, a_1 = c_1 = 1$ .

Il est aisé de voir que pour tout  $r \geq 1$  on a

$$c_r = b_{r-1} ;$$

en effet tout chemin fortement surdiagonal de portée  $r$  donne, par suppression de son premier et de son dernier arc, un chemin joignant  $(0, 1)$  à  $(r-1, r)$  dont tous les points de passage satisfont à  $i \leq j-1$ .

Nous verrons plus loin que l'on a également  $b_r = 2 a_r$  pour tout  $r \geq 1$ .

#### 4 – BIJECTION FONDAMENTALE

Nous appellerons “bijection fondamentale” celle que nous allons construire entre l'ensemble  $\mathcal{B}_r$  des chemins faiblement surdiagonaux de portée  $r$  et l'ensemble  $\mathcal{H}_r$  des hiérarchies de segments de  $[0, r]$ .

Pour cela imaginons un chemin  $B \in \mathcal{B}_r$  comme tracé dans le quadrant positif de  $\mathbf{R}^2$ , et considérons l'aire comprise entre  $B$  et la diagonale  $y = x$ . Cette aire, si on la découpe à l'aide de droites  $y = x + h$  ( $h \in \mathbf{N}$ ), se décompose en trapèzes isocèles (dont certains peuvent se réduire à des triangles rectangles isocèles). Nous dirons de plusieurs trapèzes qu'ils forment un *chapelet* si leurs (grandes) bases sont portées par une même droite de façon telle que chacune d'elles ait un point commun (point de jonction) avec la suivante ; la figure 7 montre un chapelet de trois trapèzes dont les bases sont portées par  $y = x$ , et l'un deux est surmonté lui-même d'un chapelet de deux trapèzes (triangles) dont les bases sont portées par  $y = x + 1$ .

Cela dit, à tout trapèze ne faisant pas partie d'un chapelet on fera correspondre un segment de  $[0, r]$  qui ne sera autre que la projection de sa base ; d'autre part, à tous les trapèzes faisant partie d'un même chapelet on fera correspondre des segments ayant tous même extrémité, à savoir la projection du point le plus à droite du chapelet, et dont les origines seront projections des points les plus à gauche des bases correspondantes. Ces segments forment une hiérarchie  $H \in \mathcal{H}_r$ .

La correspondance est bijective puisqu'il est facile de remonter des segments de  $H$  aux trapèzes ou chapelets de trapèzes, en prenant la précaution de ne jamais considérer un segment (ou un groupe de segments de même extrémité) avant d'avoir considéré tous les segments qui l'incluent ; une fois les trapèzes placés, le contour supérieur gauche de l'aire formée par leur réunion redonne le chemin  $B$ .

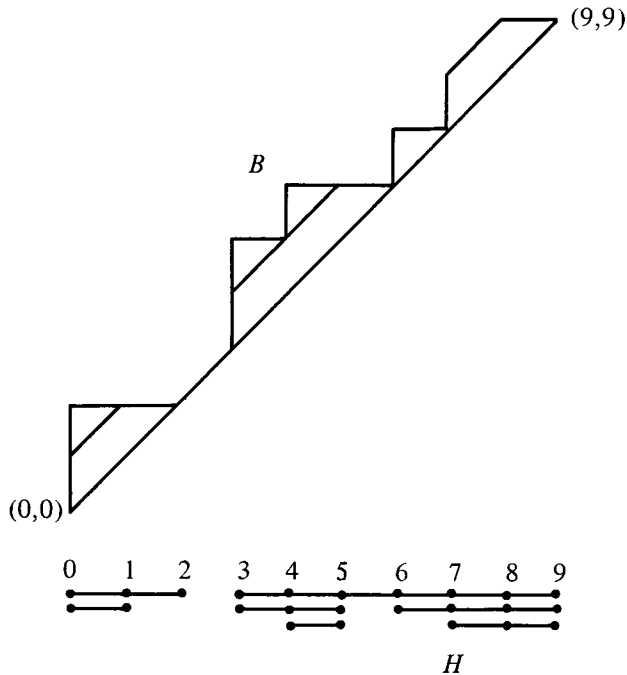


Figure 7

On constate immédiatement que le propre d'une hiérarchie de  $[0, r]$  qui comprend le segment  $[0, r]$  lui-même (hiérarchie couvrante) est de correspondre à un chemin n'ayant aucune étape diagonale (le long de  $y = x$ ), c'est-à-dire à un chemin *normalement* surdiagonal.

Or il y a exactement autant de hiérarchies couvrantes que de hiérarchies qui ne le sont pas, puisque l'on peut suivant le cas adjoindre ou supprimer le segment  $[0, r]$  sans cesser d'avoir une hiérarchie. Il en résulte qu'il y a en tout, pour une portée donnée  $r$ , deux fois plus de chemins faiblement surdiagonaux que de chemins normalement surdiagonaux, ce qui prouve notre assertion que  $b_r = 2 a_r$  pour  $r \geq 1$ .

Nous nous intéresserons en fait à l'une comme à l'autre des deux suites  $a_r$  et  $b_r$ , dont nous donnons immédiatement les premiers termes, quitte à en justifier plus loin le calcul :

$r$	0	1	2	3	4	5	6	7
$a_r$	1	1	3	11	45	197	903	4 279
$b_r$	1	2	6	22	90	394	1 806	8 558

Nous appellerons ces nombres les “nombres de Schröder” (“simples” pour la ligne  $a_r$ , “doubles” pour la ligne  $b_r$ , malgré l’exception  $b_0 = 1$ ). Ces nombres sont ceux qui comptent les hiérarchies de segments de  $[0, r]$  ; la première ligne compte indifféremment les hiérarchies couvrantes ou les hiérarchies non-couvrantes, la deuxième compte toutes les hiérarchies réunies. Ces nombres paraissent avoir été rencontrés pour la première fois dans [9].

### 5 – NOMBRE DE SEGMENTS TERMINES EN $r$ ; LOI $A_1$

Nous commencerons par dénombrer les hiérarchies couvrantes de  $[0, r]$  dans lesquelles il y a exactement  $n$  segments terminés en  $r$ . Nous utiliserons d’abord pour cela une algorithmme purement additif.

Soit  $\mathcal{H}(r, n)$  l’ensemble des hiérarchies considérées,  $A_1(r, n)$  son cardinal. Montrons que

$$(10) A_1(r, n) = A_1(r-1, n-1) + A_1(r-1, n) + A_1(r, n+1).$$

On distingue pour cela trois parties  $\mathcal{H}' \mathcal{H}'' \mathcal{H}'''$  dans  $\mathcal{H}(r, n)$ .

$\mathcal{H}'$  est l’ensemble des hiérarchies couvrantes qui comprennent le segment  $[r-1, r]$ . Si  $H' \in \mathcal{H}'$ ,  $H' - \{[r-1, r]\}$  est une hiérarchie couvrante dont aucun segment ne se termine en  $r-1$  et dont  $n-1$  segments se terminent en  $r$ . En supprimant  $r$  de chacun de ces  $n-1$  segments, on forme une hiérarchie  $H'_0$  appartenant à  $\mathcal{H}(r-1, n-1)$  ; inversement à partir de toute  $H'_0 \in \mathcal{H}(r-1, n-1)$ , il suffit de compléter par le point  $r$  chacun des  $n-1$  segments terminés en  $r-1$ , puis d’adjoindre  $[r-1, r]$ , pour retrouver  $H'$  (fig. 8).

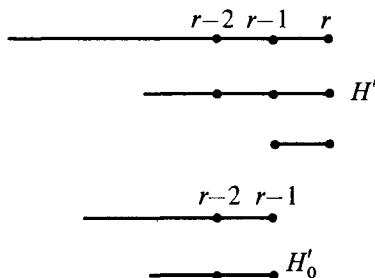


Figure 8

2/  $\mathcal{H}''$  est l'ensemble des hiérarchies couvrantes qui comprennent  $[r - 2, r - 1]$  ; aucune d'elles ne peut alors comprendre  $[r - 1, r]$ .

Si  $H'' \in \mathcal{H}''$ ,  $H'' - \{[r - 2, r - 1]\}$  appartient encore à  $\mathcal{H}(r, n)$ .

Parmi les segments de  $H'' - \{[r - 2, r - 1]\}$ ,  $n$  se terminent en  $r$ ,  $l$  autres se terminent en  $r - 1$  ; en supprimant les extrémités de ces  $n + l$  segments sans rien changer aux autres, on obtient une hiérarchie  $H_0''$  appartenant à  $\mathcal{H}(r - 1, n)$  ; inversement à partir de toute  $H_0'' \in \mathcal{H}(r - 1, n)$  il suffit, pour retrouver  $H''$ , de prolonger d'un point vers la droite tous les segments terminés en  $r - 2$  ou  $r - 1$ , puis d'adjoindre  $[r - 2, r - 1]$ .

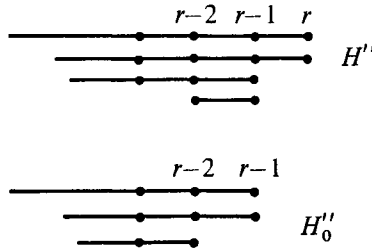


Figure 9

3/  $\mathcal{H}'''$  est l'ensemble des hiérarchies couvrantes qui ne comprennent ni  $[r - 1, r]$  ni  $[r - 2, r - 1]$ . Si  $H''' \in \mathcal{H}'''$  et si aucun segment de  $H'''$  ne se termine en  $r - 1$ , l'adjonction de  $[r - 1, r]$  donne une hiérarchie  $H_0'''$  appartenant à  $\mathcal{H}(r, n + 1)$ . Si  $H''' \in \mathcal{H}'''$  mais qu'il existe un ou plusieurs segments terminés en  $r - 1$ , soit  $[a, r - 1]$  le plus court de ces segments ( $a \leq r - 3$ ), et soit  $F$  l'ensemble (éventuellement vide) des segments  $[x, r - 1]$ , avec  $x \leq a - 1$ , qui incluent  $[a, r - 1]$ . On obtient alors de la manière suivante une hiérarchie  $H_0'''$  appartenant à  $\mathcal{H}(r, n + 1)$  : on décale d'un cran vers la droite le segment  $[a, r - 1]$ , qui devient ainsi  $[a + 1, r]$ , ainsi que tous les segments qu'il incluait, et en même temps on "tronque" tous les segments de  $F$ , qui deviennent des segments  $[x, a]$ .

Inversement à partir de toute  $H_0''' \in \mathcal{H}(r, n + 1)$ , il suffit de décaler d'un cran vers la gauche le plus court,  $[a + 1, r]$ , des segments terminés en  $r$ , avec tous les segments qu'il inclut, et en même temps de prolonger jusqu'en  $r - 1$  tous les segments terminés en  $a$  ; on retrouve ainsi  $H'''$  (figure 10).

Remarquons que l'on a nécessairement  $1 \leq n \leq r$ , et que  $A_1(r, r) = 1$  puisque la seule hiérarchie ayant  $r$  segments terminés en  $r$  est

$$\{[0, r], [1, r], \dots, [r - 1, r]\}.$$

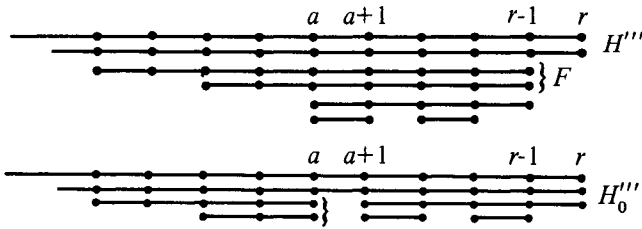


Figure 10

Il est en outre naturel de convenir que  $A_1(r, 0) = 0$  pour tout  $r \geq 1$  et que  $A_1(0, 0) = 1$ .

On peut alors, à l'aide de la formule (10), former de proche en proche le tableau ci-après, en commençant par la droite chacune des lignes successives :

$A_1(r, n)$	$n = 0$	1	2	3	4	5	6
$r = 0$	1				$Y'$	$X'$	
1	0	1				$Y$	$X$
2	0	2	1			$Y = X + X' + Y'$	
3	0	6	4	1			
4	0	22	16	6	1		
5	0	90	68	30	8	1	
6	0	394	304	146	48	10	1

Ce tableau engendre notamment

1/ les nombres de Schröder *simples*, comme sommes des lignes successives, puisque la réunion par rapport à  $n$  des  $\mathcal{H}(r, n)$  donne l'ensemble de toutes les hiérarchies couvrantes de  $[0, r]$  :

$$\sum_{n=1}^r A_1(r, n) = a_r$$

2/ les nombres de Schröder *doubles* qui apparaissent dans la colonne  $n = 1$ , puisqu'en retranchant  $[0, r]$  d'une hiérarchie couvrante dont un seul segment  $([0, r]$  lui-même) se termine en  $r$  on trouve une hiérarchie quelconque de  $[0, r - 1]$ :  $A_1(r, 1) = b_{r-1}$

6 – FONCTIONS GENERATRICES LIEES à  $A_1$ 

Il existe entre les nombres du tableau  $A_1(r, n)$  des propriétés convolutives qui vont permettre de trouver les fonctions génératrices des colonnes. Pour les établir il sera commode de se servir de la bijection fondamentale.

En effet aux hiérarchies de  $\mathcal{H}(r, n)$  correspondent par cette bijection des chemins *normalement* surdiagonaux (puisqu'il s'agit de hiérarchies *couvrantes*), de portée  $r$  et comportant un chapelet de  $n$  trapèzes dont les bases sont portées par  $y = x$ . Les chemins correspondants ont donc, sur  $y = x$ ,  $n - 1$  points autres que  $(0, 0)$  et  $(r, r)$ ; ces chemins se décomposent ainsi en  $n$  parties *fortement* surdiagonales (ou "arches").

On a évidemment de ce fait

$$A_1(r, n) = A_1(n-1, n-1)A_1(r-n+1, 1) + A_1(n, n-1)A_1(r-n, 1) + \dots \\ \dots + A_1(r-1, n-1)A_1(1, 1)$$

c'est-à-dire

$$A_1(r, n) = \sum_{s=0}^r A_1(s, n-1)A_1(r-s, 1),$$

avec la convention que la fonction de deux arguments  $A_1$  est nulle si le second dépasse le premier.

Il en résulte que si l'on définit la fonction génératrice de la colonne  $n$  du tableau,

$$\alpha_n(t) = \sum_{r=0}^{+\infty} A_1(r, n) t^r,$$

on a

$$\alpha_n(t) = \alpha_{n-1}(t) \alpha_1(t),$$

d'où

$$\alpha_n(t) = [\alpha_1(t)]^n;$$

la fonction génératrice de la colonne  $n$  est la puissance  $n - i\grave{e}me$  de celle de la colonne 1.

On obtient ainsi, pour la fonction génératrice des nombres de Schröder *simples* (sommées des lignes) :

$$\alpha(t) = \sum_{r=0}^{+\infty} a_r t^r = \frac{1}{1 - \alpha_1(t)} \quad (11)$$

Or

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= t + 2t^2 + 6t^3 + 22t^4 + \dots = t + 2t(t + 3t^2 + 11t^3 + \dots) \\ &= t + 2t[\alpha(t) - 1] \end{aligned}$$

$$\alpha_1(t) = 2t\alpha(t) - t. \quad (12)$$

De (11) et (12) on tire immédiatement

$$2t[\alpha(t)]^2 - (1+t)\alpha(t) + 1 = 0,$$

d'où

$$\alpha(t) = \frac{1+t - \sqrt{1-6t+t^2}}{4t}$$

Quant à la fonction génératrice  $\beta(t)$  des nombres de Schröder *doubles*, elle est égale à  $\alpha_1(t)/t = 2\alpha(t) - 1$  ; on a donc

$$\beta(t) = \frac{1-t - \sqrt{1-6t+t^2}}{2t}$$

Par développement de Mac-Laurin de ces fonctions par rapport à  $t$ , on tire de là les expressions ci-après, valables pour tout  $r \geq 1$ , des nombres de Schröder simples et doubles :

$$a_r = \frac{1}{2^{r+2}} \sum_{i \geq 0} (-1)^i C_{r+1-i}^i 3^{r+1-2i} \gamma_{r-i} \quad (13)$$

$$b_r = \frac{1}{2^{r+1}} \sum_{i \geq 0} (-1)^i C_{r+1-i}^i 3^{r+1-2i} \gamma_{r-i},$$

où  $\gamma_j$  désigne le "nombre de Catalan"  $(2j)!/j!(j+1)!$ .



Il est intéressant de noter que la somme qui figure dans les deux expressions (13) a elle-même une signification énumérative, laquelle résulte de la remarque faite au § 1 : elle compte les hiérarchies de segments de  $[0, r]$  dans lesquelles on admettrait également les segments "ponctuels" (que nous continuerons cependant à exclure dans la suite).

## 7 - AUTRES EXPRESSIONS DE $A_1$ ET LOI LIMITE

D'autres propriétés des nombres  $A_1(r, n)$  apparaissent si l'on forme le tableau triangulaire  $A'_1(x, y) = A_1(y, y - x)$  :

$A'_1(x, y)$	$y = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8		
$x = 0$		1	1	1	1	1	1	1	1		
1			0	2	4	6	8	10	12	14	
2				0	6	16	30	48	70	96	
3					0	22	68	146	264	430	
4	$X'$	$X$				0	90	304	714	1408	
5	$Y'$	$Y$					0	394	1412	3534	
6							0	1806	6752		
7	$Y = X + X' + Y'$								0	8558	
8										0	

Dans cette disposition on déduit de la règle de formation  $Y = X' + X + Y'$  que  $A'_1(x, y)$  n'est autre que le nombre de chemins royaux joignant  $(0, 0)$  ou  $(0, 1)$  à  $(x, y)$  et tels que pour tout point  $(i, j)$  autre que  $(0, 0)$  on ait toujours  $i < j$ , ou encore le nombre de chemins joignant  $(0, 0)$  à  $(x, y - 1)$  tels que pour tout point  $(i, j)$  intermédiaire on ait toujours  $i \leq j$ .

Or dans chacun des  $R(x, y - 1)$  chemins royaux (notation du § 2) qui joignent  $(0, 0)$  à  $(x, y - 1)$  et qui *ne satisfont pas* à cette condition  $i \leq j$ , par exemple dans C (fig. 11), il existe un *dernier* point  $M(i, i - 1)$  sur  $y = x - 1$  (nécessairement suivi d'un point  $N(i, i)$ ). Si l'on transforme par symétrie par rapport à  $y = x - 1$  la partie  $OM$  de ce chemin sans changer la partie qui relie  $M$  à  $(x, y - 1)$ , on obtient le chemin royal le plus général joignant  $(1, -1)$  à  $(x, y - 1)$  ; or le nombre total de ces chemins est  $R(x - 1, y)$ . On a donc

$$R(x, y - 1) = A'_1(x, y) + R(x - 1, y)$$

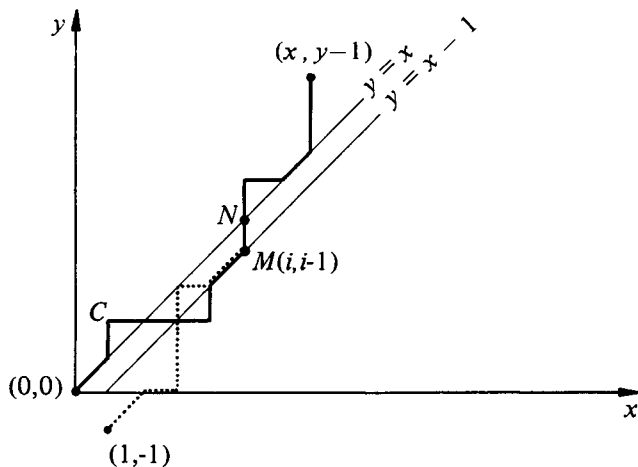


Figure 11

et

$$A'_1(x, y) = R(x, y - 1) - R(x - 1, y)$$

En utilisant les expressions (4) et (5) du nombre total de chemins royaux on trouve ainsi

$$A'_1(x + 1, y + 1) = 2(y - x) \sum_{s > 0} C_x^s C_y^s \frac{2^s}{s + 1}$$

et

$$A'_1(x + 1, y + 1) = (y - x) \sum_{z > 0} \frac{(x + y + 1 - z)!}{(x + 1 - z)! (y + 1 - z)! z!}$$

Notons que dans cette dernière somme, on peut, pour accélérer le calcul, se borner à doubler les termes correspondant par exemple à  $z$  impair, ce qui permet d'écrire

$$A'_1(x + 1, y + 1) = 2(y - x) \sum_{u > 0} \frac{1}{2u + 1} \binom{x + y - 2u}{x - 2u \quad y - 2u \quad 2u}$$

En effet la somme alternée

$$\sum_{z > 0} (-1)^z \frac{(x + y + 1 - z)!}{(x + 1 - z)! (y + 1 - z)! z!}$$

est nulle parce que proportionnelle à la différence  $(x + 1) - i$ ème du polynôme factoriel  $(y - z)_x$ , qui est de degré  $x$  par rapport à sa variable  $y$ .

Notons en outre la propriété suivante des nombres  $A_1(r, n)$ , qui permet de les exprimer en fonction des  $A_1(r, 1)$  seuls :

$$A_1(r, n) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i R(n-1-i, i) A_1(r-i, 1) \quad (14)$$

Cette propriété se vérifie aisément, pour les valeurs successives de  $n$ , à l'aide de (10) et de (2). On peut notamment en déduire la distribution limite du nombre de segments se terminant en  $r$  lorsque  $r$  augmente indéfiniment. En effet le rapport  $A_1(r-1, 1)/A_1(r, 1)$  tend vers le plus petit module d'un point singulier de la fonction génératrice, c'est-à-dire ici vers la plus petite racine de l'équation

$$1 - 6t + t^2 = 0, \quad \text{soit} \quad t = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2.$$

Comme d'autre part  $\sum_n A_1(r, n) = \frac{1}{2} A_1(r+1, 1)$ , (14) peut s'écrire

$$\frac{A_1(r, n)}{\sum_n A_1(r, n)} = 2 \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i R(n-1-i, i) \frac{A_1(r-i, 1)}{A_1(r+1, 1)};$$

la limite  $p_n$  du 1<sup>er</sup> membre est

$$p_n = 2 \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i R(n-1-i, i) (\sqrt{2} - 1)^{2i+2}. \quad (15)$$

Mais la somme qui figure dans ce dernier second membre est égale à  $n(\sqrt{2} - 1)^{n+1}$ ; on s'en assure en observant que, par suite de (2), le polynôme

$$P_n(u) = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i R(n-1-i, i) u^{2i}$$

est égal à  $(1 - u^2) P_{n-1}(u) - u^2 P_{n-2}(u)$ .

Il en résulte que

$$P_n(u) - nu^{n-1} = (1 - u^2) [P_{n-1}(u) - (n-1)u^{n-2}] - u^2 [P_{n-2}(u) - (n-2)u^{n-3}] - \underline{(n-1)u^{n-2}(u^2 + 2u - 1)}.$$

Comme la valeur  $u = \sqrt{2} - 1$  annule le terme souligné, on a bien (par récurrence du 2<sup>ème</sup> ordre)

$$P_n(\sqrt{2} - 1) = n(\sqrt{2} - 1)^{n-1};$$

d'où finalement, par suite de (15), la loi-limite

$$p_n = 2n(\sqrt{2} - 1)^{n+1};$$

dont la moyenne  $\sum n p_n$  est égale à  $\sqrt{2} + 1$ .

8 – NOMBRE TOTAL DE SEGMENTS : LOI  $A_2$ 

Un paramètre descriptif important des  $a_r$  hiérarchies couvrantes de segments de  $[0, r]$  est évidemment le nombre  $s$  de segments dont elles se composent, nombre qui peut varier de 1 à  $r$ . On a vu que, dans la bijection fondamentale, à tout segment correspond un trapèze isocèle, dont les côtés autres que les bases forment nécessairement une étape horizontale et une étape verticale du chemin correspondant ;  $s$  est donc le nombre d'étapes (par exemple) verticales de ce chemin. La portée  $r$  est la somme de ce nombre et du nombre  $\omega$  d'étapes obliques :

$$r = s + \omega \quad (16)$$

En supprimant d'un chemin royal  $C$ , normalement surdiagonal et de portée  $r$ , les  $\omega$  étapes obliques, et en raccordant les étapes restantes, on obtient un chemin ordinaire surdiagonal de portée  $r - \omega$ , soit  $C'$  ;  $C'$  a d'ailleurs autant de points sur la diagonale que  $C$ . Si  $C'$  se compose de  $h$  "arches" ( $h - 1$  points intermédiaires sur la diagonale), on revient à  $C$  en intercalant les  $\omega$  étapes obliques après n'importe quelles étapes de  $C'$  sauf les  $h$  étapes qui sont dernières d'une arche. Pour  $C'$  donné, le nombre de manières de faire cela est donc le nombre de suites de  $2(r - \omega) - h$  entiers non-négatifs de somme  $\omega$ , c'est-à-dire le binomial

$$\binom{\omega + 2(r - \omega) - h - 1}{2(r - \omega) - h - 1} = \binom{2r - \omega - h - 1}{\omega} = \binom{r + s - h - 1}{r - s}$$

Mais le nombre de chemins ordinaires  $C'$  possibles (portée  $s$ ,  $h$  arches) est bien connu (cf. [4]) ; c'est

$$u_s^h = \frac{h(2s - h - 1)!}{s!(s - h)!} \quad (17)$$

Finalement le nombre de possibilités, pour les hiérarchies couvrantes de  $s$  segments de  $[0, r]$ , est

$$A_2(r, s) = \sum_{h=1}^s u_s^h \binom{r + s - h - 1}{r - s} = \frac{1}{r} C_r^s C_{r+s}^{s-1} ;$$

l'établissement de cette expression ne fait appel qu'aux propriétés élémentaires des binomiaux. Il en résulte une nouvelle décomposition des nombres de Schröder simples  $a_r$  :

$$a_r = \frac{1}{r} \sum_{s=1}^r C_r^s C_{r+s}^{s-1}$$

Le tableau des  $A_2(r, s)$ , complété par les rangées conventionnelles  $r = 0$  et  $s = 0$ , commence par

$A_2(r, s)$	$s = 0$	1	2	3	4	5	6
$r = 0$	1						
1	0	1					
2	0	1	2				
3	0	1	5	5			
4	0	1	9	21	14		
5	0	1	14	56	84	42	
6	0	1	20	120	300	330	132

Ces nombres se rencontrent dans de nombreux problèmes énumératifs ou analytiques, cf. [1], [7] par exemple ; ceux de la diagonale du tableau sont les nombres de Catalan.

Une autre manière de retrouver les mêmes nombres consiste à considérer, pour tout chemin  $C$  normalement surdiagonal de portée  $r$ , l'ensemble des "cases" (au sens du § 2) qui sont soit coupées en diagonale, soit contournées *par le bas*. Supposons qu'il y ait  $m$  cases de cette nature, dont  $\omega$  coupées en diagonale et  $p = m - \omega$  contournées par le bas. Les cases en question forment ce que nous avons appelé une "suite monotone" ; dans le cas particulier où elles seraient *toutes* contournées par le bas, elles définiraient un chemin surdiagonal *ordinaire*  $\Gamma$  de portée  $r$  avec  $m$  occurrences d'une étape verticale. Or on sait (cf. [4]) que le nombre de tels chemins est donné par

$$v_r^m = \frac{(r-1)! r!}{m! (m+1)! (r-m-1)! (r-m)!} = \frac{1}{r} C_r^m C_r^{m+1}$$

Ces nombres ont eux aussi été rencontrés par de nombreux auteurs ; cf. [3] [6] [8]. Pour engendrer à partir de  $\Gamma$  un chemin royal surdiagonal à  $\omega$  étapes obliques, il suffit de spécifier lesquelles, parmi les  $m$  occurrences "horizontale puis verticale", seront remplacées par une étape oblique ; ce qui est possible de  $C_m^\omega$  manières. Le nombre total de chemins  $C$  à  $\omega$  étapes obliques sera ainsi

$$A_2'(r, \omega) = \sum_{m=\omega}^{r-1} v_r^m C_m^\omega ;$$

la sommation est de nouveau élémentaire et donne

$$A'_2(r, \omega) = \frac{1}{r} C_r^\omega C_{2r-\omega}^{r+1} = A_2(r, r - \omega) ;$$

les nombres  $A'_2$  ne sont autres que les  $A_2$  différemment disposés.

Les mêmes nombres  $A'_2$  répartissent également les hiérarchies couvrantes de  $[0, r]$ , non plus par nombre total de segments, mais par *nombre de segments ayant même extrémité qu'un segment plus grand*. En effet à ce nombre correspond, dans la bijection fondamentale, le nombre d'occurrences "horizontale puis verticale", et l'on a vu que  $p + \omega = m$ . Or, pour  $m$  donné, on peut toujours bijecter dans lui-même l'ensemble des chemins en remplaçant toute occurrence "horizontale-verticale" par une étape oblique et inversement, ce qui échange les rôles de  $p$  et de  $\omega$  ; la répartition par valeurs de  $p$  sera donc, même après sommation par rapport à  $m$ , la même que la répartition par valeurs de  $\omega$  (qui, on l'a vu en (16), est égal à  $r - s$ ).

### 9 – NOMBRE D'EXTREMITES DISTINCTES ; LOI $A_3$

Une sommation intéressante du produit  $v_r^m C_m^\omega$  est la sommation par rapport à  $\omega$ , qui donne évidemment  $2^m v_r^m$  ; son intérêt provient de ce que  $m$  est le nombre de points autres que 0 de  $[0, r]$  qui ne sont extrémités d'aucun segment (de la hiérarchie correspondant au chemin sur lequel  $m$  a été défini).

Pour l'établir remarquons que, dans la bijection fondamentale, le remplacement de toutes les occurrences "horizontale puis verticale" (remplacement qui réduit  $p$  à 0 et rend  $\omega$  égal à  $m$ ) correspond à la suppression de tous les segments inclus dans un segment de même extrémité, puisque cela revient à remplacer tout "chapelet" de trapèzes par un trapèze unique de même projection. (Nous retrouverons plus loin cette opération sous le nom d'"éputation à droite").

Or pour les hiérarchies couvrantes de segments ayant toutes leurs extrémités distinctes, l'adjonction de tout nouveau segment diminue d'une unité à la fois le nombre de points qui ne sont extrémités d'aucun segment et le nombre  $m$  d'étapes obliques du chemin correspondant ;  $m$  a donc bien toujours la signification annoncée, et  $r - m$  est de ce fait le nombre total d'extrémités distinctes.

Le tableau des nombres  $A_3(r, m) = 2^m v_r^m$ , dont les lignes fournissent un nouveau type de décomposition de  $a_r$ , est :

$A_3(r, m)$	$m = 0$	1	2	3	4	5
$r = 1$	1					
2	1	2				
3	1	6	4			
4	1	12	24	8		
5	1	20	80	80	16	
6	1	30	200	400	240	32

### 10 - EPAISSEUR GAUCHE ; LOI $A_4$

Etudions maintenant comment se répartissent les  $a_r$  hiérarchies couvrantes de portée  $r$  suivant le nombre  $g$  de segments auxquels appartient la plus à gauche des extrémités (ou "épaisseur gauche") ; nous appellerons  $A_4(r, g)$  le nombre de hiérarchies couvrantes d'épaisseur gauche  $g$ .

On a évidemment  $A_4(r, 1) = 1$  pour tout  $r \geq 1$ , puisque la seule hiérarchie couvrante d'épaisseur gauche 1 est celle qui se réduit au segment  $[0, r]$ . Considérons maintenant une hiérarchie  $H$  telle que  $g \geq 2$ , et appelons  $S$  le plus à gauche des segments de  $H$  couverts par  $[0, r]$  ; sa portée est  $\leq r - 1$ , appelons-la  $r - \lambda$  ( $\lambda \in \{1, 2, \dots, r - 1\}$ ).

Les segments de  $H$  inclus dans  $S$  forment évidemment une hiérarchie couvrante de portée  $r - \lambda$  et d'épaisseur gauche  $g - 1$  ; si pour définir  $H$  on commence par se donner  $S$ , il y a donc  $A_4(r - \lambda, g - 1)$  manières de définir l'ensemble des segments inclus dans  $S$ . Quant aux segments autres que  $[0, r]$  non inclus dans  $S$ , ils forment des hiérarchies (couvrantes ou non) situées entièrement à droite de  $S$ . Si  $S$  se termine en  $r$  ou en  $r - 1$ , la seule possibilité à droite de  $S$  est la hiérarchie vide ; si  $S$  se termine en  $r - \mu$  (avec  $2 \leq \mu \leq \lambda$ ) le nombre de possibilités à droite de  $S$  est égal à  $b_{\mu-1} = 2a_{\mu-1}$ . Pour l'ensemble de toutes les positions possibles de  $S$  avec  $\lambda$  donné, le nombre total de possibilités est

$$2 + 2a_1 + 2a_2 + \dots + 2a_{\lambda-1} = d_{\lambda-1}. \quad (18)$$

On a donc, pour  $\lambda$  non spécifié (et en posant  $d_0 = 2$ ),

$$A_4(r, g) = d_0 A_4(r - 1, g - 1) + d_1 A_4(r - 2, g - 1) + \dots + d_{r-g} A_4(g - 1, g - 1). \quad (19)$$

Les formules (18) et (19) permettent de former le tableau

$A_4(r, g)$	$g = 1$	2	3	4	5	6
$r = 1$	1					
2	1	2				
3	1	6	4			
4	1	16	20	8		
5	1	48	76	56	16	
6	1	170	284	272	144	32

La formule (18) montre que la fonction génératrice de la suite  $(d_0 d_1 d_2 d_3 \dots) = (2 4 10 32 \dots)$  est égale à  $2\alpha(t)/(1-t)$ . Si l'on pose

$$\sum_{r=1}^{+\infty} A_4(r, g) t^{r-1} = w_g(t),$$

on voit, grâce à (19), que

$$w_g(t) = \frac{2t\alpha(t)}{1-t} w_{g-1}(t),$$

d'où

$$w_g(t) = \frac{[2t\alpha(t)]^{g-1}}{(1-t)^g};$$

en sommant par rapport à  $g$ , on vérifie que les sommes des lignes successives du tableau des  $A_4$  redonnent bien la suite  $a_1 a_2 a_3 \dots$  des nombres de Schröder simples.

## 11 – EPAISSEUR PROPREMENT DITE : LOI $A_5$

Etudions également l'épaisseur proprement dite, c'est-à-dire le nombre maximum  $e$  de segments sécants (c'est-à-dire emboîtés) d'une hiérarchie couvrante de portée  $r$ .

Il sera commode de considérer d'abord le nombre  $s_r^e$  de hiérarchies couvrantes de portée  $r$  dont l'épaisseur est  $\leq e$ ; ce nombre est égal à  $a_r$  si  $e \geq r$ . Si  $H$  est une telle hiérarchie considérons les segments de  $H$  qui sont *couverts*



par  $[0, r]$ . Si la réunion de ces segments est distincte de  $[0, r]$ , adjoignons-leur tous les segments ponctuels nécessaires pour reconstituer  $[0, r]$  (trois segments ponctuels sur la fig. 12). On a ainsi en fin de compte une suite de  $h$  segments

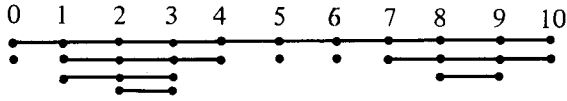


Figure 12

$\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_h$  ( $2 \leq h \leq r + 1$ ), entre lesquels subsistent  $h - 1$  intervalles non recouverts ; leurs portées, dont certaines peuvent être nulles, forment une suite  $(r_1, r_2, \dots, r_h)$  d'entiers non-négatifs de somme  $r - h + 1$ . Or les  $h$  sous-hiérarchies formées des segments respectivement inclus dans un  $\sigma$  sont évidemment d'épaisseur  $\leq e - 1$ . On a donc

$$s_r^e = \sum s_{r_1}^{e-1} s_{r_2}^{e-1} \dots s_{r_h}^{e-1} ; \tag{20}$$

la sommation doit s'entendre, avec  $h$  donné, pour toutes les suites

$$(r_1, r_2, \dots, r_h),$$

puis pour toutes les valeurs admissibles de  $h$ .

On pose, par convention,  $s_0^e = 1$  quel que soit  $e$ , et l'on définit la fonction génératrice

$$S_e(t) = \sum_{r=0}^{+\infty} s_r^e t^r$$

Les termes du second membre de (20) fournissent, pour  $h$  donné, le coefficient de  $t^{r-h+1}$  dans  $[S_{e-1}(t)]^h$ , ou le coefficient de  $t^r$  dans  $t^{h-1} [S_{e-1}(t)]^h$  ; le second membre de (20) tout entier est donc le coefficient de  $t^r$  dans la somme de la progression géométrique finie

$$t[S_{e-1}(t)]^2 + t^2 [S_{e-1}(t)]^3 + \dots + t^r [S_{e-1}(t)]^{r+1},$$

que l'on peut remplacer par une progression infinie puisqu'au delà du dernier terme écrit il n'y aura plus de termes en  $t^r$ .

On a donc finalement

$$S_e(t) = 1 + \frac{t[S_{e-1}(t)]^2}{1 - tS_{e-1}(t)},$$

ce qui fournit une relation de récurrence entre les fonctions génératrices

des colonnes du tableau ci-dessous des  $s_r^e$ . Notons que  $s_r^1 = 1$  quel que soit  $r$ , d'où  $S_1(t) = \frac{1}{1-t}$ ; on peut même poser  $S_0(t) = 1$ .

$s_r^e$	$e = 0$	1	2	3	4	5	6
$r = 0$	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
2	0	1	3	3	3	3	3
3	0	1	7	11	11	11	11
4	0	1	15	37	45	45	45
5	0	1	31	117	181	197	197
6	0	1	63	357	703	871	903

On vérifie aisément que la colonne limite a pour fonction génératrice  $\alpha(t)$ , qui satisfait bien à

$$\alpha(t) = 1 + \frac{t[\alpha(t)]^2}{1-t\alpha(t)}$$

Par différence on obtient le tableau des nombres  $A_5(r, e)$ , dont chaque ligne  $r$  donne la répartition par épaisseurs  $e$  des hiérarchies couvrantes de portée  $r$  :

$A_5(r, e) = s_r^e - s_r^{e-1}$	$e = 1$	2	3	4	5	6
$r = 1$	1					
2	1	2				
3	1	6	4			
4	1	14	22	8		
5	1	30	86	64	16	
6	1	62	294	346	168	32

## 12 – EPAISSEUR APRES EPURATION A DROITE ; LOI $A_6$

Une autre décomposition des nombres de Schröder simples est fournie par le paramètre descriptif suivant. Etant donné une hiérarchie couvrante, on considère la plus longue chaîne de segments d'extrémités distinctes, telle que chaque segment soit inclus dans le précédent, et l'on appelle  $h$  le nombre

de segments de cette chaîne ;  $h$  est, si l'on veut, l'“épaisseur après épuration à droite”. On s'intéresse au nombre  $A_6(r, h)$  de hiérarchies couvrantes de  $[0, r]$  pour lesquelles ce nombre  $h$  est fixé.

L'intérêt de ce paramètre est qu'il correspond, dans la bijection fondamentale, à la plus longue chaîne de trapèzes effectivement superposés, donc à la hauteur  $h$  du chemin normalement surdiagonal correspondant de portée  $r$  (“hauteur” signifiant “plus grande différence  $y - x$  en un point de ce chemin”).

Il est commode, en vue du calcul de  $A_6(r, h)$ , de s'intéresser à titre auxiliaire au nombre  $\delta_r^h$  de chemins royaux joignant  $(0, 0)$  à  $(r + h, r)$  et qui satisfont aux conditions suivantes :

a) n'avoir aucun point extérieur au parallélogramme limité par

$$y = 0, y = r, y = x, y = x - h.$$

b) ne comporter aucune étape oblique sur la droite  $y = x - h$ .

Les nombres  $\delta_r^h$ , pour  $h$  donné, se calculent aisément de proche en proche comme l'indique le tableau ci-dessous, formé pour  $h = 3$  jusqu'à  $r = 5$  avec la disposition habituelle du plan des  $(x, y)$  :

				5	364	1 160	2 200	2 200
			4	88	276	520	520	
		3	22	66	122	122		
	2	6	16	38	28			
	1	2	4	6	6			
$r = 0$	1	1	1	1				

Chacun des nombres de ce tableau en parallélogramme, à l'exception du dernier de chaque ligne qui est précisément  $\delta_r^h$ , s'obtient par addition de ses voisins sud, sud-ouest et ouest (ce dernier pouvant ne pas exister).

Si l'on appelle  $\alpha \beta \gamma \delta$  les quatre nombres consécutifs d'une ligne,  $\alpha' \beta' \gamma' \delta'$  les quatre nombres de la ligne au-dessus, on a ainsi

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \beta \\ \beta' &= \alpha' + \beta + \gamma = \alpha + 2\beta + \gamma \\ \gamma' &= \beta' + \gamma + \delta = \alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta \\ \delta' &= \gamma' = \alpha + 2\beta + 2\gamma + \delta \end{aligned}$$

ou encore, en écriture matricielle,

$$\begin{bmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \\ \delta' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = M_4 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$$

Puisque l'on ne s'intéresse en fin de compte qu'aux  $\delta$ , on peut remplacer cette transformation linéaire, (qui, dans le cas général, est de dimension  $h + 1$  et de rang  $h$ ), par une équation de récurrence entre

$$\delta_r \delta_{r-1} \delta_{r-2} \dots \delta_{r-h} ;$$

celle-ci s'écrira

$$A_0 \delta_r + A_1 \delta_{r-1} + A_2 \delta_{r-2} + \dots + A_h \delta_{r-h} = 0 ,$$

où les coefficients  $A_0 A_1 A_2 \dots A_h$  ne seront autres que les coefficients du polynôme caractéristique  $f(\lambda)$  de la matrice  $M_{h+1}$ .

Or ce polynôme se calcule aisément comme déterminant d'ordre  $h + 1$ , les lignes successives étant

$$\begin{array}{cccccc} 1 - \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & \text{-----} \\ 1 & 2 - \lambda & 1 & 0 & 0 & \text{-----} \\ 1 & 2 & 2 - \lambda & 1 & 0 & \text{-----} \\ 1 & 2 & 2 & 2 - \lambda & 1 & \text{-----} \end{array}$$

jusqu'à la  $(h + 1)$  -ième ligne qui est

$$1 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad \dots \quad 2 \quad 1 - \lambda .$$

Pour le calcul il est commode de remplacer chaque ligne sauf la première par la différence entre elle-même et la précédente ; on trouve ainsi

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} & & & & & 0 \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & 1 \\ \text{-----} & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -\lambda \end{vmatrix} ,$$

le déterminant  $\Delta_h$  ayant partout  $1 - \lambda$  dans sa diagonale,  $\lambda$  dans sa sous-diagonale et 1 dans sa surdiagonale.

En développant par rapport à la dernière ligne et en négligeant le facteur  $\lambda$  qui en provient, on voit que les coefficients  $A_0 A_1 A_2 \dots A_h$  cherchés sont finalement ceux de la somme  $\Delta_h + \Delta_{h-1}$ .

Quant à  $\Delta_h$ , il est facile d'établir qu'il est égal à

$$\Delta_h = R(h, 0) - R(h-1, 1) \lambda + R(h-2, 2) \lambda^2 - \dots + (-1)^h R(0, h) \lambda^h,$$

polynôme dont les coefficients sont, au signe près, les nombres de chemins royaux du § 2. Il en est ainsi parce que le développement par rapport à la lère colonne donne

$$\Delta_h = (1 - \lambda) \Delta_{h-1} - \lambda \Delta_{h-2},$$

et que l'identification des termes en  $\lambda$  des deux membres fait retomber sur la relation (2) qui sert de définition aux  $R(x, y)$ .

En fin de compte on obtient ainsi les relations de récurrence successives

$$\begin{aligned} \delta_r^1 - 2 \delta_{r-1}^1 &= 0 \\ \delta_r^3 - 4 \delta_{r-1}^2 + 2 \delta_{r-2}^2 &= 0 \\ \delta_r^3 - 6 \delta_{r-1}^3 + 8 \delta_{r-2}^3 - 2 \delta_{r-3}^3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(h, 0) \delta_r^h - [R(h-1, 0) + R(h-1, 1)] \delta_{r-1}^h + [R(h-2, 1) \\ + R(h-2, 2)] \delta_{r-2}^h - \dots = 0, \end{aligned}$$

d'où le tableau des  $\delta_r^h$  :

$\delta_r^h$	$h = 0$	1	2	3	4	5	6	7
$r = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	2	4	6	8	10	12	
2	0	4	14	28	46	68		
3	0	8	48	122	236			
4	0	16	164	520				
5	0	32	560					
6	0	64						
7	0							

Pour passer de là aux nombres  $A_6(r, h)$  qui nous intéressent, il suffit de remarquer que sur tout chemin royal normalement surdiagonal  $OR$  de portée  $r$ , il existe un dernier point  $M$  de hauteur  $h$ , immédiatement suivi d'un point  $N$  de hauteur  $h - 1$  (fig. 13). Pour  $M$  et  $N$  donnés, avec  $M$  d'abscisse  $x$ , on voit aisément qu'il y a  $\delta_x^h$  possibilités pour la partie  $OM$  du chemin et  $\delta_{r-1-x}^{h-1}$  possibilités pour la partie  $NR$ , d'où la convolution

$$A_6(r, h) = \sum_x \delta_x^h \delta_{r-1-x}^{h-1}$$

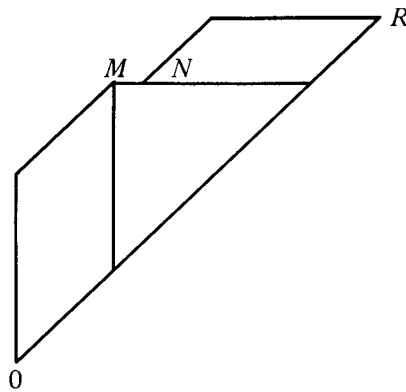


Figure 13

qui permet de former le tableau :

$A_6(r, h)$	$h = 0$	1	2	3	4	5	6	7
$r = 0$	1							
1	0	1						
2	0	2	1					
3	0	4	6	1				
4	0	8	26	10	1			
5	0	16	100	66	14	1		
6	0	32	364	366	122	18	1	
7	0	64	1 288	1 852	858	194	22	1

13 – TYPES ORDINAUX ; NOMBRE DE BORDS ; LOI  $A_7$ 

Nous dirons de deux hiérarchies de segments qu'elles appartiennent au même *type ordinal* (ou qu'elles sont *ordinalement isomorphes*) si entre les segments de l'une et ceux de l'autre il y a une bijection qui préserve les dispositions mutuelles des paires de segments ; par "disposition mutuelle" nous entendons, dans le cas où les segments sont disjoints, la question de savoir lequel est à droite de l'autre, et dans le cas où ils sont sécants, la question de savoir non seulement lequel est inclus dans l'autre mais aussi s'ils ont ou non la même origine ou la même extrémité.

Le paramètre fondamental d'un type ordinal est le nombre de segments dont il se compose. Mais un autre paramètre important est le cardinal  $d$  de l'ensemble des *bords* de ces segments. Nous étudierons plus loin le nombre total de types ordinaux composés d'un nombre donné de segments (non-punctuels) ; préoccupons-nous pour l'instant de déterminer le nombre total  $\nu_{d-1}$  de types ordinaux connexes à  $d$  bords.

On a évidemment  $\nu_0 = 0$  puisque l'on exclut les segments punctuels, et  $\nu_1 = 1$ . Observons maintenant que, parmi les  $a_r$  hiérarchies couvrantes de portée  $r$ , les  $A_7(r, d)$  qui sont d'un type ordinal à  $d$  bords ( $d \geq 2$ ) sont entièrement déterminées par les manières de placer les  $d - 2$  bords autres que 0 et  $r$  sur l'ensemble  $\{1, 2, \dots, r - 1\}$  ; il y a donc  $C_{r-1}^{d-2}$  hiérarchies couvrantes de chaque type ordinal à  $d$  bords, d'où

$$A_7(r, d) = C_{r-1}^{d-2} \nu_{d-1}$$

$$a_r = \sum_d A_7(r, d) = C_{r-1}^0 \nu_1 + C_{r-1}^1 \nu_2 + \dots + C_{r-1}^{r-1} \nu_r. \quad (21)$$

Par inversion on voit que

$$\nu_r = C_{r-1}^0 a_r - C_{r-1}^1 a_{r-1} + \dots + (-1)^{r-1} C_{r-1}^{r-1} a_1 \quad (22)$$

Un calcul rapide des  $\nu_r$  consiste à passer par la fonction génératrice

$$N(t) = \sum_{r=1}^{+\infty} \nu_r t^r ;$$

en effet à partir de (22) on voit facilement que

$$N(t) = a_1 \left( \frac{t}{1+t} \right) + a_2 \left( \frac{t}{1+t} \right)^2 + \dots ,$$

d'où l'on tire

$$N(t) = -1 + \alpha \left( \frac{t}{1+t} \right) = \frac{1 - 2t - \sqrt{1 - 4t - 4t^2}}{4t},$$

et, par développement direct par rapport à  $t$ ,

$$\nu_r = \frac{1}{2r} \sum_i C_r^i C_{2r-2i}^{r-1};$$

il suffit même, comme il est aisé de s'en assurer, de ne prendre les termes de cette somme que de deux en deux (par exemple pour  $i$  impair) et de diviser par  $r$  au lieu de  $2r$  :

$$\nu_r = \frac{1}{r} \sum_j C_r^{2j+1} C_{2r-4j+2}^{r-1}$$

On forme ainsi la suite

$r$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\nu_r$	1	2	6	20	72	272	1064	4272

La formule (21) fournit alors une nouvelle décomposition intéressante de  $a_r$  ; elle définit la répartition des hiérarchies couvrantes de portée  $r$  par nombre de bords :

$A_7(r, d)$	$d = 2$	3	4	5	6	7
$r = 1$	1					
2	1	2				
3	1	4	6			
4	1	6	18	20		
5	1	8	36	80	72	
6	1	10	60	200	360	272

#### 14 – TYPES ORDINAUX A ORIGINES DISTINCTES : SIGNIFICATION DES LOIS $A_1$ à $A_7$

Une classe spécialement intéressante de types ordinaux de hiérarchies est définie par la condition que tous les segments aient des origines distinctes,



certaines extrémités pouvant être confondues. Nous les nommerons types ordinaux à origines distinctes (t.o.o.d.)

Leur intérêt provient avant tout du fait suivant : *le nombre total de t.o.o.d de  $r$  segments est égal au nombre de Schröder simple  $a_r$ .*

Pour le voir nous les mettrons en bijection avec les ponts royaux normalement sous-diagonaux de portée  $r$ , et cela par le procédé suivant (fig. 14). On prend les *bords* du t.o.o.d. dans l'ordre croissant  $z_1 < z_2 < \dots$  et on associe à chacun d'eux une étape du pont à construire.

( $\alpha$ ) Si  $z_i$  est origine d'un segment *non inclus* dans un autre segment de même extrémité (origine de première espèce), on y associe une étape *verticale* (signe  $\bullet$ ).

( $\beta$ ) Si  $z_i$  est origine d'un segment *inclus* dans un autre segment de même extrémité (origine de deuxième espèce), on y associe une étape *oblique* (signe  $\times$ ).

( $\gamma$ ) Si  $z_i$  est *extrémité* d'un ou plusieurs segments, on y associe une étape *horizontale*. (signe  $|$ ).

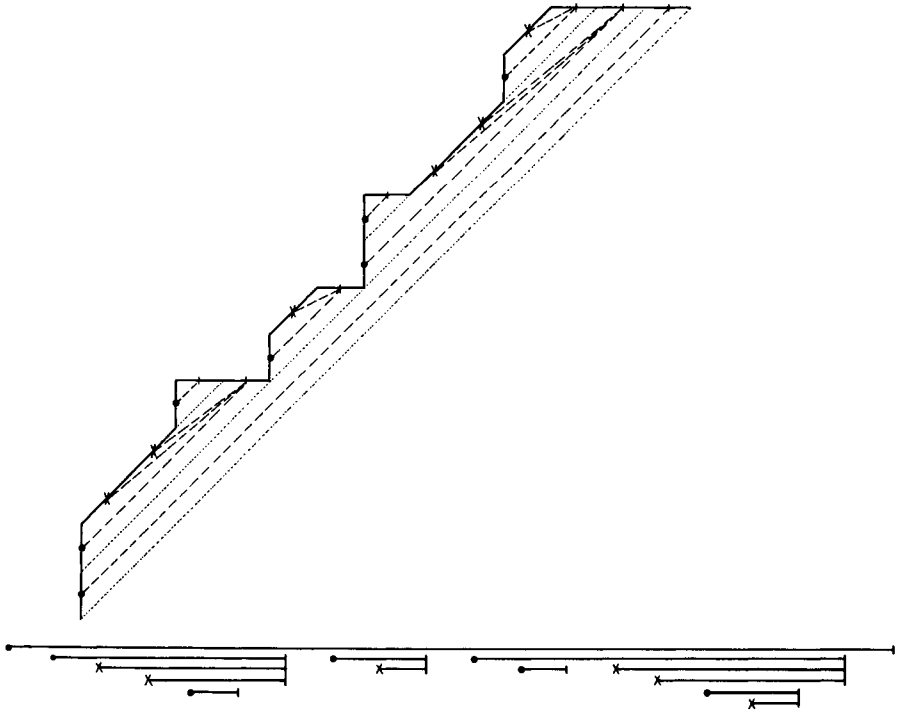


Figure 14

Pour revenir du pont royal ainsi construit au t.o.o.d., l'un des procédés possibles est le suivant ; on découpe en trapèzes l'aire comprise entre le pont et la droite  $y = x$  (comme on l'a fait pour la bijection "fondamentale" du § 4) ; puis, à l'intérieur de chacun des trapèzes, on joint le milieu de l'étape horizontale (marquée |) d'une part au milieu de l'étape verticale (marquée ●) d'autre part aux milieux des étapes obliques, s'il en existe, qui bordent sa petite base. Les projections des segments ainsi construits sur une oblique reconstituent le t.o.o.d. Il est intéressant de noter que si un type ordinal de  $r$  segments a non seulement ses  $r$  origines distinctes mais aussi ses  $r$  extrémités distinctes, le chemin qui lui correspond n'a pas d'étapes obliques et est de portée  $r$  ; le nombre total de tels chemins est, on le sait, le nombre de Catalan  $\gamma_r$ . Il y a ainsi autant de types ordinaux de hiérarchies à  $r$  segments d'origines et extrémités toutes distinctes que de types ordinaux d'éventails à  $r$  segments.

Aux types ordinaux connexes (c'est-à-dire pour lesquels il existe un segment incluant tous les autres) correspondent dans la bijection ci-dessus des ponts fortement surdiagonaux, et aux types à  $n$  composantes connexes correspondent des ponts à  $n$  arches. Or on a vu que, pour une portée donnée  $r$ , le nombre de ponts à  $n$  arches était  $A_1(r, n)$ . La même loi  $A_1$  répartit donc les t.o.o.d. à  $r$  segments suivant le nombre  $n$  de composantes connexes.

On a vu que cette même loi  $A_1$  répartissait également les ponts normalement surdiagonaux suivant le nombre d'étapes horizontales par lesquelles ils se terminent, et aussi par raison de symétrie suivant le nombre d'étapes verticales par lesquelles ils commencent. On en conclut que le nombre  $A_1(r, n)$  est également

1/ le nombre de t.o.o.d. à  $r$  segments dont l'ensemble des bords se termine par exactement  $n$  extrémités

2/ le nombre de t.o.o.d. à  $r$  segments dont l'ensemble des bords commence par exactement  $n$  origines de première espèce.

On a vu d'autre part que le nombre de ponts normalement surdiagonaux de portée  $r$  ayant exactement  $s$  étapes horizontales était  $A_2(r, s) = \frac{1}{r} C_r^s C_{r+s}^{s-1}$ .

Ce nombre est donc aussi celui des t.o.o.d. à  $r$  segments dont l'ensemble des bords comprend exactement  $s$  extrémités, c'est-à-dire  $r + s$  points en tout. En raison de (16), le nombre  $A_2'(r, \omega) = A_2(r, r - \omega)$  compte les t.o.o.d. à  $r$  segments caractérisés par  $\omega$  occurrences "extrémité puis origine de première espèce".

Un paramètre intéressant des t.o.o.d. de  $r$  segments est le nombre de segments minimaux (c'est-à-dire qui n'en incluent aucun autre), ou, ce qui

revient au même, le nombre maximum de segments deux à deux disjoints. La fig. 14 met en évidence le fait qu'à ce nombre correspond le nombre d'étapes horizontales précédées d'une étape verticale ou oblique, c'est-à-dire le nombre d'ordonnées distinctes des étapes horizontales. La répartition des ponts suivant la valeur de ce nombre est, par raison de symétrie, la même que suivant le nombre d'abscisses distinctes des étapes verticales. Dans la bijection fondamentale, à ce nombre correspond, pour les hiérarchies couvrantes de  $[0, r]$ , le nombre total d'origines distinctes. Or on a vu que la loi de répartition des  $a_r$  hiérarchies couvrantes suivant la valeur  $r - m$  du nombre total d'origines distinctes (ou d'extrémités distinctes, c'est la même loi par symétrie) était donnée par le tableau des  $A_3(r, m) = 2^m v_r^m = \frac{2^m}{r} C_r^m C_r^{m+1}$ ; c'est donc encore cette loi  $A_3$  qui répartit les t.o.o.d. de  $r$  segments suivant le nombre  $r - m$  de segments minimaux.

Les lois de répartition  $A_4, A_5, A_6$  et  $A_7$  de  $a_r$ , rencontrées à propos des épaisseurs gauches, des épaisseurs proprement dites, des épaisseurs après épuration à droite et des nombres de bords des hiérarchies couvrantes de portée  $r$ , se retrouvent avec les t.o.o.d. de  $r$  segments, mais à partir de paramètres de significations moins simples (à l'exception de la loi  $A_6$ ).

A l'épaisseur gauche  $g$  correspond, dans la bijection fondamentale, un paramètre (du pont normalement sous-diagonal de portée  $r$ ) qui peut se définir comme suit. Si l'on numérote de 1 à  $g$  les segments "gauches" de la hiérarchie, dans l'ordre d'inclusion à partir du plus grand (qui est  $[0, r]$ ), on leur associe les  $g$  premières étapes verticales du pont, en tant que bords gauches des trapèzes correspondants.

Il peut se faire que dans la partie du pont qui va jusqu'à la  $g$ -ième étape verticale il apparaisse des étapes horizontales, en tant que bords supérieurs de certains trapèzes; mais si une telle étape horizontale apparaît, elle est immédiatement suivie d'une étape verticale, qui sera le bord gauche du trapèze suivant du même chapelet. Par contre, par suite de la définition de  $g$ , l'étape horizontale qui servira de bord supérieur au trapèze correspondant au  $g$ -ième segment sera immédiatement suivie soit d'une nouvelle étape horizontale, soit d'une étape oblique. Il en résulte que  $g$  est, pour le pont correspondant, le nombre d'étapes verticales qui précèdent la première étape horizontale non immédiatement suivie elle-même d'une étape verticale. D'où l'interprétation en termes de t.o.o.d. à  $r$  segments:  $g$  est le nombre d'origines de première espèce qui précèdent la première extrémité non immédiatement suivie elle-même d'une origine de première espèce.

En ce qui concerne l'épaisseur proprement dite  $e$  d'une hiérarchie couvrante de portée  $r$ , il lui correspond dans la bijection fondamentale la possibilité de trouver une suite de  $e$  trapèzes telle que chacun d'eux soit, par

rapport à son prédécesseur, ou bien immédiatement à sa droite dans le même chapelet, ou bien posé sur sa petite base. Il revient au même de parler de la suite des bords gauches de ces  $e$  trapèzes, qui sont des étapes verticales  $v_1 v_2 \dots v_e$ , en précisant que chacune d'elles,  $v_k$ , doit être immédiatement précédée

– ou bien de l'étape horizontale qui sert de bord supérieur au trapèze bordé à gauche par  $v_{k-1}$ .

– ou bien d'une étape oblique bordant le trapèze qui a pour bord gauche  $v_{k-1}$ ,

– ou bien encore de  $v_{k-1}$  elle-même.

Une des manières de traduire cela dans le langage des t.o.o.d. est de considérer que dans la suite croissante des *bords* d'un t.o.o.d., chaque point a une "projection à gauche" qui est

– s'il s'agit d'une origine de 1<sup>e</sup> espèce, ce point lui-même

– s'il s'agit d'une origine de 2<sup>e</sup> espèce, l'origine du plus grand segment de même extrémité que celui qu'elle ouvre

– s'il s'agit d'une extrémité, l'origine du plus grand segment qui s'y termine. Dans ces conditions  $e$  est la longueur de la plus longue suite  $(O_1, O_2, \dots, O_e)$  d'origines de première espèce extractible de la suite des bords, telle que  $O_k$  soit immédiatement précédée d'un bord dont la "projection à gauche" soit  $O_{k-1}$ .

La loi de répartition  $A_6(r, h)$  considérée ensuite était celle des épaisseurs après épuration à droite, ou encore celle des chemins normalement surdiagonaux de portée  $r$  par hauteurs  $h$ . Il suffit de se reporter à la fig. 14 pour se rendre compte que  $h$  n'est autre, dans le t.o.o.d. correspondant, que le nombre de segments de la plus longue chaîne telle que chaque segment soit "bilatéralement inclus" dans le précédent (l'inclusion bilatérale signifie que les deux segments n'ont pas de bord commun) ; c'est donc encore l'épaisseur après épuration à droite. Ce paramètre est le seul que nous ayons rencontré pour lequel la répartition des hiérarchies couvrantes de  $[0, r]$  soit la même que celle des t.o.o.d. de  $r$  segments ; c'est une particularité assez remarquable de cette loi  $A_6$ .

Enfin au nombre de bords  $d$  d'une hiérarchie couvrante (qui est la somme du nombre de bords gauches  $d'$  et du nombre de bords droits  $d''$ ) correspond à nouveau un paramètre descriptif, relativement peu naturel, des t.o.o.d. Aux  $d'$  bords gauches correspondent évidemment, dans la bijection fondamentale,  $d'$  séquences maximales d'étapes verticales ; aux  $d''$  bords droits correspondent  $d''$  bords supérieurs de chapelets de trapèzes, c'est-à-dire  $d''$  étapes horizontales non immédiatement suivies d'étapes verticales. Il en résulte que dans le t.o.o.d.

le paramètre correspondant est la somme du nombre maximal  $d'$  de séquences d'origines de première espèce et du nombre  $d''$  d'extrémités non suivies d'une origine de première espèce.

## 15 – TYPES ORDINAUX PAR NOMBRES D'ORIGINES ET D'EXTREMITES

Nous avons déterminé plus haut (§ 13) le nombre total  $\nu_d$  de types ordinaux connexes à  $d - 1$  bords. Nous allons maintenant étudier les types ordinaux auxquels on impose d'avoir  $x$  origines et  $y$  extrémités, en appelant  $t(x, y)$  le nombre de types connexes et  $T(x, y)$  le nombre de types quelconques remplissant cette condition. Nous introduirons pour cela les fonctions génératrices à deux variables.

$$\theta(u, v) = \sum_{(x,y)} t(x, y) u^x v^y = 1 + \bar{\theta}(u, v)$$

et

$$\Theta(u, v) = \sum_{(x,y)} T(x, y) u^x v^y = 1 + \bar{\Theta}(u, v)$$

On a évidemment  $t(x, 0) = 0 \quad \forall x \geq 1$  et  $t(0, y) = 0 \quad \forall y \geq 1$ ; on pose en outre  $t(0, 0) = T(0, 0) = -1$  (type ordinal "vide").

Une première relation entre  $t$  et  $T$  est fournie par la remarque que chacun des  $T(x, y)$  types ordinaux quelconques non-vides se décompose en  $h$  composantes connexes. Si l'on impose  $h$ , ces composantes ont successivement

la première  $x_1$  origines et  $y_1$  extrémités

la deuxième  $x_2$  origines et  $y_2$  extrémités

la dernière  $x_h$  origines et  $y_h$  extrémités,

la suite  $(x_1 x_2 \dots x_h)$  étant une  $h$ -composition de l'entier  $x$  et

la suite  $(y_1 y_2 \dots y_h)$  étant une  $h$ -composition de l'entier  $y$ .

Il en résulte que

$$\begin{aligned} T(x, y) = t(x, y) + \sum_{\substack{(x_1, x_2) \\ (y_1, y_2)}} t(x_1, y_1) t(x_2, y_2) \\ + \sum_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \\ (y_1, y_2, y_3)}} t(x_1, y_1) t(x_2, y_2) t(x_3, y_3) + \dots \end{aligned}$$

ce qui, en termes de fonctions génératrices, signifie que

$$\bar{\Theta} = \bar{\theta} + \bar{\theta}^2 + \bar{\theta}^3 + \dots + \frac{\bar{\theta}}{1 - \bar{\theta}},$$

ou encore

$$1 + \bar{\Theta} = \Theta = \frac{1}{1 - \bar{\theta}} \quad (23)$$

Mais il existe entre  $t$  et  $T$  une autre relation, reposant sur une classification des  $t(x, y)$  types ordinaux connexes à  $x$  origines et  $y$  extrémités.

Si de l'un de ces types on supprime le plus grand segment, le type restant est dans l'un des quatre cas suivants :

- (a) il n'a plus que  $x - 1$  origines et  $y - 1$  extrémités
- (b) il n'a plus que  $x - 1$  origines mais encore  $y$  extrémités
- (c) il a encore  $x$  origines mais n'a plus que  $y - 1$  extrémités
- (d) il a encore  $x$  origines et  $y$  extrémités.

Dans les cas (a) (b) (c) le type restant est quelconque (connexe ou non), dans le cas (d) il est nécessairement non-connexe. Il en résulte que

$$t(x, y) = T(x - 1, y - 1) + T(x - 1, y) + T(x, y - 1) + T(x, y) - t(x, y),$$

d'où

$$2t(x, y) = T(x - 1, y - 1) + T(x - 1, y) + T(x, y - 1) + T(x, y)$$

En multipliant cette relation par  $u^x v^y$  et en sommant pour tous les couples  $(x, y)$  tels que  $x \geq 0$  et  $y \geq 0$  (avec les précautions triviales nécessaires pour  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, 1)$ ), on obtient

$$2\theta = 1 - u - v + (1 + u)(1 + v)\Theta$$

et, en tenant compte de (23),

$$2(1 + \bar{\theta}) = 1 - u - v + \frac{(1 + u)(1 + v)}{1 - \bar{\theta}}.$$

$\bar{\theta}$  satisfait ainsi à l'équation du 2<sup>e</sup> degré

$$2\bar{\theta}^2 - (1 - u - v)\bar{\theta} + uv = 0,$$

dont la seule solution convenable est

$$\bar{\theta}(u, v) = \frac{1 - u - v - \sqrt{1 - 2(u + v) + u^2 - 6uv + v^2}}{4}$$

On tire de là aisément

$$\theta(u, v) = \frac{5 - u - v - \sqrt{1 - 2(u + v) + u^2 - 6uv + v^2}}{4} \quad (24)$$

et

$$\Theta(u, v) = \frac{3 + u + v - \sqrt{1 - 2(u + v) + u^2 - 6uv + v^2}}{2(1 + u)(1 + v)} \quad (25)$$

Il est commode, pour calculer les nombres  $t(x, y)$  puis  $T(x, y)$ , de développer la fonction

$$\sum_{\substack{x \geq 0 \\ y \geq 0}} t(x + 1, y + 1) u^x v^y = \frac{\bar{\theta}(u, v)}{uv},$$

laquelle est égale, si l'on pose

$$w = \frac{2uv}{(1 - u - v)^2},$$

à

$$\frac{1}{1 - u - v} \cdot \frac{1 - \sqrt{1 - 4w}}{2w}$$

Or la deuxième fraction, qui est la fonction génératrice des nombres des nombres de Catalan  $\hat{\gamma}_i$ , est égale à

$$\gamma_0 + \gamma_1 w + \gamma_2 w^2 + \dots + \gamma_i w^i + \dots$$

Il en résulte que

$$\sum_{\substack{x \geq 0 \\ y \geq 0}} t(x + 1, y + 1) u^x v^y = \sum_{i=0}^{+\infty} \gamma_i \frac{2^i u^i v^i}{(1 - u - v)^{2i+1}}$$





Notons qu'en sommant les diagonales ascendantes de ce tableau, on retrouve les nombres qui ont été appelés  $\nu_d$  au § 13 ; en remplaçant  $u$  et  $v$  par  $t$  dans l'expression de  $\theta(u, v)$ , on retrouve bien aussi, au facteur  $t$  près, leur fonction génératrice  $N(t)$ .

Pour passer au tableau des  $T(x, y)$  il suffit de tenir compte du fait que (sous réserve du facteur 2 et des précautions à prendre pour les premiers termes), les expressions (24) et (25) ne diffèrent que par la présence du facteur

$$(1 + u)^{-1} (1 + v)^{-1} = \sum_{(x, y)} (-1)^{x+y} u^x v^y .$$

Cela permet d'établir que

$$T(x, y) = (-1)^{x+y-1} + 2 \sum_{\substack{0 \leq x' < x \\ 0 \leq y' < y}} (-1)^{x'+y'} t(x - x', y - y'),$$

ce qui donne facilement le tableau des  $T(x, y)$

$T(x, y)$	$y = 0$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	0	1	5	11	19	29	41	55		
3	0	1	11	49	141	321	631			
4	0	1	19	141	629	2059				
5	0	1	29	321	2059					
6	0	1	41	631						
7	0	1	55							
8	0	1								
9	0									

## 16 – SEGMENTS, BORDS ET COMPOSANTES CONNEXES EN NOMBRES IMPOSES

Pour dénombrer les types ordinaux formés d'un nombre donné  $s$  de segments, il se trouve être commode d'imposer, en même temps que  $s$ , le nombre

total  $d$  de bords et le nombre  $k$  de composantes connexes. Montrons que le nombre  $U$  de types ordinaux correspondants est

$$U(s, d, k) = \frac{k}{d - k} C_{d-k}^s C_{2s}^d ;$$

le principe de la démonstration ci-après nous a été suggéré par Y. Poupard.

Tout type ordinal à  $d$  bords peut être représenté par une hiérarchie de  $[0, d - 1]$ , donc (grâce à la bijection fondamentale) par un chemin  $C$  *faiblement* surdiagonal de portée  $d - 1$ . Puisque la hiérarchie comprend  $s$  segments, le chemin possède exactement  $s$  étapes verticales et  $s$  étapes horizontales, donc  $d - 1 - s$  étapes obliques ; parmi ces dernières  $k - 1$  exactement sont des étapes le long de la diagonale, puisqu'elles séparent les  $k$  composantes normalement surdiagonales de  $C$ , et les  $d - k - s$  autres sont des étapes obliques non-diagonales. La première étape de  $C$  est nécessairement une verticale, la dernière une horizontale ; en outre, puisque tout point de  $[0, d - 1]$  est un bord de segment, aucune des étapes obliques de  $C$  ne peut être immédiatement suivie ni d'une autre oblique, ni d'une horizontale. Il est aisé de s'assurer que tout chemin faiblement surdiagonal  $C$  de portée  $d - 1$ , ayant  $s$  étapes verticales (dont la première étape),  $k - 1$  étapes diagonales, et dont toute étape oblique est immédiatement suivie d'une verticale, correspond ainsi dans la bijection fondamentale à un type ordinal à  $s$  segments,  $d$  bords et  $k$  composantes connexes.

Pour construire un chemin  $C$  répondant à ces conditions, on peut construire d'abord un chemin  $C'$  ne comprenant rien d'autre que  $s$  verticales et  $s$  horizontales, donc de portée  $s$ , et d'y intercaler ensuite, aux endroits convenables, les  $d - 1 - s$  étapes obliques.

Supposons que l'on impose à  $C'$  de se composer de  $h$  "arches" ( $h \geq k$ ) ; le nombre de possibilités de le choisir est alors donné par l'expression (17) :

$$u_s^h = \frac{h(2s - h - 1)!}{s! (s - h)!}$$

Une fois  $C'$  fixé, il faut encore particulariser, parmi les  $h - 1$  verticales par lesquelles commencent les arches autres que la première, les  $k - 1$  que l'on fera précéder d'une étape diagonale (ce qui est possible de  $C_{h-1}^{k-1}$  manières), et de même particulariser, parmi les  $s - h$  verticales qui ne commencent pas sur la diagonale, les  $d - k - s$  que l'on fera précéder d'une étape oblique non diagonale (ce qui est possible de  $C_{s-h}^{d-k-s}$  manières).

Le nombre total de possibilités pour le chemin  $C$ , avec  $h$  imposé, est donc

$$\frac{h(2s - h - 1)!}{s! (s - h)!} C_{h-1}^{k-1} C_{s-h}^{d-k-s}$$

La sommation par rapport à  $h$  s'effectue sans difficulté et donne bien l'expression annoncée

$$U(s, d, k) = \frac{k}{d - k} C_{d-k}^s C_{2s}^d .$$

Cette expression se laisse à son tour sommer aisément par rapport à  $k$ , et l'on trouve (en désignant toujours par  $\gamma_s$  le nombre de Catalan  $(2s)! / [s! (s + 1)!]$ )

$$\sum_{k=1}^s U(s, d, k) = \gamma_s C_{s-1}^{d-s-1}$$

On obtient ainsi le tableau des nombres de types ordinaux quelconques suivant  $s$  et  $d$  :

	$d = 2$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$s = 1$	1										
2		2	2								
3			5	10	5						
4				14	42	42	14				
5					42	168	252	168	42		
6						132	660	1320	1320	660	132

Les sommes des colonnes successives donnent la suite  $*v_d = (1\ 2\ 7\ 24\ 89\ 342\dots)$  qui est celle des nombres de types ordinaux *quelconques* par nombre total de bords (celle correspondant aux types ordinaux *connexes* était  $1\ 2\ 6\ 20\ 72\ 272\dots$ ). On peut la retrouver à partir du tableau  $T(x, y)$  en sommant les diagonales ascendantes à partir de  $x + y = 2$  ; on voit ainsi que sa fonction génératrice en  $t$  est celle que l'on obtient à partir de

$$\frac{\Theta(u, v) - 1}{uv}$$

en remplaçant  $u$  et  $v$  par  $t$ , soit

$$\frac{1 - 2t - 2t^2 - \sqrt{1 - 4t - 4t^2}}{2t^2(1 + t)^2}$$

Quant aux sommes de lignes, elles sont égales aux valeurs successives de  $\gamma_s \cdot 2^{s-1}$  à partir de  $s = 1$  ; le nombre total de types ordinaux de  $s$  segments est ainsi le produit du nombre de Catalan  $\gamma_s$  par la puissance  $(s - 1)$ -ième de 2.

### 17 – SEGMENTS ET COMPOSANTES CONNEXES EN NOMBRES IMPOSES

Une sommation particulièrement intéressante des nombres  $U(s, d, k)$  est la sommation par rapport à  $d$ , qui donne le tableau ci-dessous des types ordinaux par nombre de segments  $s$  et nombre de composantes connexes  $k$ , types qui sont au nombre de  $V(s, k)$  :

$V(s, k)$	$k = 0$	1	2	3	4	5	6	7
$s = 0$	0							
1	0	1						
2	0	3	1					
3	0	13	6	1				
4	0	67	35	9	1			
5	0	381	212	66	12	1		
6	0	2 307	1 333	462	106	15	1	
7	0	14 589	8 642	3 207	844	155	18	1

X	Y	Z
	Y'	Z'

$Y' = X + 2Y + Z + Z'$

L'intérêt de ce tableau (dont la colonne  $k = 1$  dénombre les types ordinaux *connexes* par nombre de segments) est de pouvoir se former de proche en proche à partir de sa diagonale à l'aide de l'algorithme additif suivant :

$$V(s, k) = V(s - 1, k - 1) + 2V(s - 1, k) + V(s - 1, k + 1) + V(s, k + 1) \quad (26)$$

Pour justifier cette formule, nous distinguerons quatre classes de types ordinaux à  $s$  segments et  $k$  composantes connexes.

a) Ceux dont la dernière composante se réduit à un segment unique : la suppression de ce segment laisse un type ordinal ayant un segment de moins et une composante de moins, et justifie par conséquent le terme  $V(s - 1, k - 1)$  du second membre de (26)

b) Ceux dont la dernière composante connexe  $K$  se compose d'un plus grand segment  $S$  incluant *unilatéralement* (à droite ou à gauche) un second segment  $S'$  qui inclut tous les autres segments de  $K$ . Pour un tel type ordinal, la suppression de  $S$  fournit un type ayant un segment de moins mais le même nombre de composantes connexes. Inversement pour tout type de cette dernière nature, le plus grand segment  $S'$  peut être "recouvert" d'un segment de plus qui débordé  $S'$  par la droite ou par la gauche (mais pas des deux côtés à la fois), ce qui justifie le terme  $2V(s - 1, k)$  de (26)

c) Ceux dans lesquels la dernière composante connexe a un plus grand segment  $S$  qui *couvre* exactement deux segments  $S_1$  et  $S_2$ , de façon que  $S_1$  et  $S$  aient même origine et  $S_2$  et  $S$  aient même extrémité (fig. 15) ; la suppression de  $S$  donne alors un type ordinal à  $s - 1$  segments et  $k + 1$  composantes connexes, ce qui justifie le terme  $V(s - 1, k + 1)$  du second membre de (26).

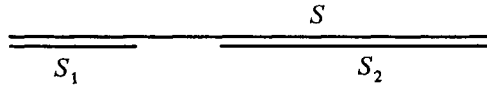


Figure 15

d) Ceux dont la dernière composante  $K$  comprend un plus grand segment  $S$  qui couvre au moins un segment inclus *bilatéralement* dans  $S$  ; nous appellerons  $S'$  le plus à droite des segments possédant cette propriété. Deux cas sont alors à considérer, suivant qu'il existe ou non à droite de  $S'$  un autre segment *couvert* par  $S$ . Dans le 1er cas (fig. 16) appelons  $S''$  cet autre segment, qui a nécessairement même extrémité que  $S$  ; on peut alors raccourcir  $S$  en lui donnant même extrémité que  $S'$ , ce qui fournit un type ordinal ayant  $s$  segments et  $k + 1$  composantes connexes (dont l'avant-dernière se termine



Figure 16

par une extrémité multiple). Dans le 2ème cas (fig. 17), on raccourcit également  $S$ , en lui donnant pour extrémité un point  $e$  situé à gauche de  $S'$  mais à droite des autres segments couverts par  $S$  (s'il en existe) ; on obtient à nouveau un type à  $s$  segments et  $k + 1$  composantes connexes (dont l'avant-dernière se termine cette fois par une extrémité simple). Dans les deux cas on voit aisément comment revenir au type ordinal primitif. On a donc justifié le terme  $V(s, k + 1)$  du second membre de (26).

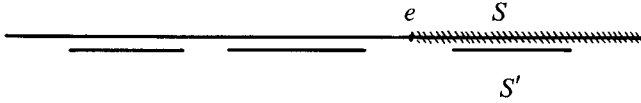


Figure 17

Une autre propriété, à peu près évidente, du tableau des  $V(s, k)$  est que

$$V(s, k) = V(s-1, k-1) V(1, 1) + V(s-2, k-1) V(2, 1) + \dots,$$

qui entraîne que les fonctions génératrices des colonnes successives sont en progression géométrique. Comme on connaît les sommes des lignes successives du tableau (qui, à partir de  $s = 1$ , sont égales à  $2^{s-1} \gamma_s$ ), il est facile de calculer la fonction génératrice des ces sommes à partir de celle des nombres de Catalan

On a alors, en appelant  $\varphi(t)$  la fonction génératrice de la colonne  $k = 1$ ,

$$\frac{1}{1 - \varphi(t)} = \frac{1 + 4t - \sqrt{1 - 8t}}{8t}$$

d'où

$$\varphi(t) = \frac{1 - 2t - \sqrt{1 - 8t}}{2(1 + t)}$$

dont le coefficient en  $t^s$  donne le nombre de types ordinaux connexes à  $s$  segments.

## 18 - LOIS $B_1$ $B_2$ $B_4$ $B_5$

L'étude des hiérarchies *couvrantes* de  $[0, r]$  suivant les valeurs de différents paramètres descriptifs nous a fourni un certain nombre de décompositions des nombres de Schröder simples  $a_r$  ; l'étude des hiérarchies *quelconques* de  $[0, r]$  va de même nous fournir des décompositions des nombres de Schröder doubles  $b_r$ . Bien entendu nous continuerons de nous servir de la bijection fondamentale, qui à toute hiérarchie de  $[0, r]$  fait correspondre un chemin *faiblement* surdiagonal. Nous examinerons en même temps les types ordinaux à origines distinctes, auxquels nous imposerons maintenant d'être connexes, condition qui leur fera correspondre, dans la bijection définie au § 14, des chemins fortement surdiagonaux ; il faudra donc considérer des types ordinaux non plus de  $r$  segments, mais de  $r + 1$  segments. Pour certains paramètres descriptifs la nouvelle loi de répartition résultera simplement d'une sommation de deux termes consécutifs de l'ancienne. Il en sera ainsi des quatre paramètres suivants déjà considérés et d'eux seuls.

1/ Nombre  $n$  de segments terminés en  $r$ .

Ce paramètre donnait, pour les hiérarchies couvrantes de  $[0, r]$ , les nombres  $A_1(r, n)$ . Si une hiérarchie *non-couvrante* a  $n$  segments terminés en  $r$ , il suffit d'y adjoindre  $[0, r]$  pour former une hiérarchie couvrante ayant  $n + 1$  segments terminés en  $r$ . En appelant  $B_1(r, n)$  le nombre de hiérarchies *quelconques* ayant  $n$  segments terminés en  $r$ , on a donc

$$B_1(r, n) = A_1(r, n) + A_1(r, n + 1),$$

d'où le tableau

$B_1(r, n)$	$n = 0$	1	2	3	4	5
$r = 0$	1					
1	1	1				
2	2	3	1			
3	6	10	5	1		
4	22	38	22	7	1	
5	90	158	98	38	9	1

## 2/ Nombre totals de segments.

Le même raisonnement permet de voir que si l'on appelle  $B_2(r, s)$  le nombre total de hiérarchies *quelconques* de  $[0, r]$  composées de  $s$  segments ( $A_2(r, s)$  étant le nombre correspondant pour les hiérarchies couvrantes) on a

$$B_2(r, s) = A_2(r, s) + A_2(r, s + 1),$$

d'où le tableau

$B_2(r, s)$	$s = 0$	1	2	3	4	5	6
$r = 0$	1						
1	1	1					
2	1	3	2				
3	1	6	10	5			
4	1	10	30	35	14		
5	1	15	70	140	126	42	
6	1	21	140	420	630	462	132

Il est d'ailleurs facile de déduire de l'expression établie

$$A_2(r, s) = \frac{1}{r} C_r^s C_r^{s-1}$$

que l'on a 
$$B_2(r, s) = C_{r+s}^{2s} \gamma_s = \frac{(r+s)!}{(r-s)! s! (s+1)!}$$

### 3/ Epaisseur gauche $g$

On a cette fois, toujours avec des conventions de notation analogues et par le même raisonnement :

$$B_4(r, g) = A_4(r, g) + A_4(r, g+1),$$

d'où le tableau

$B_4(r, g)$	$g = 0$	1	2	3	4	5	6
$r = 0$	1						
1	1	1					
2	1	3	2				
3	1	7	10	4			
4	1	17	36	28	8		
5	1	49	124	132	72	16	
6	1	171	454	556	416	176	32

### 4/ Epaisseur proprement dite $e$ .

On a de nouveau 
$$B_5(r, e) = A_5(r, e) + A_5(r, e+1)$$

d'où le tableau

$B_5(r, e)$	$e = 0$	1	2	3	4	5	6
$r = 0$	1						
1	1	1					
2	1	3	2				
3	1	7	10	4			
4	1	15	36	30	8		
5	1	31	116	150	80	16	
6	1	63	356	640	514	200	32



19 – LOI  $B_3$  ET DECOMPOSITIONS DE  $V(s, 1)$ 

Nous ne passerons pas systématiquement en revue les autres paramètres descriptifs déjà considérés, nous contentant d'étudier quelques-unes des lois de répartition les plus intéressantes de  $b_r$ , en sommes de  $r + 1$  termes.

Une première loi nous sera fournie par le nombre  $y$  d'extrémités distinctes, paramètre déjà rencontré au § 9 à propos des hiérarchies courvantes.

Si l'on appelle  $B_3(r, y)$  le nombre de hiérarchies de  $[0, r]$  ayant  $y$  extrémités distinctes, il est facile de compter celles qui ont un nombre imposé  $x$  d'origines distinctes, puisqu'il y en a  $C_{r+1}^{x+y}$  pour chacun des  $T(x, y)$  types ordinaux ; on a donc

$$B_3(r, y) = \sum_x C_{r+1}^{x+y} T(x, y),$$

les termes non nuls de la somme correspondant à  $1 \leq x \leq r + 1 - y$ . On forme ainsi le tableau

$B_3(r, y)$	$y = 0$	1	2	3	4	5	6
$r = 0$	1						
1	1	1					
2	1	4	1				
3	1	11	9	1			
4	1	26	46	16	1		
5	1	57	180	130	25	1	
6	1	120	603	750	295	36	1

Les nombres de ce tableau, dont les sommes des lignes successives redonnent les  $a_r$ , possèdent une autre propriété intéressante, qui s'exprime par

$$\sum_{y=0}^r B_3(r, y) 2^y = V(r + 1, 1) \quad (27)$$

Ainsi par exemple pour  $r = 4$  on a

$$1 + 2 \times 26 + 4 \times 46 + 9 \times 16 + 32 = 381 ,$$

nombre de types ordinaux connexes à 5 segments.

Pour l'établir, remarquons qu'aux hiérarchies de  $[0, r]$  à  $y$  extrémités distinctes correspondent, dans la bijection fondamentale, des chemins *faiblement* surdiagonaux ayant  $y$  étapes horizontales non immédiatement suivies d'une étape verticale ; il revient au même, en ajoutant une verticale au début du chemin et une horizontale à la fin, de parler de chemins *fortement* surdiagonaux dont  $y$  étapes horizontales autres que la dernière ne sont pas immédiatement suivies d'une verticale. En termes de types ordinaux à origines distinctes (t.o.o.d.), il s'agira de types connexes à  $r + 1$  segments dans lesquels apparaîtront  $y$  extrémités suivies soit d'une autre extrémité, soit d'une origine de deuxième espèce. Or si  $b$  est une telle extrémité (fig. 18) et si  $S$  est le plus grand segment terminé en  $b$ , il existe nécessairement un segment  $S'$  qui *couvre*  $S$  ( $S$  est d'ailleurs soit l'avant-dernier soit le dernier des segments couverts par  $S'$ , selon que  $b$  est suivi d'une origine de 2ème espèce ou d'une extrémité, qui est alors celle de  $S'$ ). Soit alors  $S''$  le premier, c'est-à-dire le plus à gauche, des segments couverts par  $S'$  ( $S''$  peut coïncider avec  $S$ ). Il est clair qu'un nouveau type ordinal à  $r + 1$  segments, qui ne sera plus à origines distinctes, peut être formé par prolongement à gauche de  $S''$  jusqu'à lui donner la même origine que  $S'$ . S'il y a un ensemble  $E$  de  $y$  extrémités de même nature que  $b$ , il y a ainsi  $2^y$  types ordinaux connexes à  $r + 1$  segments que l'on peut construire en spécifiant la partie de  $E$  pour laquelle on décide de prolonger ou non le segment  $S''$ . En donnant à  $y$  toutes les valeurs possibles, on retrouve évidemment ainsi n'importe quel type ordinal connexe à  $r + 1$  segments, ce qui justifie la formule (27).

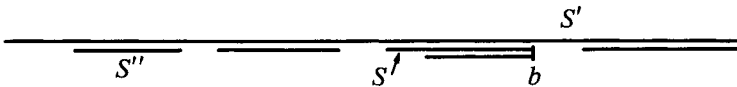


Figure 18

Il est intéressant de noter que la propriété (27) des nombres  $B_3(r, y)$  leur est commune avec d'autres nombres déjà rencontrés, à savoir (à un changement de notations et de dispositions près) les nombres  $u_s^h$  définis par (17). Plus précisément si l'on pose  $u_s'^h = u_s^{s-h}$  on a le tableau (étudié dans [4])

$u_s^h$	$h = 0$	1	2	3	4	5
$s = 1$		1				
2		1	1			
3		1	2	2		
4		1	3	5	5	
5		1	4	9	14	14
6		1	5	14	28	42

	Y
X	Z

$Z = X + Y$

dont chaque ligne à pour dernier terme et pour somme des termes deux nombres de Catalan consécutifs. Montrons que l'on a alors

$$\sum_{h=0}^{s-1} u_s^h 2^h = V(s, 1)$$

(ainsi  $1 + 2 \times 4 + 4 \times 9 + 8 \times 14 + 16 \times 14 = 381$ ).

La méthode à suivre est tout à fait analogue à celle du § 16 : à chacun des  $V(s, 1)$  types ordinaux connexes à  $s$  segments on fait correspondre une hiérarchie *couvrante* de  $[0, r]$ , avec  $r$  le plus petit possible, puis (par la bijection fondamentale) un chemin  $C$  *normalement* surdiagonal de portée  $r$ .

$C$  comprend alors  $s$  étapes horizontales,  $s$  étapes verticales et  $r - s$  étapes obliques ; de plus, parmi ces dernières, aucune n'est diagonale et chacune est immédiatement suivie d'une verticale.

Or on a vu qu'il y avait  $u_s^{s-h} (= u_s^h)$  chemins surdiagonaux "ordinaires" (sans étapes obliques) de portée  $s$  ayant  $s - h$  arches.

Si  $C'$  est un tel chemin,  $s - h$  de ses étapes verticales sont étapes initiales d'une arche, et  $h$  autres étapes verticales ne le sont pas. Pour passer de  $C'$  à un chemin  $C$ , il suffit d'insérer, immédiatement avant certaines de ces  $h$  étapes verticales "non-initiales", une étape oblique, ce qui est évidemment possible de  $2^h$  manières. En sommant par rapport à  $h$ , on établit ainsi la formule annoncée.

### 20 – LONGUEUR TOTALE RECOUVERTE ; LOI $B_3$

Une autre décomposition des nombres de Schröder doubles  $b_r$  est fournie par la considération de la "longueur totale recouverte" par une hiérarchie de  $[0, r]$ , longueur  $l$  qui est égale à  $r$  pour les hiérarchies couvrantes et

pour elles seules. Nous appellerons  $B_8(r, l)$  le nombre de hiérarchies de  $[0, r]$  qui recouvrent une longueur  $l$ , et nous allons établir que

$$B_8(r, l) = B_8(r-1, l) + \sum_{\lambda=0}^{l-1} B_8(r, \lambda). \quad (28)$$

La formule est évidemment vraie pour  $l = r$  puisqu'alors  $B_8(r-1, l) = 0$  et que les deux membres sont égaux à  $a_r$ . Nous supposons dorénavant que  $l \leq r-1$ .

Il y a deux sortes de hiérarchies recouvrant la longueur  $l$ .

1/ Celles qui n'ont aucun segment terminé en  $r$ .

Ce sont des hiérarchies de  $[0, r-1]$ , et leur nombre total est égal à  $B_8(r-1, l)$ .

2/ Celles qui ont au moins un segment terminé en  $r$ . Si l'on supprime d'une telle hiérarchie  $H$  le plus long des segments terminés en  $r$ , il reste une hiérarchie de  $[0, r]$  qui recouvre une longueur  $\lambda \leq l-1$ .

Or toute hiérarchie  $H'$  de  $[0, r]$  qui recouvre une longueur  $\lambda \leq l-1$  peut être obtenue par ce procédé. Il y a en effet  $r - \lambda$  intervalles non couverts par  $H'$ ; soit  $a$  l'origine du  $(l - \lambda)$ -ième de ces intervalles comptés à partir de la droite. Si  $a$  n'est pas extrémité d'un segment de  $H'$ , il suffit d'adjoindre à  $H'$  le segment  $[a, r]$  pour retrouver  $H$ . Si  $a$  est extrémité d'un segment de  $H'$  et si  $[x, a]$  est le plus long des segments de  $H'$  terminés en  $a$ , il suffit, pour retrouver  $H$ , d'adjoindre à  $H'$  le segment  $[x, r]$ .

La formule (28) est ainsi établie et l'on en tire immédiatement, par différence, la formule

$$B_8(r, l) = 2B_8(r, l-1) + B_8(r-1, l) - B_8(r-1, l-1),$$

qui permet de former de proche en proche le tableau ci-après :

$B_8(r, l)$	$l = 0$	1	2	3	4	5	6
$r = 0$	1						
1	1	1					
2	1	2	3				
3	1	3	7	11			
4	1	4	12	28	45		
5	1	5	18	52	121	197	
6	1	6	25	84	237	550	903

Si à une hiérarchie de  $[0, r]$  on applique la bijection fondamentale, puis que l'on interprète le chemin qui lui correspond en termes de t.o.o.d. connexe à  $r + 1$  segments (ainsi qu'on l'a dit au début du § 18), on voit, en s'aidant de la fig. 14, que  $B_8(r, l)$  est le nombre de t.o.o.d. connexes à  $r + 1$  segments pour lesquels l'extrémité la plus à droite est commune exactement à  $r - l + 1$  segments.

21 – ORIGINE LA PLUS A DROITE : LOI  $A_8$

Les nombres  $B_8(r, l)$  ont en outre une propriété remarquable, qui les relie à une composition des nombres de Schröder *simples* que nous n'avons pas considérée jusqu'à présent (parce que nous nous sommes limités en fait à des paramètres descriptifs dont l'une des valeurs extrêmes était prise une seule fois). Si en effet on calcule

$$A_8(r, l) = 2^{r-l-1} \cdot B_8(r - 1, l), \tag{29}$$

on trouve le tableau suivant :

$A_8(r, l)$	$l = 0$	1	2	3	4	5	6	
$r = 1$	1							
2	2	1						$X$
3	4	4	3					$Y$
4	8	12	14	11				$X'$
5	16	32	48	56	45			$Y'$
6	32	80	144	208	242	197		
7	64	192	400	672	948	1100	903	

$$Y' = 2Y + X' - X$$

qui peut aussi être formé additivement de proche en proche par la règle indiquée, laquelle résulte de celle du tableau des  $B_8(r, l)$  et de (29): il est à noter que non seulement les sommes des lignes du tableau des  $A_8(r, l)$  donnent  $a_r$ , mais que  $A_8(r, l)$  a une signification énumérative simple : c'est le nombre de hiérarchies couvrantes de  $[0, r]$  dont l'origine la plus à droite est  $l$ .

L'une des manières de l'établir est de montrer que ce nombre satisfait à la relation même qui a permis de former le tableau des  $A_8(r, l)$ , ou à la relation équivalente

$$A_8(r, l) = 2 A_8(r - 1, l) + A_8(r - 1, l - 1) + \dots + A_8(r - 1, 0). \tag{30}$$

Or il y a deux sortes de hiérarchies couvrantes de  $[0, r]$  dont l'origine la plus à droite est  $l$  :

1/ Celles qui ne comprennent pas le segment  $[l, l + 1]$ . Pour toute hiérarchie de cette sorte, on peut raccourcir d'une unité tous les segments terminés à droite de  $l$ , ce qui donne une hiérarchie de  $[0, r - 1]$  dont l'origine la plus à droite est  $l$

2/ Celles qui comprennent  $[l, l + 1]$ . Après suppression de ce segment dans une telle hiérarchie, on obtient une hiérarchie de  $[0, r]$  dont l'origine la plus à droite est  $l' \leq l$ , et l'on peut ensuite raccourcir d'une unité tous les segments terminés à droite de  $l'$ .

Le procédé permet de trouver ainsi n'importe quelle hiérarchie de  $[0, r - 1]$  dont l'origine la plus à droite soit  $l' \leq l$ . En effet on peut toujours rallonger d'une unité tous les segments terminés à droite de  $l'$ , puis rajouter le segment  $[l, l + 1]$ , cette dernière opération étant obligatoire si  $l' < l$  et facultative si  $l' = l$ . La formule (30) est ainsi justifiée.

Au paramètre "origine la plus à droite" d'une hiérarchie couvrante correspond, dans la bijection fondamentale, la plus grande abscisse d'une étape verticale. Ce dernier paramètre, par raison de symétrie, est distribué de la même manière que la plus petite ordonnée d'une étape horizontale. Or, en termes de t.o.o.d., cette dernière est le nombre d'origines (de première ou deuxième espèce) qui précèdent la première extrémité, c'est-à-dire ce que nous avons appelé *l'épaisseur gauche*. On voit ainsi que  $A_8(r, l)$  n'est autre que le nombre de t.o.o.d. à  $r$  segments dont l'épaisseur gauche est égale à  $r - l$ .

## 22 - LOI $B_8$

Il est enfin intéressant de répartir les hiérarchies quelconques de  $[0, r]$  suivant le paramètre "épaisseur après épuration à droite" déjà considéré pour les hiérarchies couvrantes. On a vu qu'à ce paramètre correspondait la hauteur des chemins (cette fois faiblement) surdiagonaux.

La méthode de calcul du nombre  $B_6(r, h)$  de chemins faiblement surdiagonaux de portée  $r$  et de hauteur  $h$  peut être calquée sur celle suivie au § 12 ; elle part du nombre  $*\delta_r^h$  analogue au  $\delta_r^h$  déjà calculé, mais en supprimant la condition qui avait été appelée (b) (c'est-à-dire en autorisant les étapes obliques aussi bien sur  $y = x - h$  que sur  $y = x$ ). Exemple pour  $h = 3$  (les nombres soulignés sont les  $*\delta_r^3$ ) :

				5	377	1 253	2 597	3 353
				4	89	288	588	756
			3	22	67	132	168	
		2	6	16	29	36		
	1	2	4	6	7			
$r = 0$	1	1	1	1				

La matrice  $*M_4$  qui transforme chaque ligne de ce tableau en la ligne au-dessus ne diffère de  $M_4$  que par sa dernière ligne

$$*M_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

La matrice générale  $*M_{h+1}$  se forme de manière analogue ; quant à son équation caractéristique, elle est encore plus facile à former que dans le cas précédemment étudié, puisque le polynôme  $*f(\lambda)$  est précisément égal au déterminant  $\Delta_{h+1}$  qui a partout  $1 - \lambda$  dans sa diagonale,  $\lambda$  dans sa sous-diagonale et 1 dans sa surdiagonale.

Il en résulte que les relations de récurrence successives qui permettent le calcul des  $*\delta_r^h$  sont :

$$\begin{aligned} *\delta_r^0 - *\delta_{r-1}^0 &= 0 \\ *\delta_r^1 - 3*\delta_{r-1}^1 + *\delta_{r-2}^1 &= 0 \\ *\delta_r^2 - 5*\delta_{r-1}^2 + 5*\delta_{r-2}^2 - *\delta_{r-3}^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$R(h+1, 0) *\delta_r^h - R(h, 1) *\delta_{r-1}^h + R(h-1, 2) *\delta_{r-2}^h - \dots = 0,$$

les coefficients étant les nombres totaux de chemins royaux.

D'où le tableau des  $*\delta_r^h$  :

$*\delta_r^h$	$h = 0$	1	2	3	4	5	6	7
$r = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	3	5	7	9	11	13	
2	1	8	20	36	56	80		
3	1	21	76	168	304			
4	1	55	285	756				
5	1	144	1065					
6	1	377						
7	1							

Pour passer au tableau des  $B_6(r, h)$ , le raisonnement repose sur la figure 13 et conduit à la même convolution, d'où finalement le tableau

$B_6(r, h)$	$h = 0$	1	2	3	4	5	6	7
$r = 0$	1							
1	1	1						
2	1	4	1					
3	1	12	8	1				
4	1	33	43	12	1			
5	1	88	197	91	16	1		
6	1	232	833	564	155	20	1	
7	1	609	3 367	3 133	1 188	235	24	1

Une autre manière d'obtenir les mêmes nombres  $B_6(r, h)$  est de s'appuyer sur un résultat obtenu dans [4], qui consiste à compter les chemins sur-diagonaux de portée  $r$  et de hauteur  $h$  sans étapes obliques.

Appelons ici  $\Gamma_r^h$  le nombre de ces chemins. Un mode de calcul simple de  $\Gamma_r^h$ , établi dans [4], est de partir d'une suite non-croissante  $Z$  de  $h$  entiers positifs de somme  $r$ ,

$$Z = (z_1 \ z_2 \ \dots \ z_h),$$

de former la suite décroissante convexe

$$\begin{aligned} p_0 &= r \\ p_1 &= r - y_1 \\ p_2 &= r - y_1 - y_2 \\ &\dots\dots\dots \\ p_h &= 0 \end{aligned}$$

de calculer le produit des  $h - 1$  binomiaux

$$\binom{p_0 + p_2}{2p_1} \binom{p_1 + p_3}{2p_2} \dots \binom{p_{h-2} + p_h}{2p_{h-1}}$$

et de faire la somme de tous les produits analogues pour toutes les suites  $Z$  correspondant à  $r$  et  $h$  donnés.



Voici un tableau des  $\Gamma_r^h$ , dont les sommes des lignes donnent les nombres de Catalan :

$\Gamma_r^h$	$h = 0$	1	2	3	4	5	6	7
$r = 0$	1							
1	0	1						
2	0	1	1					
3	0	1	3	1				
4	0	1	7	5	1			
5	0	1	15	18	7	1		
6	0	1	31	57	33	9	1	
7	0	1	63	169	132	52	11	1

Il est clair que si dans un chemin primitivement dépourvu d'étapes obliques on intercale des étapes obliques, on ne change pas la hauteur, mais on augmente la portée d'une unité par étape oblique intercalée. On en déduit aisément que

$$B_6(r, h) = \Gamma_r^h + C_{2r-1}^1 \Gamma_{r-1}^h + C_{2r-2}^2 \Gamma_{r-2}^h + \dots + C_{r+h}^{r-h} \Gamma_h^h$$

Ainsi par exemple, pour  $h = 3$  et  $r = 7$ , on retrouve

$$3\ 133 = 169 + \binom{13}{1} 57 + \binom{12}{2} 18 + \binom{11}{3} 5 + \binom{10}{4} 1.$$

### 23 – REMARQUES RECAPITULATIVES OU COMPLEMENTAIRES

Les paramètres descriptifs étudiés nous ont conduit, pour tout  $r > 0$ , à *huit* décompositions du nombre de Schröder simple  $a_r$ , en somme de  $r$  nombres positifs et à *sept* décompositions du nombre de Schröder double  $b_r$ , en somme de  $r + 1$  nombres positifs. Aucune de ces dernières décompositions n'a reçu le nom de  $B_7$ , qui serait naturel pour compter les hiérarchies quelconques de  $[0, r]$  ayant un nombre donné  $d$  de bords. Le nombre  $B_7(r, d)$  est du reste facile à calculer par une méthode analogue à celle qui a donné  $A_7(r, d)$  ; en effet l'on a déterminé, pour  $d \geq 2$ , la suite  $*\nu_d$  des types ordinaux quelconques à  $d$  bords, suite que l'on peut toujours faire précéder de  $*\nu_0 = 1$  (type ordinal vide) et  $*\nu_1 = 0$  (pas de type ordinal à un seul bord) :

$d$	0	1	2	3	4	5	6	7
$*\nu_d$	1	0	1	2	7	24	89	342

On a alors

$$B_7(r, d) = C_{r+1}^d * \nu_d,$$

d'où le tableau

$B_7(r, d)$	$d = 0$	1	2	3	4	5	6	7
$r = 0$	1	0						
1	1	0	1					
2	1	0	3	2				
3	1	0	6	8	7			
4	1	0	10	20	35	24		
5	1	0	15	40	105	144	89	
6	1	0	21	70	245	504	623	342

Mais contrairement à ce qui se passe pour les autres tableaux  $B_i$ , les  $r + 1$  valeurs non nulles de  $B_7$  ne sont pas prises pour des valeurs consécutives de  $d$ . D'autre part l'adoption d'un même numérotage de 1 à 8 pour les lois  $A_i$  et  $B_i$  ne se justifie pas toujours par une correspondance aussi simple que pour les numéros  $i = 1, 2, 4$  et  $5$ .

Entre les lois  $A_3$  et  $B_3$ , la parenté n'a rien d'analytique, mais résulte simplement du fait que  $A_3(r, m)$  et  $B_3(r, y)$  désigne un nombre de hiérarchies de  $[0, r]$  ayant un nombre donné d'extrémités distinctes ( $r - m$  pour les hiérarchies couvrantes,  $y$  pour les hiérarchies quelconques).

Entre  $A_6$  et  $B_6$  il y a parenté plus étroite en ce qui concerne tant la définition que le mode de formation du tableau ; la même observation est valable pour  $A_7$  et  $B_7$ .

Par contre entre  $A_8$  et  $B_8$  le lien est plus relâché puisqu'il est principalement de nature analytique (équation (29)) ; les paramètres "longueur recouverte par une hiérarchie quelconque" et "origine la plus à droite d'une hiérarchie couvrante" sont, par leurs définitions, très différents l'un de l'autre.

Il est d'autre part intéressant de rapprocher les seize décompositions de nombres de Schröder étudiées ici des trois décompositions des nombres de Catalan étudiés en [4] sous le nom de lois ( $\alpha$ ) ( $\beta$ ) ( $\gamma$ ), à propos des éventails de segments.

Il y a lieu de noter à cet égard une grande parenté entre les lois  $A_1$  et  $B_1$  et la loi  $(\alpha)$ , de même qu'entre les lois  $A_6$  et  $B_6$  et la loi  $(\gamma)$ . En ce qui concerne la loi  $(\beta)$ , notée ici  $v_r^m$  (§ 8), elle est étroitement apparentée aux lois qui ont été appelées  $A_2$  et  $A_3$  ; on passe en particulier de  $(\beta)$  à  $A_3$  par le même procédé (multiplication par les puissances successives de 2) qui a permis de passer de  $B_8$  à  $A_8$ . Notons aussi le type particulier de parenté entre la loi  $(\alpha)$  et la loi  $B_3$  qui a été mis en évidence au § 19.

Le fait de rencontrer ici beaucoup plus de lois de décomposition qu'en [4] s'explique par le fait que les hiérarchies de segments sont beaucoup plus riches en paramètres descriptifs simples que les éventails de segments.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] CAYLEY A. – *On the partitions of a polygon*, Philos. Mag. (4), n° 22 (1890-1891), pp. 237-262.
- [2] GOODMAN E. and NARAYANA T.V. – *Lattice paths with diagonal steps*. U. Alberta, n° 39 – (1967).
- [3] KREWERAS G. – *Traitement simultané du problème de Young et du problème de Simon Newcomb*, cahiers du B.U.R.O., n° 10 Paris (1967), pp. 23-31.
- [4] KREWERAS G. – *Sur les éventails de segments*, Cahiers du B.U.R.O. n° 15, Paris (1970), pp. 3-41.
- [5] MOSER et ZAYACHKOWSKI – *Lattice paths with diagonal steps*, Scripta M., n° 26 (1963), pp. 223-229.
- [6] NARAYANA R.V. and SATHE Y.S. – *Minimum variance unbiased estimation in coin tossing problems*, Sankhya A, n° 23, 2 (1961), pp. 183-186.
- [7] RANEY G.N. – *Functional composition patterns and power series reversion*, Trans. A.M.S., n° 94 (1960), pp. 441-451.
- [8] RIORDAN J. – *Combinatorial identities*, Wiley, New-York (1968), p. 17.
- [9] SCHRÖDER – *Vier Kombinatorische Probleme*, Zeitschr. f.M. Physik , n° 15 (1870), pp. 361-376.