CAHIERS DU BURO

MAURICE DESPLAS

Liens entre la programmation dynamique, le contrôle optimal discret et la dualité en programmation linéaire

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 18 (1972), p. 3-101

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1972__18__3_0>

INTRODUCTION

Plusieurs techniques d'optimisation sont a priori disponibles pour rechercher une politique optimale ou un ensemble de décisions optimales dans un processus dynamique discret. A la méthode de la programmation dynamique et au principe du maximum discret peut venir s'ajouter, sous les hypothèses de linéarité des équations de transition, des contraintes et de la fonction objectif, la technique de résolution par la programmation linéaire. Les liens entre ces différentes disciplines a priori distinctes sont en fait très étroits et peuvent être éclairés au moins par des exemples d'illustration. Deux exemples de problèmes économiques ont été choisis de telle sorte que leur résolution puisse aussi être effectuée par des méthodes de programmation linéaire. Dans le cas plus général de non linéarité, la liaison entre la programmation dynamique et le contrôle optimal discret demeure et sera explicitée de deux façons car les problèmes dynamiques se trouvent développés la plupart du temps sous deux formes différentes suivant que l'on optimise une fonction du *seul* état final ou que l'on optimise une fonction objectif qui dépend de *toutes* les étapes.

Il est assez facile de montrer que cette deuxième formulation peut se ramener à la première mais comme la première est très courante dans l'approche par le contrôle optimal alors que la seconde est par contre plus utilisée en programmation dynamique cela peut cacher les caractéristiques communes à ces deux disciplines : ainsi se peut justifier que soient traitées à la fois les deux approches – au risque de répétitions et d'une longueur accrue – de ces deux disciplines. Les exemples numériques seront chacun traités aussi plusieurs fois : par le contrôle et le principe du maximum (1ère et/ou 2e formulation), par la programmation dynamique (1ere et/ou 2e approche) et enfin par la programmation linéaire.

Les développements qui suivent essayent de montrer que le principe récurrent d'optimalité de Bellman (en programmation dynamique) n'est rien d'autre dans le cas discret que la traduction des équations canoniques d'Hamilton-Jacobi du contrôle discret. Le rapprochement avec la programmation linéaire et la dualité des programmes linéaires (dans des cas particuliers) montrera que les multiplicateurs qui interviennent dans l'Hamiltonien sont liés aux variables duales du problème posé. Enfin on pourra essayer de définir une dualité en programmation dynamique, dualité bien connue sous la forme de réciprocité entre les procédures de résolution "en avant" (forward) et "en arrière" (backward) : on essayera cependant de montrer que si l'on effectue "une récurrence en avant" pour résoudre un problème il est possible de suivre les évolutions des multiplicateurs duaux et de constater qu'ils sont soumis à une "récurrence en arrière", ces deux évolutions étant duales dans le sens de la réciprocité entre "le temps qui s'écoule de 0 à N" et "la remontée du temps de l'étape N à l'étape 0". Cette dualité apparaît dans les équations de transition qui lient les variables d'état entre elles et les équations de transition qui lient les multiplicateurs entre eux.

Ces équations ne sont autres que l'expression dans le cas discret des équations *adjointes* dans la théorie des équations différentielles linéaires :

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x} + \vec{b} \\ \dot{\vec{y}} = \vec{y}\,A(t) \end{cases}$$

$\vec{x} = [x_1(t), x_2(t) \ldots x_i(t) \ldots x_n(t)]'$: vecteur colonne

$\dot{\vec{x}} = \dfrac{d\vec{x}}{dt}$; $A(t)$: matrice (n, n) régulière.

$\vec{y}$: vecteur-ligne.

La traduction des équations ci-dessus (sur les variables d'état) dans le cas discret est :

$$\vec{x}_n = A(n)\,\vec{x}_{n-1} + \vec{b}_n$$

et la résolution du système à partir d'un état initial donné $\vec{x}_0$ est très simple.

Elle sera donnée ci-dessous brièvement mais reprise d'une autre façon dans le § I par l'intermédiaire de la théorie des équations linéaires de récurrence car la dualité et les équations adjointes (pour les multiplicateurs) s'introduisent très simplement par l'introduction des fonctions de Green discrètes.

Résolution directe d'un système d'équations de récurrence linéaires :

$$
\begin{aligned}
\vec{x}_n &= A(n)\,\vec{x}_{n-1} + \vec{b}_n \\
&= A(n)\,[A(n-1)\,\vec{x}_{n-2} + \vec{b}_{n-1}] + \vec{b}_n = A(n)\,A(n-1)\,\vec{x}_{n-2} + \{A(n)\,\vec{b}_{n-1} + \vec{b}_n\} \\
&= A(n)\,A(n-1)\,[A(n-2)\,\vec{x}_{n-3} + \vec{b}_{n-2}] + \{A(n)\,\vec{b}_{n-1} + \vec{b}_n\} = A(n)\cdot A(n-1)\cdot A(n-2)\,\vec{x}_{n-3} + \\
&\qquad + \{A(n)\,A(n-1)\,\vec{b}_{n-2} + A(n)\,\vec{b}_{n-1} + \vec{b}_n\} \\
&\ \ \vdots \\
&= A(n)\cdot A(n-1)\,A(n-2)\dots A(2)\cdot A(1)\cdot\vec{x}_0 + \left\{
\begin{array}{l}
A(n)\,A(n-1)\,A(n-2)\dots\dots A(3)\,A(2)\,\vec{b}_1 + \\
A(n)\,A(n-1)\,A(n-2)\dots\dots A(3)\,\vec{b}_2 + \\
A(n)\,A(n-1)\,A(n-2)\dots A(4)\,\vec{b}_3 + \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
A(n)\,A(n-1)\,\vec{b}_{n-2} + \\
A(n)\,\vec{b}_{n-1} \\
I\cdot\vec{b}_n
\end{array}
\right.
\end{aligned}
$$

L'expression ci-dessus de $\vec{x}_n$ se simplifie si l'on pose :

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\Lambda(n, s) = A(n)\,A(n-1)\,A(n-2)\dots\dots A(s+1) & \text{pour } 0 \leqslant s < n \\
\Lambda(n, n) = 1 &
\end{array}
\right.
$$

On a alors : $\boxed{\vec{x}_n = \Lambda(n, 0)\,\vec{x}_0 + \sum_{s=1}^{s=n} \Lambda(n, s)\, b_S}$

Remarque :

La définition de $\Lambda(n, s)$ implique un certain nombre de propriétés comme :

- $\Lambda(n, u)\cdot\Lambda(u, v) = \Lambda(n, v)$
- $\Lambda(n, s)\cdot A(s) = \Lambda(n, s-1)$
- $A(n)\cdot\Lambda(n-1, s) = \Lambda(n, s)$

I – ÉQUATIONS LINÉAIRES DE RECURRENCE

Note : Les références (A , p.) et (H , p.) repèrent dans les ouvrages de Athans Falb et Hestenes la formulation "continue" des résultats du cas discret développés dans ce chapitre.

Définitions :

Soit $A(n)$ une matrice inversible de format (r , r) définie pour tout $n \in \{1 , 2 , \ldots\}$

Soit $\vec{x}_n$ un vecteur-colonne à r composantes défini pour tout $n \in \{0 , 1 , 2 , \ldots\}$

Soit $\vec{b}_n$ un vecteur-colonne à r composantes défini pour tout $n \in \{1 , 2 , \ldots\}$

L'équation $$\boxed{\vec{x}_n = A(n)\,\vec{x}_{n-1} + \vec{b}_n} \qquad (n = 1 , 2 , \ldots) \qquad (1)$$

est appelée *équation de récurrence linéaire non homogène* si $\vec{b}_n \neq 0$

L'équation $$\boxed{\vec{x}_n = A(n) \cdot \vec{x}_{n-1}} \qquad (2)$$

est l'*équation homogène associée* à (1).

On appelle *solution* de (1) un vecteur $\vec{\xi}_n$ tel que $\vec{\xi}_0$ soit défini et donné et tel que :

$$\vec{\xi}_n = A(n)\,\vec{\xi}_{n-1} + \vec{b}_n \qquad \text{pour } \forall n \in \{1 , 2 , 3 , \ldots\}$$

Théorème 1 (A, p.123)

Soit a un entier et soit $\vec{c}$ un vecteur constant à r dimensions. Alors il existe un vecteur $\vec{\xi}_n$ et un seul défini pour $n \in \{a , a + 1 , a + 2 , \ldots\}$ tel que :

$$\vec{\xi}_a = \vec{c} \qquad (3)$$

et $$\vec{\xi}_n = A(n)\,\vec{\xi}_{n-1} + \vec{b}_n \qquad \forall n \in \{a + 1 , a + 2 , a + 3 , \ldots\} \qquad (4)$$

Dém : Existence :

Il suffit de définir $\vec{\xi}_a = \vec{c}$, $\vec{\xi}_{a+1} = A(a+1)\,\vec{c} + \vec{b}_{a+1}$,

$$\vec{\xi}_{a+2} = A(a+2)\,A(a+1)\,\vec{c} + A(a+2)\,\vec{b}_{a+1} + \vec{b}_{a+2}\ \text{, etc} \ldots$$

ou

$$\begin{cases} \vec{\xi}_n = A(n)\,A(n-1)\ldots A(a+1)\,\vec{c} + \sum\limits_{i=a+1}^{n-1} A(n)\,A(n-1)\ldots A(i+1)\,\vec{b}_i + \vec{b}_n \\ \text{pour } n = a+2\,, a+3\,, \ldots \end{cases}$$

On vérifie alors que l'on a

$$\vec{\xi}_a = \vec{c} \qquad \text{et} \qquad \vec{\xi}_n = A(n)\,\vec{\xi}_{n-1} + \vec{b}_n \qquad \text{pour } n = a+1\,, a+2\,,\ldots$$

Unicité :

Supposons que $\vec{\xi}'_n$ satisfasse aussi aux conditions (3) et (4). Alors d'après (3) : $\vec{\xi}'_a = c = \vec{\xi}_a$, d'après (4) on a

$$\begin{cases} \text{pour } n = a+1 : \vec{\xi}'_{a+1} = A(a+1)\,\vec{\xi}'_a + \vec{b}_{a+1} = A(a+1)\,\vec{\xi}_a + \vec{b}_{a+1} = \vec{\xi}_{a+1} \\ \text{pour } n = a+2 : \vec{\xi}'_{a+2} = A(a+2)\,\vec{\xi}'_{a+1} + \vec{b}_{a+2} = A(a+2)\,\vec{\xi}_{a+1} + \vec{b}_{a+2} = \vec{\xi}_{a+2} \\ \text{etc.} \end{cases}$$

Il y a donc *identité* des vecteurs $\vec{\xi}'_n$ et $\vec{\xi}_n$ pour toute valeur de $n \in \{a\,, a+1\,, a+2\,, \ldots\}$ ce qui implique l'unicité de la solution $\vec{\xi}_n$.

1 – SOLUTIONS DE L'EQUATION HOMOGENE (2)

Soient $\vec{x}^i_n$, $1 \leqslant i \leqslant r$, r solutions de l'équation (2) prenant les valeurs $\vec{x}^i_a$ pour $n = a$ (leur existence et leur unicité découlent du théorème 1).

La matrice :

$$X_n = \boxed{\vec{x}^1_n\,\vec{x}^2_n\,\vec{x}^3_n \ldots\ldots \vec{x}^r_n} \qquad \text{de format } (r\,, r)$$

est une "matrice solution" de (2) dans la mesure où elle satisfait les 2 conditions suivantes :

$$\begin{cases} X_a = \boxed{\vec{x}^1_a\,\vec{x}^2_a \ldots\ldots \vec{x}^r_a} \\ X_n = A(n)\,X_{n-1} \qquad \text{pour } n = a+1\,, a+2\,,\ldots \end{cases}$$

Remarque :

Si, pour $n = 0$, les vecteurs de X_0 sont linéairement indépendants, la matrice X_0 est évidemment inversible. Mais on peut voir que *toutes* les matrices X_n (pour n entier) sont aussi inversibles par récurrence puisqu'elles se déduisent chacune de la précédente par une *matrice inversible* $A(n)$:

$X_1 = A(1)\, X_0$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles,

$X_2 = A(2)\, X_1$ est inversible comme produit de deux matrices inversibles,

. . . etc . . .

Définition :

Soit $\vec{\varphi}_n^{\,i}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, la *solution unique* de l'équation homogène (2) telle que

$$\vec{\varphi}_0^{\,i} = \vec{e}_i \qquad \text{où} \quad \vec{e}_1 = \boxed{\begin{matrix}1\\0\\0\\0\\0\end{matrix}} \; , \vec{e}_2 = \boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\\0\\0\end{matrix}} \quad \ldots \text{etc.}$$

Alors la matrice

$$\Phi_n = \boxed{\vec{\varphi}_n^{\,1}\ \vec{\varphi}_n^{\,2}\ \ldots\ \vec{\varphi}_n^{\,r}}$$

est appelée *matrice fondamentale solution* de l'équation (2). (*A,p.* 127)

Propriétés de Φ_n *:*

1. $\boxed{\Phi_0 = \mathrm{I}}$ 2. $\boxed{\Phi_n = A(n)\, \Phi_{n-1}}$

3. Φ_n est inversible pour $n = 0 , 1 , 2 , \ldots$ d'après la remarque ci-dessus puisque Φ_0 est manifestement inversible.

Propriétés de X_n *:*

1. $\boxed{X_n = \Phi_n\, X_0}$

En effet la *solution unique* X_n de (2) prenant la valeur X_0 pour $n = 0$ est donnée par

$$X_n = A(n)\, X_{n-1} = A(n)\, A(n-1)\, X_{n-2} = \ldots = A(n)\, A(n-1) \ldots A(1)\, X_0 \quad (5)$$

De même $\Phi_n = A(n)\, A(n-1) \ldots A(1)\, \Phi_0 = A(n)\, A(n-1) \ldots A(1).$

et donc $\qquad \Phi_n\, X_0 = A(n)\, A(n-1) \ldots A(1)\, X_0$

et d'après (5) on a $\qquad \Phi_n X_0 = X_n$.

2. Nous supposerons dans ce qui suit que la matrice X_0 est inversible, ce qui revient à admettre que les r vecteurs solutions initiaux $\vec{x}_0^i$ sont choisis linéairement indépendants. *Alors il est clair que* X_n *est inversible pour* $n = 0, 1, 2 \ldots$

Solutions de l'équation homogène (2) :

Soit $\vec{\xi}_n$ la solution de l'équation (2) prenant la valeur $\vec{\xi}_0$ pour $n = 0$.

On a comme ci-dessus $\vec{\xi}_n = A(n)\, A(n-1) \ldots A(1)\, \vec{\xi}_0$. Or on a vu que

$$A(n)\, A(n-1) \ldots A(1) = \Phi_n = X_n X_0^{-1}.$$

Il s'ensuit que :

$$\boxed{\vec{\xi}_n = \Phi_n \vec{\xi}_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\xi}_n = X_n X_0^{-1} \vec{\xi}_0}$$

2 – FONCTION DE GREEN

Considérons une matrice solution X_n avec X_0 inversible. On appellera *fonction de Green* la matrice

$$\boxed{\Lambda(n, s) = X_n X_s^{-1}}$$

On remarque, en introduisant la matrice fondamentale $\Phi_n = X_n X_0^{-1}$, que :

$$\Lambda(n, s) = (\Phi_n X_0)\,(\Phi_s X_0)^{-1} = \Phi_n \Phi_s^{-1} \text{ ; d'où : } \boxed{\Lambda(n, s) = \Phi_n \Phi_s^{-1}}$$

(ce qui était prévisible puisque Φ_n est une matrice X_n particulière).

De plus $\qquad \boxed{\Lambda(n, 0) = \Phi_n}$

Enfin

$$\Lambda(n, s) = X_n X_s^{-1} = \begin{cases} A(n)\, X_{n-1} X_s^{-1} = A(n)\, \Lambda(n-1, s) \\ X_n\, [A(s)\, X_{s-1}]^{-1} = X_n X_{s-1}^{-1} A^{-1}(s) = \Lambda(n, s-1) \cdot A^{-1}(s) \end{cases}$$

Les deux équations de récurrence ci-dessus sur $\Lambda(n, s)$ traduisent une dualité que nous retrouverons dans la suite. La définition suivante en est un exemple.

3 – EQUATION ADJOINTE DE L'EQUATION HOMOGENE (2) (H, p. 389 et A, p. 147)

On peut associer à l'équation homogène : $\vec{x}_n \;= A(n)\,\vec{x}_{n-1}$ (2)

l'équation (6) suivante : $\vec{y}_{n-1} = \vec{y}_n\,A(n)$ (6)

qui peut aussi s'écrire : $\vec{y}_n \;= \vec{y}_{n-1}\,A^{-1}(n)$ (7)

(dans (6) et (7) $\vec{y}_n$ est un vecteur-ligne à r composantes).

En transposant les deux membres de l'équation (7) on obtient une équation du même type que l'équation (2) mais dont la matrice est devenue $[A'(n)]^{-1}$.

On peut définir pour cette nouvelle équation tous les éléments définis ci-dessus à propos de l'équation (2), en particulier une matrice solution Y_n, une matrice fondamentale Ψ_n et une fonction de Green $M(n\,,s)$. Mais comme la matrice de cette équation est liée à la matrice $A(n)$ on doit s'attendre à trouver des relations entre Φ_n et Ψ_n d'une part et entre $\Lambda(n\,,s)$ et $M(n\,,s)$ d'autre part. Il faut remarquer que, alors que l'équation (2) permet de décrire l'évolution de $\vec{x}_n$ lorsque le temps se déroule ($n = 0\,,1\,,2\,,\ldots,N,\ldots$) l'équation (6) donne l'évolution de $\vec{y}_n$ lorsque l'on remonte le temps

$$(n = N\,,N-1\,,N-2\,,\ldots\ldots 0\,,\ldots).$$

De la même façon que l'on considère comme *duales* les procédures "forward" et "backward" de résolution d'un programme dynamique (suivant que l'on déroule ou remonte le temps) nous appellerons aussi duales les équations (2) et (6). Nous verrons d'ailleurs que la fonction de Green Λ, satisfaisant aux deux équations de récurrence "duales" données précédemment, est étroitement reliée à la fonction qui suit l'équation de récurrence de Hamilton-Jacobi-Bellman traduisant le principe d'optimalité de la programmation dynamique.

Mais nous nous sommes donné l'équation adjointe à partir de l'équation (2) définie pour $n = 0\,,1\,,2\,,\ldots$ et $\vec{y}_0$ donné. Dans ces conditions nous devons envisager l'équation (7) et non l'équation (6) dont la condition aux limites est: $\vec{y}_N$ donné, alors que nous ne pouvons prendre comme condition aux limites que : $\vec{y}_0$ donné.

Le théorème 1 peut se reécrire exactement de la même façon sous la forme :

Théorème 2

Soit a un entier et soit $\vec{d}$ un vecteur ligne constant à r dimensions. Alors il existe un vecteur $\vec{\eta}_n$ et un seul défini pour $n \in \{a, a+1, a+2 \ldots\}$ tel que :

$$\vec{\eta}_a = \vec{d}$$

et $\quad \vec{\eta}_n = \vec{\eta}_{n-1} A^{-1}(n). \qquad \forall n \in \{a+1, a+2, a+3 \ldots\}.$

On définit de même une "matrice solution" de (7) à partir de r vecteurs lignes $\vec{y}_n^i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$ sous la forme

$$Y_n = \boxed{\begin{matrix} \vec{y}_n^1 \\ \vec{y}_n^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{y}_n^r \end{matrix}} \quad \text{dans la mesure où} \quad Y_a = \boxed{\begin{matrix} \vec{y}_a^1 \\ \vec{y}_a^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{y}_a^r \end{matrix}} \quad \text{et} \quad Y_n = Y_{n-1} A^{-1}(n)$$

On suppose que Y_0 est aussi inversible.

On définit enfin une *matrice fondamentale* Ψ_n *solution* de l'équation (7) par

$$\Psi_n = \boxed{\begin{matrix} \vec{\Psi}_n^1 \\ \vec{\Psi}_n^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{\Psi}_n^r \end{matrix}} \quad \text{avec} \quad \vec{\psi}_0^i = \vec{\epsilon}_i \,, \; \vec{\epsilon}_1 = \boxed{1\,000\ldots} \quad \vec{\epsilon}_2 = \boxed{010\ldots.} \quad \text{etc}$$

On a encore les propriétés : $\boxed{\Psi_0 = I}$ $\boxed{\Psi_n = \Psi_{n-1} A^{-1}(n)}$ et Ψ_n inversible.

Propriétés de Y_n :

1. $\boxed{Y_n = Y_0 \Psi_n}$

En ettet la *solution unique* Y_n de (7) prenant la valeur Y_0 pour $n = 0$ est donnée par :

$$Y_n = Y_{n-1} A^{-1}(n) = Y_{n-2} A^{-1}(n-1) A^{-1}(n) = \ldots.$$
$$= Y_0 A^{-1}(1) A^{-1}(2) \ldots A^{-1}(n-1) A^{-1}(n)$$

De même

$\Psi_n = \Psi_0\, A^{-1}(1) \ldots A^{-1}(n-1)\, A^{-1}(n) = A^{-1}(1) \ldots A^{-1}(n)$. [car $\Psi_0 = I$]

et donc $\qquad Y_0\, \Psi_n = Y_0\, A^{-1}(1)\, A^{-2}(2) \ldots A^{-1}(n) = Y_n.$

Remarque :

$\Psi_n = A^{-1}(1)\, A^{-1}(2) \ldots A^{-1}(n-1)\, A^{-1}(n) = [A(n)\, A(n-1) \ldots A(1)] = \Phi_n^{-1}$

Cette propriété sera démontrée d'une autre façon ultérieurement.

2. On supposera dans la suite que Y_0 est inversible, ce qui implique que Y_n est inversible (comme produit de 2 matrices inversibles).

Solution de l'équation homogène (7) :

Soit $\vec{\eta}_n$ la solution de l'équation (7) prenant la valeur $\vec{\eta}_0$ pour $n = 0$. On a encore :

$$\vec{\eta}_n = \vec{\eta}_0\, A^{-1}(1) \cdot A^{-1}(2) \ldots A^{-1}(n),$$

ou encore puisque

$$A^{-1}(1)\, A^{-1}(2) \ldots A^{-1}(n) = \Psi_n = Y_0^{-1}\, Y_n$$

$$\boxed{\vec{\eta}_n = \vec{\eta}_0\, \Psi_n} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\eta}_n = \vec{\eta}_0\, Y_0^{-1}\, Y_n}$$

Fonction de Green :

Soit une matrice solution Y_n de (7) avec Y_0 inversible.

On pose $\qquad \boxed{M(s\,,n) = Y_s^{-1}\, Y_n}$

On remarque, en introduisant la matrice fondamentale $\Psi_n = Y_0^{-1}\, Y_n$, que

$$M(s\,,n) = (Y_0\, \Psi_s)^{-1}\, (Y_0\, \Psi_n) = \Psi_s^{-1}\, \Psi_n \qquad \boxed{M(s\,,n) = \Psi_s^{-1}\, \Psi_n}$$

De plus $\qquad \boxed{M(0\,,n) = \Psi_n}$

Enfin :

$$M(s, n) = Y_s^{-1}\, Y_n = \begin{cases} Y_s^{-1}\, Y_{n-1} A^{-1}(n) = M(s\,,n-1) \cdot A^{-1}(n) \\ [Y_{s-1} A^{-1}(s)]^{-1}\, Y_n = A(s)\, Y_{s-1}^{-1}\, Y_n = A(s) \cdot M(s-1\,,n) \end{cases}$$

Les deux formules de récurrence ci-dessus sont, elles aussi, en dualité. En fait elles ne sont autres que les formules semblables définies pour $\Lambda(n, s)$ à cause de la parenté très étroite qui lie $\Lambda(n, s)$ et $M(s, n)$. Cette parenté ne peut être mise en évidence qu'en reliant Φ_n à Ψ_n. Nous avons déjà vu la relation entre Φ_n et Ψ_n, mais nous allons en donner une autre justification, puisque cette relation est fondamentale.

Théorème 3 : $\boxed{\Psi_n \Phi_n = I}$ $\quad \forall n = 0, 1, 2, 3, ..$

Démonstration : 1. $\Psi_0 \Phi_0 = I \cdot I = I.$

2. On pose (A, p. 147) : $\vec{h}_n = \Psi_n \Phi_n \vec{v}$ avec $\vec{v}$ quelconque.

alors : $\vec{h}_{n-1} = \Psi_{n-1} \Phi_{n-1} \vec{v}$ et $\vec{h}_0 = \vec{v}$

or

$$\vec{h}_n = \Psi_n \Phi_n \vec{v} = [\Psi_{n-1} A^{-1}(n)] [A(n) \Phi_{n-1}] \vec{v} = \Psi_{n-1} \Phi_{n-1} \vec{v} = \vec{h}_{n-1}$$

Donc $\vec{h}_n$ est solution du système $\vec{h}_n = \vec{h}_{n-1}$ avec $\vec{h}_0 = \vec{v}$.

Or ce système admet déjà la *solution unique* $\vec{g}_n = I \cdot \vec{v}$ et donc $\vec{h}_n = \vec{g}_n = \vec{v}$. Comme $\vec{v}$ est quelconque et que l'on a aussi $\vec{h}_n = \Psi_n \Phi_n \vec{v}$, il est nécessaire que $\Psi_n \Phi_n = I$, et donc on a la relation

$$\boxed{\Psi_n = \Phi_n^{-1}} \quad \forall n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Corollaire :

Pour tout couple de matrices solutions (X_n, Y_n) de (2) et (7) respectivement, on a :

$$Y_n X_n = Y_{n-1} X_{n-1} = \dots = Y_0 X_0.$$

En effet il suffit de remplacer Y_n par $Y_0 \Psi_n$ et X_n par $\Phi_n X_0$.

De même pour tout couple de solutions $(\vec{x}_n, \vec{y}_n)$ de (2) et (7) respectivement :

$$\vec{y}_n \vec{x}_n = \vec{y}_{n-1} \vec{x}_{n-1} = \dots = \vec{y}_0 \vec{x}_0$$

Théorème 4 : $\boxed{\Lambda(n, s) = M(n, s)}$

Démonstration : Il suffit d'utiliser les formules de définition de $\Lambda(n, s)$ et de $M(s, n)$

$$\Lambda(n, s) = \Phi_n \Phi_s^{-1} \qquad M(s, n) = \Psi_s^{-1} \Psi_n$$

et d'utiliser le théorème 3. En effet :

$$M(n\,,s) = \Psi_n^{-1}\Psi_s = \Phi_n\Phi_s^{-1} = \Lambda(n\,,s).$$

Il est donc inutile de différentier les fonctions $\Lambda(n\,,s)$ et $M(n\,,s)$ et nous appellerons *fonction de Green* $\Lambda(n\,,s)$ *des deux équations duales* (2) et (7) la fonction :

$$\boxed{\Lambda(n\,,s) = \Phi_n\,\Phi_s^{-1} = \Psi_n^{-1}\Psi_s = \Phi_n\,\Psi_s}$$

4 – PROPRIETES DE LA FONCTION DE GREEN $\Lambda(n\,,s)$

1 – Les propriétés déja évoquées de Λ et M, à savoir

$$\Lambda(n\,,0) = \Phi_n = M(n\,,0) = \Psi_n^{-1}$$

ne traduisent que le fait que Φ_n et Ψ_n sont des matrices inverses.

2 – Les équations de récurrence auxquelles satisfont $\Lambda(n\,,s)$ et $M(n\,,s)$ sont les mêmes, comme on peut le vérifier, et se résument ainsi :

$$\boxed{\Lambda(n\,,s) = A(n)\,\Lambda(n-1\,,s) = \Lambda(n\,,s-1)\cdot A^{-1}(s)} \tag{8}$$

3 – $$\boxed{\Lambda^{-1}(n\,,s) = \Lambda(s\,,n)}$$

en effet $$\Lambda^{-1}(n\,,s) = \left\{\begin{aligned} &= [\Phi_n\Phi_s^{-1}]^{-1} = \Phi_s\Phi_n^{-1} \\ &= [\Psi_n^{-1}\Psi_s]^{-1} = \Psi_s^{-1}\Psi_n = \end{aligned}\right\} = \Lambda(s\,,n)$$

4 – $$\boxed{\Lambda(n\,,n) = I} \tag{9}$$

(évident d'après n'importe laquelle des 2 formules de définition)

5 – $$\boxed{\Lambda(n\,,s)\cdot\Lambda(s\,,t) = \Lambda(n\,,t)}$$

en effet
$$\Lambda(n,\,s)\cdot\Lambda(s\,,t) = \left\{\begin{aligned} &\Phi_n\Phi_s^{-1}\cdot\Phi_s\Phi_t^{-1} = \Phi_n\Phi_t^{-1} = \\ &\Psi_n^{-1}\Psi_s\cdot\Psi_s^{-1}\Psi_t = \Psi_n^{-1}\Psi_t = \end{aligned}\right\} = \Lambda(n\,,t).$$

6 – $\Lambda(n\,,0) = \Phi_n\Phi_0^{-1} = \Phi_n$

7 – $\Lambda(0\,,n) = \Psi_0^{-1}\Psi_n = \Psi_n$

$$8 - \quad \Lambda(n\,,s) = \begin{cases} \Phi_n \Phi_s^{-1} = (X_n X_0^{-1})\,(X_s X_0^{-1})^{-1} = X_n X_s^{-1} \\ \Psi_n^{-1} \Psi_s = (Y_0^{-1} Y_n)^{-1}\,(Y_0^{-1} Y_s) = Y_n^{-1} Y_s \end{cases}$$

Remarque :

Si au lieu de considérer les systèmes (2) et (7) d'équations de récurrence on considère les systèmes suivants d'équation différentielles (adjoints) :

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A(t) \cdot \vec{x}(t) \qquad (2')$$

$$\frac{d}{dt}\vec{y}(t) = -\,\vec{y}(t) \cdot A(t) \qquad (7')$$

les résultats précédents ont leurs homologues dans le cas continu. (H, p 389, th 5.4).

Par exemple, si $X(t)$ et $Y(t)$ sont des matrices solutions de (2′) et (7′) on a la propriété que $Y(t) \cdot X(t) = C$ où C est une matrice constante.

Cette propriété est en tout point l'identique de la propriété

$$Y_n X_n = Y_{n-1} X_{n-1} = \ldots = Y_0 X_0$$

On peut de même énoncer le théorème suivant :

Théorème 5 :

Soit $X(t)$ une "matrice (inversible pour tout t) solution" de l'équation (2′). Alors $Y(t) = X^{-1}(t)$ est une solution de l'équation (7′). De plus la matrice

$$\Lambda(t\,,s) = X(t) \cdot Y(s)$$

satisfait les relations :

(a) $$\Lambda(t\,,t) = I$$

(b) $$\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(t\,,s) = A(t) \cdot \Lambda(t\,,s)$$

(c) $$\frac{\partial}{\partial s}\Lambda(t\,,s) = -\,\Lambda(t\,,s) \cdot A(s).$$

La solution $\vec{x}$ de l'équation

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A(t) \cdot \vec{x}(t) + \vec{b}(t) \quad , \quad \vec{x}(s) = \vec{c}$$

est donnée par

$$\text{(d)} \qquad \vec{x}(t) = \Lambda(t\,,s)\cdot\vec{c} + \int_s^t \Lambda(t\,,r)\cdot\vec{b}(r)\,dr.$$

Dans la première partie de ce théorème, (a), (b), (c) sont en tous points équivalents aux relations (9) et (8) trouvées précédemment, si l'on assimile les matrices $X(t)$ et $Y(t)$ aux matrices Φ_n et Ψ_n respectivement et la fonction $\Lambda(t\,,s)$ à la fonction de Green définie plus haut par $\Lambda(n\,,s)$ (*)

La deuxième partie de ce théorème a aussi son équivalent dans le cas discret (cf formule 13) et nous allons retrouver l'homologue de la formule (d) en résolvant l'*équation non homogène* (1).

5 – EQUATION NON HOMOGENE

On va voir de différentes façons que les fonctions de Green sont utilisables pour résoudre l'équation non homogène (1) ou son équation "adjointe" (10) ci-dessous :

$$\vec{u}_n = A(n)\,\vec{u}_{n-1} + \vec{b}_n \tag{1}$$

$$\vec{v}_n = \vec{v}_{n-1}\,A^{-1}(n) + \vec{b}_n{}' \tag{10}$$

1ère méthode

Les résolutions des équations (1) et (10) sont menées parallèlement ci-dessous :

Soit X_n une matrice solution de l'équation homogène associée à (1) :	Soit Y_n une matrice solution de l'équation homogène associée à (10) :
$\vec{x}_n = A(n)\,\vec{x}_{n-1} \qquad (n = 1\,,2\,,\ldots)$	$\vec{y}_n = \vec{y}_{n-1}\cdot A^{-1}(n) \quad (n = 1\,,2\,,\ldots)$
On recherche la solution $\vec{u}_n$ de (1) du type : $\vec{u}_n = X_n\,\vec{\rho}_n$ qui prend pour $n = 0$ une valeur donnée $\vec{u}_0$. Le vecteur colonne $\vec{\rho}_n$ est donc à déterminer.	On recherche la solution $\vec{v}_n$ de (10) du type : $\vec{v}_n = \vec{\sigma}_n\,Y_n$ qui prend pour $n = 0$ une valeur donnée $\vec{v}_0$. Le vecteur ligne $\vec{\sigma}_n$ est donc à déterminer.
On a d'abord $\vec{\rho}_0 = X_0^{-1}\,\vec{u}_0$	On a d'abord $\vec{\sigma}_0 = \vec{v}_0\,Y_0^{-1}$

(*) Cela est plus apparent si l'on assimile $A(t)$ à $[A(n) - I]$ et si l'on écrit les formules (8) sous la forme :

$$\left.\begin{aligned} \Lambda(n\,,s) - \Lambda(n-1\,,s) &= [A(n) - I]\,\Lambda(n-1\,,s) \\ \Lambda(n\,,s) - \Lambda(n\,,s-1) &= -\Lambda(n\,,s)\,.\,[A(s) - I] \end{aligned}\right\} \tag{8a}$$

On reporte la valeur de $\vec{u}_n$ dans l'équation (1)

$$X_n \vec{\rho}_n = A(n)\, X_{n-1} \vec{\rho}_{n-1} + \vec{b}_n$$

Or on sait que $X_n = A(n) X_{n-1}$ de sorte que l'on obtient :

$$X_n\, [\vec{\rho}_n - \vec{\rho}_{n-1}] = \vec{b}_n$$

ou encore :

$$\Delta \vec{\rho}_n = X_n^{-1} \vec{b}_n$$

On reporte la valeur de $\vec{v}_n$ dans l'équation (10)

$$\vec{\sigma}_n Y_n = \vec{\sigma}_{n-1} Y_{n-1}\, A^{-1}(n) + \vec{b}'_n$$

Or on sait que $Y_n = Y_{n-1} A^{-1}(n)$ de sorte que l'on obtient :

$$[\vec{\sigma}_n - \vec{\sigma}_{n-1}]\, Y_n = \vec{b}'_n$$

ou encore :

$$\Delta \vec{\sigma}_n = \vec{b}'_n Y_n^{-1}$$

en posant $\Delta \vec{w}_n = \vec{w}_n - \vec{w}_{n-1}$

Or l'équation $\Delta \vec{w}_n = \vec{\alpha}_n$ a la solution évidente :

$$\vec{w}_n = \vec{w}_0 + \sum_{i=1}^{n} \vec{\alpha}_i \qquad \text{d'où}$$

$$\vec{\rho}_n = \vec{\rho}_0 + \sum_{s=1}^{n} X_s^{-1} \cdot \vec{b}_s$$

d'où l'on obtient, pour $n = 1, 2, 3 \ldots$:

$$\vec{u}_n = X_n \vec{\rho}_0 + \sum_{s=1}^{n} X_n X_s^{-1} \vec{b}_s$$

ou, en remplaçant $\vec{\rho}_0$ par sa valeur et en remarquant que $X_n X_s^{-1} = \Lambda(n, s)$

$$\boxed{\vec{u}_n = X_n X_0^{-1}\, \vec{u}_0 + \sum_{s=1}^{n} \Lambda(n, s) \cdot \vec{b}_s} \qquad (11)$$

ou $$\boxed{\vec{u}_n = \Lambda(n, 0)\, \vec{u}_0 + \sum_{s=1}^{n} \Lambda(n, s)\, \vec{b}_s} \qquad (13)$$

$(n = 1, 2, 3 \ldots)$

On remarque que le premier terme $\Phi_n \vec{u}_0$ de (13) est solution de l'équation homogène (2).

Enfin comme on peut écrire :

$$\Lambda(n, s) = \Lambda(n, 0) \cdot \Lambda(0, s)$$

on a encore :

$$\boxed{\vec{u}_n = \Lambda(n, 0) \left[\vec{u}_0 + \sum_{s=1}^{n} \Lambda(0, s)\, \vec{b}_s \right]} \qquad (15)$$

(cf H, p.130)

ou enfin :

$$\boxed{\vec{u}_n = \Phi_n \left[\vec{u}_0 + \sum_{s=1}^{n} \Psi_s \vec{b}_s \right]} \qquad (17)$$

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_0 + \sum_{s=1}^{n} \vec{b}'_s Y_s^{-1}$$

d'où l'on obtient, pour $n = 1, 2, 3 \ldots$:

$$\vec{v}_n = \vec{\sigma}_0 Y_n + \sum_{s=1}^{n} \vec{b}'_s Y_s^{-1} Y_n$$

ou, en remplaçant $\vec{\sigma}_0$ par sa valeur et en remarquant que $Y_s^{-1} Y_n = \Lambda(s, n)$

$$\boxed{\vec{v}_n = \vec{v}_0\, Y_0^{-1} Y_n + \sum_{s=1}^{n} \vec{b}'_s\, \Lambda(s, n)} \qquad (12)$$

ou $$\boxed{\vec{v}_n = \vec{v}_0\, \Lambda(0, n) + \sum_{s=1}^{n} \vec{b}'_s\, \Lambda(s, n)} \qquad (14)$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$

On remarque que le premier terme $\vec{v}_0 \Psi_n$ de (14) est solution de l'équation homogène (7).

Enfin comme on peut écrire :

$$\Lambda(s, n) = \Lambda(s, 0) \cdot \Lambda(0, n)$$

on a encore :

$$\boxed{\vec{v}_n = \left[\vec{v}_0 + \sum_{s=1}^{n} \vec{b}'_s\, \Lambda(s, 0) \right] \Lambda(0, n)} \qquad (16)$$

ou enfin :

$$\boxed{\vec{v}_n = \left[\vec{v}_0 + \sum_{s=1}^{n} \vec{b}'_s\, \Phi_s \right] \Psi_n} \qquad (18)$$

La formule (13) est à rapprocher de la formule (d) du théorème précédent donné dans le cas où le temps varie continuement et non plus de façon discrète.

Théorème 6 :

Les solutions données ci-dessous sont les solutions *uniques* de (1) et (10) respectivement.

Démonstration : leur unicité est assurée par le théorème 1.

2ᵉ méthode :

Nous ne l'appliquerons qu'à l'équation (1) ; la démonstration est identique pour l'équation (10).

Introduisons a priori une matrice $L_n(s)$ de format $(r \times r)$; on imposera ultérieurement des restrictions à cette matrice formée de r^2 fonctions de s.

On prémultiplie par $L_n(s)$ les deux membres de l'équation (1) :

$$\vec{x}_s = A(s)\,\vec{x}_{s-1} + \vec{b}_s$$

et on somme par rapport à s (de $s = 1$ à $s = n$) :

$$\sum_{s=1}^{n} L_n(s) \cdot \vec{x}_s = \sum_{s=1}^{n} L_n(s)\,A(s)\,\vec{x}_{s-1} + \sum_{s=1}^{n} L_n(s) \cdot \vec{b}_s \tag{19}$$

Le membre de gauche de (19) peut s'écrire :

$$\sum_{s=1}^{n} L_n(s)\,\vec{x}_s = L_n(n)\,\vec{x}_n + \sum_{s=1}^{n-1} L_n(s)\,\vec{x}_s$$

$$= L_n(n)\,\vec{x}_n + \sum_{s=1}^{n} L_n(s-1)\,\vec{x}_{s-1} - L_n(0) \cdot \vec{x}_0$$

En reportant dans (19) on obtient :

$$\boxed{L_n(n) \cdot \vec{x}_n = L_n(0)\,\vec{x}_0 + \sum_{s=1}^{n} [L_n(s) \cdot A(s) - L_n(s-1)]\,\vec{x}_{s-1} + \sum_{s=1}^{n} L_n(s) \cdot \vec{b}_s} \tag{20}$$

On voit que l'on obtiendra $\vec{x}_n$ directement si le terme entre crochets est nul par une définition appropriée des fonctions $L_n(s)$. L'obtention de $\vec{x}_n$ sera encore simplifiée si l'on impose à $L_n(n)$ d'être la matrice unité I.

On impose donc aux fonctions $L_n(s)$ – définies pour n fixé, que nous prendrons égal à la date finale N dans la suite – les deux conditions :

$$L_n(s-1) = L_n(s) \cdot A(s) \text{ (*)}$$
$$L_n(n) = \mathrm{I}$$

Or les équations (8) et (9) reproduites ci-dessous :

$$\Lambda(n\,,s-1) = \Lambda(n\,,s) \cdot A(s) \qquad \text{(équation adjointe)} \tag{8}$$

$$\Lambda(n\,,n) = \mathrm{I} \tag{9}$$

et le théorème 1 impliquent l'identité de $L_n(s)$ et $\Lambda(n\,,s)$:

$$\boxed{L_n(s) = \Lambda(n\,,s)} \tag{21}$$

Dans ces conditions, l'équation (20) s'écrit :

$$\boxed{\vec{x}_n = L_n(0)\,\vec{x}_0 + \sum_{s=1}^{n} L_n(s)\,\vec{b}_s} \tag{22}$$

l'équation (22) reproduit alors l'équation (13) donnée par la première méthode (**).

6 – MULTIPLICATEURS

Nous aurons dans la suite (soit en contrôle optimal, soit en programmation dynamique) à rechercher à optimiser une fonction du type $\vec{\lambda}_n\,\vec{x}_n$ pour n fixé (en général pour $n = N$, date finale). Les équations (13) ou (22) donnent alors :

$$\vec{\lambda}_n \vec{x}_n = [\vec{\lambda}_n \cdot \Lambda(n\,,0)]\,\vec{x}_0 + \sum_{s=1}^{n} \vec{\lambda}_n\ \Lambda(n\,,s)\,\vec{b}_s \qquad (n = 1\,,2\,,\ldots) \tag{23}$$

(*) Cette condition peut s'écrire aussi, pour un rapprochement avec le cas continu :

$$L_n(s) - L_n(s-1) = -L_n(s) \cdot [A(s) - I]$$

(**) L'autre forme de l'équation (8) s'obtient en reportant la solution (22) dans l'équation (1) ; comme $\vec{x}_0$ et $\vec{b}_s$ sont quelconques, on obtient :

$$L_n(s) = A(n) \cdot L_{n-1}(s) \quad \text{ou} \quad L_n(s) - L_{n-1}(s) = [A(n) - I] \cdot L_{n-1}(s)$$

L'expression ci-dessus sera très simplifiée si nous imposons aux vecteurs $\vec{\lambda}_n$ de satisfaire à l'équation de récurrence suivante :

$$\boxed{\vec{\lambda}_s = \vec{\lambda}_n \cdot \Lambda(n\ ,s)} \qquad s = 1\ ,2\ ,3\ ,\ldots n \tag{24}$$

La formule ci-dessus est une formule de *définition* des multiplicateurs

$$\vec{\lambda}_1\ ,\vec{\lambda}_2\ ,\vec{\lambda}_3 \ldots \vec{\lambda}_n \ldots$$

On voit que la succession des $\vec{\lambda}_s$ est *connue* dès que l'on s'est donné $\vec{\lambda}_n$ (ou $\vec{\lambda}_N$ si N est une étape finale de l'évolution d'un processus).

L'équation (23) s'écrit dans ces conditions :

$$\boxed{\vec{\lambda}_n\vec{x}_n = \vec{\lambda}_0\vec{x}_0 + \sum_{s=1}^{n}\vec{\lambda}_s \cdot \vec{b}_s \qquad (n = 1\ ,2\ ,3 \ldots)} \tag{25}$$

en posant encore $\vec{\lambda}_0 = \vec{\lambda}_n\ \Lambda(n\ ,0)$

La formule de récurrence (24) définissant les multiplicateurs $\vec{\lambda}_s$ permet de déduire, par prémultiplication par $\vec{\lambda}_n$ des deux membres de l'équation (8) :

$$\Lambda(n\ ,s-1) = \Lambda(n\ ,s) \cdot A(s)$$

$$\boxed{\vec{\lambda}_{s-1} = \vec{\lambda}_s \cdot A(s)} \quad (26) \qquad \text{pour} \quad s = 1\ ,2\ ,3\ ,4 \ldots$$

On remarque donc que $\vec{\lambda}_n$ satisfait *exactement* l'équation (6) *adjointe* de l'équation homogène (2) associée à l'équation (1).

Nous appellerons les multiplicateurs $\vec{\lambda}_n$ "variables duales" des variables inconnues $\vec{x}_n$ de l'équation homogène (2). La raison en est que les variables $\vec{\lambda}_n$ satisfont l'équation *adjointe* de l'équation homogène associée à l'équation (1) dont les variables $\vec{x}_n$ sont solutions et que nous avons déjà appelée cette équation adjointe "l'équation duale" [ainsi $\vec{\lambda}_n = \vec{y}_n$ et on retrouve donc dans le cas homogène où $b_s = 0, \forall s$: $\vec{\lambda}_n\vec{x}_n = \vec{y}_n\vec{x}_n = \vec{y}_0\vec{x}_0 = \vec{\lambda}_0\vec{x}_0$].Mais cette dualité sera précisée ultérieurement sur des exemples où les multiplicateurs interviendront à la fois dans la formulation par le "contrôle optimal discret" et la programmation dynamique. De plus, comme ces exemples économiques (relativement généraux) ont été choisis de façon à pouvoir être posés sous forme de programmes linéaires, l'apparition des variables $\vec{\lambda}_n$ comme "variables duales" associées aux contraintes de ces exemples mettra encore plus en évidence ce caractère de dualité.

Remarque :

La procédure suivie précédemment s'applique aussi au cas où le temps varie continuement et où l'on remplace les équations linéaires de récurrence (1) et (2) par les équations différentielles linéaires suivantes :

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{b}(t) \tag{1'}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\,\vec{x}(t). \tag{2'}$$

Nous avons déjà vu que les fonctions de Green $\Lambda(t\,,s)$ satisfaisaient aux conditions (a),(b),(c),(d) dont la parenté avec le cas discret a été mise en évidence. De plus la 2[e] méthode de résolution de l'équation (1) peut être retranscrite mot pour mot pour résoudre l'équation (1') en introduisant des fonctions matricielles $L_t(s)$ qui viennent prémultiplier les deux membres de (1') ; l'intégration par rapport à s donne :

$$\int_{s=0}^{s=t} L_t(s)\,\dot{\vec{x}}(s)\,ds = \int_{s=0}^{s=t} L_t(s)\,A(s)\,\vec{x}(s)\,ds + \int_{s=0}^{s=t} L_t(s)\,\vec{b}(s)\,ds \tag{19'}$$

Le premier membre de (19') s'intègre par parties :

$$\int_{s=0}^{s=t} L_t(s)\,\dot{\vec{x}}(s)\,ds = L_t(t)\,\vec{x}(t) - L_t(0)\,.\,\vec{x}(0) - \int_{s=0}^{s=t} \frac{d}{ds} L_t(s)\,.\,\vec{x}(s)\,ds$$

Le report dans (19') donne :

$$\boxed{L_t(t)\,\vec{x}(t) = L_t(0)\,\vec{x}(0) + \int_{s=0}^{s=t} \left[\frac{d}{ds} L_t(s) + L_t(s)\,A(s)\right] \vec{x}(s)\,ds + \int_{s=0}^{s=t} L_t(s)\,\vec{b}(s)\,ds} \tag{20'}$$

L'annulation du crochet dans (20') simplifie la résolution de (1') de sorte que si l'on impose

$$\boxed{\frac{d}{ds} L_t(s) = -\,L_t(s)\cdot A(s)}$$

et

$$\boxed{L_t(t) = \mathrm{I}}$$

l'équation (20') devient :

$$\boxed{\vec{x}(t) = L_t(0)\,\vec{x}(0) + \int_{s=0}^{s=t} L_t(s)\,\vec{b}(s)\,ds} \tag{22'}$$

Le rapprochement des 3 équations précédentes avec (c), (a), (d) respectivement montre, comme dans le cas discret, que $L_t(s) = \Lambda(t, s)$. (*)

On peut aussi définir des *multiplicateurs* $\vec{\lambda}(s)$ par l'équation de récurrence :

$$\boxed{\vec{\lambda}(s) = \vec{\lambda}(t) \cdot L_t(s) = \vec{\lambda}(t) \cdot \Lambda(t, s)} \tag{24'}$$

La prémultiplication par $\vec{\lambda}(t)$ des 2 membres de l'équation (c) donne :

$$\frac{\partial}{\partial s}[\vec{\lambda}(t)\,\Lambda(t, s)] = -\vec{\lambda}(t).\Lambda(t, s) \cdot A(s) \Rightarrow \boxed{\dot{\vec{\lambda}}(s) = -\vec{\lambda}(s) \cdot A(s)} \tag{26'}$$

L'équation (26′) est l'équation *adjointe* (7′) de l'équation homogène (2′) dont $\vec{x}(t)$ est solution et $\vec{\lambda}(t)$ est une "fonction duale" de $\vec{x}(t)$.

Nous déduirons le principe du maximum discret des résultats précédents. On peut exactement de la même façon – nous ne le ferons pas – en déduire la formulation du principe du maximum de Pontryagin dans le cas continu.

(*) L'équation (b) s'obtient en reportant la solution (22′) dans l'équation (1′) ; comme $\vec{x}(0)$ et $\vec{b}(s)$ sont quelconques, on obtient :

$$\frac{d}{dt} L_t(s) = A(t) \cdot L_t(s)$$

II – PROCESSUS A ÉTAPES

1 – DEFINITION D'UN PROCESSUS A ETAPES

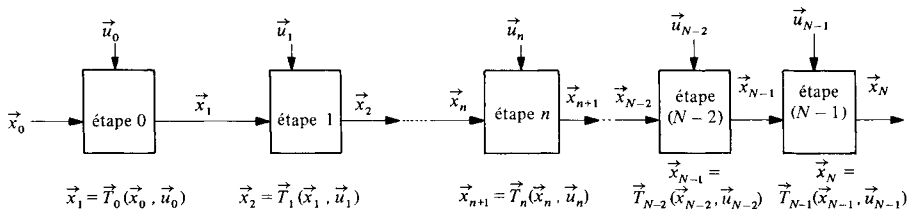
1.1. Etat du système, contrôle et équation de transition.

Dans tout ce qui suit, on envisagera l'évolution, dans un processus où le temps varie par étapes $n = 0, 1, 2, \ldots N$, d'un système caractérisé par un ensemble de r variables d'état et soumis à un ensemble de q variables de contrôle. L'évolution sera déterminée par des choix à chaque étape des variables de contrôle, ces choix étant motivés dans le sens de l'optimisation d'une fonction objectif. Il est possible aussi que des contraintes physiques ou économiques agissent à la fois sur les variables d'état et de contrôle du système. Il est clair par ailleurs que sous l'effet du choix à l'étape n des variables de contrôle le système va passer à l'étape $(n + 1)$ dans un état généralement déterminé par l'état du système à l'étape n et par le choix des variables de contrôle à cette même étape n.

Si nous notons $\vec{x}_n$ (vecteur colonne à r composantes) l'état du système à l'étape n et $\vec{u}_n$ (vecteur colonne à $q(n)$ composantes) l'ensemble des variables de contrôle disponibles à l'étape n, la *transition* du système de l'état $\vec{x}_n$ à l'état $\vec{x}_{n+1}$ sous l'effet des variables de contrôle $\vec{u}_n$ est définie par une certaine fonction de transition $\vec{T}_n$:

$$\boxed{\vec{x}_{n+1} = \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)} \tag{1}$$

On remarque que l'indice n dans l'écriture $\vec{T}_n$ indique que les fonctions de transition n'ont aucune raison d'être les mêmes pour chacune des étapes du processus [on appelle quelquefois "équations de comportement" les équations (1)].



Le processus est représenté par le schéma ci-dessus traduisant son évolution : si le système commence le processus dans l'état $\vec{x}_0$ (*fixé*) à l'étape initiale 0, il le quittera à l'étape finale N dans l'état $\vec{x}_N$ sous l'effet de la succession de contrôles $\vec{u}_0$, $\vec{u}_1$, ..., $\vec{u}_n$, ..., $\vec{u}_{N-1}$. On remarque que l'on ne définit pas de contrôle $\vec{u}_N$ car ce contrôle n'aurait d'action sur le système qu'à l'étape $(N+1)$; or nous avons supposé que l'étape *finale* était précisément N.

1.2. Fonction objectif

Généralement, deux types de fonction objectif se rencontrent dans les problèmes économiques lorsqu'un coût ou un revenu est associé à l'évolution du processus, suivant que ce coût ou ce revenu est imputé seulement à la fin de l'évolution du processus (donc à l'étape N) – et il sera alors une fonction $\varphi(\vec{x}_N)$ de l'état final – ou que ce coût ou ce revenu apparait à chaque étape n sous la forme d'une fonction $R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)$ des variables $\vec{x}_n$ et $\vec{u}_n$ associées à cette étape et l'objectif global sera alors $\sum_{n=0}^{n=N-1} R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)$.

Nous avons choisi la lettre R_n comme initiale de revenu de sorte que dans tout ce qui suit nous allons *maximiser* la fonction objectif, obtenant ainsi le principe du MAXIMUM. Il est clair qu'une minimisation d'un coût aurait mené exactement de la même façon au principe du MINIMUM.

1.3. Contraintes du système

On trouve dans la littérature des contraintes de toutes sortes, sur les variables d'état et les variables de contrôle.

a) *Conditions sur les seules variables de contrôle* : elles sont du type

$$\boxed{\vec{U}_n(\vec{u}_n) \leqslant 0}$$

où $\vec{U}_n$ est un vecteur à m composantes ; ces contraintes définissent un domaine $\mathbf{K}_n$ à chaque étape et peuvent se mettre sous la forme

$$\vec{u}_n \in \mathrm{K}_n = \{\vec{u}_n \mid U_n^j(\vec{u}_n) \leqslant 0 \,, j = 1 \ldots m\}\,.$$

Ces contraintes se rencontrent pratiquement dans tous les problèmes économiques.

b) Conditions sur les variables d'état :

b_1) : conditions sur le seul état initial $\vec{x}_0$ du type $\vec{G}(\vec{x}_0) = 0$ ($\vec{G}$ à k composantes) (par exemple : $\vec{x}_0 - \vec{c} = 0$).

b_2): conditions sur le seul état final $\vec{x}_N$ du type $\vec{V}(\vec{x}_N) = 0$ ($\vec{V}$ à l composantes)

b_3): conditions sur *toutes* les variables d'état $\vec{x}_n$ du type $\vec{W}_n(\vec{x}_n) = 0$

c) Conditions mixtes du type :

$$\vec{Q}_n(\vec{x}_n \,, \vec{u}_n) \leqslant 0 \qquad (\vec{Q}_n \text{ à } K(n) \text{ composantes})$$

2 – FORMULATION DU PROBLEME

Suivant que l'on choisit l'un ou l'autre des deux types de fonction objectif, le problème se posera sous la formulation I ou II, mais on va voir que II peut se mettre sous la forme I. Généralement on retient les contraintes a), b_1), b_2), c), et dans les problèmes pratiques, le plus souvent l'état initial $\vec{x}_0$ est donné.

Nous supprimerons les conditions mixtes c) et étudierons à part l'effet de leur introduction sur les conditions d'optimalité.

<table>
<tr><td>I : $\mathrm{Max}_{\vec{u}_0\vec{u}_1\ldots\vec{u}_{N-1}}\ \varphi(\vec{x}_N)$</td><td>II : $\mathrm{Max}_{\vec{u}_0\vec{u}_1\ldots\vec{u}_{N-1}}\ \sum_{n=1}^{N-1} R_n(\vec{x}_n\,, \vec{u}_n)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\vec{x}_{n+1} = \vec{T}_n(\vec{x}_n\,, \vec{u}_n)\ [n = 0\,, 1\,, \ldots N-1]$ (1)
$U_n^j(\vec{u}_n) \leqslant 0 \ \begin{bmatrix} n = 0\,, 1\,, \ldots N-1] \\ j = 1\,, 2\,, \ldots m \end{bmatrix}$ (2)
$G^i(\vec{x}_0) = x_0^i - c^i = 0\ [i = 1\,, 2\,, \ldots r]$ (3)
$V^i(\vec{x}_N) = 0\ [i = 1\,, 2\,, \ldots l]$ (4)</td></tr>
</table>

Remarque :

La formulation II peut se ramener au type I de la façon suivante : on introduit $(N + 1)$ variables définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1}^0 = \sum_{k=0}^{n} R_k(\vec{x}_k, \vec{u}_k), \quad \text{pour } n = 0, 1, \ldots N-1 \\ x_0^0 = 0 \end{cases}$$

il est clair que ceci revient à poser

$$x_{n+1}^0 = x_n^0 + R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) = T_n^0(x_n^0, \vec{x}_n, \vec{u}_n)$$

Dans ces conditions :

$$\sum_{n=0}^{N-1} R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) = x_N^0,$$

de sorte que le problème II s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Max}_{\vec{u}_0\vec{u}_1\ldots\vec{u}_{N-1}}\ x_N^0 \\ \begin{cases} \vec{x}_{n+1} = \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) \\ x_{n+1}^0 = T_n^0(x_n^0, \vec{x}_n, \vec{u}_n) \end{cases} \\ \text{avec les conditions (2) (3) (4)} \\ \text{et } x_0^0 = 0 \end{array}} \qquad \begin{array}{r} (1) \\ (1^\circ) \end{array}$$

Il est alors évident que l'on est ramené à un problème du type I si nous définissons l'état du système à l'étape n par un vecteur $\vec{\xi}_n$ à $(r + 1)$ composantes par

$$\vec{\xi}_n = \begin{bmatrix} x_n^0 \\ \vec{x}_n \end{bmatrix}$$

puisque la fonction économique x_N^0 est manifestement une fonction de l'état final $\vec{\xi}_N$ et que les conditions (1) et (1°) ci-dessus peuvent se regrouper à l'aide d'un vecteur de transition $\vec{\Theta}_n(\vec{\xi}_n, \vec{u}_n)$ défini par :

$$\vec{\xi}_{n+1} = \vec{\Theta}_n(\vec{\xi}_n, \vec{u}_n).$$

et les conditions aux limites

$$\vec{\xi}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vec{c} \end{bmatrix}$$

3 – CONDITIONS NECESSAIRES

Conditions nécessaires d'optimalité

L'obtention des conditions d'optimalité peut s'effectuer de deux façons : à l'aide des fonctions de Green d'une part et à l'aide de la fonction de Lagrange d'autre part ; la similitude des formules trouvées permettra d'*identifier* les multiplicateurs de Green aux multiplicateurs de Lagrange dont on sait l'interprétation économique comme variables duales dans le sens de coût marginal associé au blocage de chacune des contraintes du type (1). Nous ne considérons dans ce qui suit que la formulation I du problème et nous admettrons que les fonctions $\vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)$ sont continuement différentiables.

3.1. Conditions nécessaires : 1ere méthode

1. Approche variationnelle.

Supposons que le système soit, à $n = 0$, dans l'état *donné* $\vec{x}_0^*$ [compatible avec les contraintes (3)]

Supposons que nous choisissions une politique *donnée* $(\vec{u}_0^*, \vec{u}_1^* \ldots \vec{u}_{N-1}^*)$. Le système est alors conduit dans l'état $\vec{x}_N^*$ par une "trajectoire"

$$(\vec{x}_0^*, \vec{x}_1^* \ldots \vec{x}_n^* \ldots \vec{x}_N^*)$$

et la valeur de l'objectif est $\varphi(\vec{x}_N^*)$. Pour rechercher à quelle condition la valeur $\varphi(\vec{x}_N^*)$ est maximale on effectue une *petite* variation

$$(\delta\vec{u}_0^*, \delta\vec{u}_1^*, \delta\vec{u}_2^* \ldots \delta\vec{u}_{N-1}^*).$$

Par *petite* variation, on entend que les scalaires $|\delta u_n^{*i}|$ sont bornés par une valeur très petite $\epsilon > 0$.

On déduit du système (1) que :

$$\boxed{\delta\vec{x}_{n+1} = \sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\partial\vec{T}_n}{\partial x_n^i}\right)\cdot\delta x_n^i + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial\vec{T}_n}{\partial u_n^j}\right)\cdot\delta u_n^j + O(\epsilon) \quad (n = 0, 1, \ldots, N-1)} \tag{5}$$

Dans l'équation ci-dessus les dérivées partielles de $\vec{T}_n$ sont évaluées en $(\vec{x}_n^*, \vec{u}_n^*)$.

Nous devons étudier l'évolution de la fonction économique $\varphi(\vec{x}_N)$ attachée à la variation $\{\delta\vec{u}_n\}$:

$$\delta\varphi(\vec{x}_N) = \sum_{j=1}^{r}\frac{\partial\varphi}{\partial x_N^j}\cdot\delta x_N^j + O(\epsilon) \tag{6}$$

Les contraintes (3) et (4) imposent des conditions sur $\delta\vec{x}_0$ et sur $\delta\vec{x}_N$; en effet il faut avoir

$$\vec{G}(\vec{x}_0 + \delta\vec{x}_0) = \vec{G}(\vec{x}_0) = 0 \quad \text{et donc} \quad \vec{G}(\vec{x}_0 + \delta\vec{x}_0) - \vec{G}(\vec{x}_0) = 0 \quad (7)$$

$$\vec{V}(\vec{x}_N + \delta\vec{x}_N) = \vec{V}(\vec{x}_N) = 0 \quad \text{et donc} \quad \vec{V}(\vec{x}_N + \delta\vec{x}_N) - \vec{V}(\vec{x}_N) = 0 \quad (8)$$

ou enfin en utilisant les développements des membres de gauche de (7) et (8) :

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial\vec{G}}{\partial x_0^i} \cdot \delta x_0^i = \frac{\partial\vec{G}}{\partial\vec{x}_0} \cdot \delta\vec{x}_0 = 0 \quad (\text{ici } \delta\vec{x}_0 = 0) \qquad (9)$$

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\partial\vec{V}}{\partial x_N^j} \cdot \delta x_N^j = \frac{\partial\vec{V}}{\partial\vec{x}_N} \cdot \delta\vec{x}_N = 0 \qquad (10)$$

Nous recherchons donc à quelles conditions $\delta\varphi(\vec{x}_N)$ – donné par (6) – est *négatif* pour toute variation $\{\delta\vec{u}_n\}$ satisfaisant aux conditions (5), (9), (10) ; les contraintes (2) seront prises en considération à la fin car elles ne jouent que dans la mesure où certaines d'entre elles sont saturées par la politique $(\vec{u}_0^*\vec{u}_1^* \ldots \vec{u}_{N-1}^*)$ à laquelle nous appliquons une perturbation.

Or il faudrait que l'équation (10) s'exprime comme liaison entre les variables $\delta\vec{u}_0$, $\delta\vec{u}_1 \ldots \delta\vec{u}_{N-1}$. Ceci est possible par l'intermédiaire de l'équation (5) qui est une équation de récurrence linéaire entre les variables $\delta\vec{x}_n$ du type (1) rencontré au paragraphe précédent. Elle s'écrit en effet :

$$\delta x_n^i = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial T_{n-1}^i}{\partial x_{n-1}^j} \cdot \delta x_{n-1}^j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial T_{n-1}^i}{\partial u_{n-1}^j} \cdot \delta u_{n-1}^j + 0(\epsilon) =$$

$$= \vec{A}_i(n) \cdot \delta\vec{x}_{n-1} + b_n^i + 0(\epsilon)$$

$$(n = 1\ , 2\ , 3\ , \ldots N)$$

en posant

$$a_{ij}(n) = \frac{\partial T_{n-1}^i}{\partial x_{n-1}^j} \quad \text{et} \quad b_n^i = \frac{\partial T_{n-1}^i}{\partial\vec{u}_{n-1}} \cdot \delta\vec{u}_{n-1}$$

$$\left[A(n) = \frac{\partial\vec{T}_{n-1}}{\partial\vec{x}_{n-1}} \right]$$

Nous appellerons $\Lambda(n\ , s)$ sa fonction de Green et $\vec{\lambda}_n$ ses multiplicateurs (leur existence est assurée par les résultats du paragraphe précédent).

La condition (26) précédente sur les multiplicateurs s'écrit :

$$\vec{\lambda}_{n-1} = \vec{\lambda}_n\, A(n) = \vec{\lambda}_n \cdot \frac{\partial \vec{T}_{n-1}}{\partial \vec{x}_{n-1}} \quad (n = 1\,,2\,,3\,,\ldots N)$$

ou encore $$\boxed{\lambda^j_{n-1} = \vec{\lambda}_n \cdot \frac{\partial \vec{T}_{n-1}}{\partial x^j_{n-1}}} \quad (n = 1\,,2\,,3\,,\ldots N) \tag{11}$$

(les $\vec{\lambda}_n$ sont complètement déterminés dès que l'on connait la valeur de $\vec{\lambda}_N$) et l'équation (25) s'écrit alors :

$$\boxed{\vec{\lambda}_n \cdot \delta\vec{x}_n = \overbrace{\vec{\lambda}_0 \cdot \delta\vec{x}_0}^{=\,0} + \sum_{s=1}^{n} \vec{\lambda}_s \cdot \frac{\partial \vec{T}_{s-1}}{\partial \vec{u}_{s-1}} \cdot \delta\vec{u}_{s-1} + 0(\epsilon)} \quad (n = 1\,,2\,,\ldots N) \tag{12}$$

qui s'écrit en particulier pour l'état final N :

$$\boxed{\vec{\lambda}_N \cdot \delta\vec{x}_N = \underbrace{\vec{\lambda}_0 \cdot \delta\vec{x}_0}_{=\,0} + \sum_{s=1}^{N} \vec{\lambda}_s \cdot \frac{\partial \vec{T}_{s-1}}{\partial \vec{u}_{s-1}} \cdot \delta\vec{u}_{s-1} + 0(\epsilon)} \tag{13}$$

dans laquelle $\vec{\lambda}_N$ est encore à fixer arbitrairement (cf § précédent).

Or pour exprimer (10) $\left[\text{où intervient le terme } \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{x}_N} \cdot \delta\vec{x}_N\right]$ en fonction des variables $\delta\vec{u}_n$ à l'aide de (13) [où intervient le terme $\vec{\lambda}_N \cdot \delta\vec{x}_N$] on va poser :

$$\vec{\lambda}_N = \vec{\alpha}_N - \vec{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{x}_N} \tag{14}$$

ce qui implique

$$(\vec{\lambda}_N - \vec{\alpha}_N)\; \delta\vec{x}_N = -\,\vec{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{x}_N}\, \delta\vec{x}_N .$$

et ceci doit être nécessairement nul d'après (10) ; d'où

$$\boxed{\vec{\lambda}_N\, \delta\vec{x}_N = \vec{\alpha}_N \cdot \delta\vec{x}_N}$$

Pour exprimer $\delta\varphi(\vec{x}_N)$ en fonction des seules variations $\{\delta\vec{u}_n\}$ il sera commode de prendre $\vec{\alpha}_N = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_N}$, ce qui implique

$$\boxed{\vec{\lambda}_N \cdot \delta\vec{x}_N = \delta\varphi(\vec{x}_N)} \qquad (15)$$

d'où

$$\boxed{\delta\varphi(\vec{x}_N) = \sum_{s=1}^{N} \vec{\lambda}_s \frac{\partial \vec{T}_{s-1}}{\partial \vec{u}_{s-1}} \delta\vec{u}_{s-1}} \qquad (16)$$

2. Remarque.

Si la contrainte sur l'état initial était du type $\vec{G}(\vec{x}_0) = 0$, $\delta\vec{x}_0$ n'étant plus obligatoirement nul, on aurait eu à poser :

$$\boxed{\vec{\lambda}_0 = \vec{\nu} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{x}_0}} \quad \text{(définissant } \vec{\nu}\text{)} \qquad (17)$$

pour avoir $\vec{\lambda}_0 \cdot \delta\vec{x}_0 = 0$ dans l'expression (13) ce qui revient à poser dans le cas présent $\boxed{\vec{\lambda}_0 = \vec{\nu}}$.

Les définitions ci-dessus (14) et (17) reviennent donc à poser :

$$(18) \quad \boxed{\vec{\lambda}_N = \frac{\partial\varphi}{\partial\vec{x}_N} - \vec{\mu} \cdot \frac{\partial\vec{V}}{\partial\vec{x}_N}} \quad \text{ce qui implique} \quad \boxed{\vec{\lambda}_N \cdot \delta\vec{x}_N = \delta\varphi(\vec{x}_N)} \quad (19)$$

$$(17) \quad \boxed{\vec{\lambda}_0 = \vec{\nu} \cdot \frac{\partial\vec{G}}{\partial\vec{x}_0}} \quad \text{ce qui implique} \quad \boxed{\vec{\lambda}_0 \cdot \delta\vec{x}_0 = 0} \quad (20)$$

Les deux conditions (17) et (18) sont des conditions aux limites sur les multiplicateurs dites *conditions de transversalité.* Dans le cas qui nous occupe la condition (20) sur $\vec{\lambda}_0$ disparait puisqu'elle est automatiquequement satisfaite pour tout $\vec{\lambda}_0$. Par contre si $\vec{x}_0$ avait été totalement libre, elle aurait impliqué $\vec{\lambda}_0 = \vec{0}$: ainsi plus il y a de degrés de liberté sur $\vec{x}_0$ et moins il y en a pour $\vec{\lambda}_0$.

De même si l'état final est imposé $\vec{V}(\vec{x}_N) = \vec{x}_N - \vec{d} = 0$ on a $\delta\vec{x}_N = 0$ de sorte que $\delta\varphi(\vec{x}_N) = 0$ (ce qui montre que $\varphi(\vec{x}_N)$ est alors stationnaire pour la politique choisie) alors que si l'état final est libre la condition $\vec{\lambda}_N \delta\vec{x}_N = \delta\varphi(\vec{x}_N)$ n'impliquera la stationnarité de $\varphi(\vec{x}_N)$ que si l'on a $\vec{\lambda}_N = 0$.

Récapitulation :

Si la politique $(\vec{u}_0^*, \vec{u}_1^* \ldots \vec{u}_{N-1}^*)$ est optimale alors il existe des multiplicateurs $\vec{\lambda}_n$, $\vec{\mu}$, $\vec{\nu}$ et la quantité $\delta\varphi(\vec{x}_N) = \sum_{s=1}^{N} \vec{\lambda}_s \frac{\partial \vec{T}_{s-1}}{\partial \vec{u}_{s-1}} \delta\vec{u}_{s-1}$ doit être négative. Les multiplicateurs $\vec{\lambda}_n$, $\vec{\mu}$ et $\vec{\nu}$ doivent satisfaire les conditions (11), (17), (18). Les variables d'état sont alors données par les équations (1) et doivent satisfaire les contraintes (3) et (4).

Les (Nr) équations (1), les (Nr) équations (11), les r équations (17) et les r équations (18) forment un système de $2r(N + 1)$ équations dont les variables sont $\vec{x}_n$, $\vec{\lambda}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots N)$ $\vec{\mu}$ et $\vec{\nu}$ [au total $2r(N + 1) + k + l$ inconnues]. Les $(k + l)$ inconnues encore libres sont déterminées par les $(k + l)$ contraintes (3) et (4).

3. Formulation Hamiltonienne et principe du maximum.

A chaque étape n on introduit une fonction H_n, dite *Hamiltonien de l'étape n,* défini par

$$\boxed{H_n(\vec{\lambda}_{n+1}, \vec{x}_n, \vec{u}_n) = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots N - 1) \tag{21}$$

comme on en tire : $\vec{T}_n = \dfrac{\partial H_n}{\partial \vec{\lambda}_{n+1}}$, l'équation (1) s'écrit :

$$\boxed{x_{n+1}^i = \frac{\partial H_n}{\partial \lambda_{n+1}^i}} \qquad n = 0, 1, \ldots N - 1. \tag{22}$$

De même, comme : $\dfrac{\partial H_n}{\partial x_n^j} = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \dfrac{\partial \vec{T}_n}{\partial x_n^j}$, l'équation (11) donne :

$$\boxed{\lambda_n^j = \frac{\partial H_n}{\partial x_n^j}} \qquad n = 1, 2, \ldots N - 1 \tag{23}$$

les équations (22) et (23) sont dites *équations canoniques ;* il faut y ajouter les contraintes (3),(4),(17),(18).

Enfin l'équation (16) s'écrit :

$$\boxed{\delta\varphi(\vec{x}_N) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\partial H_n}{\partial \vec{u}_n} \cdot \delta\vec{u}_n} \tag{24}$$

Introduction des contraintes (2) : $U_n^j(\vec{u}_n) \leqslant 0$ *(conditions de Kuhn-Tucker).*

Ces contraintes définissent un domaine dans l'espace des politiques $(\vec{u}_0, \vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{N-1})$.

① Si la politique optimale est un "point intérieur" à ce domaine, alors on peut faire δu_n^k positif ou négatif $\forall k$, $\forall n$; il s'en suit qu'il est nécessaire que

$$\boxed{\frac{\partial H_n}{\partial u_n^k} = 0, \forall k, \forall n.} \tag{25}$$

(25) est la condition classique d'extremum libre.

② Si à une certaine étape ($\bar{n}$), une des contraintes (j) est saturée par une politique optimale, les $\delta\vec{u}_n$ admissibles doivent satisfaire à

$$\frac{\partial U_{\bar{n}}^j}{\partial \vec{u}_{\bar{n}}} \cdot \delta\vec{u}_{\bar{n}} \leqslant 0 \tag{26}$$

Il faut donc que (26) soit satisfaite pour toute variation $\delta\vec{u}_n$ en particulier pour la variation suivante : $\delta\vec{u}_n = 0$ pour tout $n \neq \bar{n}$, et $\delta\vec{u}_{\bar{n}}$ non nécessairement nul satisfaisant à (26).

Mais pour une telle variation $\delta\vec{u}_n$ on a (équation 24) :

$$\delta\varphi(\vec{x}_N) = \frac{\partial H_{\bar{n}}}{\partial \vec{u}_{\bar{n}}} \cdot \delta\vec{u}_{\bar{n}} = \delta H_{\bar{n}}$$

et la condition $\delta\varphi(\vec{x}_N) \leqslant 0$, nécessaire pour que $\varphi(\vec{x}_N)$ soit maximum, se traduit par la nécessité que l'hamiltonien soit maximum par rapport à toute variation $\delta\vec{u}_{\bar{n}}$ compatible avec la contrainte saturée.

D'où l'énoncé du *principe du MAXIMUM* (au sens large):

Etant donnée une fonction $\varphi(\vec{x}_N)$ de l'état final à MAXIMISER, considérons la suite de fonctions :

$$H_n(\vec{\lambda}_{n+1}, \vec{x}_n, \vec{u}_n) = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) \tag{21}$$

dans lesquelles les variables $\vec{\lambda}_n$ et $\vec{x}_n$ (pour $n = 0, 1, 2, \ldots N-1, N$) satisfont aux contraintes :

$$x_{n+1}^i = \frac{\partial H_n}{\partial \lambda_{n+1}^i} \quad (22) \qquad \lambda_n^j = \frac{\partial H_n}{\partial x_n^j} \quad (23)$$

et aux conditions aux limites :

$$(3) \quad \vec{x}_0 = \vec{c} \; ; \quad \vec{\lambda}_0 = \vec{\nu}. \tag{17}$$

$$(4) \; \vec{V}(\vec{x}_N) = 0 \; ; \quad \vec{\lambda}_N = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_N} - \vec{\mu}\, \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{x}_N} \tag{18}$$

La politique $(\vec{u}_0^*, \vec{u}_1^*, \ldots \vec{u}_{N-1}^*)$ qui maximise $\varphi(\vec{x}_N)$ sous les contraintes $\vec{U}_n(\vec{u}_n) \leqslant 0$ doit avoir les propriétés suivantes :

H_n est stationnaire par rapport à $\vec{u}_n$ si aucune contrainte n'est saturée à l'optimum.

H_n doit être maximum sur toute contrainte saturée par la politique optimale $(\vec{u}_0^*, \vec{u}_1^*, \ldots \vec{u}_{N-1}^*)$.

4. Remarques :

1. On peut dans certains cas remplacer la condition de stationnarité de H_n par une condition de maximisation de H_n en un point optimal intérieur au domaine des politiques admissibles.

2. Les relations (23), comme nous le verrons, doivent être modifiées dans le cas de *contraintes mixtes.*

3. *Expression des conditions nécessaires. dans le cas de la formulation II du problème :*

$$\begin{cases} \mathrm{Max}_{\vec{u}_0 \vec{u}_1 \ldots \vec{u}_{N-1}} \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} R_n(\vec{u}_n, \vec{x}_n) \\ \vec{x}_{n+1} = \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) \\ U_n^j(\vec{u}_n) \leqslant 0 \quad n = 0, 1, \ldots N-1 \; ; j = 1, 2, \ldots m \\ \vec{x}_0 = \vec{c} \\ [\vec{V}(\vec{x}_N) = 0] \end{cases}$$

L'hamiltonien H_n de la formulation I s'écrit alors :

$$H_n = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) + \lambda_{n+1}^0 T_n^0(x_n^0, \vec{x}_n, \vec{u}_n)$$

car le vecteur $\vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)$ de I se décompose ici en

$$\boxed{\begin{array}{c} \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) \\ \hline T_n^0(x_n^0, \vec{x}_n, \vec{u}_n) \end{array}} \quad \text{avec} \quad T_n^0 = x_n^0 + R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)$$

Les multiplicateurs définis par l'équation (11) sont ici définis par $(n = 0, 1, 2, \ldots N-1)$:

$$i \neq 0 : \ \lambda_n^i = \sum_j \lambda_{n+1}^j \frac{\partial T_n^j}{\partial x_n^i} + \lambda_{n+1}^0 \frac{\partial T_n^0}{\partial x_n^i} = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial x_n^i} + \lambda_{n+1}^0 \frac{\partial R_n}{\partial x_n^i}$$

$$i = 0 : \ \lambda_n^0 = \lambda_{n+1}^0 \frac{\partial T_n^0}{\partial x_n^0} = \lambda_{n+1}^0 \Rightarrow \lambda_n^0 = \text{cte } (= \lambda_N^0 \text{ en particulier})$$

Pour $n = N$ la formule (18) reste valable si des contraintes $\vec{V}(\vec{x}_N) = 0$ existent sur l'état final.

Dans le cas (assez général) où aucune contrainte n'est imposée à l'état final, l'équation (18) s'écrit :

$$\vec{\lambda}_N = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_N} \quad \text{mais ici} \quad \varphi(\vec{x}_N) = x_N^0 \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \lambda_N^i = 0 & \text{pour } i \neq 0 \\ \lambda_N^0 = 1 \end{cases}$$

l'équation $\lambda_n^0 = \text{cte}$ donne alors : $\lambda_1^0 = \lambda_2^0 = \ldots = \lambda_n^0 = \ldots = \lambda_N^0 = 1.$

En conclusion les équations (11) et (18) s'écrivent, avec les notations de la formulation II :

$$(11') \quad \boxed{\vec{\lambda}_n = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{x}_n} + \frac{\partial R_n}{\partial \vec{x}_n}}$$

$$(18') \quad \boxed{\vec{\lambda}_N = 0}$$

et l'hamiltonien s'écrit :

$$H_n = \vec{\lambda}_{n+1} \, \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) + R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) + x_n^0$$

3.2. Conditions nécessaires – 2[e] méthode

1. Fonction de Lagrange :

On va, pour simplifier et ne pas introduire des multiplicateurs de Kuhn Tucker supplémentaires, supposer que les variables de contrôle $\vec{u}_n$ sont *libres ;* on abandonne donc les contraintes (2) de sorte que l'énoncé précédent ne comporte dans ce cas que la seule condition nécessaire de stationnarité de l'hamiltonien.

Le problème est alors ramené à un problème d'optimisation classique : on associe à la contrainte (1) un multiplicateur vectoriel $\vec{\lambda}_{n+1}$, un multiplicateur $\vec{\nu}$ à la contrainte (3) et un multiplicateur $\vec{\mu}$ à la contrainte (4) de sorte que la fonction de Lagrange s'écrit :

$$\boxed{L = \varphi(\vec{x}_N) - \sum_{n=0}^{N-1} \vec{\lambda}_{n+1} \, [\vec{x}_{n+1} - \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)] - \vec{\nu}\,[\vec{x}_0 - \vec{c}\,] - \vec{\mu}\,[\vec{V}(\vec{x}_N)]} \tag{27}$$

les conditions du 1er ordre s'écrivent, sans oublier les conditions (3) et (4) :

$$0 = \frac{\partial L}{\partial u_n^j} : \boxed{\vec{\lambda}_{n+1} \cdot \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial u_n^j} = 0} \quad \text{pour} \begin{cases} j = 1, 2, \ldots q \\ n = 0, 1, \ldots N-1 \end{cases} \tag{28}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x_n^i} : \boxed{-\lambda_n^i + \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial x_n^i} = 0} \quad \text{pour} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots r \\ n = 1, 2, \ldots N-1 \end{cases} \tag{29}$$

$$[\text{ou } \vec{\lambda}_n = \vec{\lambda}_{n+1} A(n+1)]$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x_0^i} : \boxed{\vec{\lambda}_1 \cdot \frac{\partial \vec{T}_0}{\partial x_0^i} = \vec{\nu}_i} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots, r \tag{30}$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x_N^i} : \boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial x_N^i} - \lambda_N^i - \vec{\mu} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x_N^i} = 0} \quad \text{pour} \quad i = 1, 2, \ldots r \tag{31}$$

Actuellement $\vec{\lambda}_0$ n'existe pas. On va définir $\vec{\lambda}_0$ de telle sorte que (29) soit aussi valable pour $n = 0$:

$$(29') \quad \lambda_0^i = \vec{\lambda}_1 \frac{\partial \vec{T}_0}{\partial x_0^i} \quad \text{et alors (30) s'écrit :} \quad \boxed{\vec{\lambda}_0 = \vec{\nu}} \tag{32}$$

Les équations (29) et (29') reproduisent exactement l'équation (11) ou l'équation (23).

Les équations (31) et (32) reproduisent respectivement les équations (18) et (17).

Enfin, avec les notations Hamiltoniennes, l'équation (28) s'écrit :

$$\boxed{\frac{\partial H_n}{\partial u_n^j} = 0} \qquad n = 0, 1, \ldots N-1.$$

ce qui traduit la stationnarité de l'Hamiltonien de l'étape n par rapport à l'ensemble des variables de contrôle de cette étape, c'est-à-dire la maximisation de H_n puisque ces variables $\vec{u}_n$ sont des variables libres ici.

2. Interprétation des multiplicateurs de Lagrange dans un processus à étapes :

Considérons un problème du type I ou II précédents dans lesquels nous abandonnerons pour simplicité les contraintes (2), (3), (4), puisque nous ne nous intéressons qu'aux multiplicateurs associés aux équations de transition.

I : $\text{Max}_{\vec{u}_0 u_1 \ldots \vec{u}_{N-1}}\ \varphi(\vec{x}_N)$	II : $\text{Max}_{\vec{u}_0 \vec{u}_1 \ldots \vec{u}_{N-1}}\ Z = \sum_{n=0}^{N-1} R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)$
$\vec{x}_{n+1} = \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)$	

A l'optimum $\vec{x}_N$ dépend de la politique $\vec{u}_0^* \vec{u}_1^* \ldots \vec{u}_{N-1}^*$ donc $\varphi(\vec{x}_N)$ dépend aussi de cette politique de sorte que nous pouvons rechercher la politique optimale somme solution des équations:

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{u}_n} = 0 \ , \ n = 0 \, , 1 \, , 2 \, , \ldots N-1}$$

Or :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{u}_n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_N} \left[\frac{\partial \vec{x}_N}{\partial \vec{x}_{N-1}} \cdot \frac{\partial \vec{x}_{N-1}}{\partial \vec{x}_{N-2}} \cdots \frac{\partial \vec{x}_{n+2}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \cdot \frac{\partial \vec{x}_{n+1}}{\partial \vec{u}_n} \right] \quad \text{car} \ \frac{\partial \vec{x}_{m+1}}{\partial \vec{u}_n} = \frac{\partial \vec{x}_{m+1}}{\partial \vec{x}_m} \frac{\partial \vec{x}_m}{\partial \vec{u}_n}$$

pour $n = 0 \, , 1 \, , 2 \, , \ldots N-2$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_N} \left[\frac{\partial \vec{T}_{N-1}}{\partial \vec{x}_{N-1}} \cdot \frac{\partial \vec{T}_{N-2}}{\partial \vec{x}_{N-2}} \cdots \frac{\partial \vec{T}_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \cdots \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n} \right]$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_N} \Big[A(N)\, A(N-1) \ldots A(n+2) \Big] \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n} \qquad (33a)$$

en posant : $\quad A(n) = \dfrac{\partial \vec{T}_{n-1}}{\partial \vec{x}_{n-1}}$

et

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{u}_{N-1}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_N} \cdot \frac{\partial \vec{T}_{N-1}}{\partial \vec{u}_{N-1}} \qquad (33b)$$

Or les multiplicateurs de Lagrange satisfont à l'équation de récurrence :

$$(29) \quad \boxed{\vec{\lambda}_n = \vec{\lambda}_{n+1}\, A(n+1)} \qquad \text{et (31)} \quad \boxed{\vec{\lambda}_N = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_N}}$$

Alors les équations (33a) et (33b) s'écrivent :

$$\boxed{\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{u}_n} = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n} \, , \ n = 0 \, , 1 \, , 2 \, , \ldots N-1} \quad \text{[cf. équation (28)]}$$

or on peut écrire aussi :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{u}_n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_{n+1}} \cdot \frac{\partial \vec{x}_{n+1}}{\partial \vec{u}_n} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_{n+1}} \cdot \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n}$$

la comparaison des deux expressions ci-dessus montre que $\vec{\lambda}_{n+1}$ peut s'interpréter comme $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_{n+1}}$ et mesure en quelque sorte la sensibilité de l'optimum aux variations infinitésimales de l'état du système à l'étape $(n + 1)$.

Cette interprétation $\vec{\lambda}_n = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_n}$ des multiplicateurs associés aux équations de transition est à rapprocher de l'interprétation classique des multiplicateurs de Lagrange dans un problème "d'optimisation classique" :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } \varphi(\vec{x}) \\ \vec{g}(\vec{x}) = \vec{b} \end{array}}$$

dans lequel le multiplicateur $\vec{\lambda} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{b}}$ mesure la sensibilité de l'optimum à des variations infinitésimales des contraintes du problème (*).

Remarque :

Nous avons utilisé la formulation I car elle est plus générale que la formulation II. Mais les mêmes calculs, sur la formulation II, auraient donné l'interprétation équivalente :

$$\boxed{\vec{\lambda}_{n+1} = \frac{\partial Z}{\partial \vec{x}_{n+1}}}$$

car

$$\frac{\partial Z}{\partial \vec{u}_n} = \frac{\partial R_n}{\partial \vec{u}_n} + \frac{\partial Z}{\partial \vec{x}_{n+1}} \cdot \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n}$$

et d'autre part on peut calculer les dérivations en chaine équivalentes à (33a) et obtenir ainsi :

$$\frac{\partial Z}{\partial \vec{u}_n} = \frac{\partial R_n}{\partial \vec{u}_n} + \vec{\lambda}_{n+1} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n}$$

(*) L'interprétation des coefficients $\vec{\lambda}_n$ de l'Hamiltonien consiste, en *contrôle optimal continu*, à considérer ces coefficients comme des "valeurs d'utilisation".

4 – CAS OÙ IL EXISTE DES CONTRAINTES MIXTES

Dans les formulations I ou II données-ci-dessus ne figurent pas de contraintes mixtes du type c) :

(c) $\quad \vec{Q}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) \leqslant 0 \qquad [\vec{Q}_n$: vecteur à $K(n)$ composantes]

L'expression du principe du maximum devient alors plus complexe car les équations canoniques (23) ne sont plus valables. Il est nécessaire de préciser ce que deviennent ces équations car dans la plupart des exemples – ce sera le cas pour les deux problèmes économiques donnés en illustration – les contraintes sur les variables de décision font aussi intervenir les variables d'état. Il se peut d'ailleurs que des conditions supplémentaires soient introduites, ne portant que sur les variables d'état à certaines étapes n $(n \neq 0, n \neq N)$; nous ne les considérerons pas et nous limiterons au cas des contraintes mixtes.

Conditions nécessaires d'optimalité

Comme nous l'avons fait pour les contraintes (2) : $\vec{U}_n(\vec{u}_n) \leqslant 0$, nous envisagerons successivement les cas suivants :

4.1. La politique optimale $(\vec{u}_0^*, \vec{u}_1^*, \ldots \vec{u}_{N-1}^*)$ définit une trajectoire $(\vec{x}_0, \vec{x}_1^*, \vec{x}_2^* \ldots \vec{x}_N^*)$ telle qu'*aucune* des contraintes (c) n'est saturée ; ces contraintes ne jouent donc aucun rôle et tout ce qui a été dit précédemment est encore valable, et en particulier les équations (23).

4.2. *Certaines des contraintes (c) sont des contraintes égalités.*

Supposons qu'à une étape n un certain nombre $K_1(n)$ $[\leqslant K(n)]$ de contraintes soient des égalités :

$$Q_n^k(\vec{x}_n, \vec{u}_n) = 0 \qquad \text{pour} \qquad k = 1, 2, \ldots K_1(n) \qquad (34)$$

La donnée de $\vec{x}_n$ au début de l'étape n permet, si les conditions du th. des fonctions implicites sont remplies, d'exprimer K_1 variables u_n^j en fonction des $q(n) - K_1(n)$ autres variables de contrôle.

Pour simplifier l'écriture nous noterons K_1 au lieu de $K_1(n)$, q au lieu de $q(n)$ et $\vec{Q}(\vec{x}_n, \vec{u}_n) = 0$ au lieu de (34).

Toute variation $(\delta\vec{x}_n, \delta\vec{u}_n)$ doit satisfaire au premier ordre à la condition :

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{x}_n}\, \delta \vec{x}_n + \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{u}_n}\, \delta \vec{u}_n = 0 \tag{35}$$

et l'équation de transition (1) doit être satisfaite d'où :

$$\delta \vec{x}_{n+1} = \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{x}_n}\, \delta \vec{x}_n + \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n}\, \delta \vec{u}_n \tag{36}$$

On supposera dans la suite que $\dfrac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{u}_n}$ est une matrice de rang K_1 et nous numéroterons les variables $\vec{u}_n$ de sorte que les K_1 premières variables $\delta \vec{u}_n$ puissent donc s'exprimer à l'aide des $(q - K_1)$ autres à l'aide de (35):

$$\begin{array}{c} \xleftarrow{\qquad q \qquad} \\ K_1 \updownarrow \begin{array}{|c|c|} \hline \dfrac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{u}_n^{K_1}} & \dfrac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}} \\ \hline \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \delta \vec{u}_n^{K_1} \\ \hline \delta \vec{u}_n^{q-K_1} \\ \hline \end{array} = -\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{x}_n}\, \delta \vec{x}_n, \quad \text{ou}$$

$$\frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{u}_n^{K_1}}\, \delta \vec{u}_n^{K_1} + \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}}\, \delta \vec{u}_n^{q-K_1} + \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{x}_n}\, \delta \vec{x}_n = 0$$

On posera dans la suite : $R = \left(\dfrac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{u}_n^{K_1}}\right)^{-1}$

d'où :
$$\delta \vec{u}_n^{K_1} = -R\, \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}}\, \delta \vec{u}_n^{q-K_1} - R\, \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{x}_n}\, \delta \vec{x}_n \tag{35'}$$

Dans ces conditions, l'équation (36) s'écrit, au lieu de (5) :

$$\boxed{\delta \vec{x}_{n+1} = \left(\frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{x}_n} - \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}}\, R\, \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{x}_n}\right) \delta \vec{x}_n + \left(\frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}} - \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}} \cdot R \cdot \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}}\right) \delta \vec{u}_n^{q-K_1}} \tag{37}$$

[dans l'équation ci-dessus les dérivées partielles sont évaluées en $(\vec{x}_n^*, \vec{u}_n^*)$]

De la même façon que nous avons obtenu précédemment les équations (11) et (12) à partir de (5), l'équation (37) permet d'écrire :

$$\boxed{\lambda_n^j = \vec{\lambda}_{n+1}\left(\frac{\partial \vec{T}_n}{\partial x_n^j} - \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}}\, R\, \frac{\partial \vec{Q}}{\partial x_n^j}\right) = \frac{\partial H_n}{\partial x_n^j} - \frac{\partial H_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}}\, R\, \frac{\partial \vec{Q}}{\partial x_n^j}} \tag{38}$$

pour $n = 0, 1, 2 \ldots N - 1$

où l'on a encore posé $H_n = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)$, et

$$\boxed{\vec{\lambda}_n \cdot \delta\vec{x}_n = \underbrace{\vec{\lambda}_0 \cdot \delta\vec{x}_0}_{=0} + \sum_{s=1}^{n} \vec{\lambda}_s \left(\frac{\partial \vec{T}_{s-1}}{\partial \vec{u}_{s-1}^{\,q-K_1}} - \frac{\partial \vec{T}_{s-1}}{\partial \vec{u}_{s-1}^{\,K_1}} \cdot R \cdot \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{u}_{s-1}^{\,q-K_1}} \right) \delta\vec{u}_{s-1}^{\,q-K_1}} \tag{39}$$

[dans l'équation ci-dessus, q, K_1, $\vec{Q}$ et R dépendent de $s - 1$:
$q(s-1), K_1(s-1) \ldots$]

Si on choisit $\vec{\lambda}_N = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_N}$ (ce qui est toujours possible puisque $\vec{\lambda}_N$ est libre), l'équation (39) s'écrit pour $n = N$:

$$\delta\varphi(\vec{x}_N) = \sum_{s=0}^{N-1} \vec{\lambda}_{s+1} \left(\frac{\partial \vec{T}_s}{\partial \vec{u}_s^{\,q-K_1}} - \frac{\partial \vec{T}_s}{\partial \vec{u}_s^{\,K_1}} R \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{u}_s^{\,q-K_1}} \right) \delta\vec{u}_s^{\,q-K_1} = \tag{40}$$

$$= \sum_{s=0}^{N-1} \left(\frac{\partial H_s}{\partial \vec{u}_s^{\,q-K_1}} - \frac{\partial H_s}{\partial \vec{u}_s^{\,K_1}} R \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{u}_s^{\,q-K_1}} \right) \delta\vec{u}_s^{\,q-K_1}$$

Peut-on exprimer encore le principe du maximum en remplaçant simplement (23) par (38) ? Deux cas sont possibles :

a) Si aucune contrainte n'est saturée à l'optimum on a :

$$\delta\varphi(\vec{x}_N) = \sum_{s=0}^{N-1} \left(\frac{\partial H_s}{\partial \vec{u}_s^{\,q-K_1}} - \frac{\partial H_s}{\partial \vec{u}_s^{\,K_1}} R \frac{\partial \vec{Q}}{\partial \vec{u}_s^{\,q-K_1}} \right) \delta\vec{u}_s^{\,q-K_1}$$

et alors, comme précédemment, on peut faire δu_s^j quelconque, $\forall j > K_1$, $\forall s$, de sorte qu'il est nécessaire que chaque parenthèse ci-dessus soit nulle, ce qui traduit la stationnarité de l'expression de H_n en fonction des seules variables libres $\vec{u}_n^{\,q-K_1}$.

b) Si certaines contraintes sont saturées, considérons par exemple que *certaines* contraintes sont saturées à l'étape n : $U_n^j(\vec{u}_n) = 0$

On effectue une variation $\delta\vec{u}_n$ admissible, c'est-à-dire satisfaisant aux conditions (35) ou (35′) ; on va rechercher la variation δH_n correspondant à cette variation $\delta\vec{u}_n$:

$$\delta\vec{u}_n^{\,K_1} = - R \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{u}_n^{\,q-K_1}} \cdot \delta\vec{u}_n^{\,q-K_1} - R \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{x}_n} \cdot \delta\vec{x}_n \tag{35'}$$

$$\delta H_n = \frac{\partial H_n}{\partial \vec{x}_n} \delta\vec{x}_n + \frac{\partial H_n}{\partial \vec{u}_n^{\,q-K_1}} \delta\vec{u}_n^{\,q-K_1} + \frac{\partial H_n}{\partial \vec{u}_n^{\,K_1}} \delta\vec{u}_n^{\,K_1} \tag{41}$$

Si on reporte (35′) dans (41) on obtient :

$$\delta H_n = \left(\frac{\partial H_n}{\partial \vec{x}_n} - \frac{\partial H_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}} R \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{x}_n}\right) \delta \vec{x}_n + \left(\frac{\partial H_n}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}} - \frac{\partial H_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}} R \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}}\right) \delta \vec{u}_n^{q-K_1} \tag{42}$$

Si l'on considère une variation globale :

$$\delta U = (\delta \vec{u}_0 , \delta \vec{u}_1 \ldots \delta \vec{u}_n \ldots \delta \vec{u}_{N-1}) = (\vec{0}, \vec{0} \ldots \vec{0}, \delta \vec{u}_n , \vec{0} \ldots \vec{0})$$

où $\delta \vec{u}_n$ satisfait à (35) alors $\delta \vec{x}_n = 0$ car $\vec{x}_n$ ne dépend pas de $\vec{u}_n$ et alors on voit que (42) s'écrit, compte tenu de (40) :

$$\delta H_n = \delta \varphi(\vec{x}_N) \tag{43}$$

de sorte que, pour que $\varphi(\vec{x}_N)$ soit maximum, il faut que, pour cette variation δU particulière, l'on ait $\delta \varphi(\vec{x}_N) \leqslant 0$ ce qui implique que H_n soit maximum par rapport à $\vec{u}_n$ lié par les contraintes $Q_n^k(\vec{x}_n , \vec{u}_n) = 0$ (et ceci $\forall n$).

En conclusion, rien n'est changé dans la formulation du principe du maximum si ce n'est le remplacement des équations canoniques (23) par les équations (38).

4.3. *Certaines des contraintes c) sont saturées par l'emploi de la politique optimale.*

Si on introduit des contraintes mixtes $\vec{Q}_n(\vec{x}_n , \vec{u}_n) \leqslant 0$, il faudra faire intervenir dans la fonction de Lagrange de nouveaux multiplicateurs de Kuhn-Tucker $\vec{\rho}_n$ (à K composantes si $\vec{Q}_n$ a K composantes) :

$$L = \varphi(\vec{x}_N) - \sum_{n=0}^{N-1} \vec{\lambda}_{n+1} [\vec{x}_{n+1} - \vec{T}_n(\vec{x}_n , \vec{u}_n] - \vec{\nu}[\vec{x}_0 - c] - \vec{\mu}[\vec{V}(\vec{x}_N)] - \\ - \sum_{n=0}^{N-1} \vec{\rho}_n \vec{Q}_n(\vec{x}_n , \vec{u}_n)$$

On ne sait pas a priori lesquelles des K contraintes de l'étape n seront saturées à l'optimum : supposons qu'il y en ait $K_1(n)$. Seuls seront non nuls les multiplicateurs $\vec{\rho}_n^{K_1}$ (les autres sont associés à des contraintes non saturés, donc nuls : condition de K.T). Dans l'expression de L on remplacera donc le dernier terme par :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \vec{\rho}_n^{K_1(n)} \vec{Q}_n^{K_1} (\vec{x}_n , \vec{u}_n)$$

Les conditions de K.T impliquent encore l'inégalité vectorielle : $\frac{\partial L}{\partial \vec{u}_n} \leqslant 0$(*) (remplaçant l'équation 28) c'est-à-dire :

$$\boxed{\vec{\lambda}_{n+1} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n} - \vec{\rho}_n^{K_1} \frac{\partial \vec{Q}_n^{K_1}}{\partial \vec{u}_n} \leqslant 0} \tag{28'}$$

D'autre part, les conditions du 1[er] ordre : $\frac{\partial L}{\partial x_n^i} = 0$ donnent ici la relation de récurrence entre les multiplicateurs (remplaçant l'équation 29) :

$$\boxed{\lambda_n^i = \vec{\lambda}_{n+1} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial x_n^i} - \vec{\rho}_n \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial x_n^i} = \vec{\lambda}_{n+1} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial x_n^i} - \rho_n^{K_1} . \frac{\partial \vec{Q}_n^{K_1}}{\partial x_n^i}} \tag{29'}$$

Si on compare l'équation (29') ci-dessus avec l'équation (38) on constate que l'on peut poser :

$$\vec{\rho}_n^{K_1} = \vec{\lambda}_{n+1} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}} R$$

Dans ces conditions la relation (28') devient :

$$\boxed{\vec{\lambda}_{n+1} \left(\frac{\partial \vec{T}_n}{\partial u_n^j} - \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}} R \frac{\partial \vec{Q}_n^{K_1}}{\partial u_n^j}\right) \leqslant 0} \tag{28''}$$

son report dans (40) donne $\delta\varphi(\vec{x}_N) \leqslant 0$ et traduit le fait que $\varphi(\vec{x}_N)$ est maximum. L'inégalité (28'') est une égalité pour toute composante u_n^j avec $j \in K_1$ (car le terme entre parenthèses est nul) elle ne prend tout son sens que pour les dérivées par rapport aux composantes u_n^j avec $j \in q - K_1$.

5 – PROGRAMMATION DYNAMIQUE

Les conditions données précédemment sont des conditions nécessaires d'optimalité. Elles présentent trois insuffisances très apparentes :

– la résolution des conditions d'optimalité n'est pas a priori très aisée car il s'agit de résoudre tout un ensemble d'équations ; à supposer même que

---

(*) Cette inégalité doit être satisfaite si le problème comporte des contraintes de signe $\vec{u}_n \geqslant 0$ sur les variables de contrôle. Si le problème ne comporte pas de telles contraintes, l'inégalité devient une égalité.

la résolution de ces équations soit relativement simple, on peut, dans un problème concret, être amené à raccourcir la durée de vie du processus ou à l'allonger de sorte que la résolution ci-dessus est à recommencer si on choisit une étape finale $N' \neq N$; en effet l'approche est une approche globale : bien que chaque hamiltonien soit défini à une étape déterminée, sa définition $H_n = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \vec{T}_n(\vec{x}_n , \vec{u}_n)$ relie les variables d'une étape n aux multiplicateurs de l'étape ultérieure. On peut souhaiter profiter de la nature "décomposée par étapes" du processus pour essayer de décomposer l'optimisation globale sur N périodes en un nombre égal d'optimisations partielles, de sorte que si l'on effectue un calcul sur N périodes le même calcul donne aussi le résultat dans le cas où l'on serait ramené à N' périodes ($N' \leqslant N$). Le principe d'optimalité de la programmation dynamique permet par sa récurrence de scinder ainsi l'optimisation en N optimisations partielles et fournit un *algorithme* de résolution pas à pas.

– si les variables de contrôle ne doivent prendre que des valeurs entières, la procédure variationnelle n'est pas satisfaisante.

– les conditions d'optimalité *ne sont pas des conditions suffisantes* ; par contre, par sa définition même, l'algorithme de résolution par programmation dynamique assure que la solution qu'il procure est optimale ; il n'est pas alors nécessaire d'utiliser les conditions du 2$^{\text{nd}}$ ordre pour s'assurer que la politique obtenue est une politique optimale.

Nous allons définir cette technique de résolution pour les deux formulations I et II du problème dynamique, en commençant par la formulation II car elle est la plus traditionnellement rencontrée dans la littérature, alors que l'exposé de la méthode sur la formulation I semble beaucoup plus simple. La résolution repose sur le principe suivant (Bellman) : "*Une politique optimale a la propriété que, quels que soient l'état initial et la décision initiale* [à l'étape n], *les décisions ultérieures* [aux étapes $n+1$, $n+2$, . . . N] *doivent constituer une politique optimale à partir de l'état* [$\vec{x}_{n+1}$] *résultant de la première décision* [$\vec{u}_n$]".

5.1. Résolution du problème II .

$$\max_{\vec{u}_0 \vec{u}_1 \ldots \vec{u}_{N-1}} \{R_0(\vec{x}_0 , \vec{u}_0) + R_1(\vec{x}_1 , \vec{u}_1) + \ldots + R_n(\vec{x}_n , \vec{u}_n) + \ldots + R_{N-1}(\vec{x}_{N-1} , \vec{u}_{N-1})\}$$

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{T}_n(\vec{x}_n , \vec{u}_n)$$

$$\vec{Q}_n(\vec{x}_n , \vec{u}_n) \leqslant 0 \quad [\text{ou} \quad \vec{u}_n \in \mathrm{K}_n(\vec{x}_n)]$$

$$\vec{x}_0 = \vec{c}$$

[dans la formulation ci-dessus, $\mathrm{K}_n(\vec{x}_n)$ est le domaine “admissible” pour $\vec{u}_n$ défini par $\vec{Q}_n \leqslant 0$].

On résoud par étapes en ne conservant que la dernière étape d'abord : quel que soit $\vec{x}_{N-1}$ on ne peut maximiser que $R_{N-1}(\vec{x}_{N-1}, \vec{u}_{N-1})$. On effectue cette optimisation pour $\vec{x}_{N-1}$ donné et on note $\Lambda_{N-1}(\vec{x}_{N-1})$ la valeur optimale ainsi trouvée de la fonction économique et $\vec{u}^*_{N-1}(\vec{x}_{N-1})$ la solution :

$$\Lambda_{N-1}(\vec{x}_{N-1}) = \max_{\vec{u}_{N-1} \in \mathrm{K}_{N-1}} R_{N-1}(\vec{x}_{N-1}, \vec{u}_{N-1}) = R_{N-1}(\vec{x}_{N-1}, \vec{u}^*_{N-1})$$

On remonte à l'étape N – 2 : la fonction économique sur les 2 dernières étapes est $R_{N-2} + R_{N-1}$: si on commence l'étape $N-2$ dans l'état $\vec{x}_{N-2}$ on a, en notant $\Lambda_{N-2}(\vec{x}_{N-2})$ l'optimum sur les 2 périodes $(N-2)$ et $(N-1)$:

$$\begin{aligned}
\Lambda_{N-2}(\vec{x}_{N-2}) &= \max_{\vec{u}_{N-1} \in \mathrm{K}_{N-1}, \vec{u}_{N-2} \in \mathrm{K}_{N-2}} \{R_{N-2}(\vec{x}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}) + R_{N-1}(\vec{x}_{N-1}, \vec{u}_{N-1})\} \\
&\qquad \text{avec } \vec{x}_{N-1} = \vec{T}_{N-2}(\vec{x}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}) \\
&= \max_{\vec{u}_{N-2} \in \mathrm{K}_{N-2}} \{R_{N-2}(\vec{x}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}) + \max_{\vec{u}_{N-1} \in \mathrm{K}_{N-1}} R_{N-1}(\vec{x}_{N-1}, \vec{u}_{N-1})\} \\
&\qquad \text{avec } \vec{x}_{N-1} = \vec{T}_{N-2}(\vec{x}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}) \\
&= \max_{\vec{u}_{N-2} \in \mathrm{K}_{N-2}} \{R_{N-2}(\vec{x}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}) + \Lambda_{N-1}(\vec{x}_{N-1})\} \\
&= \max_{\vec{u}_{N-2} \in \mathrm{K}_{N-2}} \{R_{N-2}(\vec{x}_{N-2}, \vec{u}_{N-2}) + \Lambda_{N-1}[\vec{T}_{N-2}(\vec{x}_{N-2}, \vec{u}_{N-2})]\}
\end{aligned}$$

l'expression ci-dessus traduit le principe d'optimalité car le terme entre accolades est le résultat sur les 2 dernières périodes du choix $\vec{u}_{N-2}$ dans un état $\vec{x}_{N-2}$ et d'un choix *optimal* en $(N-1)$ pour l'état résultant du couple $(\vec{x}_{N-2}, \vec{u}_{N-2})$. Pour $\vec{x}_{N-2}$ donné il restera donc à optimiser ce terme par par rapport à $\vec{u}_{N-2}$ [solution $\vec{u}^*_{N-2}(\vec{x}_{N-2})$] pour avoir l'optimum $\Lambda_{N-2}(\vec{x}_{N-2})$ sur les deux dernières périodes. On écrira de même pour une optimisation sur les 3 dernières périodes (la 3^e commençant dans l'état $\vec{x}_{N-3}$) :

$$\Lambda_{N-3}(\vec{x}_{N-3}) = \max_{\vec{u}_{N-3} \in \mathrm{K}_{N-3}} \{R_{N-3}(\vec{x}_{N-3}, \vec{u}_{N-3}) + \Lambda_{N-2}[\vec{T}_{N-3}(\vec{x}_{N-3}, \vec{u}_{N-3})]\}$$

Le processus peut se poursuivre ainsi en remontant le temps, de sorte qu'à une étape n quelconque l'optimum de $(R_n + R_{n+1} + \ldots R_{N-1})$ sur les périodes ultérieures s'écrit :

$$\Lambda_n(\vec{x}_n) = \underset{\vec{u}_n \in K_n, \vec{u}_{n+1} \in K_{n+1} \dots \vec{u}_{N-1} \in K_{N-1}}{\text{Max}} \{R_n + R_{n+1} + \dots + R_{N-1}\}$$

et peut se calculer si on a précédemment calculé $\Lambda_{n+1}(\vec{x}_{n+1})$ *pour tout état* $\vec{x}_{n+1}$ (ce que l'on a en fait effectué déjà d'après la procédure suivie) car la formule traduisant le principe d'optimalité est :

$$\boxed{\Lambda_n(\vec{x}_n) = \underset{\vec{u}_n \in K_n}{\text{Max}} \{R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) + \Lambda_{n+1}[\vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)]\}} \tag{44}$$

Ayant déjà $\vec{u}^*_{n+1}(\vec{x}_{n+1})$, $\vec{u}^*_{n+2}(\vec{x}_{n+2}) \dots \vec{u}^*_{N-1}(\vec{x}_{N-1})$, cette équation permet d'ajouter $\vec{u}^*_n(\vec{x}_n)$ et l'ensemble de ces valeurs $\{\vec{u}^*_n, \vec{u}^*_{n+1} \dots \vec{u}^*_{N-1}\}$ constitue une politique pour un exercice sur les périodes $n, n+1 \dots N-1$, commencé dans l'état $\vec{x}_n$.

En général, chacune de ces optimisations est facile et la solution du problème II est évidemment $\Lambda_0(\vec{x}_0)$ dans laquelle $\vec{x}_0 = \vec{c}$; la difficulté essentielle réside dans la *taille* des calculs puisqu'il faut optimiser $\Lambda_n(\vec{x}_n)$ pour *toutes* les valeurs de $\vec{x}_n$: il faut en général dresser une table où l'on met en regard de chaque valeur de $\vec{x}_n$ la commande optimale $\vec{u}^*_n(\vec{x}_n)$ et le rétat $\Lambda_n(\vec{x}_n)$.

Toutes les équations de récurrence sont du même type (44) sauf l'équation de l'étape $(N-1)$: on peut la ramener au même type en posant arbitrairement $\Lambda_N(\vec{x}_N) = 0$

Remarque :

L'équation de transition donne $\vec{x}_{n+1}$ en fonction de $\vec{x}_n$ de sorte que la récurrence doit s'effectuer en écrivant les équations (44) à partir de $n = N-1$ jusqu'en $n = 0$; les fonctions $\Lambda_n(\vec{x}_n)$ doivent être calculées pour toute valeur de $\vec{x}_n$, sauf cependant $\Lambda_0(\vec{x}_0)$ car la valeur de $\vec{x}_0$ est connue et fixée. Il faut alors calculer successivement $\vec{u}^*_0(\vec{x}_0)$, puis $\vec{x}_1$, puis $\vec{u}^*_1(\vec{x}_1)$, puis $\vec{x}_2 \dots \vec{x}_n \dots$, mais, $\forall n$, la valeur de $\vec{u}^*_n(\vec{x}_n)$ se lit alors dans la table où l'on a consigné $\vec{u}^*_n(\vec{x}_n)$ pour toute valeur de $\vec{x}_n$ dans l'optimisation de l'étape n. On conçoit qu'un système dynamique où $\vec{x}_N$ serait fixé et où l'équation de transition donnerait $\vec{x}_{n-1}$ en fonction de $\vec{x}_n$ mènerait à des récurrences en sens inverse des précédentes.

5.2 – Résolution du problème I.

$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{\vec{u}_0\vec{u}_1\ldots\vec{u}_{N-1}}{\operatorname{Max}} \quad \varphi(\vec{x}_N) \\ \vec{x}_{n+1} = \vec{T}_n(\vec{x}_n\,,\vec{u}_n) \\ \vec{Q}_n(\vec{x}_n\,,\vec{u}_n) \leqslant 0 \qquad [\text{ou } \vec{u}_n \in \mathbf{K}_n(\vec{x}_n)] \\ \vec{x}_0 = \vec{c} \end{array}}$$

Sans reprendre mot à mot les développements donnés pour le problème II, on peut donner les équations que donnent les différentes optimisations dans chaque étape, en commençant par la dernière $(N-1)$:

$$L_{N-1}(\vec{x}_{N-1}) = \underset{\vec{u}_{N-1}\in \mathbf{K}_{N-1}}{\operatorname{Max}} \varphi(\vec{x}_N) = \underset{\vec{u}_{N-1}\in \mathbf{K}_{N-1}}{\operatorname{Max}} \varphi[\vec{T}_{N-1}(\vec{x}_{N-1}\,,\vec{u}_{N-1})] \tag{45}$$

$$L_{N-2}(\vec{x}_{N-2}) = \underset{\vec{u}_{N-1}\in \mathbf{K}_{N-1},\vec{u}_{N-2}\in \mathbf{K}_{N-2}}{\operatorname{Max}} \{\varphi(\vec{x}_N)\} = \underset{\vec{u}_{N-2}\in \mathbf{K}_{N-2}}{\operatorname{Max}} [\underset{\vec{u}_{N-1}\in \mathbf{K}_{N-1}}{\operatorname{Max}} \varphi(\vec{x}_N)]$$

$$= \underset{\vec{u}_{N-2}\in \mathbf{K}_{N-2}}{\operatorname{Max}} L_{N-1}(\vec{x}_{N-1})$$

où $$\vec{x}_{N-1} = \vec{T}_{N-2}(\vec{x}_{N-2}\,,\vec{u}_{N-2}),$$

d'où $$L_{N-2}(\vec{x}_{N-2}) = \underset{\vec{u}_{N-2}\in \mathbf{K}_{N-2}}{\operatorname{Max}} L_{N-1}[\vec{T}_{N-2}(\vec{x}_{N-2}\,,\vec{u}_{N-2})]$$

De même, par récurrence, si on pose :

$$L_n(\vec{x}_n) = \underset{\vec{u}_n\in \mathbf{K}_n,\,\vec{u}_{n+1}\in \mathbf{K}_{n+1}\ldots\vec{u}_{N-1}\in \mathbf{K}_{N-1}}{\operatorname{Max}} \varphi(\vec{x}_N)$$

on écrit l'équation de récurrence traduisant le principe d'optimalité :

$$\boxed{L_n(\vec{x}_n) = \underset{\vec{u}_n\in \mathbf{K}_n}{\operatorname{Max}} L_{n+1}[\vec{T}_n(\vec{x}_n\,,\vec{u}_n)]} \tag{46}$$

Cette équation permet de calculer, à partir de $L_{N-1}(\vec{x}_{N-1})$ obtenu d'après (45) et tabulé, toutes les valeurs de

$$L_{N-2}(\vec{x}_{N-2})\,, L_{N-3}(\vec{x}_{N-3})\ldots L_{n+1}(\vec{x}_{n+1})\,, L_n(\vec{x}_n)\ldots L_1(\vec{x}_1)\,, L_0(\vec{x}_0).$$

Il est clair que la solution du problème est la suite des valeurs $\vec{u}_n^*$ optimales à chacune des étapes n et que la valeur optimale de la fonction économique est $L_0(\vec{x}_0)$. Pour pouvoir écrire l'équation (46) pour $n = N - 1$, on posera conventionnellement $L_N(\vec{x}_N) = \varphi(\vec{x}_N)$.

5.3 – Résolution de l'équation de Bellman [(44) ou (46)] et multiplicateurs de Green.

Nous allons voir que la résolution de l'équation de récurrence de Bellman peut se ramener à une équation de récurrence plus classique [c'est-à-dire ne faisant pas intervenir des opérateurs de max ou min comme dans (44) ou (46)] sur de nouvelles variables : cette équation de récurrence n'est en effet rien d'autre que l'équation canonique (23) ou (31) intervenant dans l'énoncé du principe du maximum.

Cette équation de récurrence n'est évidemment pas la même suivant que l'on envisage la formulation II ou la formulation I ; nous l'expliciterons complètement dans un cas et beaucoup plus rapidement dans l'autre cas.

Nous supposerons pour commencer que les variables $\vec{u}_n$ sont libres, laissant en annexe le cas où l'on a des contraintes $\vec{Q}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) \leqslant 0$, et nous admettrons que les fonctions Λ_n et L_n sont différentiables.

5.3.1 – Formulation II :

L'équation (44) fait intervenir un opérateur Max et à cela près constitue une équation de récurrence dont la résolution s'effectue à partir de la condition aux limites $\Lambda_N(\vec{x}_N) = 0$. Cependant, si l'on maximise par rapport à $\vec{u}_n \in \mathbf{K}_n$ et si la valeur optimale est $\vec{u}_n^*$ alors l'équation (44) s'écrit

$$\Lambda_n(\vec{x}_n) = R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n^*) + \Lambda_{n+1}\,[\vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n^*)] \tag{47}$$

et devient alors une véritable équation de récurrence permettant de calculer les fonctions Λ_n de proche en proche et d'obtenir *l'expression explicite* de Λ_n en fonction de $\vec{x}_n$.

Le maximum de la fonction

$$f(\vec{x}_n, \vec{u}_n) = R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) + \Lambda_{n+1}[\vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)]$$

s'obtient en écrivant

$$0 = \frac{\partial}{\partial \vec{u}_n}\,[R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) + \Lambda_{n+1}] = \frac{\partial}{\partial \vec{u}_n}\,R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) + \frac{\partial \Lambda_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}}\,\frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n}. \tag{48}$$

La solution de l'équation (48) est $\vec{u}_n^*(\vec{x}_n)$.

Par ailleurs, l'équation (47) étant une identité, on peut écrire :

$$\frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_n^i} = \frac{\partial R_n}{\partial x_n^i} + \frac{\partial \Lambda_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \cdot \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial x_n^i} + \left[\frac{\partial R_n}{\partial \vec{u}_n} + \frac{\partial \Lambda_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n} \right] \frac{\partial \vec{u}_n^{\,*}}{\partial x_n^i} \tag{49}$$

A cause de l'équation (48), caractérisant l'optimum $\vec{u}_n^{\,*}(x_n)$, le terme entre crochets s'annule dans (49) :

$$\boxed{\frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_n^i} = \frac{\partial R_n}{\partial x_n^i} + \frac{\partial \Lambda_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \cdot \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial x_n^i}} \quad (n = 0, 1, \ldots N-1) \tag{50}$$

Par ailleurs, on a aussi

$$\boxed{\frac{\partial \Lambda_N}{\partial x_N^i} = 0} \tag{51}$$

Nous allons introduire des multiplicateurs $\vec{\lambda}_n$ mesurant la sensibilité de l'optimum $\Lambda_n(\vec{x}_n)$ sur les étapes $n, n+1 \ldots N-1$ à une variation $\delta\vec{x}_n$ de l'état au début de l'étape n :

$$\boxed{\vec{\lambda}_n = \frac{\partial \Lambda_n}{\partial \vec{x}_n}} \quad (52) \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\lambda_n^i = \frac{\partial \Lambda_n}{\partial x_n^i}} \quad (53)$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots N)$$

les équations (50), (51) et (48) s'écrivent alors respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \lambda_n^i = \dfrac{\partial R_n}{\partial x_n^i} + \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \dfrac{\partial \vec{T}_n}{\partial x_n^i} \quad (n = 0, 1, \ldots N-1) & (54) \\ \lambda_N^i = 0 & (55) \\ \dfrac{\partial}{\partial \vec{u}_n} \left[R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) + \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) \right] = 0 & (56) \end{array} \right.$$

L'équation (56) traduit la maximisation ou la stationnarité de l'Hamiltonien

$$H_n = x_n^0 + R_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) + \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)$$

alors que les équations (54) et (55) sont les équations (11′) et (18′) de la page 36, c'est-à-dire l'équation canonique et la condition aux limites sur les multiplicateurs $\vec{\lambda}_n$. Si les variables $\vec{u}_n$ sont soumises à des contraintes $U_n(\vec{u}_n) \leqslant 0$, deux cas sont alors possibles :

– aucune contrainte $U_n(\vec{u}_n) \leqslant 0$ n'est saturée par une politique optimale : alors les conditions (54),(55),(56) sont toujours valables puisque aucune des contraintes n'a de rôle actif.

– certaines contraintes sont saturées : l'équation (49) est toujours valable mais, comme l'optimum de $\vec{u}_n$ se trouve sur une contrainte on a $\frac{\partial \vec{u}_n^*}{\partial x_n^i} = 0$ car de petites variations sur l'état ne changent pas $\vec{u}_n^*$ de sorte que (50) est toujours valable. La seule différence se présente dans l'expression du maximum de H_n. Mais ceci n'est qu'un cas particulier des contraintes $\vec{Q}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) \leqslant 0$ étudiées en 5.3.3.

5.3.2. Formulation I :

L'identité précédente (47) s'écrit ici :

$$L_n(\vec{x}_n) = L_{n+1}[\vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n^*)] \tag{57}$$

où $\vec{u}_n^*(\vec{x}_n)$ maximise la fonction $F_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) = L_{n+1}[\vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)]$

Les équations (48), (49), (50), (51),(52),(53),(54),(55),(56) s'écrivent respectivement (58),(59),(60),(61),(62),(63),(64),(65),(66) :

$$0 = \frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{u}_n} = \frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n} \tag{58}$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial x_n^i} = \frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial x_n^i} + \left[\frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n}\right] \frac{\partial \vec{u}_n^*}{\partial x_n^i} \tag{59}$$

$$\frac{\partial L_n}{\partial x_n^i} = \frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial x_n^i} \tag{60}$$

$$\frac{\partial L_N}{\partial \vec{x}_N} = \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_N} \tag{61}$$

$$\boxed{\vec{\lambda}_n = \frac{\partial L_n}{\partial \vec{x}_n}} \quad (62) \quad ; \quad \boxed{\lambda_n^i = \frac{\partial L_n}{\partial x_n^i}} \tag{63}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots N)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \lambda_n^j = \vec{\lambda}_{n+1} \dfrac{\partial \vec{T}_n}{\partial x_n^j} & \text{(64) [à rapprocher de l'équation canonique (11) ou (23)]} \\ & \qquad \text{(pour } n = 0 , 1 \ldots N-1) \\ \lambda_N^j = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_N^j} & \text{(65) [à rapprocher de l'équation aux limites (18)]} \\ \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \dfrac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n} = 0 & \text{(66)} \end{array}\right.$$

L'équation (66) traduit la maximisation ou la stationnarité de l'hamiltonien

$$H_n = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \vec{T}_n(\vec{x}_n , \vec{u}_n)$$

dans le cas où les variables $\vec{u}_n$ sont libres.

Remarque :

Les équations (44) et (46) sont des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité ; cependant la condition (49) est une condition nécessaire et non suffisante, de sorte que les conditions (54) (55) (56) sont seulement des conditions *nécessaires* d'optimalité.

5.3.3. Annexe : Cas où les variables $\vec{u}_n$ sont soumises à des contraintes du type $\vec{Q}_n(\vec{x}_n . \vec{u}_n) \leqslant 0$ dont certaines sont des égalités strictes.

Nous n'envisagerons que la formulation (I) la plus générale.

Si à l'étape n , K_1 contraintes sont des contraintes égalités, la maximisation par rapport à $\vec{u}_n$ ne mène plus à l'équation (58) mais s'effectue en prenant des variations $(\delta\vec{x}_n , \delta\vec{u}_n)$ compatibles avec les contraintes saturées, c'est-à-dire satisfaisant à l'équation ;

$$\delta \vec{u}_n^{K_1} = - R \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}} \delta \vec{u}_n^{q-K_1} - R \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{x}_n} \delta \vec{x}_n \quad \text{où} \quad R = \left(\frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}}\right)^{-1}$$

Dans ces conditions on a :

$$\delta L_{n+1} = \left(\frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{x}_n} - \frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}} R \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{x}_n}\right) \delta \vec{x}_n +$$

$$+ \left(\frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}} - \frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}} R \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}}\right) \delta \vec{u}_n^{q-K_1}$$

les deux parenthèses ci-dessus représentant respectivement $\dfrac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{x}_n}$ et $\dfrac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}}$

quand on exprime L_{n+1} à l'aide des variables indépendantes $\vec{x}_n$ et $\vec{u}_n^{q-K_1}$.

L'équation (57) subsiste de sorte que, avec les notations précédentes :

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}_n} = \frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{x}_n} + \frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{u}_n^{*q-K_1}} \cdot \frac{\partial \vec{u}_n^{*q-K_1}}{\partial \vec{x}_n}$$

Or, comme précédemment dans les formules (49) ou (59) et pour les mêmes raisons, le dernier terme du second membre est nul.

On pose $$\vec{\lambda}_n = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_n} = \frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{x}_n} = \frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}} \left(\frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{x}_n} - \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}} R \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{x}_n} \right) \tag{62'}$$

d'où $$\boxed{\vec{\lambda}_n = \vec{\lambda}_{n+1} \left(\frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{x}_n} - \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}} R \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{x}_n} \right)} \tag{67}$$

L'équation (65) subsiste et la maximisation de L_{n+1} *pour* $\vec{x}_n$ *donné* se traduit par :

$$0 = \frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}} = \underbrace{\frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{x}_{n+1}}}_{\vec{\lambda}_{n+1}} \left(\frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}} - \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}} R \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}} \right) \tag{68}$$

Or pour la même variation $\delta \vec{u}_n$ compatible (avec $\delta \vec{x}_n = 0$) on a, en posant :

$$H_n = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)$$

et en exprimant H_n à l'aide des variables indépendantes $\vec{x}_n$ et $\vec{u}_n^{q-K_1}$

$$\frac{\partial H_n}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}} = \vec{\lambda}_{n+1} \left(\frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}} - \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}} R \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}} \right) = \frac{\partial L_{n+1}}{\partial \vec{u}_n^{q-K_1}} = 0 \tag{69}$$

et donc la maximisation de L_{n+1} par rapport aux variables libres $\vec{u}_n^{q-K_1}$ revient à la maximisation de l'hamiltonien H_n par rapport à ces mêmes variables. On retrouve ainsi les conditions du paragraphe 4) ci-dessus.

5.4. Cas linéaire ; dualité

Dans le cas particulier où les contraintes du *programme sont linéaires* on peut associer au problème de maximisation de $\varphi(\vec{x}_N) = \vec{c}\,.\,\vec{x}_N$ avec $\vec{x}_0$ fixé – problème dont les variables sont les variables d'état et les variables du contrôle – un problème dual – portant sur les multiplicateurs $\vec{\lambda}_n$.

5.4.1. Cas des variables de contrôle libres.

Le problème posé est alors le suivant (on l'appellera problème primal) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } \vec{c}\,\vec{x}_N \ \ (= \varphi(\vec{x}_N)) \\ \vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n + B\vec{u}_n \\ \qquad \vec{x}_0 \text{ fixé} \\ \qquad \vec{u}_n \geqslant 0 \end{array}} \tag{70}$$

Comme $\vec{T}_n(\vec{x}_n\,,\vec{u}_n) = A\vec{x}_n + B\vec{u}_n$ où A et B sont des matrices, on déduit des conditions nécessaires (11) et (18)

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{\lambda}_{n-1} = \vec{\lambda}_n A \\ \vec{\lambda}_N = \vec{c} \text{ (fixé)} \end{array}} \tag{71}$$

On constate alors que pour les valeurs des multiplicateurs $\vec{\lambda}_n$ satisfaisant aux conditions ci-dessus on a $\varphi(\vec{x}_N) = \vec{\lambda}_N\,.\,\vec{x}_N$. On peut alors définir une fonction quelconque $\psi(\vec{\lambda}_0)$ – par exemple $\vec{\lambda}_0\vec{x}_0$. Il n'est pas possible de chercher à optimiser une telle fonction car c'est une *donnée* puisque $\vec{\lambda}_0$ se déduit de $\vec{\lambda}_N$ fixé par une suite de récurrences : $\vec{\lambda}_0 = \vec{\lambda}_N \cdot A^N$.

Par contre on peut remarquer que à l'optimum du problème primal si le primal a un optimum *borné* : $\varphi(\vec{x}_N^*) = \psi(\vec{\lambda}_0)$, ou encore :

$$\boxed{\vec{\lambda}_N \cdot \vec{x}_N^{\,*} = \vec{\lambda}_0 \cdot \vec{x}_0} \tag{72}$$

Démonstration :

Il suffit d'écrire dans ce cas l'équation homologue de l'équation (12) et obtenue de la façon suivante :

$$\vec{\lambda}_n \vec{x}_n^* = \vec{\lambda}_n(A\vec{x}_{n-1}^* + B\vec{u}_{n-1}^*) = (\vec{\lambda}_n A)\,\vec{x}_{n-1}^* + \vec{\lambda}_n B\vec{u}_{n-1}^* =$$

$$= \vec{\lambda}_{n-1}\vec{x}_{n-1}^* + \vec{\lambda}_n B\vec{u}_{n-1}^* \quad \text{[par (70) et (71)]}$$

$$= \vec{\lambda}_{n-2}\vec{x}_{n-2}^* + \vec{\lambda}_{n-1} B\vec{u}_{n-2}^* + \vec{\lambda}_n B\vec{u}_{n-1}^*$$

$$= \ldots\ldots$$

$$= \vec{\lambda}_0\vec{x}_0^* + (\vec{\lambda}_1 B\vec{u}_0^* + \vec{\lambda}_2 B\vec{u}_1^* + \ldots + \vec{\lambda}_n B\vec{u}_{n-1}^*)$$

$$\boxed{\vec{\lambda}_n \vec{x}_n^* = \vec{\lambda}_0\vec{x}_0^* + \sum_{s=1}^{n} \vec{\lambda}_s B\vec{u}_{s-1}^*} \tag{73}$$

en particulier :

$$\vec{\lambda}_N \vec{x}_N^* = \vec{\lambda}_0\vec{x}_0 + \sum_{s=1}^{N} \vec{\lambda}_s B\vec{u}_{s-1}^* \,. \tag{74}$$

Il est clair que chacun des termes $\vec{\lambda}_s B\vec{u}_{s-1}^*$ doit être nul sinon la fonction économique du primal $\vec{\lambda}_N\vec{x}_N^* = \varphi(\vec{x}_N^*)$ pourrait être rendue arbitrairement grande par un choix de u_{s-1}^{*j} très grand. Mais ce cas n'est qu'un cas particulier du suivant.

5.4.2. Cas des variables de contrôle soumises à des contraintes (mixtes) linéaires :

Le problème primal s'écrit alors :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Max } \vec{c}\cdot\vec{x}_N \quad (= \varphi(\vec{x}_N)) \\ \vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n + B\vec{u}_n \qquad (70) \\ \vec{Q}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) = C\vec{x}_n + D\vec{u}_n \leqslant 0 \qquad (75) \\ \qquad \vec{u}_n \geqslant 0 \\ \qquad \vec{x}_0 \text{ fixé} \end{array}}$$

Si à l'étape n, K_1 contraintes (75) sont saturées*, on ne retiendra dans

---

* Ici, à la différence du cas non linéaire, les K_1 contraintes ne sont pas des contraintes égalités *imposées par le problème*, mais des contraintes-inégalités *saturées par une politique optimale :* on peut alors exprimer les variables dépendantes $\vec{u}_n^{K_1}$ à l'aide des variables indépendantes $\vec{u}_n^{q-K_1}$: on ne pouvait exprimer [(35′)] les variations dépendantes $\delta\vec{u}_n^{K_1}$ à l'aide des variations indépendantes $\delta\vec{u}_n^{q-K_1}$ que si les variations $\delta\vec{u}_n$ devaient maintenir les K_1 contraintes saturées, ce qui n'est possible que si les K_1 *contraintes-égalités* sont des *contraintes du problème* (sinon il suffit que $\delta\vec{Q}_n^{K_1} \leqslant 0$).

les matrices C et D que les sous-matrices correspondant à ces contraintes et on décomposera D en deux sous matrices D_{K_1} et D_{q-K_1} :

$$C\vec{x}_n + D_{K_1}\vec{u}_n^{K_1} + D_{q-K_1}\vec{u}_n^{q-K_1} = 0$$

Dans cette décomposition de D on suppose que D_{K_1} est de rang K_1 de sorte que les variables $\vec{u}_n^{K_1}$ peuvent s'exprimer à l'aide des variables libres $\vec{u}_n^{q-K_1}$ par :

$$\vec{u}_n^{K_1} = -D_{K_1}^{-1}C\vec{x}_n - D_{K_1}^{-1}D_{q-K_1}\vec{u}_n^{q-K_1} = -RC\vec{x}_n - RD_{q-K_1}\vec{u}_n^{q-K_1} \quad \text{(cf 35')}$$

On reporte dans (70), après avoir décomposé B de façon évidente en B_{K_1} et B_{q-K_1}.

$$\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n + B_{K_1}\vec{u}_n^{K_1} + B_{q-K_1}\vec{u}_n^{q-K_1}$$

$$\text{(76)} \quad \boxed{\vec{x}_{n+1} = (A - B_{K_1}RC)\vec{x}_n + (B_{q-K_1} - B_{K_1}RD_{q-K_1})\vec{u}_n^{q-K_1}} \quad \text{(cf 37)}$$

Soit $\Lambda(n, s)$ la fonction de Green de l'équation de récurrence (76) et $\vec{\lambda}_n$ ses multiplicateurs – nous constaterons que les relations que nous allons trouver permettent comme précédemment d'assimiler les $\vec{\lambda}_n$ aux multiplicateurs des hamiltoniens d'étapes ; l'équation (26) s'écrit :

$$\text{(77)} \quad \boxed{\vec{\lambda}_{n-1} = \vec{\lambda}_n (A - B_{K_1}RC)} \quad \text{(cf 38)}$$

et (25) s'écrit alors :

$$\text{(78)} \quad \boxed{\vec{\lambda}_n\vec{x}_n = \vec{\lambda}_0\vec{x}_0 + \sum_{s=0}^{n-1}\vec{\lambda}_{s+1}(B_{q-K_1} - B_{K_1}RD_{q-K_1})\vec{u}_s^{q-K_1}} \quad \text{(cf 39)}$$

Dans les équations (77), $\vec{\lambda}_N$ est quelconque ; on pose $\vec{\lambda}_N = \vec{c}$ [en accord avec les équations (31)] : on a alors

$$\varphi(\vec{x}_N) = \vec{\lambda}_N \cdot \vec{x}_N \text{ , d'où :}$$

$$\text{(79)} \quad \boxed{\varphi(\vec{x}_N^*) = \vec{\lambda}_N\vec{x}_N^* = \vec{\lambda}_0\vec{x}_0 + \sum_{s=0}^{N-1}\vec{\lambda}_{s+1}[B_{q-K_1} - B_{K_1}RD_{q-K_1}]\vec{u}_s^{*q-K_1}}$$

$$\text{(cf 40)}$$

Les multiplicateurs $\vec{\lambda}_n$ satisfont donc aux conditions suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{\lambda}_{n-1} &= \vec{\lambda}_n \,(A - B_{K_1}\, RC) \\ \vec{\lambda}_N &= \vec{c} \; \left(= \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{x}_N}\right) \text{ fixé.} \end{aligned}}$$

Les $\vec{\lambda}_n$ se déduisent les uns des autres à partir de $\vec{\lambda}_N$ par une suite de récurrences ; si on ajoute aux conditions précédentes une fonction $\psi(\vec{\lambda}_0) = \vec{\lambda}_0 \cdot \vec{x}_0$, on obtient un problème en $\vec{\lambda}$ que nous appellerons problème dual.

Comme précédemment nous allons montrer l'égalité à l'optimum des fonctions du primal et du dual :

$$\boxed{\vec{\lambda}_N \, \vec{x}_N^{\,*} = \vec{\lambda}_0 \, , \vec{x}_0} \tag{80}$$

lorsque le problème primal possède un optimum *borné* de sa fonction économique $\varphi(\vec{x}_N)$.

Nous allons en donner trois démonstrations :

1. Démonstration directe :

Dans (79) tous les termes $\vec{\lambda}_{s+1}(B_{q-K_1} - B_{K_1}\, RD_{q-K_1})\, \vec{u}_s^{\,*\,q-K_1}$ sont nuls. En effet chaque composante du vecteur $\vec{\lambda}_{s+1}(B_{q-K_1} - B_{K_1} RD_{q-K_1})$ doit être négative ou nulle, puisque s'il n'en était pas ainsi, la maximisation de $\varphi(\vec{x}_N)$ donnerait un optimum non borné : si la k$^{\text{ième}}$ composante de ce vecteur était > 0, il suffirait de donner à la k$^{\text{ième}}$ composante du *vecteur libre* $\vec{u}_s^{\,q-K_1}$ des valeurs de plus en plus grandes pour faire croitre $\varphi(\vec{x}_N)$ au delà de toute limite, ce qui est incompatible avec l'hypothèse d'un maximum fini. Il est clair que dans la maximisation de $\vec{\lambda}_N \vec{x}_N$ on prendra $u_s^{i,q-K_1} = 0$ pour les composantes < 0.

2. Démonstration à l'aide des multiplicateurs de Kuhn-Tucker associés aux contraintes Q :

Les seuls multiplicateurs non nuls sont les multiplicateurs $\vec{\rho}_s^{\,K_1}$, et leurs valeurs trouvées précédemment (p. 44) donnent ici :

$$\vec{\rho}_s^{\,K_1} = \vec{\lambda}_{s+1} \, \frac{\partial \vec{T}_s}{\partial \vec{u}_s^{\,K_1}} R = \vec{\lambda}_{s+1} \cdot (B_{K_1} R)$$

de sorte que la condition nécessaire (28′) ou (28″) s'écrit [pour $j \in q - K_1$] :

$$\vec{\lambda}_{s+1}\,(\vec{B}^{j}_{q-K_1} - B_{K_1}\,R\,\vec{D}^{j}_{q-K_1}) \leqslant 0$$

où $\vec{B}^{j}_{q-K_1}$ et $\vec{D}^{j}_{q-K_1}$ sont la j-ièmes colonnes de B_{q-K_1} et D_{q-K_1} .

Le reste de la démonstration est identique à la démonstration précédente.

3. Démonstration par la programmation dynamique :

Comme $L_N(\vec{x}_N) = \vec{c}\,.\,\vec{x}_N$ est linéaire en $\vec{x}_N$, et que toutes les contraintes sont linéaires, il s'ensuit que $L_{N-1}(\vec{x}_{N-1}) = L_N[\vec{T}_{N-1}(x_{N-1}\,,\,\vec{u}^{\,*}_{N-1})]$ (57) est fonction linéaire de $\vec{x}_{N-1}$ . . . et de proche en proche que $L_n(\vec{x}_n)$ est une fonction linéaire de $\vec{x}_n$. On a donc :

$$L_n(\vec{x}_n) = \vec{\alpha}_n \cdot \vec{x}_n$$

Or on a vu en (62′) que : $\vec{\lambda}_n = \dfrac{\partial L_n}{\partial \vec{x}_n}$ et donc $\vec{\lambda}_n = \vec{\alpha}_n$, d'où :

$$L_n(\vec{x}_n) = \vec{\lambda}_n \cdot \vec{x}_n \tag{81}$$

Or on a vu enfin que la solution $\varphi(\vec{x}^{\,*}_N)$ du problème primal était $L_0(\vec{x}_0)$ *donc égale par (81) à* $\vec{\lambda}_0\vec{x}_0$. Enfin la condition $\vec{\lambda}_N = \vec{c}$ rend cohérente la définition de $L_N(\vec{x}_N) = \varphi(\vec{x}_N)$ puisque (81) donne alors :

$$\boxed{L_N(x_N) = \varphi(\vec{x}_N) = \vec{\lambda}_N \cdot \vec{x}_N\,.}$$

L'égalité (80) traduisant une dualité des fonctions économiques traduit en fait le théorème fondamental de dualité des programmes linéaires. Nous allons voir dans les deux exemples numériques suivants (et leurs généralisations) que le problème primal peut se mettre sous forme d'un programme linéaire dont le dual n'est autre que le "problème dual" sur les multiplicateurs $\vec{\lambda}_n$.

5.4.3. Remarque.

Dans le cas linéaire on peut rattacher très simplement les fonctions H_n du contrôle aux fonctions L_n de la programmation dynamique.

En effet, en vertu de la linéarité, l'équation (81) permet d'écrire :

$$L_{n+1}(\vec{x}_{n+1}) = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \vec{x}_{n+1}$$

or

$$H_n[\vec{\lambda}_{n+1}, \vec{x}_n, \vec{u}_n] = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) = L_{n+1}\ [\vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)] \qquad (82)$$

Dans ces conditions il est clair que la maximisation de l'hamiltonien H_n de l'étape n se ramène à la maximisation à l'étape n de la fonction L_{n+1}.

En effet : (cf 46) :

$$\underset{\vec{u}_n \epsilon \mathbf{K}_n}{\mathrm{Max}}\ H_n = \underset{\vec{u}_n \epsilon \mathbf{K}_n}{\mathrm{Max}}\ L_{n+1}[\vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)] = L_n(\vec{x}_n)$$

De plus l'équation ci-dessus montre que :

$$H_n^* = H_n(\vec{\lambda}_{n+1}, \vec{x}_n, \vec{u}_n^*) = \underset{\vec{u}_n \epsilon \mathbf{K}_n}{\mathrm{Max}}\ H_n(\vec{\lambda}_{n+1}, \vec{x}_n, \vec{u}_n) = L_n(\vec{x}_n)$$

Or d'après l'équation (81), $L_n(\vec{x}_n) = \vec{\lambda}_n \vec{x}_n$, d'où :

$$\boxed{H_n^* = \vec{\lambda}_n \cdot \vec{x}_n = L_n(\vec{x}_n)} \qquad (83)$$

Enfin on remarque que :

$$H_{n+1}^*(\vec{x}_{n+1}) = L_{n+1}(\vec{x}_{n+1}) = L_{n+1}[\vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)] = H_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)$$

ou

$$\boxed{H_{n+1}^*[\vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)] = H_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)} \qquad (84]$$

relation de récurrence entre hamiltoniens.

III – EXEMPLES D'APPLICATION

Les exemples ci-dessous sont de petits modèles économiques, mais cependant encore trop généraux pour être résolus numériquement. Nous serons donc amenés à montrer sur ces modèles la validité des développements précédents en commençant à chaque fois par la résolution numérique complète dans des cas plus simples où des valeurs numériques sont données aux paramètres de ces modèles. Nous serons conduits à traiter chaque problème tantôt comme un programme dynamique (sous la forme I ou II) tantôt comme un problème de contrôle optimal discret (sous la forme I ou II), tantôt comme un programme linéaire car ces modèles ont été choisis de telle sorte que l'on puisse les formuler comme programmes linéaires. Par ailleurs, nous aurons l'occasion de constater que ces problèmes contiennent des contraintes mixtes $\vec{Q}_n(\vec{x}_n , \vec{u}_n) \leqslant 0$, mais qu'un changement de variables permet aussi de transformer l'un d'eux en un nouveau problème ne contenant que des contraintes du type $\vec{U}_n(\vec{u}_n) \leqslant 0$.

1. Exemple 1 : PLANIFICATION DE PRODUCTION SUR N PERIODES

1.1. Formulation générale

Un certain produit peut être fabriqué selon q processus de production (ou *activités*) distincts. Nous noterons ces activités de 1 à q. On dispose au début de l'exercice d'une quantité donnée x_0 d'un facteur de production (matière première ou capital – nous choisirons ce dernier dans la formulation économique du problème –) : x_0 est donc le capital disponible au début de la période 0. Suivant que – à chaque période – le capital disponible est investi dans l'une ou l'autre des activités, le rendement n'est pas le même et le facteur d'usure du capital est aussi variable ; ceci veut dire qu'une unité de capital investie dans l'activité i au début d'une période permet d'obtenir a_i unités du produit pendant cette période et une certaine proportion b_i de ce capital est à nouveau disponible à la fin de cette période, de sorte que ce nouveau capital peut être réinvesti au début de la période suivante dans l'une ou l'autre des activités. En général $0 \leqslant b_i \leqslant 1$ car le capital subit une certaine usure ; mais il n'est pas impossible de généraliser en admettant que certaines activités peuvent être capitalisatrices en ce sens qu'un capital investi s'en trouve accru en fin de période. Nous supposerons donc seulement les conditions $a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$.

Nous admettrons enfin que les rendements (en produit et en capital) sont *proportionnels* de sorte que si on investit u^i unités de capital dans l'activité i au début d'une période quelconque, on obtient en fin de période $a_i u^i$ unités du produit et $b_i u^i$ unités de capital. Cette hypothèse de linéarité conduira à la formulation du problème sous forme de programme linéaire ; cependant on peut en toute généralité admettre que les rendements en produit et capital sont des fonctions $A_i(u^i)$ et $B_i(u^i)$.

Nous noterons u_n^i le montant de capital investi dans l'activité i pendant la période n ; ces variables sont les variables de contrôle du problème : à chaque période n on dispose donc de q variables de contrôle $u_n^1, u_n^2 \ldots u_n^i \ldots u_n^q$. Nous noterons x_n le capital disponible au début de la période n ; cette variable x_n est la variable d'état du système. A chaque période n on aura à répartir x_n entre les activités de sorte que x_n se subdivise en $u_n^1 \ldots u_n^q$.

Les contraintes (mixtes) du problème sont donc :

$$x_n = u_n^1 + u_n^2 + \ldots + u_n^i + \ldots + u_n^q \quad , \quad \forall n = 0, 1, \ldots N-1$$

$$0 \leqslant u_n^i \leqslant x_n \qquad \forall i, \forall n = 0, 1, 2, \ldots N-1$$

L'équation de transition est évidemment :

$$x_{n+1} = b_1 u_n^1 + b_2 u_n^2 + \ldots + b_i u_n^i + \ldots + b_q u_n^q = \vec{b}\,\vec{u}_n$$

Enfin la fonction économique à maximiser est la somme des quantités fabriquées du produit à chacune des périodes $n = 0, 1, \ldots . N-1$:

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_i a_i u_n^i \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \vec{a}\,\vec{u}_n = \sum_{n=0}^{N-1} R_n$$

Le problème se formule donc ainsi suivant que l'on adopte les formulations I ou II :

$$\mathrm{I}\quad\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\operatorname*{Max}_{\vec{u}_0\ldots\vec{u}_{N-1}}\ \sum_{n=0}^{N-1}\vec{a}\,\vec{u}_n\\[2mm]\left.\begin{array}{l}x_{n+1}=\vec{b}\cdot\vec{u}_n\\ 0\leqslant u_n^i\leqslant x_n\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{q}u_n^i=x_n\end{array}\right\}\ n=0,1,\ldots N-1\\[2mm] x_0\ \text{donné}\end{array}\right.$$

$$\mathrm{II}\quad\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\operatorname*{Max}_{\vec{u}_0\ldots\vec{u}_{N-1}}\ x_N^0\\[2mm]\left\{\begin{array}{l}x_{n+1}=\vec{b}\cdot\vec{u}_n\\ x_{n+1}^0=x_n^0+\vec{a}\cdot\vec{u}_n\end{array}\right.\\ 0\leqslant u_n^i\leqslant x_n\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{q}u_n^i=x_n\\ x_0\ \text{donné},\ x_0^0=0\end{array}\right.$$

1.2. Application numérique

Supposons que l'on n'ait que deux activités 1 et 2 et les valeurs suivantes des coefficients a_i et b_i :

Activité 1	Activité 2
$a_1 = 0.3$	$a_2 = 0.5$
$b_1 = 1.1$	$b_2 = 0.7$

L'exercice sera constitué de 5 périodes : $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ($N = 5$) ; et $x_0 = 100$.

Le problème se formule ainsi :

$$\mathrm{I}\quad\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\operatorname{Max}\ \sum_{n=0}^{4}(0.3\,u_n^1+0.5\,u_n^2)\\[2mm] x_{n+1}=1.1\,u_n^1+0.7\,u_n^2\\[2mm]\left.\begin{array}{l}0\leqslant u_n^1\leqslant x_n\\ 0\leqslant u_n^2\leqslant x_n\\ u_n^1+u_n^2=x_n\end{array}\right\}\ \text{ou}\ \vec{u}_n\in K_n\\[2mm] x_0=100\end{array}\right.$$

$$\mathrm{II}\quad\left\{\begin{array}{l}\operatorname{Max}\ x_5^0\\ x_{n+1}=1.1\,u_n^1+0.7\,u_n^2\\ x_{n+1}^0=x_n^0+0.3\,u_n^1+0.5\,u_n^2\\ \left.\begin{array}{l}0\leqslant u_n^1\leqslant x_n\\ 0\leqslant u_n^2\leqslant x_n\\ u_n^1+u_n^2=x_n\end{array}\right\}\ \text{ou}\ \vec{u}_n\in \mathbf{K}_n\\ x_0=100\ ,\ x_0^0=0\end{array}\right.$$

1.2.1. Résolution par la programmation dynamique.

a) Formulation I :

$\Lambda_4(x_4) = \underset{u_4^1, u_4^2}{\mathrm{Max}} \{0.3\, u_4^1 + 0.5\, u_4^2 \mid u_4^1 + u_4^2 = x_4\} = 0.5\, x_4$ (en mettant tout le poids x_4 sur le plus grand de 0.3 et 0.5) $u_4^1(x_4) = 0$, $u_4^2(x_4) = x_4$

$$\Lambda_3(x_3) = \underset{u_3^1, u_3^2}{\mathrm{Max}} \{0.3\, u_3^1 + 0.5\, u_3^2 + \Lambda_4(1.1\, u_3^1 + 0.7\, u_3^2) \mid u_3^1 + u_3^2 = x_3\} =$$

$$\underset{u_3^1, u_3^2}{\mathrm{Max}} \{0.3\, u_3^1 + 0.5\, u_3^2 + 0.5\,(1.1\, u_3^1 + 0.7\, u_3^2) \mid u_3^1 + u_3^2 = x_3\}$$

$= \underset{u_3^1, u_3^2}{\mathrm{Max}} \{0.85\, u_3^1 + 0.85\, u_3^2 \mid u_3^1 + u_3^2 = x_3\} = 0.85\, x_3$ quels que soient u_3^1 et u_3^2 pourvu que $u_3^1 + u_3^2 = x_3$

$$\Lambda_2(x_2) = \underset{u_2^1, u_2^2}{\mathrm{Max}} \{0.3\, u_2^1 + 0.5\, u_2^2 + \Lambda_3(1.1\, u_2^1 + 0.7\, u_2^2) \mid u_2^1 + u_2^2 = x_2\} =$$

$$\underset{u_2^1, u_2^2}{\mathrm{Max}} \{0.3\, u_2^1 + 0.5\, u_2^2 + 0.85\,(1.1\, u_2^1 + 0.7\, u_2^2) \mid u_2^1 + u_2^2 = x_2\}$$

$= \underset{u_2^1, u_2^2}{\mathrm{Max}} \{1.235\, u_2^1 + 1.095\, u_2^2 \mid u_2^1 + u_2^2 = x_2\} = 1.235\, x_2$ avec

$u_2^1(x_2) = x_2$ et $u_2^2(x_2) = 0$

$$\Lambda_1(x_1) = \underset{u_1^1, u_1^2}{\mathrm{Max}} \{0.3\, u_1^1 + 0.5\, u_1^2 + \Lambda_2(1.1\, u_1^1 + 0.7\, u_1^2) \mid u_1^1 + u_1^2 = x_1\}$$

$$\underset{u_1^1, u_1^2}{\mathrm{Max}} \{0.3\, u_1^1 + 0.5\, u_1^2 + 1.235\,(1.1\, u_1^1 + 0.7\, u_1^2) \mid u_1^1 + u_1^2 = x_1\}$$

$= \underset{u_1^1, u_1^2}{\mathrm{Max}} \{1.6585\, u_1^1 + 1.3645\, u_1^2 \mid u_1^1 + u_1^2 = x_1\} = 1.6585\, x_1$ avec

$u_1^1(x_1) = x_1$ et $u_1^2(x_1) = 0$

$$\Lambda_0(x_0) = \underset{u_0^1, u_0^2}{\mathrm{Max}} \{0.3\, u_0^1 + 0.5\, u_0^2 + \Lambda_1(1.1\, u_0^1 + 0.7\, u_0^2) \mid u_0^1 + u_0^2 = x_0\} =$$

$$\underset{u_0^1, u_0^2}{\mathrm{Max}} \{0.3\, u_0^1 + 0.5\, u_0^2 + 1.6585\,(1.1\, u_0^1 + 0.7\, u_0^2) \mid u_0^1 + u_0^2 = x_0\}$$

$$= \underset{u_0^1, u_0^2}{\mathrm{Max}} \{2.12435\, u_0^1 + 1.66095\, u_0^2 \mid u_0^1 + u_0^2 = x_0\} = 2.12435\, x_0$$

avec $u_0^1(x_0) = x_0$ et $u_0^2(x_0) = 0$

Solution : $x_0 = 100$; le maximum de la fonction économique est

$$\Lambda_0(x_0) = 2.12435\ x_0 = 212,435$$

on en déduit successivement : $u_0^1(x_0) = 100$ et $u_0^2(x_0) = 0$,

d'où $\qquad x_1 = 1.1\,(100) + 0.7\,(0) = 110$;

$u_1^1(x_1) = x_1 = 110$ et $u_1^2(x_1) = 0$, d'où $x_2 = 1.1\,(110) + 0.7\,(0) = 121$

$u_2^1(x_2) = x_2 = 121$ et $u_2^2(x_2) = 0$, d'où $x_3 = 1.1\,(121) + 0.7\,(0) = 133.1$

$u_3^1(x_3) = \lambda x_3 = 133.1\lambda$ et $u_3^2(x_3) = (1-\lambda)\,x_3 = (1-\lambda)\,133.1\ [0 \leqslant \lambda \leqslant 1]$

d'où $x_4 = 1.1\,(133.1\,\lambda) + 0.7\,(133.1)\,(1-\lambda)$

$$x_4 = 53.24\,\lambda + 93.17 \quad (93.17 \leqslant x_4 \leqslant 146.41)$$

$u_4^1(x_4) = 0$, $u_4^2(x_4) = x_4 = 53.24\,\lambda + 93.17$ d'où

$$x_5 = 0.7\,u_4^2 = 65.219 + 37.268\,\lambda^*$$

Remarque : On a obtenu, pour chaque étape, $\Lambda_n(x_n) = \lambda_n\,x_n$,

$[\lambda_4 = 0.5 \quad \lambda_3 = 0.85 \quad \lambda_2 = 1.235 \quad \lambda_1 = 1.6585 \quad \lambda_0 = 2.12435]$

avec $\quad \lambda_n = \text{Max}\,\{0.3 + 1.1\,\lambda_{n+1}\ ,\ 0.5 + 0.7\,\lambda_{n+1}\}$ et $\lambda_5 = 0$.

Ceci se voit par récurrence : d'une part $\lambda_4 = 0.5 = \text{Max}\,\{0.3\ ,\ 0.5\}$, et d'autre part si on suppose $\Lambda_{n+1}(x_{n+1}) = \lambda_{n+1}\,x_{n+1}$ on a :

$$\begin{aligned}\Lambda_n(x_n) &= \underset{u_n^1,\,u_n^2}{\text{Max}}\{0.3\,u_n^1 + 0.5\,u_n^2 + \Lambda_{n+1}(1.1\,u_n^1 + 0.7\,u_n^2)\mid u_n^1 + u_n^2 = x_n\}\\ &= \underset{u_n^1,\,u_n^2}{\text{Max}}\{0.3\,u_n^1 + 0.5\,u_n^2 + \lambda_{n+1}(1.1\,u_n^1 + 0.7\,u_n^2)\mid u_n^1 + u_n^2 = x_n\}\\ &= \underset{u_n^1,\,u_n^2}{\text{Max}}\{(0.3 + 1.1\,\lambda_{n+1})\,u_n^1 + (0.5 + 0.7\,\lambda_{n+1})\,u_n^2 \mid u_n^1 + u_n^2 = x_n\}\\ &= [\text{Max}\,\{(0.3 + 1.1\,\lambda_{n+1})\,,(0.5 + 0.7\,\lambda_{n+1})\}]\,x_n = \lambda_n \cdot x_n\end{aligned}$$

avec $\lambda_n = \text{Max}\,\{(0.3 + 1.1\,\lambda_{n+1})\,,(0.5 + 0.7\,\lambda_{n+1})\}$

---

* si on désire, *en une deuxième optimisation*, posséder le capital maximal à la fin de l'exercice sur 5 périodes, il faut donc choisir $\lambda = 1$.

b) Formulation II :

en posant $\vec{x}_n = \boxed{\begin{matrix} x_n^0 \\ x_n \end{matrix}}$ et $\vec{c} = \boxed{1 \quad 0}$, le problème s'écrit :

$$\left|\begin{array}{l} \text{Max } \vec{c}\,\vec{x}_5 \\ \vec{x}_{n+1} = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}\,\vec{x}_n + \boxed{\begin{matrix} 0.3 & 0.5 \\ 1.1 & 0.7 \end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix} u_n^1 \\ u_n^2 \end{matrix}} = A\vec{x}_n + B\vec{u}_n \\ \left.\begin{array}{l} u_n^1 + u_n^2 = x_n \\ 0 \leqslant u_n^1 \leqslant x_n \ , \ 0 \leqslant u_n^2 \leqslant x_n \end{array}\right\} \text{ ou } \vec{u}_n \in \mathbf{K}_n(\vec{x}_n) \\ \vec{x}_0 = \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 100 \end{matrix}} \end{array}\right.$$

On posera aussi dans la suite $\vec{\lambda}_n = \boxed{\lambda_n^0 \quad \lambda_n}$

$$L_4(\vec{x}_4) = \underset{\vec{u}_4 \in \mathbf{K}_4}{\text{Max}}\ \vec{c}\,\vec{x}_5 = \underset{\vec{u}_4 \in \mathbf{K}_4}{\text{Max}}\ \{\vec{c}A\vec{x}_4 + \vec{c}B\vec{u}_4\} = \underset{\vec{u}_4 \in \mathbf{K}_4}{\text{Max}}\ \{x_4^0 + 0.3\,u_4^1 + 0.5\,u_4^2\}$$

sur le domaine $\mathbf{K}_4$ l'optimum est évident : on prend $\vec{u}_4^{\,*} = \boxed{\begin{matrix} 0 \\ x_4 \end{matrix}}$, d'où

$$L_4(\vec{x}_4) = x_4^0 + 0.5\,x_4 = \lambda_4^0 x_4^0 + \lambda_4 x_4 = \vec{\lambda}_4\vec{x}_4 \quad \text{avec } \lambda_4^0 = 1\ ,\ \lambda_4 = 0.5$$

$$L_3(\vec{x}_3) = \underset{\vec{u}_3,\,\vec{u}_4}{\text{Max}}\ \vec{c}\,\vec{x}_5 = \underset{\vec{u}_3 \in \mathbf{K}_3}{\text{Max}}\left(\underset{\vec{u}_4 \in \mathbf{K}_4}{\text{Max}}\ \vec{c}\,\vec{x}_5\right) = \underset{\vec{u}_3 \in \mathbf{K}_3}{\text{Max}}\ L_4(A\vec{x}_3 + B\vec{u}_3) =$$

$$\underset{\vec{u}_3 \in \mathbf{K}_3}{\text{Max}}\ \{\vec{\lambda}_4 A\vec{x}_3 + \vec{\lambda}_4 B\vec{u}_3\}$$

$$= \underset{\vec{u}_3 \in \mathbf{K}_3}{\text{Max}}\ (x_3^0 + 0.85\,u_3^1 + 0.85\,u_3^2) = x_3^0 + 0.85\,x_3 = \lambda_3^0 x_3^0 + \lambda_3 x_3$$

avec $\lambda_3^0 = 1, \lambda_3 = 0.85$

car l'optimisation sur $\mathbf{K}_3$ est évidente : $\vec{u}_3^{\,*} = \boxed{\begin{matrix} \lambda x_3 \\ (1-\lambda)\,x_3 \end{matrix}}$

$$L_2(\vec{x}_2) = \underset{\vec{u}_2,\,\vec{u}_3,\,\vec{u}_4}{\text{Max}}\ \vec{c}\,\vec{x}_5 = \underset{\vec{u}_2 \in \mathbf{K}_2}{\text{Max}}\ L_3(A\vec{x}_2 + B\vec{u}_2) = \underset{\vec{u}_2 \in \mathbf{K}_2}{\text{Max}}\ (\vec{\lambda}_3 A\vec{x}_2 + \vec{\lambda}_3 B\vec{u}_2) =$$

$$\underset{\vec{u}_2 \in \mathbf{K}_2}{\text{Max}}\ (x_2^0 + 1.235\,u_2^1 + 1.095\,u_2^2)$$

$$L_2(\vec{x}_2) = x_2^0 + 1.235\, x_2 = \lambda_2^0 x_2^0 + \lambda_2 x_2 = \vec{\lambda}_2 \vec{x}_2 \quad \text{avec} \quad \lambda_2^0 = 1 \;, \lambda_2 \; 1.235 \;;$$

$$\vec{u}_2^{\,*} = \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_1(\vec{x}_1) = \operatorname*{Max}_{u_1 \in K_1} L_2(A\vec{x}_1 + B\vec{u}_1) = \operatorname*{Max}_{\vec{u}_1 \in K_1} (\vec{\lambda}_2 A\vec{x}_1 + \vec{\lambda}_2 B\vec{u}_1) =$$

$$\operatorname*{Max}_{\vec{u}_1 \in K_1} (x_1^0 + 1.6585\, u_1^1 + 1.3645\, u_1^2)$$

$$= x_1^0 + 1.6585\, x_1 = \lambda_1^0 x_1 + \lambda_1 x_1 = \vec{\lambda}_1 \vec{x}_1 \quad \text{avec}$$

$$\lambda_1^0 = 1 \;, \lambda_1 = 1.6585 \;\; ; \;\; \vec{u}_1^{\,*} = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$L_0(\vec{x}_0) = \operatorname*{Max}_{\vec{u}_0 \in K_0} L_1(A\vec{x}_0 + B\vec{u}_0) = \operatorname*{Max}_{\vec{u}_0 \in K_0} (\vec{\lambda}_1 A\vec{x}_0 + \vec{\lambda}_1 B\vec{u}_0) =$$

$$\operatorname*{Max}_{\vec{u}_0 \in K_0} (x_0^0 + 2.12435\, u_0^1 + 1.66095\, u_0^2)$$

$$= x_0^0 + 2.12435\, x_0 = \lambda_0^0 x_0^0 + \lambda_0 x_0 = \vec{\lambda}_0 \vec{x}_0 \quad \text{avec}$$

$$\lambda_0^0 = 1, \lambda_0 = 2.12435 \;; \vec{u}_0^{\,*} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La solution est donnée par $x_0 = 100$ et Max $x_5^0 = L_0(x_0) = 2.12435\, x_0 = 212.435$; la suite des $\vec{u}_n^{\,*}$ est la suivante – bien entendu la même que précédemment :

$$\vec{u}_0^{\,*} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ d'où } \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30 \\ 110 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 110 \end{bmatrix} \quad \text{et } x_1 = 110$$

($x_1^0 = 30$ = nombre d'unités du produit fabriquées à $n = 0$)

$$\vec{u}_1^{\,*} = \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ d'où } \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 30 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 33 \\ 121 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63 \\ 121 \end{bmatrix} \quad \text{et } x_2 = 121$$

($x_2^0 = 63$ = nombre d'unités fabriquées sur les périodes $n = 0, 1$)

$$\vec{u}_2^{\,*} = \begin{bmatrix} 121 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ d'où } \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 63 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 36.3 \\ 133.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 99.3 \\ 133.1 \end{bmatrix} \quad \text{et } x_3 = 133.1$$

($x_3^0 = 99.3$ = nombre d'unités fabriqués sur les périodes $n = 0, 1, 2$)

$$\vec{u}_3^* = \boxed{\begin{matrix} 133.1\ \lambda \\ 133.1\ (1-\lambda) \end{matrix}} \text{ d'où } \vec{x}_4 = \boxed{\begin{matrix} 99.3 \\ 0 \end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix} 66.55 - 26.62\ \lambda \\ 93.17 + 53.24\ \lambda \end{matrix}} =$$

$$\boxed{\begin{matrix} 165.85 - 26.62\ \lambda \\ 93.17 + 53.24\ \lambda \end{matrix}} \quad \begin{matrix} x_4 = 93.17 + 53.24\ \lambda \\ x_4^0 = 165.85 - 26.62\ \lambda = \text{nombre d'unités fabriquées} \end{matrix}$$

sur les périodes $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$$\vec{u}_4^* = \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 93.17 + 53.24\ \lambda \end{matrix}},\ \text{d'où } \vec{x}_5 = \boxed{\begin{matrix} 165.85 - 26.62\ \lambda \\ 0 \end{matrix}} +$$

$$+ \boxed{\begin{matrix} 46.585 + 26.62\ \lambda \\ 65.219 + 37.268\ \lambda \end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix} 212.435 \\ 65.219 + 37.268\ \lambda \end{matrix}}$$

$x_5 = 65.219 + 37.268\ \lambda$ et $x_5^0 = 212.435$ = nombre d'unités fabriquées sur les périodes $n = 0, 1, 2, 3, 4$.

1.2.2. Résolution par le principe du maximum (*).

Nous envisagerons le problème sous sa formulation II : les contraintes sont mixtes. Nous reprendrons le problème en remplaçant les contraintes mixtes par des contraintes $\vec{U}_n(\vec{u}_n) \leqslant 0$: ceci est possible par un changement de variables élémentaire.

On pose

$$H_n = \lambda_{n+1}\ T_n(x_n\,,\, \vec{u}_n) + \lambda_{n+1}^0\ T_n^0(x_n^0\,,\, x_n\,.\, \vec{u}_n)$$

$$H_n = \lambda_{n+1}(1.1\ u_n^1 + 0.7\ u_n^2) + \lambda_{n+1}^0(x_n^0 + 0.3\ u_n^1 + 0.5\ u_n^2)$$

$$= \lambda_{n+1}^0\, x_n^0 + (1.1\ \lambda_{n+1} + 0.3\ \lambda_{n+1}^0)\ u_n^1 + (0.7\ \lambda_{n+1} + 0.5\ \lambda_{n+1}^0)\ u_n^2$$

On a vu que dans le cas des contraintes mixtes le principe du maximum s'appliquait encore, à condition de remplacer les équations canoniques liant les $\vec{\lambda}_n$ (23) par les équations (67). En particulier les conditions aux limites demeurent :

$$\begin{cases} \lambda_N = 0 \ \text{(ici}\ \ \lambda_5 = 0) \\ \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = \lambda_3^0 = \lambda_4^0 = \lambda_4^0 = \lambda_5^0\ (= \lambda_N^0) = 1 \end{cases}$$

---

* On peut vérifier, sur cet exemple, à chaque étape $n = 1, 2, 3, 4$ la relation (84) et à chaque étape $n = 0, 1, 2, 3, 4$ la relation (83).

dans ces conditions l'hamiltonien à l'étape n [à maximiser pour $\vec{u}_n \in \mathbf{K}_n(x_n)$] s'écrit :

$$\boxed{H_n = x_n^0 + (1.1\ \lambda_{n+1} + 0.3)\ u_n^1 + (0.7\ \lambda_{n+1} + 0.5)\ u_n^2}$$

$\boxed{n = 4}$

Le maximum de $H_4 = x_4^0 + 0.3\ u_4^1 + 0.5\ u_4^2$

s'obtient pour $\vec{u}_4^* = \begin{bmatrix} 0 \\ x_4 \end{bmatrix}$ en mettant tout le poids sur $0.5 = \text{Max}\{0.3\ ,\ 0.5\}$

alors $$H_4^* = x_4^0 + 0.5\ x_4 = L_4(x_4)$$

Dans cette maximisation deux des contraintes mixtes sont saturées :

$$u_4^1 + u_4^2 = x_4$$
$$u_4^2 = x_4$$

de sorte que $Q^{K_1}(\vec{u}_4\ ,\vec{x}_4) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{C} \vec{x}_4 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \vec{u}_4 = 0$ d'où $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

la formule (77) donne :

$$\vec{\lambda}_4 = \vec{\lambda}_5 \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 1.1 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right) = \vec{\lambda}_5 \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.7 \end{bmatrix} \quad \text{avec}$$

$$\vec{\lambda}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

d'où $$\lambda_4^0 = 1 \qquad \lambda_4 = 0.5$$

$\boxed{n = 3}$

Le maximum de $H_3 = x_3^0 + (1.1\ \lambda_4 + 0.3)\ u_3^1 + (0.7\ \lambda_4 + 0.5)\ u_3^2$

$$H_3 = x_3^0 + (0.85)\ u_3^1 + (0.85)\ u_3^2$$

s'obtient en prenant $\vec{u}_3^* = \begin{bmatrix} \lambda x_3 \\ (1-\lambda)\ x_3 \end{bmatrix}$ $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; alors

$$H_3^* = x_3^0 + 0.85\ \ x_3 = L_3(x_3)$$

Si $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$ la seule contrainte bloquée est $u_3^1 + u_3^2 = x_3$ (cas 1)

Si $\lambda = 0$ une autre contrainte est bloquée $u_3^2 = x_3$ (cas 2)

Si $\lambda = 1$ une autre contrainte est bloquée $u_3^1 = x_3$ (cas 3)

Nous allons vérifier que les 3 cas ci-dessus a priori possibles donnent la même évaluation de $\vec{\lambda}_3$ par la formule (77) (dans le 1^er cas la variable dépendante est choisie arbitrairement u_3^1) :

$$\textit{Cas 1}: \quad R = 1 : \vec{\lambda}_3 = \vec{\lambda}_4 \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} 0.3 \\ 1.1 \end{matrix}} \; \boxed{1} \; \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \end{matrix}} \right)$$

$$= \vec{\lambda}_4 \boxed{\begin{matrix} 1 & 0.3 \\ 0 & 1.1 \end{matrix}} \Rightarrow \lambda_3^0 = 1 \ , \lambda_3 = 0.85$$

$$\textit{Cas 2}: \quad R = \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \quad \vec{\lambda}_3 = \vec{\lambda}_4 \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} 0.3 & 0.5 \\ 1.1 & 0.7 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \right) =$$

$$= \vec{\lambda}_4 \boxed{\begin{matrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 0.7 \end{matrix}}$$

$$\lambda_3^0 = 1 \qquad \lambda_3 = 0.85$$

$$\textit{Cas 3}: \quad R = \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} \quad \vec{\lambda}_3 = \vec{\lambda}_4 \left(\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} 0.3 & 0.5 \\ 1.1 & 0.7 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \right)$$

$$= \vec{\lambda}_4 \boxed{\begin{matrix} 1 & 0.3 \\ 0 & 1.1 \end{matrix}} \Rightarrow \lambda_3^0 = 1 \ , \lambda_3 = 0.85$$

$\boxed{n = 2}$

Le maximum de $H_2 = x_2^0 + (1.1\,\lambda_3 + 0.3)\,u_2^1 + (0.7\,\lambda_3 + 0.5)\,u_2^2$

$$H_2 = x_2^0 + 1.235\,u_2^1 + 1.095\,u_2^2$$

s'obtient en prenant $\vec{u}_2^* = \boxed{\begin{matrix} x_2 \\ 0 \end{matrix}}$; alors $H_2^* = x_2^0 + 1.235\,x_2 = L_2(x_2)$

les deux contraintes bloquées sont celles du cas 3 de sorte que l'on a

$$\vec{\lambda}_2 = \vec{\lambda}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_2^0 = 1 \ , \ \lambda_2 = 1.235$$

$\boxed{n = 1}$

Le maximum de $H_1 = x_1^0 + (1.1\ \lambda_2 + 0.3)\ u_1^1 + (0.7\ \lambda_2 + 0.5)\ u_1^1 =$

$$= x_1^0 + 1.6585\ u_1^1 + 1.3645\ u_1^2$$

s'obtient en prenant $\vec{u}_1^* = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix}$; alors $H_1^* = x_1^0 + 1.6585\ x_1 = L_1(x_1)$

les deux contraintes bloquées sont celles du cas 3 de sorte que l'on a

$$\vec{\lambda}_1 = \vec{\lambda}_2 \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1^0 = 1 \ , \ \lambda_1 = 1.6585$$

$\boxed{n = 0}$

Le maximum de $H_0 = x_0^0 + (1.1\ \lambda_1 + 0.3)\ u_0^1 + (0.7\ \lambda_1 + 0.5)\ u_0^2 =$

$$x_0^0 + 2.12435\ u_0^1 + 1.66095\ u_0^2$$

s'obtient en prenant $\vec{u}_0^* = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \end{bmatrix}$, alors $H_0^* = x_0^0 + 2.12435\ x_0 = L_0(x_0)$

les deux contraintes bloquées sont celles du cas 3 de sorte que l'on a

$$\vec{\lambda}_0 = \vec{\lambda}_1 \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0 & 1.1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_0^0 = 1 \ , \ \lambda_0 = 2.12435$$

1.2.3. Résolution par la programmation linéaire .

a) Programme primal :

Le remplacement des variables d'état x_n par leur expression $x_n = u_n^1 + u_n^2$ dans les équations de transition permet d'écrire le problème sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Max} \sum_{n=0}^{4} (0.3\, u_n^1 + 0.5\, u_n^2) \\ \quad u_n^i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2\ ; n = 0, 1, 2, 3, 4) \\ u_0^1 + u_0^2 = x_0 \text{ (donné } = 100) \\ u_1^1 + u_1^2 - 1.1\, u_0^1 - 0.7\, u_0^2 = 0 \\ u_2^1 + u_2^2 - 1.1\, u_1^1 - 0.7\, u_1^2 = 0 \\ u_3^1 + u_3^2 - 1.1\, u_2^1 - 0.7\, u_2^2 = 0 \\ u_4^1 + u_4^2 - 1.1\, u_3^1 - 0.7\, u_3^2 = 0 \end{cases}$$

La résolution simpliciale de ce programme linéaire redonne les résultats précédemment trouvés et un optimum de la fonction économique de

$$2.12435\ x_0 = 212.435$$

b) Programme dual :

Si on appelle $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ les variables duales associées aux 5 contraintes égalités ci dessus on voit que le programme dual s'écrit :

$$\text{Min } \lambda_0 x_0 \ (= 100\ \lambda_0) \quad \text{ou} \quad \text{Min } \lambda_0$$

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \lambda_0 \geqslant 0.3 + 1.1\ \lambda_1 \\ \lambda_0 \geqslant 0.5 + 0.7\ \lambda_1 \end{array}\right\} (0) \\ \left.\begin{array}{l} \lambda_1 \geqslant 0.3 + 1.1\ \lambda_2 \\ \lambda_1 \geqslant 0.5 + 0.7\ \lambda_2 \end{array}\right\} (1) \\ \left.\begin{array}{l} \lambda_2 \geqslant 0.3 + 1.1\ \lambda_3 \\ \lambda_2 \geqslant 0.5 + 0.7\ \lambda_3 \end{array}\right\} (2) \\ \left.\begin{array}{l} \lambda_3 \geqslant 0.3 + 1.1\ \lambda_4 \\ \lambda_3 \geqslant 0.5 + 0.7\ \lambda_4 \end{array}\right\} (3) \\ \left.\begin{array}{l} \lambda_4 \geqslant 0.3 \\ \lambda_4 \geqslant 0.5 \end{array}\right\} (4) \end{cases}$$

La résolution de ce programme peut s'effectuer très simplement en constatant les réactions en chaine suivantes : pour minimiser λ_0 il faut prendre λ_1 le plus petit possible [à cause des contraintes (0)], ce qui nécessite de prendre λ_2 le plus petit possible [à cause des contraintes (1)],etc. On est ainsi amené à rechercher aussi λ_4 le plus petit possible, c'est-à-dire $\lambda_4 = 0.5$ [à cause des contraintes (4)]. Il s'ensuit que la plus petite valeur possible de λ_3 [à cause de (3)] est $\lambda_3 = 0.85$, que la plus petite valeur possible de λ_2 est $\lambda_2 = 1.235$, et de même $\lambda_1 = 1.6585$ et $\lambda_0 = 2.12435$.

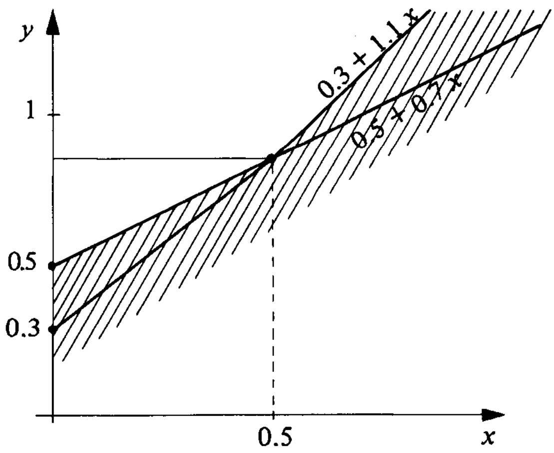
Remarque:

On peut voir, en traçant les deux droites

$$y = 0.3 + 1.1\,x \quad \text{et} \quad y = 0.5 + 0.7\,x$$

que, dès lors que $\lambda_4 \geqslant 0.5$, les contraintes doubles (0), (1), (2), (3), (4) se ramènent aux contraintes simples suivantes (car alors tous les λ_i sont nécessairement $\geqslant 0.5$ et la contrainte $y \geqslant 0.5 + 0.7\,x$ devient redondante) :

$$\lambda_0 \geqslant 0.3 + 1.1\,\lambda_1$$
$$\lambda_1 \geqslant 0.3 + 1.1\,\lambda_2$$
$$\lambda_2 \geqslant 0.3 + 1.1\,\lambda_3$$
$$\lambda_3 \geqslant 0.3 + 1.1\,\lambda_4$$
$$\lambda_4 \geqslant 0.5.$$



(1)

La minimisation de λ_0, donc de tous les λ_i, s'effectue en remplaçant toutes les inégalités ci-dessus par des égalités, ce qui constitue une autre façon très rapide de résoudre le programme dual.

Il ressort des valeurs trouvées ci-dessus que les variables duales λ_i sont très exactement les valeurs des multiplicateurs de Green intervenant dans la résolution par le principe du maximum et sont aussi les valeurs intervenant dans l'expression des fonctions Λ ou L de la résolution par programmation dynamique.

1.3. Résolution du modèle général

1.3.1. Résolution par la programmation dynamique.

a) Formulation I :

Nous suivons pas à pas les étapes développées en 5.1 :

α)

$$\Lambda_{N-1}(x_{N-1}) = \underset{\vec{u}_{N-1}}{\text{Max}} \{\vec{a}\ \vec{u}_{N-1} \mid \sum_i u^i_{N-1} = x_{N-1}\} =$$

$$\underset{\vec{u}_{N-1}}{\text{Max}} \{\sum_{i=1}^{q} a_i u^i_{N-1} \mid \sum_i u^i_{N-1} = x_{N-1}\}$$

Ce problème de maximisation revient à chercher à rendre maximale l'abscisse du barycentre des points d'abscisses a_i affectés des poids u^i_{N-1} de somme donnée ; ceci s'effectue en affectant tout le poids x_{N-1} sur le point d'abscisse la plus grande $a_{i_1} = (\max_i a_i)$; d'où

$$\Lambda_{N-1}(x_{N-1}) = a_{i_1} x_{N-1} = (\max_i a_i)\, x_{N-1} \quad \text{par} \quad u^i_{N-1} = 0 \quad \forall i \neq i_1$$

$$\text{et} \quad u^{i_1}_{N-1} = x_{N-1}$$

Si on pose $\lambda_{N-1} = \max_i a_i$ on voit que l'on a

$$\boxed{\Lambda_{N-1}(x_{N-1}) = \lambda_{N-1} \cdot x_{N-1}}$$

β)

$$\Lambda_{N-2}(x_{N-2}) = \underset{\vec{u}_{N-2}}{\text{Max}} \{\vec{a}\vec{u}_{N-2} + \Lambda_{N-1}(x_{N-1}) \mid \sum_i u^i_{N-2} = x_{N-2}\} =$$

$$= \underset{\vec{u}_{N-2}}{\text{Max}} \{\vec{a}\ \vec{u}_{N-2} + \Lambda_{N-1}(\vec{b}\ \vec{u}_{N-2}) \mid \sum_i u^i_{N-2} = x_{N-2}\}$$

$$= \underset{\vec{u}_{N-2}}{\text{Max}} \{\vec{a}\vec{u}_{N-2} + \lambda_{N-1}\ \vec{b}\ \vec{u}_{N-2} \mid \sum_i u^i_{N-2} = x_{N-2}\} =$$

$$= \underset{\vec{u}_{N-2}}{\text{Max}} \{\sum_{i=1}^{q} (a_i + \lambda_{N-1} b_i)\, u^i_{N-2} \mid \sum_i u^i_{N-2} = x_{N-2}\}$$

Il s'agit encore de rechercher par une distribution de poids u^i_{N-2} sur des points d'abscisses $(a_i + \lambda_{N-1} b_i)$ de rendre la plus grande possible l'abscisse du barycentre. Ceci s'effectue en mettant tout le poids x_{N-2} sur le point de plus grande abscisse $a_{i_2} + \lambda_{N-1} b_{i_2} = \underset{i}{\mathrm{Max}}\, (a_i + \lambda_{N-1} b_i)$; d'où :

$$\Lambda_{N-2}(x_{N-2}) = (a_{i_2} + \lambda_{N-1} b_{i_2})\, x_{N-2} = [\underset{i}{\mathrm{Max}}\, (a_i + \lambda_{N-1} b_i)]\, x_{N-2}$$

$$\text{par} \quad u^i_{N-2} = 0 \quad \forall i \neq i_2 \quad \text{et} \quad u^{i_2}_{N-2} = x_{N-2}$$

Si on pose

$$\lambda_{N-2} = \underset{i}{\mathrm{Max}}\, (a_i + \lambda_{N-1} b_i)$$

on voit que l'on a

$$\boxed{\Lambda_{N-2}(x_{N-2}) = \lambda_{N-2} \cdot x_{N-2}} \quad \ldots\ldots$$

γ) Par récurrence et de la même façon on voit que si l'on suppose que l'on a

$$\Lambda_{n+1}(x_{n+1}) = \lambda_{n+1} \cdot x_{n+1} \qquad \text{avec} \qquad \lambda_{n+1} = \underset{i}{\mathrm{Max}}\, (a_i + \lambda_{n+2} b_i)$$

on peut écrire :

$$\Lambda_n(x_n) = \underset{\vec{u}_n}{\mathrm{Max}}\, \{\vec{a}\,\vec{u}_n + \Lambda_{n+1}(\vec{b}\,\vec{u}_n) \mid \sum_i u^i_n = x_n\}$$

$$= \underset{\vec{u}_n}{\mathrm{Max}}\, \{\sum_i (a_i + \lambda_{n+1} b_i)\, u^i_n \mid \sum_i u^i_n = x_n\}$$

$$= [\underset{i}{\mathrm{Max}}\, (a_i + \lambda_{n+1} b_i)] \cdot x_n = (a_{i_k} + \lambda_{n+1} b_{i_k})\, x_n$$

$$\text{par} \quad u^i_n = 0 \quad \forall i \neq i_k \ \text{et} \quad u^{i_k}_n = x_n$$

D'où

$$\boxed{\Lambda_n(x_n) = \lambda_n x_n} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{\lambda_n = \underset{i}{\mathrm{Max}}\, (a_i + \lambda_{n+1} b_i)}$$

En conclusion, si on pose $\Lambda_N(x_N) = 0 = \lambda_N x_N$ avec $\lambda_N = 0$:

$$\begin{cases} \Lambda_n(x_n) = \lambda_n \cdot x_n \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, \ldots N-1, N \\ \text{avec} \quad \lambda_n = \underset{i}{\mathrm{Max}}\, (a_i + \lambda_{n+1} b_i) \quad \text{et} \quad \lambda_N = 0 \end{cases}$$

b) Formulation II :

$$\boxed{\begin{matrix} x_{n+1}^0 \\ x_{n+1} \end{matrix}} = \underbrace{\boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}}_{A} \boxed{\begin{matrix} x_n^0 \\ x_n \end{matrix}} + \underbrace{\boxed{\begin{matrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{matrix}}}_{B} \boxed{\vec{u}_n}$$

on pose $\vec{c} = \boxed{1 \quad 0}$ et $K_n = \left\{ \vec{u}_n \geqslant 0 \mid \sum_{i=1}^{q} u_n^i = x_n \right\}$

$$L_{N-1}(\vec{x}_{N-1}) = \underset{\vec{u}_{N-1} \in K_{N-1}}{\text{Max}} \vec{c}\,\vec{x}_N = \underset{\vec{u}_{N-1} \in K_{N-1}}{\text{Max}} (\vec{c}\,A\vec{x}_{N-1} + \vec{c}\,B\vec{u}_{N-1}) =$$

$$\text{Max}\,(x_{N-1}^0 + \vec{a}\,\vec{u}_{N-1})$$

$$= x_{N-1}^0 + (\underset{i}{\text{Max}}\, a_i)\, x_{N-1} = \lambda_{N-1}^0 x_{N-1}^0 + \lambda_{N-1} x_{N-1} = \vec{\lambda}_{N-1} \vec{x}_{N-1}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \lambda_{N-1}^0 = 1 \\ \lambda_{N-1} = (\underset{i}{\text{Max}}\, a_i) \end{cases}$$

$$L_{N-2}(\vec{x}_{N-2}) = \underset{\vec{u}_{N-2} \in K_{N-2}}{\text{Max}} L_{N-1}(A\vec{x}_{N-2} + B\vec{u}_{N-2}) =$$

$$= \underset{\vec{u}_{N-2} \in K_{N-2}}{\text{Max}} \{\vec{\lambda}_{N-1} A\vec{x}_{N-2} + \vec{\lambda}_{N-1} B\vec{u}_{N-2}\}$$

$$= \underset{\vec{u}_{N-2} \in K_{N-2}}{\text{Max}} [x_{N-2}^0 + (\vec{a} + \lambda_{N-1}\vec{b})\vec{u}_{N-2}] =$$

$$= x_{N-2}^0 + [\underset{i}{\text{Max}}\, (a_i + \lambda_{N-1} b_i]\, x_{N-2} =$$

$$= \lambda_{N-2}^0 x_{N-2}^0 + \lambda_{N-2} x_{N-2} = \vec{\lambda}_{N-2} \cdot \vec{x}_{N-2}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \lambda_{N-2}^0 = 1 \\ \lambda_{N-2} = \underset{i}{\text{Max}}\, (a_i + \lambda_{N-1} b_i) \end{cases}$$

Par récurrence et de la même façon on voit que, [en posant $L_N(\vec{x}_N) = x_N^0 = \vec{\lambda}_N \vec{x}_N$ avec $\lambda_N^0 = 1$ et $\lambda_N = 0$] l'on obtient :

$$\boxed{\begin{array}{l} L_n(\vec{x}_n) = \vec{\lambda}_n \cdot \vec{x}_n \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots N-1, N \\ \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda_n^0 = 1 \\ \lambda_n = \underset{i}{\text{Max}}\, (a_i + \lambda_{n+1} b_i) \quad \text{et} \quad \lambda_N = 0 \end{cases} \end{array}}$$

1.3.2. Résolution par application du principe du maximum.

a) Résolution directe :

L'hamiltonien de l'étape n s'écrit :

$$H_n = \lambda_{n+1} \cdot \vec{b}\,\vec{u}_n + \lambda^0_{n+1}\,(x^0_n + \vec{a}\cdot\vec{u}_n)$$

d'après les conditions nécessaires $\lambda^0_n = 1$ $(n = 0, 1, \ldots N)$ et donc :

$$H_n = x^0_n + (\vec{a} + \lambda_{n+1}\vec{b})\,\vec{u}_n = x^0_n + \sum_{i=1}^{q} (a_i + \lambda_{n+1}\,b_i)\,u^i_n$$

Si on appelle $\mathbf{K}_n(\vec{x}_n)$ l'ensemble des contrôles admissibles à l'étape n, c'est-à-dire des vecteurs $\vec{u}_n$ satisfaisant aux contraintes du problème

$$(0 \leqslant u^i_n \leqslant x_n\ ,\ \sum_{i=1}^{q} u^i_n = x_n)$$

la maximisation sur $\mathbf{K}_n$ de H_n s'effectue en mettant tout le poids x_n sur la composante de $\vec{u}_n$ dont le coefficient $(a_i + \lambda_{n+1}b_i)$ est le plus grand :

$$u^i_n = 0\ \ \forall i \neq i_0 \qquad u^{i_0}_n = x_n \qquad \text{avec} \quad a_{i_0} + \lambda_{n+1}\,b_{i_0} = \operatorname*{Max}_i\,(a_i + \lambda_{n+1}b_i)$$

La suite de la résolution est immédiate si l'on connait la suite des λ_n depuis $\lambda_N = 0$; on peut calculer les λ_n par récurrence à l'aide de la formule (77) car ici les contraintes sont mixtes. D'après ce que nous venons de voir, de l'ensemble des $(q + 1)$ contraintes du problème il y en a toujours deux saturées à chaque étape :

$$\begin{cases} u^1_n + u^2_n + \ldots + u^q_n = x_n \\ u^{i_0}_n = x_n \end{cases}$$

Dans ces conditions les matrices C et D s'écrivent :

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & i_0 & \ldots & q \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

et dans la contrainte $\vec{Q}^{K_1}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) = C\vec{x}_n + D\vec{u}_n = 0$ la variable $u^{i_0}_n$ ne peut être indépendante.

Nous prendrons donc u^1_n et $u^{i_0}_n$ comme variables dépendantes (si $i_0 \neq 1$) d'où :

$$D_{K_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

[si $i_0 = 1$, nous prendrons u_n^1 et u_n^2 comme variables dépendantes, d'où :

$$D_{K_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\Bigg] .$$

Dans l'équation de transition $\vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n + B\vec{u}_n$ on a posé

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \end{bmatrix}$$

Dans ces conditions l'équation de récurrence (77) s'écrit :

$$\vec{\lambda}_n = \vec{\lambda}_{n+1} \left(\frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{x}_n} - \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial \vec{u}_n^{K_1}} \cdot R \cdot \frac{\partial \vec{Q}_n}{\partial \vec{x}_n}\right) = \vec{\lambda}_{n+1} (A - B_{K_1} RC)$$

$$i_0 \neq 1 \quad \begin{bmatrix} \lambda_n^0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{n+1}^0 & \lambda_{n+1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 & a_{i_0} \\ b_1 & b_{i_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \vec{\lambda}_{n+1} \begin{bmatrix} 1 & a_{i_0} \\ 0 & b_{i_0} \end{bmatrix}$$

$$i_0 = 1 \quad \begin{bmatrix} \lambda_n^0 & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{n+1}^0 & \lambda_{n+1} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{i_0} & a_2 \\ b_{i_0} & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \vec{\lambda}_{n+1} \begin{bmatrix} 1 & a_{i_0} \\ 0 & b_{i_0} \end{bmatrix}$$

Dans les deux cas on obtient

$$\begin{cases} \lambda_n^0 = \lambda_{n+1}^0 = \ldots = 1 \\ \lambda_n = a_{i_0} + \lambda_{n+1} b_{i_0} \end{cases}$$

d'où l'équation de récurrence donnant les multiplicateurs :

$$\boxed{\lambda_n = \operatorname*{Max}_i (a_i + \lambda_{n+1} b_i)}$$

b) Changement de variables:

On peut, par un changement de variables élémentaire, ne pas avoir recours à la formule (77) mais seulement à la formule plus classique (11) ou (23) :

$$\lambda_n^j = \vec{\lambda}_{n+1} \frac{\partial \vec{T}_n}{\partial x_n^j} = \frac{\partial H_n}{\partial x_n^j} \qquad (11),(23)$$

(où les dérivées partielles sont évaluées à l'optimum), qui n'est valable que lorsque les contraintes sur les variables de contrôle ne font pas intervenir les variables d'état.

Si on choisit comme nouvelles variables de contrôle les variables $\vec{v}_n$ liées aux anciennes variables $\vec{u}_n$ par

$$v_n^i = \frac{u_n^i}{x_n} \text{ (ou } \vec{u}_n = x_n \ \vec{v}_n)$$

le problème s'écrit :

$\underset{\vec{v}_0 \dots \vec{v}_{N-1}}{\mathrm{Max}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n (\vec{a} \cdot \vec{v}_n)$ $\left.\begin{array}{l} x_{n+1} = x_n (\vec{b} \cdot \vec{v}_n) \\ 0 \leqslant v_n^i \leqslant 1 \\ \sum_{i=1}^{q} v_n^i = 1 \end{array}\right\} \quad n = 0, 1 \dots N-1$ x_0 donné	$\underset{\vec{v}_0 \vec{v}_1 \dots \vec{v}_{N-1}}{\mathrm{Max}} x_N^0$ $\left.\begin{array}{l} x_{n+1}^0 = x_n^0 + x_n (\vec{a} \cdot \vec{v}_n) \\ x_{n+1} = x_n (\vec{b} \cdot \vec{v}_n) \\ 0 \leqslant v_n^i \leqslant 1 \\ \sum_{i=1}^{q} v_n^i = 1 \end{array}\right\} n = 0, 1 \dots N-1$ x_0 donné , $x_0^0 = 0$

On forme l'hamiltonien (compte tenu des conditions $\lambda_n^0 = \lambda_{n+1}^0 = \dots = 1$) :

$$H_n = \lambda_{n+1} (x_n \cdot \vec{b} \ \vec{v}_n) + x_n^0 + x_n (\vec{a} \vec{v}_n) = x_n^0 + x_n \left[\sum_{i=1}^{q} (a_i + \lambda_{n+1} \ b_i) \, v_n^i \right]$$

La maximisation de H_n par rapport à $\vec{v}_n$ se ramène à la maximisation du terme entre crochets, combinaison linéaire convexe des termes $(a_i + \lambda_{n+1} b_i)$, ce qui s'effectue en mettant tout le poids 1 sur la composante $v_n^{i_0}$ dont le coefficient $(a_{i_0} + \lambda_{n+1} b_{i_0})$ est le plus grand des coefficients. La succession des multiplicateurs λ_n se déduit de (11) ou (23).

$$\lambda_n^0 = \left(\frac{\partial H_n}{\partial x_n^0}\right)^* = 1 \quad , \quad \lambda_n = \left(\frac{\partial H_n}{\partial x_n}\right)^* = (\vec{a} + \lambda_{n+1} \vec{b}) \, \vec{v}_n^{\,*} = a_{i_0} + \lambda_{n+1} b_{i_0}$$

On retrouve encore une fois les résultats précédents :

$$\lambda_N = 0 \; ; \lambda_{N-1} = \operatorname*{Max}_i \; (a_i + \lambda_N b_i) = \operatorname*{Max}_i a_i \; ; \ldots$$

$$\ldots, \; \lambda_n = \operatorname*{Max}_i \; (a_i + \lambda_{n+1} b_i) \, , \ldots , \lambda_0 = \operatorname*{Max}_i (a_i + \lambda_1 b_i)$$

la connaissance de λ_{n+1} permettant de calculer $\vec{v}_n^*$ ou $\vec{u}_n^*$ à chaque étape n.

1.3.3. Résolution par la programmation linéaire.

a) Programme primal :

Dans l'expression I du problème, si on remplace dans les équations de transition $x_{n+1} = \vec{b}\,\vec{u}_n$ la variable d'état x_n par son expression $x_n = \sum_{i=1}^{q} u_n^i$ on obtient le programme :

$$\left\{\begin{array}{l}
\operatorname*{Max}_{\vec{u}_0 \ldots \vec{u}_n \ldots \vec{u}_{N-1}} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{i=1}^{q} a_i u_n^i \right) \\
u_n^i \geqslant 0 \quad \begin{cases} i = 1 \, , 2 \, , \ldots q \\ n = 0 \, , 1 \, , \ldots N-1 \end{cases} \\
\sum_{i=1}^{q} u_0^i = x_0 \text{ (donné)} \\
\sum_{i=1}^{q} u_1^i - \sum_{i=1}^{q} b_i u_0^i = 0 \\
\sum_{i=1}^{q} u_2^i - \sum_{i=1}^{q} b_i u_1^i = 0 \\
\quad \vdots \\
\sum_{i=1}^{q} u_n^i - \sum_{i=1}^{q} b_i u_{n-1}^i = 0 \\
\quad \vdots \\
\sum_{i=1}^{q} u_{N-1}^i - \sum_{i=1}^{q} b_i u_{N-2}^i = 0
\end{array}\right.$$

b) Programme dual :

Si on appelle $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_{N-1}$ les variables duales associées respectivement aux N contraintes égalités du primal on obtient le programme linéaire dual suivant :

$$\left\{\begin{array}{llll} \text{Min } (\lambda_0 x_0) & ou & \text{Min } \lambda_0 & \\ \lambda_0 & \geqslant a_i + \lambda_1 b_i & (i = 1, 2, \ldots q) & \\ \lambda_1 & \geqslant a_i + \lambda_2 b_i & (i = 1, 2, \ldots q) & \\ \lambda_2 & \geqslant a_i + \lambda_3 b_i & (i = 1, 2, \ldots q) & \\ \vdots & & \vdots & \\ \lambda_n & \geqslant a_i + \lambda_{n+1} b_i & (i = 1, 2, \ldots q) & \lambda_n \text{ de signe quelconque} \\ & & & \text{pour } n = 0, 1, 2, \ldots N-1 \\ \vdots & & \vdots & \\ \lambda_{N-2} & \geqslant a_i + \lambda_{N-1} b_i & (i = 1, 2, \ldots q) & \\ \lambda_{N-1} & \geqslant a_i & (i = 1, 2, \ldots q) & \end{array}\right.$$

Résolution du programme dual : Pour minimiser λ_0, comme

$$\lambda_0 \geqslant a_i + \lambda_1 b_i, \forall i,$$

on *doit* prendre $\lambda_0 = \operatorname{Max}_i (a_i + \lambda_1 b_i)$ et essayer de rendre ceci le plus petit possible ; comme $b_i \geqslant 0$ on doit donc prendre λ_1 le plus petit possible ; or comme l'on a $\lambda_1 \geqslant a_i + \lambda_2 b_i$ ($\forall i$) on *doit* prendre

$$\lambda_1 = \operatorname{Max}_i (a_i + \lambda_2 b_i)$$

et pour minimiser λ_1 il faut essayer de rendre le plus petit possible $\operatorname{Max}_i (a_i + \lambda_2 b_i)$ ce qui se fera en prenant λ_2 le plus petit possible (car $b_i \geqslant 0$) . . . etc.

Le raisonnement se poursuit et l'on en arrive à chercher à rendre λ_{N-1} le plus petit possible, ce qui est alors très simple et donne $\lambda_{N-1} = \operatorname{Max}_i a_i$. On remonte alors de $N - 1$ à 0 pour obtenir enfin la suite d'égalités suivante :

$$\begin{array}{lll} \lambda_0 & = \operatorname{Max}_i (a_i + \lambda_1 b_i) \\ \lambda_1 & = \operatorname{Max}_i (a_i + \lambda_2 b_i) \\ \lambda_2 & = \operatorname{Max}_i (a_i + \lambda_3 b_i) \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n & = \operatorname{Max}_i (a_i + \lambda_{n+1} b_i) \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_{N-2} & = \operatorname{Max}_i (a_i + \lambda_{N-1} b_i) \\ \lambda_{N-1} & = \operatorname{Max}_i a_i \end{array}$$

On constate donc que les variables duales λ_n satisfont exactement les mêmes relations que celles que nous avions obtenues dans la résolution par programmation dynamique et par application du principe du maximum discret. La résolution de ces équations s'effectue graphiquement en traçant toutes les droites d'équation $y = a_i + b_i x$ et en prenant leur enveloppe supérieure $y = f(x)$; $f(x)$ est une ligne brisée. On calcule alors de proche en proche λ_{N-1}, puis $\lambda_{N-2} = f(\lambda_{N-1}) \dots \lambda_n = f(\lambda_{n+1}) \dots \lambda_0 = f(\lambda_1)$ et on obtient ainsi tous les coefficients λ_n.

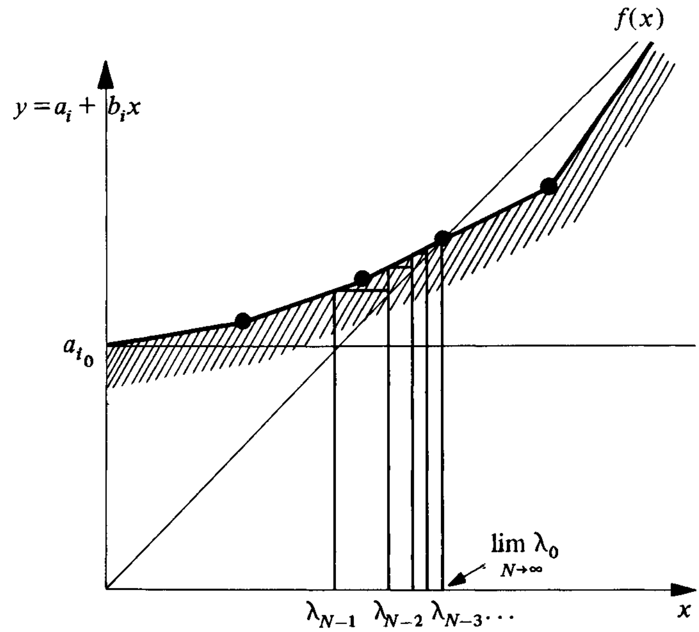
Si on note a_{i_0} le plus grand des a_i, deux cas sont possibles :

1) $b_{i_0} \geqslant b_i$, $\forall i$: alors le problème est simple puisque l'activité i_0 est toujours la meilleure : à chaque étape on investit tout x_n dans cette activité unique qui a les meilleurs rendements à la fois en produit et en capital.

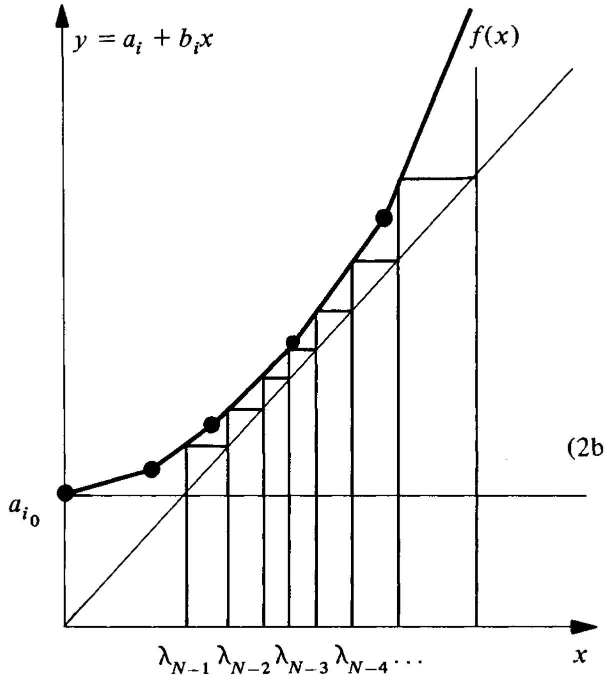
2) $b_{i_0} \neq \max b_i$: on trace alors la courbe $f(x)$.

a) si $f(x)$ coupe la première bissectrice, pour aussi grand que soit N, c'est-à-dire pour autant qu'il y ait d'étapes nécessaires pour calculer λ_0, on constate que lorsque $N \to \infty, \lambda_0$ tend vers la solution de l'équation $f(\lambda_0) = \lambda_0$.

b) si $f(x)$ ne coupe pas la première bissectrice, on constate que lorsque $N \to \infty$, $\lambda_0 \to \infty$.



(2a)



2. Exemple 2 : PLANIFICATION D'ACHATS ET DE VENTES SUR N PERIODES.

2.1. Formulation générale

Un certain produit peut s'acheter ou se vendre à chaque période n ; les prix d'achat $c_n \geqslant 0$ et de vente $p_n \geqslant 0$ sont variables d'une période à l'autre et supposés connus à l'avance. Ce produit peut être entreposé pour être conservé d'une période à l'autre, mais la capacité de stockage est limitée à S ; cette possibilité de stockage et sa limitation conduisent à essayer d'acheter au moment où le prix d'achat est le plus faible, et à conserver jusqu'au moment où le prix de vente est le plus élevé, mais la gestion optimale sur N périodes n'est pas évidente. Nous verrons cependant qu'une règle très simple peut être énoncée dont l'application à chaque période assure une "gestion optimale" sur tout l'exercice au sens du profit maximal.

Nous appellerons respectivement u_n^1 et u_n^2 les quantités achetées et vendues à la période n, de sorte que le profit pour cette période est

$$(p_u u_n^1 - c_n u_n^2)$$

et *le profit total* : $\sum_{n=0}^{N-1} p_n u_n^1 - c_n u_n^2$. On admet que la commande de u_n^2 unités est passée au milieu de la période n et que la livraison est effectuée au début de la période suivante $(n+1)$.

Nous prendrons comme variable d'état x_n la quantité en stock au début de la période n ; avec les hypothèses ci-dessus *l'équation de transition* de de ce problème est :

$$x_{n+1} = x_n - u_n^1 + u_n^2$$

Les contraintes de ce problème sont de deux types à chaque période n :

a) ne pas vendre plus que le niveau du stock disponible au début de la période :

$$u_n^1 \leqslant x_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots N-1)$$

b) ne jamais excéder la capacité de stockage :

$$x_{n+1} \leqslant S \quad (n = 0, 1, \dots N-1)$$

ou encore :
$$-u_n^1 + u_n^2 \leqslant S - x_n$$

la présence de la constante S dans la dernière contrainte empêche d'écrire les contraintes mixtes du problème sous la forme $\vec{Q}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) = C\vec{x}_n + D\vec{u}_n \leqslant 0$. Il est facile de s'y ramener en définissant une nouvelle variable d'état x_n^2 (en posant $x_n = x_n^1$) qui sera la capacité de stockage encore disponible au début de la période n ·

$$x_n^2 = S - x_n^1.$$

Nous admettrons enfin que le niveau du stock au début de la période 0 est connu $x_0^1 = x_0$ (ainsi donc que la capacité de stockage encore disponible $x_0^2 = S - x_0$).

Dans ces conditions les formulations I et II du problème sont les suivantes

I	$\underset{\vec{u}_0 \vec{u}_1 \dots \vec{u}_{N-1}}{\mathrm{Max}} \sum_{n=0}^{N-1} (p_n u_n^1 - c_n u_n^2)$ $x_{n+1}^1 = x_n^1 - u_n^1 + u_n^2$ $x_{n+1}^2 = x_n^2 + u_n^1 - u_n^2$ $\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant u_n^1 \leqslant x_n^1 \\ 0 \leqslant u_n^2 \leqslant x_n^2 + u_n^1 \end{array}\right\\}$ ou $\vec{u}_n \in \mathrm{K}_n$ $\vec{x}_0$ donné $= \boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ S - x_0 \end{array}}$	$\underset{\vec{u}_0 \vec{u}_1 \dots \vec{u}_{N-1}}{\mathrm{Max}} \quad x_N^0$ $x_{n+1}^0 = x_n^0 + p_n u_n^1 - c_n u_n^2$ $x_{n+1}^1 = x_n^1 - u_n^1 + u_n^2$ $x_{n+1}^2 = x_n^2 + u_n^1 - u_n^2$ $\left.\begin{array}{l} 0 \leqslant u_n^1 \leqslant x_n^1 \\ 0 \leqslant u_n^2 \leqslant x_n^2 + u_n^1 \end{array}\right\\}$ ou $\vec{u}_n \in \mathrm{K}_n$ $x_0^0 = 0, \; x_0^1 = x_0, \; x_0^2 = S - x_0$	II

Nous utiliserons la formulation I pour ramener le problème à un programme linéaire, mais la formulation II est plus commode pour l'application de la programmation dynamique et du principe du maximum : la formulation II ci-dessus est d'ailleurs du type linéaire le plus général :

$$\boxed{\begin{array}{l} \underset{\vec{u}_0\vec{u}_1\cdots}{\mathrm{Max}}\ \vec{c}\,\vec{x}_N \\ \vec{x}_{n+1} = A\vec{x}_n + B\vec{u}_n \\ \vec{u}_n \geqslant 0 \\ C\vec{x}_n + D\vec{u}_n \leqslant 0 \\ \vec{x}_0 \text{ donné} \end{array}} \quad \text{avec :} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; B = \begin{bmatrix} p_n & -c_n \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

2.2. Application numérique

Supposons que l'exercice soit formé de 6 périodes [$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$] ($N = 6$) et que les prix unitaires d'achat et de vente soient les suivants :

n	0	1	2	3	4	5
p_n	210	220	145	145	200	215
c_n	200	210	140	195	210	200

On supposera enfin que le stock initial est $x_0 = \lambda$, d'où $x_0^1 = \lambda$, $x_0^2 = S - \lambda$.

2.2.1. Résolution par la programmation dynamique (Formulation II).

Comme cela a été indiqué et remarqué précédemment, tout étant linéaire dans un tel problème, il faut s'attendre à ce que à chaque étape la fonction optimisée $L_n(\vec{x}_n)$ soit une *fonction linéaire* de $\vec{x}_n$ de sorte que nous poserons dans toute la suite :

$$L_n(\vec{x}_n) = \vec{\lambda}_n \cdot \vec{x}_n \quad \text{où} \quad \vec{\lambda}_n = \boxed{\lambda_n^0\ \lambda_n^1\ \lambda_n^2}$$

de sorte que la résolution donnera l'équation de récurrence liant les $\vec{\lambda}_n$ aux $\vec{\lambda}_{n+1}$.

On pose :

$$L_6(\vec{x}_6) = x_6^0 = \vec{\lambda}_6\vec{x}_6 \qquad \text{avec} \qquad \lambda_6^0 = 1 \ , \ \lambda_6^1 = \lambda_6^2 = 0$$

$$L_5(\vec{x}_5) = \underset{\vec{u}_5 \in K_5}{\text{Max}}\; x_6^0 = \underset{\vec{u}_5 \in K_5}{\text{Max}}\; [x_5^0 + 215\, u_5^1 - 200\, u_5^2] = \underset{0 \leqslant u_5^1 \leqslant x_5^1}{\text{Max}}\; [x_5^0 + 215\, u_5^1] =$$

$$= x_5^0 + 215\, x_5^1 = \vec{\lambda}_5 \vec{x}_5 \quad \text{avec} \quad \lambda_5^0 = 1\,,\ \lambda_5^1 = 215\,,$$

$$\lambda_5^2 = 0\ ;\ u_5^{1*} = x_5^1\,,\ u_5^{2*} = 0$$

$$L_4(\vec{x}_4) = \underset{\vec{u}_4 \in K_4}{\text{Max}}\; L_5(A\vec{x}_4 + B\vec{u}_4) = \underset{\vec{u}_4 \in K_4}{\text{Max}}\; (\vec{\lambda}_5 A\vec{x}_4 + \vec{\lambda}_5 B\vec{u}_4) =$$

$$= \underset{\vec{u}_4 \in K_4}{\text{Max}}\; [x_4^0 + 215\, x_4^1 - 15\, u_4^1 + 5\, u_4^2] \text{ on prend } u_4^2 = u_4^1 + x_4^2$$

$$= \underset{0 \leqslant u_4^1 \leqslant x_4^1}{\text{Max}}\; (x_4^0 + 215\, x_4^1 - 10\, u_4^1 + 5\, x_4^2) = x_4^0 + 215\, x_4^1 + 5\, x_4^2 =$$

$$= \vec{\lambda}_4 \vec{x}_4 \quad (\text{en prenant } u_4^{1*} = 0) \quad \text{avec} \quad \lambda_4^0 = 1\,,\ \lambda_4^1 = 215\,,\ \lambda_4^2 = 5\ ;$$

$$u_4^{1*} = 0\,,\ u_4^{2*} = x_4^2$$

$$L_3(\vec{x}_3) = \underset{\vec{u}_3 \in K_3}{\text{Max}}\; L_4(A\vec{x}_3 + B\vec{u}_3) = \underset{\vec{u}_3 \in K_3}{\text{Max}}\; (\vec{\lambda}_4 A\vec{x}_3 + \vec{\lambda}_4 B\vec{u}_3) =$$

$$= \underset{\vec{u}_3 \in K_3}{\text{Max}}\; [x_3^0 + 215\, x_3^1 + 5\, x_3^2 - 65\, u_3^1 + 15\, u_3^2]$$

$$\text{on prend} \quad u_3^2 = u_3^1 + x_3^2$$

$$= \underset{0 \leqslant u_3^1 \leqslant x_3^1}{\text{Max}}\; (x_3^0 + 215\, x_3^1 + 20\, x_3^2 - 50\, u_3^1) =$$

$$= x_3^0 + 215\, x_3^1 + 20\, x_3^2 = \vec{\lambda}_3 \vec{x}_3 \quad (\text{en prenant } u_3^{1*} = 0)$$

$$\text{avec} \quad \lambda_3^0 = 1\,,\ \lambda_3^1 = 215\,,\ \lambda_3^2 = 20\ ;\ u_3^{1*} = 0\,,\ u_3^{2*} = x_3^2$$

$$L_2(\vec{x}_2) = \underset{\vec{u}_2 \in K_2}{\text{Max}}\; L_3(A\vec{x}_2 + B\vec{u}_2) = \underset{\vec{u}_2 \in K_2}{\text{Max}}\; (\vec{\lambda}_3 A\vec{x}_2 + \vec{\lambda}_3 B\vec{u}_2) =$$

$$= \underset{\vec{u}_2 \in K_2}{\text{Max}}\; [x_2^0 + 215\, x_2^1 + 20\, x_2^2 - 50\, u_2^1 + 55\, u_2^2]$$

$$\text{on prend} \quad u_2^2 = u_2^1 + x_2^2$$

$$= \underset{0 \leqslant u_2^1 \leqslant x_2^1}{\text{Max}}\; (x_2^0 + 215\, x_2^1 + 75\, x_2^2 + 5\, u_2^1) =$$

$$= x_2^0 + 220\, x_2^1 + 75\, x_2^2 = \vec{\lambda}_2 \vec{x}_2 \quad (\text{en prenant } u_2^{1*} = x_2^1)$$

$$\text{avec} \quad \lambda_2^0 = 1\,,\ \lambda_2^1 = 220\,,\ \lambda_2^2 = 75\ ;\ u_2^{1*} = x_2^1\,,\ u_2^{2*} = x_2^1 + x_2^2$$

$$L_1(\vec{x}_1) = \underset{\vec{u}_1 \in K_1}{\text{Max}}\; L_2(A\vec{x}_1 + B\vec{u}_1) = \underset{\vec{u}_1 \in K_1}{\text{Max}}\; (\vec{\lambda}_2 A\vec{x}_1 + \vec{\lambda}_2 B\vec{u}_1) =$$

$$= \underset{\vec{u}_1 \in K_1}{\text{Max}}\; (x_1^0 + 220\, x_1^1 + 75\, x_1^2 + 75\, u_1^1 - 65\, u_1^2)$$

on prend $u_1^2 = 0$

$$= \underset{0 \leqslant u_1^1 \leqslant x_1^1}{\text{Max}}\; (x_1^0 + 220\, x_1^1 + 75\, x_1^2 + 75\, u_1^1) =$$

$$x_1^0 + 295\, x_1^1 + 75\, x_1^2 = \vec{\lambda}_1 \vec{x}_1 \quad \text{(en prenant } u_1^{1*} = x_1^1\text{)}$$

avec $\lambda_1^0 = 1$, $\lambda_1^1 = 295$, $\lambda_1^2 = 75$; $u_1^{1*} = x_1^1$, $u_1^{2*} = 0$

$$L_0(\vec{x}_0) = \underset{\vec{u}_0 \in K_0}{\text{Max}}\; L_1(A\vec{x}_0 + B\vec{u}_0) = \underset{\vec{u}_0 \in K_0}{\text{Max}}\; (\vec{\lambda}_1 A\vec{x}_0 + \vec{\lambda}_1 B\vec{u}_0) =$$

$$= \underset{\vec{u}_0 \in K_0}{\text{Max}}\; (x_0^0 + 295\, x_0^1 + 75\, x_0^2 - 10\, u_0^1 + 20\, u_0^2)$$

on prend $u_0^2 = u_0^1 + x_0^2$

$$= \underset{0 \leqslant u_0^1 \leqslant x_0^1}{\text{Max}}\; (x_0^0 + 295\, x_0^1 + 95\, x_0^2 + 10\, u_0^1) =$$

$$x_0^0 + 305\, x_0^1 + 95\, x_0^2 = \vec{\lambda}_0 \vec{x}_0 \quad \text{(en prenant } u_0^{1*} = x_0^1\text{)}$$

avec $\lambda_0^0 = 1$, $\lambda_0^1 = 305$, $\lambda_0^2 = 95$; $u_0^{1*} = x_0^1, u_0^{2*} = x_0^1 + x_0^2$

On déduit des conditions initiales $x_0^1 = \lambda$, $x_0^2 = S - \lambda$, la politique optimale suivante (et l'état correspondant du stock) :

n	0	1	2	3	4	5	6
vendre	λ	S	0	0	0	S	–
acheter	S	0	S	0	0	0	–
x_n^1	λ	S	0	S	S	S	0

2.2.2. Résolution par le principe du maximum.

Si l'on tient compte des conditions aux limites $\lambda_n^0 = 1, \forall n$, l'hamiltonien de l'étape n s'écrit :

$$H_n = x_n^0 + \lambda_{n+1}^1 x_n^1 + \lambda_{n+1}^2 x_n^2 + (p_n - \lambda_{n+1}^1 + \lambda_{n+1}^2)\, u_n^1 - (c_n - \lambda_{n+1}^1 + \lambda_{n+1}^2)\, u_n^2$$

Dans la suite on utilisera aussi les conditions $\lambda_N^1 = \lambda_N^2 = 0$ et on utilisera l'équation (77) pour calculer les $\vec{\lambda}_n$.

– $n = 5$ Le maximum de $H_5 = x_5^0 + p_5 u_5^1 - c_5 u_5^2 = x_5^0 + 215\, u_5^1 - 200\, u_5^2$ s'obtient pour $\vec{u}_5 \in \mathbf{K}_5$ en prenant $u_5^{2*} = 0$ et $u_5^{1*} = x_5^1$.

La contrainte $u_5^1 - x_5^1 \leqslant 0$ est saturée d'où $D_{K_1} = 1 = R$:

$$\vec{\lambda}_5 = \vec{\lambda}_6 \left\{ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} 215 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}} \; \boxed{1} \; \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 & 0 \end{matrix}} \right\} = \vec{\lambda}_6 \boxed{\begin{matrix} 1 & 215 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_5^0 = \lambda_6^0 = 1 \\ \lambda_5^1 = 215\, \lambda_6^0 + \lambda_6^2 = 215 \\ \lambda_5^2 = \lambda_6^2 = 0 \end{cases}$$

– $n = 4$ Le maximum de

$$H_4 = x_4^0 + 215\, x_4^1 + (p_4 - 215)\, u_4^1 - (c_4 - 215)\, u_4^1$$
$$= x_4^0 + 215\, x_4^1 - 15\, u_4^1 + 5\, u_4^2,$$

s'obtient pour $\vec{u}_4 \in \mathbf{K}_4$ en prenant $u_4^2 = u_4^1 + x_4^2$ d'où

$$H_4^* = \underset{0 \leqslant u_4^1 \leqslant x_4^1}{\text{Max}} [x_4^0 + 215\, x_4^1 - 10 u_4^1 + 5 x_4^2] = x_4^0 + 215\, x_4^1 + 5\, x_4^2$$

avec $u_4^{1*} = 0$ et $u_4^{2*} = x_4^2$.

La contrainte $u_4^2 - u_4^1 - x_4^2 \leqslant 0$ est saturée (u_4^2 var. dépendante) d'où $D_{K_1} = 1 = R$.

$$\vec{\lambda}_4 = \vec{\lambda}_5 \left\{ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} -210 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}} \; \boxed{1} \; \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & -1 \end{matrix}} \right\} = \vec{\lambda}_5 \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & -210 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_4^0 = \lambda_5^0 = 1 \\ \lambda_4^1 = \lambda_5^1 = 215 \\ \lambda_4^2 = -210 + \lambda_5^1 = 5 \end{cases}$$

– $n = 3$ Le maximum de $H_3 = x_3^0 + 215\, x_3^1 + 5\, x_3^2 + (p_3 - 210)\, u_3^1$
$- (c_3 - 210)\, u_3^2 = x_3^0 + 215\, x_3^1 + 5\, x_3^2 - 65\, u_3^1 + 15\, u_3^2$

s'obtient pour $\vec{u}_3 \in \mathbf{K}_3$ en prenant $u_3^2 = u_3^1 + x_3^2$ d'où

$$H_3^* = \underset{0 \leqslant u_3^1 \leqslant x_3^1}{\text{Max}} [x_3^0 + 215\, x_3^1 + 20\, x_3^2 - 50\, u_3^1] =$$

$$= x_3^0 + 215\, x_3^1 + 20\, x_3^2 \quad \text{avec} \quad u_3^{1*} = 0 \quad \text{et} \quad u_3^{2*} = x_3^2 .$$

La contrainte $u_3^2 - u_3^1 - x_3^2 \leqslant 0$ est saturée (u_3^2 var. dépendante) d'où $D_{K_1} = 1 = R$:

$$\vec{\lambda}_3 = \vec{\lambda}_4 \left\{ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} -195 \\ 1 \\ -1 \end{matrix}}\ \boxed{1}\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & -1 \end{matrix}} \right\} = \vec{\lambda}_4 \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & -195 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_3^0 = \lambda_4^0 = 1 \\ \lambda_3^1 = \lambda_4^1 = 215 \\ \lambda_3^2 = -195 + \lambda_4^1 = 20 \end{array} \right.$$

$-\, n = 2$ Le maximum de $H_2 = x_2^0 + 215\, x_2^1 + 20\, x_2^2 + (p_2 - 195)\, u_2^1 -$

$$- \ (c_2 - 195)\, u_2^2 = x_2^0 + 215\, x_2^1 + 20 x_2^2 - 50\, u_2^1 + 55\, u_2^2$$

s'obtient pour $\vec{u}_2 \in \mathbf{K}_2$ en prenant $u_2^2 = u_2^1 + x_2^2$ d'où

$$H_2^* = \underset{0 \leqslant u_2^1 \leqslant x_2^1}{\text{Max}} [x_2^0 + 215\, x_2^1 + 75\, x_2^2 + 5\, u_2^1] =$$

$$= x_2^0 + 220\, x_2^1 + 75\, x_2^2 \quad \text{avec} \quad u_2^{1*} = x_2^1 \quad \text{et} \quad u_2^{2*} = x_2^1 + x_2^2 .$$

Les deux contraintes $u_2^1 - x_2^1 \leqslant 0$ et $u_2^2 - u_2^1 - x_2^2 \leqslant 0$ sont saturées d'où :

$$D_{K_1} = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}} \quad \text{et} \quad R = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \ ; \text{ d'où :}$$

$$\vec{\lambda}_2 = \vec{\lambda}_3 \left\{ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} 145 & -140 \\ 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}}\ \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}} \right\} =$$

$$= \vec{\lambda}_3 \boxed{\begin{matrix} 1 & 5 & -140 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda_2^0 = \lambda_3^0 = 1 \\ \lambda_2^1 = 5 + \lambda_3^1 = 220 \\ \lambda_2^2 = -140 + \lambda_3^1 = 75 \end{array} \right.$$

$-n = 1$ Le maximum de $H_1 = x_1^0 + 220\,x_1^1 + 75\,x_1^2 + (p_1 - 145)\,u_1^1 -$

$$- (c_1 - 145)\,u_1^2 = x_1^0 + 220\,x_1^1 + 75\,x_1^2 + 75\,u_1^1 - 65\,u_1^2$$

s'obtient pour $\vec{u}_1 \in \mathbf{K}_1$ en prenant $u_1^2 = 0$, d'où

$$H_1^* = \underset{0 \leqslant u_1^1 \leqslant x_1^1}{\mathrm{Max}} [x_1^0 + 220\,x_1^1 + 75\,x_1^2 + 75\,u_1^1] =$$

$$= x_1^0 + 295\,x_1^1 + 75\,x_1^2 \quad \text{avec } u_1^{1*} = x_1^1 .$$

La contrainte $u_1^1 - x_1^1 \leqslant 0$ est seule saturée (u_1^1 var. dépendante) d'où $D_{K_1} = 1 = R$.

$$\vec{\lambda}_1 = \vec{\lambda}_2 \left\{ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} 220 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}} \; \boxed{1} \; \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 & 0 \end{matrix}} \right\} = \vec{\lambda}_2 \boxed{\begin{matrix} 1 & 220 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = 1 \\ \lambda_1^1 = 220 + \lambda_2^2 = 295 \\ \lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 75 \end{cases}$$

$-n = 0$ Le maximum de $H_0 = x_0^0 + 295\,x_0^1 + 75\,x_0^2 + (p_0 - 220)\,u_0^1 -$

$$- (c_0 - 220)\,u_0^2 = x_0^0 + 295\,x_0^1 + 75\,x_0^2 - 10\,u_0^1 + 20\,u_0^2$$

s'obtient pour $\vec{u}_0 \in \mathbf{K}_0$ en prenant $u_0^2 = u_0^1 + x_0^2$, d'où

$$H_0^* = \underset{0 \leqslant u_0^1 \leqslant x_0^1}{\mathrm{Max}} [x_0^0 + 295\,x_0^1 + 95\,x_0^2 + 10\,u_0^1] =$$

$$= x_0^0 + 305\,x_0^1 + 95\,x_0^2 \quad \text{avec} \quad u_0^{1*} = x_0^1.$$

Les deux contraintes sont saturées d'où :

$$D_{K_1} = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}} \quad \text{et} \quad R = \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}}$$

$$\vec{\lambda}_0 = \vec{\lambda}_1 \left\{ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} 210 & -200 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}} \; \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}} \right\} =$$

$$= \vec{\lambda}_1 \boxed{\begin{matrix} 1 & 10 & -200 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0^0 = \lambda_1^0 = 1 \\ \lambda_0^1 = 10 + \lambda_1^1 = 305 \\ \lambda_0^2 = -200 + \lambda_1^1 = 95 \end{cases}$$

La politique optimale et la suite des multiplicateurs sont en tous points identiques à ce que nous avons trouvé en programmation dynamique et on peut vérifier que l'on a à chaque étape (cf. 5.4.3) :

$$H_n = L_{n+1}[\vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)] \quad H_n^* = L_n(\vec{x}_n) \quad \text{et} \quad H_{n+1}^*[\vec{T}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)] = H_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n)$$

2.2.3. La résolution par la programmation linéaire de cet exemple numérique ne sera pas effectuée car elle n'apporte rien de plus que la résolution (2.3.3) du problème général par la programmation linéaire.

2.3. Résolution du modèle général

2.3.1. Résolution par la programmation dynamique.

a) Formulation I :

A cause des linéarités, nous allons montrer par récurrence que $\Lambda_n(\vec{x}_n)$ est une fonction linéaire du vecteur d'état $\vec{x}_n$; c'est-à-dire :

$$\Lambda_n(x_n^1, x_n^2) = \lambda_n^1 x_n^1 + \lambda_n^2 x_n^2 = \vec{\lambda}_n \cdot \vec{x}_n.$$

Nous voyons que, en posant comme d'habitude $\Lambda_N(\vec{x}_N) = 0$ on a

$$\Lambda_{N-1}(\vec{x}_{N-1}) = \underset{\vec{u}_{N-1} \in K_{N-1}}{\text{Max}} [p_{N-1} u_{N-1}^1 - c_{N-1} u_{N-1}^2] = p_{N-1} x_{N-1}^1 = \vec{\lambda}_{N-1} \vec{x}_{N-1}$$

$$(\text{par } u_{N-1}^{2*} = 0 \text{ et } u_{N-1}^{1*} = x_{N-1}^1)$$

avec $\lambda_{N-1}^1 = p_{N-1}, \ \lambda_{N-1}^2 = 0$

Supposons $\Lambda_{n+1}(\vec{x}_{n+1}) = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \vec{x}_{n+1}$; l'équation de récurrence sur les Λ_n donne alors :

$$\Lambda_n(\vec{x}_n) = \underset{\vec{u}_n \in K_n}{\text{Max}} \{p_n u_n^1 - c_n u_n^2 + \lambda_{n+1}^1 (x_n^1 - u_n^1 + u_n^2) + \lambda_{n+1}^2 (x_n^2 + u_n^1 - u_n^2)\}$$

$$= \underset{\vec{u}_n \in K_n}{\text{Max}} \{(p_n - \lambda_{n+1}^1 + \lambda_{n+1}^2) u_n^1 - (c_n - \lambda_{n+1}^1 + \lambda_{n+1}^2) u_n^2 +$$

$$+ \lambda_{n+1}^1 x_n^1 + \lambda_{n+1}^2 x_n^2\}$$

Dans la maximisation ci-dessus dans K_n quatre cas sont possibles suivant le signe des coefficients de u_n^1 et u_n^2 (il faut commencer par optimiser par rapport à u_n^2 qui contient u_n^1 dans ses bornes) :

1. $\lambda^1_{n+1} - \lambda^2_{n+1} \geqslant c_n$ alors $u^{2*}_n = x^2_n + u^1_n$ et

$$\Lambda_n(\vec{x}_n) = \underset{0 \leqslant u^1_n \leqslant x^1_n}{\text{Max}} \left[(p_n - c_n)\, u^1_n + \lambda^1_{n+1} x^1_n + (\lambda^1_{n+1} - c_n)\, x^2_n \right]$$

1.1 $p_n \geqslant c_n$ alors $u^{1*}_n = x^1_n$ (et donc $u^{2*}_n = x^1_n + x^2_n$)

$$\Lambda_n(\vec{x}_n) = (\lambda^1_{n+1} + p_n - c_n)\, x^1_n + (\lambda^1_{n+1} - c_n)\, x^2_n = \vec{\lambda}_n \vec{x}_n$$

avec $\boxed{\lambda^1_n = \lambda^1_{n+1} + p_n - c_n \quad \text{et} \quad \lambda^2_n = \lambda^1_{n+1} - c_n}$

1.2 $p_n \leqslant c_n$ alors $u^{1*}_n = 0$ (et donc $u^{2*}_n = x^2_n$)

$$\Lambda_n(\vec{x}_n) = \lambda^1_{n+1} x^1_n + (\lambda^1_{n+1} - c_n)\, x^2_n = \vec{\lambda}_n \vec{x}_n$$

avec $\boxed{\lambda^1_n = \lambda^1_{n+1} \quad \text{et} \quad \lambda^2_n = \lambda^1_{n+1} - c_n}$

2. $\lambda^1_{n+1} - \lambda^2_{n+1} \leqslant c_n$ alors $u^{2*}_n = 0$ et

$$\Lambda_n(\vec{x}_n) = \underset{0 \leqslant u^1_n \leqslant x^1_n}{\text{Max}} \left[(p_n - \lambda^1_{n+1} + \lambda^2_{n+1})\, u^1_n + \lambda^1_{n+1} x^1_n + \lambda^2_{n+1} x^2_n \right]$$

2.1 $\lambda^1_{n+1} - \lambda^2_{n+1} \geqslant p_n$ alors $u^{1*}_n = 0$,

$$\Lambda_n(\vec{x}_n) = \lambda^1_{n+1} x^1_n + \lambda^2_{n+1} x^2_n = \vec{\lambda}_n \vec{x}_n$$

avec $\boxed{\lambda^1_n = \lambda^1_{n+1} \quad \text{et} \quad \lambda^2_n = \lambda^2_{n+1}}$

2.2 $\lambda^1_{n+1} - \lambda^2_{n+1} \leqslant p_n$ alors $u^{1*}_n = x^1_n$,

$$\Lambda_n(\vec{x}_n) = (p_n + \lambda^2_{n+1})\, x^1_n + \lambda^2_{n+1} x^2_n = \vec{\lambda}_n \vec{x}_n$$

avec $\boxed{\lambda^1_n = \lambda^2_{n+1} + p_n \quad \text{et} \quad \lambda^2_n = \lambda^2_{n+1}}$

Dans les 4 cas ci-dessus on voit que l'on a obtenu $\Lambda_n(\vec{x}_n) = \vec{\lambda}_n \vec{x}_n$ et nous avons aussi les formules de transition entre les variables $\vec{\lambda}_n$.

Il n'est pas nécessaire de continuer plus loin la résolution car à partir de $\Lambda_N(\vec{x}_N) = 0$ (ou $\lambda^1_N = \lambda^2_N = 0$) ou encore à partir de

$$\Lambda_{N-1}(\vec{x}_{N-1}) = p_{N-1} x^1_{N-1} \text{ (car } \lambda^1_{N-1} = p_{N-1}, \lambda^2_{N-1} = 0)$$

on déduit la suite des $\vec{\lambda}_{n+1}$ et les règles 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 donnent à chaque période n la politique optimale $\vec{u}^*_n$.

b) Formulation II :

On va montrer comme ci-dessus que $L_n(\vec{x}_n) = \vec{\lambda}_n \,.\, \vec{x}_n$ (où $\vec{\lambda}_n$ et $\vec{x}_n$ ont 3 composantes).

Ont voit, en posant comme d'habitude :

$$L_N(\vec{x}_N) = \varphi(\vec{x}_N) = x_N^0 = \vec{\lambda}_N \vec{x}_N \quad (\text{où } \lambda_N^0 = 1 \text{ et } \lambda_N^1 = \lambda_N^2 = 0)$$

que :

$$L_{N-1}(\vec{x}_{N-1}) = \underset{\vec{u}_{N-1} \in K_{N-1}}{\text{Max}} \; x_N^0 = \underset{\vec{u}_{N-1} \in K_{N-1}}{\text{Max}} \; (x_{N-1}^0 + p_{N-1} u_{N-1}^1 - c_{N-1} u_{N-1}^2) =$$

$$= x_{N-1}^0 + p_{N-1} x_{N-1}^1 = \vec{\lambda}_{N-1} \cdot \vec{x}_{N-1}$$

$$\text{avec} \quad \lambda_{N-1}^0 = 1 \,,\, \lambda_{N-1}^1 = p_{N-1} \,,\, \lambda_{N-1}^2 = 0$$

Supposons $L_{n+1}(\vec{x}_{n+1}) = \vec{\lambda}_{n+1} \cdot \vec{x}_{n+1}$; l'équation de récurrence (46) sur les L_n donne alors :

$$L_n(\vec{x}_n) = \underset{\vec{u}_n \in K_n}{\text{Max}} \; \{\vec{\lambda}_{n+1}(A\vec{x}_n + B\vec{u}_n)\} = \underset{\vec{u}_n \in K_n}{\text{Max}} \; \{\lambda_{n+1}^0 x_n^0 + \lambda_{n+1}^1 x_n^1 + \lambda_{n+1}^2 x_n^2 +$$

$$(\lambda_{n+1}^0 p_n - \lambda_{n+1}^1 + \lambda_{n+1}^2) u_n^1 - (\lambda_{n+1}^0 c_n - \lambda_{n+1}^1 + \lambda_{n+1}^2) u_n^2\}$$

Dans la maximisation ci-dessus dans K_n, 4 cas sont encore à envisager (suivant les signes des coefficients de u_n^1 et u_n^2).

1. $\lambda_{n+1}^1 - \lambda_{n+1}^2 \geqslant \lambda_{n+1}^0 c_n$ alors $u_n^{2*} = x_n^2 + u_n^1$ et

$$L_n(\vec{x}_n) = \underset{0 \leqslant u_n^1 \leqslant x_n^1}{\text{Max}} \; [\lambda_{n+1}^0 x_n^0 + \lambda_{n+1}^1 x_n^1 + (\lambda_{n+1}^1 - \lambda_{n+1}^0 c_n) x_n^2 +$$

$$+ \lambda_{n+1}^0 (p_n - c_n) u_n^1]$$

1.1 $p_n \geqslant c_n$ alors $u_n^{1*} = x_n^1$ (et donc $u_n^{2*} = x_n^1 + x_n^2$)

$$L_n(\vec{x}_n) = \lambda_{n+1}^0 x_n^0 + (\lambda_{n+1}^1 + \lambda_{n+1}^0 p_n - \lambda_{n+1}^0 c_n) x_n^1 +$$

$$+ (\lambda_{n+1}^1 - \lambda_{n+1}^0 c_n) x_n^2 = \vec{\lambda}_n \cdot \vec{x}_n$$

avec $\lambda_n^0 = \lambda_{n+1}^0 (= \ldots = \lambda_N^0) = 1$; (dans toute la suite, on n'écrira plus λ_n^0).

et $\boxed{\lambda_n^1 = \lambda_{n+1}^1 + p_n - c_n \,,\, \lambda_n^2 = \lambda_{n+1}^1 - c_n}$

1.2 $p_n \leqslant c_n$ alors $u_n^{1*} = 0$ (et donc $u_n^{2*} = x_n^2$)

$$L_n(\vec{x}_n) = \lambda^0_{n+1} x^0_n + \lambda^1_{n+1} x^1_n + (\lambda^1_{n+1} - \lambda^0_{n+1} c_n)\, x^2_n = \vec{\lambda}_n \, , \vec{x}_n$$

avec $\lambda^0_n = \lambda^0_{n+1}$ $(= \ldots = \lambda^0_N = 1)$ et $\boxed{\lambda^1_n = \lambda^1_{n+1} \, , \; \lambda^2_n = \lambda^1_{n+1} - c_n}$

2. $\lambda^1_{n+1} - \lambda^2_{n+1} \leqslant \lambda^0_{n+1} c_n$ alors $u^{2*}_n = 0$ et

$$L_n(\vec{x}_n) = \max_{0 \leqslant u^1_n \leqslant x^1_n} [\lambda^0_{n+1} x^0_n + \lambda^1_{n+1} x^1_n + \lambda^2_{n+1} x^2_n + (\lambda^0_{n+1} p_n - \lambda^1_{n+1} + \lambda^2_{n+1})\, u^1_n]$$

2.1 $\lambda^1_{n+1} - \lambda^2_{n+1} \geqslant \lambda^0_{n+1} p_n$ alors $u^{1*}_n = 0$

et $L_n(\vec{x}_n) = \lambda^0_{n+1} x^0_n + \lambda^1_{n+1} x^1_n + \lambda^2_{n+1} x^2_n = \vec{\lambda}_n \vec{x}_n$

avec $\boxed{\lambda^0_n = \lambda^0_{n+1} = \ldots = 1 \, , \; \lambda^1_n = \lambda^1_{n+1} \, , \; \lambda^2_n = \lambda^2_{n+1}}$

2.2 $\lambda^1_{n+1} - \lambda^2_{n+1} \leqslant \lambda^0_{n+1} p_n$ alors $u^{1*}_n = x^1_n$

et $L_n(\vec{x}_n) = \lambda^0_{n+1} x^0_n + (\lambda^0_{n+1} p_n + \lambda^2_{n+1})\, x^1_n + \lambda^2_{n+1} x^2_n = \vec{\lambda}_n \vec{x}_n$

avec $\boxed{\lambda^0_n = \lambda^0_{n+1} = \ldots = 1 \, , \; \lambda^1_n = p_n + \lambda^2_{n+1} \, , \; \lambda^2_n = \lambda^2_{n+1}}$

Ici encore dans tous les cas on a vu que $L_n(\vec{x}_n) = \vec{\lambda}_n \vec{x}_n$ et on peut calculer de proche en proche tous les $\vec{\lambda}_n$ à partir de $\lambda^0_N = 1$, $\lambda^1_N = \lambda^2_N = 0$ (ou de $\vec{\lambda}_{N-1}$) ; les règles 1.1, 1.2, 2.1, 2.2 donnent alors à chaque période n la politique optimale $\vec{u}^*_n$.

2.3.2. Résolution par application du principe du maximum :

L'hamiltonien de l'étape n s'écrit :

$$H_n = \vec{\lambda}_{n+1} (A\vec{x}_n + B\vec{u}_n) = \lambda^0_{n+1} x^0_n + \lambda^1_{n+1} x^1_n + \lambda^2_{n+1} x^2_n + (\lambda^0_{n+1} p_n - \lambda^1_{n+1} + \lambda^2_{n+1})\, u^1_n - (\lambda^0_{n+1} c_n - \lambda^1_{n+1} + \lambda^2_{n+1})\, u^2_n$$

on posera dans toute la suite $\lambda^0_n = 1$ à cause de la condition aux limites $\lambda^0_0 = \lambda^0_1 = \lambda^0_2 = \ldots = \lambda^0_N = 1$.

La maximisation de H_n pour $\vec{u}_n \in \mathbf{K}_n$ conduit à 4 cas suivant les signes des coefficients de u^1_n et u^2_n.

1. $\lambda^1_{n+1} - \lambda^2_{n+1} \geqslant c_n$ alors $u^{2*}_n = x^2_n + u^1_n$ et

$$H^*_n = \max_{0 \leqslant u^1_n \leqslant x^1_n} [x^0_n + \lambda^1_{n+1} x^1_n + (\lambda^1_{n+1} - c_n)\, x^2_n + (p_n - c_n)\, u^1_n]$$

1.1. $p_n \geqslant c_n$ alors $u_n^{1*} = x_n^1$ (et donc $u_n^{2*} = x_n^1 + x_n^2$)

$$H_n^* = x_n^0 + (\lambda_{n+1}^1 + p_n - c_n)\, x_n^1 + (\lambda_{n+1}^1 - c_n)\, x_n^2$$

1.2. $p_n \leqslant c_n$ alors $u_n^{1*} = 0$

$$H_n^* = x_n^0 + \lambda_{n+1}^1 x_n^1 + (\lambda_{n+1}^1 - c_n)\, x_n^2$$

2. $\lambda_{n+1}^1 - \lambda_{n+1}^2 \leqslant c_n$ alors $u_n^{2*} = 0$ et

$$H_n^* = \underset{0 \leqslant u_n^1 \leqslant x_n^1}{\mathrm{Max}} \left[x_n^0 + \lambda_{n+1}^1 x_n^1 + \lambda_{n+1}^2 x_n^2 + (p_n - \lambda_{n+1}^1 + \lambda_{n+1}^2)\, u_n^1\right]$$

2.1. $\lambda_{n+1}^1 - \lambda_{n+1}^2 \geqslant p_n$ alors $u_n^{1*} = 0$ et

$$H_n^* = x_n^0 + \lambda_{n+1}^1 x_n^1 + \lambda_{n+1}^2 x_n^2$$

2.2. $\lambda_{n+1}^1 - \lambda_{n+1}^2 \leqslant p_n$ alors $u_n^{1*} = x_n^1$ et

$$H_n^* = x_n^0 + (p_n + \lambda_{n+1}^2)\, x_n^1 + \lambda_{n+1}^2 x_n^2$$

A cause des contraintes mixtes on ne peut plus calculer les $\vec{\lambda}_n$ par l'équation canonique (23) : $\vec{\lambda}_n = \dfrac{\partial H_n}{\partial \vec{x}_n}$ mais par l'équation (77) sous sa forme "linéaire" suivante : $\vec{\lambda}_n = \vec{\lambda}_{n+1} (A - B_{K_1} RC)$.

Comme a priori dans chacun des 4 cas ci-dessus différentes contraintes peuvent être saturées, il faut envisager *tous* ces cas.

1.1. Les deux contraintes sont saturées : $\vec{Q}_n(\vec{x}_n, \vec{u}_n) = C\vec{x}_n + D\vec{u}_n = 0$;

$$D_{K_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\lambda}_n = \vec{\lambda}_{n+1} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} p_n & -c_n \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \vec{\lambda}_{n+1} \begin{bmatrix} 1 & p_n - c_n & -c_n \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_n^0 = \lambda_{n+1}^0 = 1 \;;\; \lambda_n^1 = p_n - c_n + \lambda_{n+1}^1 \;;\; \lambda_n^2 = -c_n + \lambda_{n+1}^1}$$

1.2 La seule contrainte $u_n^2 - u_n^1 - x_n^2 = 0$ est saturée, et la variable dépendante est u_n^2 d'où $D_{K_1} = 1 = R$;

$$\vec{\lambda}_n = \vec{\lambda}_{n+1} \left\{ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} -c_n \\ 1 \\ -1 \end{matrix}} \; \boxed{1} \; \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & -1 \end{matrix}} \right\} = \vec{\lambda}_{n+1} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & -c_n \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\lambda_n^0 = \lambda_{n+1}^0 = 1 \; ; \; \lambda_n^1 = \lambda_{n+1}^1 \; ; \; \lambda_n^2 = -c_n + \lambda_{n+1}^1}$$

2.1 Aucune des contraintes n'est saturée de sorte que $D_{K_1} = 0 = R$ et $\vec{\lambda}_n = \vec{\lambda}_{n+1} A = \vec{\lambda}_{n+1}$

$$\boxed{\lambda_n^0 = \lambda_{n+1}^0 = 1 \; ; \; \lambda_n^1 = \lambda_{n+1}^1 \; ; \; \lambda_n^2 = \lambda_{n+1}^2}$$

2.2 La seule contrainte saturée est $u_n^1 - x_n^1 = 0$ et la variable dépendante est forcément u_n^1 d'où $D_{K_1} = R = 1$

$$\vec{\lambda}_n = \vec{\lambda}_{n+1} \left\{ \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} - \boxed{\begin{matrix} p_n \\ -1 \\ 1 \end{matrix}} \; \boxed{1} \; \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 & 0 \end{matrix}} \right\} = \vec{\lambda}_{n+1} \boxed{\begin{matrix} 1 & p_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}}$$

$$\boxed{\lambda_n^0 = \lambda_{n+1}^0 = 1 \; ; \; \lambda_n^1 = p_n + \lambda_{n+1}^2 \; ; \; \lambda_n^2 = \lambda_{n+1}^2}$$

Remarques :

1 On retrouve évidemment dans chacun des cas les équations de transition entre $\vec{\lambda}_n$ et $\vec{\lambda}_{n+1}$ que l'on avait trouvées par la programmation dynamique.

2 On avait remarqué (p. 59) que dans le cas linéaire la valeur optimale de l'Hamiltonien à l'étape n s'écrivait :

$$H_n^* = \vec{\lambda}_n \cdot \vec{x}_n$$

On en déduit que l'on aurait pu trouver toutes les équations de transition ci-dessus en écrivant dans chacun des 4 cas :

$$\boxed{\lambda_n^j = \frac{\partial H_n^*}{\partial x_n^j}}$$

2.3.3. Résolution par la programmation linéaire :

a) Programme primal :

Dans la formulation I, la fonction économique ne contient que les variables de contrôle. On éliminera les variables d'état dans les contraintes à l'aide des équations de transition.

$$
\begin{array}{l|l}
x_0^1 = x_0 \text{ (donné)} & x_0^2 = S - x_0 \text{ (donné)} \\
x_1^1 = x_0 - u_0^1 + u_0^2 & x_1^2 = S - x_0 + u_0^1 - u_0^2 \\
x_2^1 = x_0 - u_0^1 + u_0^2 - u_1^1 + u_1^2 & x_2^2 = S - x_0 + u_0^1 - u_0^2 + u_1^1 - u_1^2 \\
x_3^1 = x_0 - u_0^1 + u_0^2 - u_1^1 + u_1^2 - u_2^1 + u_2^2 & x_3^2 = S - x_0 + u_0^1 - u_0^2 + u_1^1 - u_1^2 + u_2^1 - u_2^2 \\
\vdots & \vdots \\
x_{n+1}^1 = x_0 - u_0^1 + u_0^2 - u_1^1 + u_1^2 - \ldots - u_n^1 + u_n^2 & x_{n+1}^2 = S - x_0 + u_0^1 - u_0^2 + u_1^1 - u_1^2 + \ldots + u_n^1 - u_n^2 \\
\vdots & \vdots \\
x_{N-1}^1 = x_0 - u_0^1 + u_0^2 - u_1^1 + u_1^2 - \ldots - u_{N-2}^1 + u_{N-2}^2 & x_{N-1}^2 = S - x_0 + u_0^1 - u_0^2 + u_1^1 - u_1^2 + \ldots + u_{N-2}^1 - u_{N-2}^2
\end{array}
$$

Les contraintes du problème s'écrivent :

$$u_n^1 \leqslant x_n^1 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots N - 1 \qquad (1)$$

$$-u_n^1 + u_n^2 \leqslant x_n^2 \qquad n = 0, 1, \ldots\ldots N - 1 \qquad (2)$$

et le remplacement des x_n^1 et x_n^2 par leurs valeurs en fonction des variables de contrôle donne :

$$
(1) \left\{
\begin{array}{l}
u_0^1 \leqslant x_0 \\
u_0^1 + u_1^1 - u_0^2 \leqslant x_0 \\
u_0^1 + u_1^1 + u_2^1 - u_0^2 - u_1^2 \leqslant x_0 \\
u_0^1 + u_1^1 + u_2^1 + u_3^1 - u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 \leqslant x_0 \\
\vdots \\
u_0^1 + u_1^1 + u_2^1 + \ldots + u_n^1 - u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - \ldots - u_{n-1}^2 \leqslant x_0 \\
\vdots \\
u_0^1 + u_1^1 + u_2^1 + \ldots + u_{N-1}^1 - u_0^2 - u_1^2 - u_2^2 - \ldots - u_{N-2}^2 \leqslant x_0
\end{array}
\right.
$$

$$
(2) \left\{
\begin{array}{l}
-u_0^1 + u_0^2 \leqslant S - x_0 \\
-u_0^1 - u_1^1 + u_0^2 + u_1^2 \leqslant S - x_0 \\
-u_0^1 - u_1^1 - u_2^1 + u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 \leqslant S - x_0 \\
-u_0^1 - u_1^1 - u_2^1 - u_3^1 + u_0^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leqslant S - x_0 \\
\vdots \\
-u_0^1 - u_1^1 - u_2^1 - \ldots - u_n^1 + u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_n^2 \leqslant S - x_0 \\
\vdots \\
-u_0^1 - u_1^1 - u_2^1 - \ldots - u_{N-1}^1 + u_0^2 + u_1^2 + \ldots + u_{N-1}^2 \leqslant S - x_0
\end{array}
\right.
$$

(3) $u_n^1 \geqslant 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots N - 1)$ (4) $u_n^2 \geqslant 0 \quad (n = 0, 1, \ldots N - 1)$

Le programme linéaire consiste à rechercher les 2N variables u_n^1, u_n^2 soumises aux contraintes (1), (2), (3), (4) et maximisant la fonction économique :

$$\underset{\vec{u}_0 \vec{u}_1 \ldots \vec{u}_{N-1}}{\text{Max}} \sum_{n=0}^{N-1} (p_n u_n^1 - c_n u_n^2)$$

b) Programme dual :

Si on appelle $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_{N-1} \text{ les variables associées aux } N \text{ contraintes (1)} \\ \beta_0 \beta_1 \ldots \beta_{N-1} \text{ les variables associées aux } N \text{ contraintes (2)} \end{array} \right.$

le programme dual s'écrit :

$$\operatorname{Min}\left\{\left(\sum_{i=0}^{N-1}\alpha_i\right)x_0+\left(\sum_{i=0}^{N-1}\beta_i\right)(S-x_0)\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{ll}
\alpha_i \geqslant 0, \quad \beta_i \geqslant 0 \quad (i=0,1,2,\dots N-1) & (3') \text{ et } (4') \\
(\alpha_0-\beta_0)+(\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)+\dots\dots+(\alpha_{N-1}-\beta_{N-1})\geqslant p_0 & \\
(\alpha_1-\beta_1)+(\alpha_2-\beta_2)+\dots\dots+(\alpha_{N-1}-\beta_{N-1})\geqslant p_1 & \\
(\alpha_2-\beta_2)+\dots\dots+(\alpha_{N-1}-\beta_{N-1})\geqslant p_2 & \\
\quad\ddots & (1') \\
(\alpha_{N-2}-\beta_{N-2})+(\alpha_{N-1}-\beta_{N-1})\geqslant p_{N-2} & \\
(\alpha_{N-1}-\beta_{N-1})\geqslant p_{N-1} & \\
\beta_0-(\alpha_1-\beta_1)-(\alpha_2-\beta_2)-(\alpha_3-\beta_3)-\dots\dots-(\alpha_{N-1}-\beta_{N-1})\geqslant -c_0 & \\
\beta_1-(\alpha_2-\beta_2)-(\alpha_3-\beta_3)-\dots\dots-(\alpha_{N-1}-\beta_{N-1})\geqslant -c_1 & \\
\beta_2-(\alpha_3-\beta_3)-\dots\dots-(\alpha_{N-1}-\beta_{N-1})\geqslant -c_2 & \\
\quad\ddots & (2') \\
\beta_{N-2}-(\alpha_{N-1}-\beta_{N-1})\geqslant -c_{N-2} & \\
\beta_{N-1}\geqslant -c_{N-1} &
\end{array}\right.$$

Pour résoudre ce programme linéaire il est commode d'effectuer le changement de variables suivant :

$$\begin{array}{ll}
\lambda_{N-1}^1=\alpha_{N-1} & \lambda_{N-1}^2=\beta_{N-1} \\
\lambda_{N-2}^1=\alpha_{N-1}+\alpha_{N-2} & \lambda_{N-2}^2=\beta_{N-1}+\beta_{N-2} \\
\lambda_{N-3}^1=\alpha_{N-1}+\alpha_{N-2}+\alpha_{N-3} & \lambda_{N-3}^2=\beta_{N-1}+\beta_{N-2}+\beta_{N-3} \\
\vdots & \vdots \\
\lambda_0^1=\alpha_{N-1}+\alpha_{N-2}+\dots\dots+\alpha_0 & \lambda_0^2=\beta_{N-1}+\beta_{N-2}+\dots\dots+\beta_0
\end{array}$$

Il est clair que les conditions (3′) et (4′) imposent les conditions :

$$\begin{array}{llll}
(3''\text{a}) & \lambda_n^1 \geqslant \lambda_{n+1}^1 & (4''\text{a}) & \lambda_n^2 \geqslant \lambda_{n+1}^2 \\
(3''\text{b}) & \lambda_n^1 \geqslant 0 & (4''\text{b}) & \lambda_n^2 \geqslant 0
\end{array}$$

Les conditions (1′) et (2′) s'écrivent alors :

$$(1'')\left\{\begin{array}{l}
\lambda_0^1 \geqslant p_0+\lambda_0^2 \\
\lambda_1^1 \geqslant p_1+\lambda_1^2 \\
\vdots \\
\lambda_n^1 \geqslant p_n+\lambda_n^2 \\
\vdots \\
\lambda_{N-1}^1 \geqslant p_{N-1}+\lambda_{N-1}^2
\end{array}\right.
\qquad
(2'')\left\{\begin{array}{l}
\lambda_0^2 \geqslant -c_0+\lambda_1^1 \\
\lambda_1^2 \geqslant -c_1+\lambda_2^1 \\
\vdots \\
\lambda_n^2 \geqslant -c_n+\lambda_{n+1}^1 \\
\vdots \\
\lambda_{N-2}^2 \geqslant -c_{N-2}+\lambda_{N-1}^1 \\
\lambda_{N-1}^2 \geqslant -c_{N-1}
\end{array}\right.$$

et la fonction économique devient :

$$\mathrm{Min}\{\lambda_0^1 x_0 + \lambda_0^2 (S - x_0)\}$$

Pour minimiser la fonction économique on peut voir qu'il faut et suffit de minimiser tous les λ_n^1 et λ_n^2. En effet pour minimiser la fonction économique il suffit de prendre $\lambda_0^1 = p_0 + \lambda_0^2$ et de minimiser λ_0^2 [ceci découle du fait que la variable λ_0^1 n'est limitée que par la 1ère contrainte (1″)] ; or pour minimiser λ_0^2 il faut et suffit de minimiser λ_1^1 [à cause de la 1ère contrainte (2″)] ; pour minimiser λ_1^1 il faut et suffit de minimiser λ_1^2 [à cause de la 2ème contrainte (1″)] ; pour minimiser λ_1^2 il faut et suffit de minimiser λ_2^1 [à cause de la 2ème contrainte (2″)] ; . . . etc.

Cette succession de minimisations s'effectuera de la façon suivante : on minimisera d'abord λ_{N-1}^2 : $(\lambda_{N-1}^{*2} = 0)$ puis $\lambda_{N-1}^1 (\lambda_{N-1}^{*1} = p_{N-1})$. Puis connaissant λ_{N-1}^{*1} et λ_{N-2}^{*1} on minimisera λ_{N-2}^2 et λ_{N-2}^1 ; mais plusieurs cas peuvent se présenter. D'une façon générale, pour minimiser λ_n^2 et λ_n^1, en supposant que l'on connaisse déjà les valeurs minimales de

$$\lambda_{n+1}^{*1}\ \lambda_{n+2}^{*1} \ldots \lambda_{N-1}^{*1}\ ,\ \lambda_{n+1}^{*2}\ \lambda_{n+2}^{*2} \ldots \lambda_{N-1}^{*2}$$

on recense les contraintes :

comme $\lambda_{n+1}^1 \geqslant 0$ la condition (3″b) est inutile puisqu'elle est une conséquence de (3″a)
comme $\lambda_{n+1}^2 \geqslant 0$ la condition (4″b) est inutile puisqu'elle est une conséquence de (4″a)

les seules contraintes actives sont alors :

$$(3'')\ \lambda_n^1 \geqslant \lambda_{n+1}^1 \qquad (1'')\ \lambda_n^1 \geqslant p_n + \lambda_n^2$$
$$(4'')\ \lambda_n^2 \geqslant \lambda_{n+1}^2 \qquad (2'')\ \lambda_n^2 \geqslant - c_n + \lambda_{n+1}^1$$

Enfin on constate que pour calculer les valeurs minimales λ_n^{1*} et λ_n^{2*}, quatre cas sont à envisager , suivant que l'une ou l'autre de ces contraintes est la plus limitative.

1. $\lambda_{n+1}^{1*} - \lambda_{n+1}^{2*} \geqslant c_n$

Alors (2″) est plus contraignante que (4″) dans la minimisation de λ_n^2 ; dans ces conditions $\lambda_n^{2*} = \lambda_{n+1}^{1*} - c_n$ et les contraintes actives dans la minimisation de λ_n^1 sont : $\lambda_n^1 \geqslant \lambda_{n+1}^{1*}$ et $\lambda_n^1 \geqslant p_n - c_n + \lambda_{n+1}^{1*}$; suivant que l'une ou l'autre de ces deux contraintes est la plus limitative dans la minimisation de λ_n^1, deux cas sont à envisager :

1.1 $\lambda^{1*}_{n+1} \leqslant p_n - c_n + \lambda^{1*}_{n+1}$ ou $p_n \geqslant c_n$ alors $\lambda^{1*}_n = \lambda^{1*}_{n+1} + p_n - c_n$

1.2 $\lambda^{1*}_{n+1} \geqslant p_n - c_n + \lambda^{1*}_{n+1}$ ou $p_n \leqslant c_n$ alors $\lambda^{1*}_n = \lambda^{1*}_{n+1}$

2. $\lambda^{1*}_{n+1} - \lambda^{2*}_{n+1} \leqslant c_n$

Alors (4″) est plus contraignante que (2″) dans la minimisation de λ^2_n ; dans ces conditions $\lambda^{2*}_n = \lambda^{2*}_{n+1}$ et les contraintes actives dans la minimisation de λ^1_n sont : $\lambda^1_n \geqslant \lambda^{1*}_{n+1}$ et $\lambda^1_n \geqslant p_n + \lambda^{2*}_{n+1}$. Suivant que l'une ou l'autre de ces deux contraintes est la plus limitative dans la minimisation de λ^1_n deux cas sont à envisager :

2.1 $\lambda^{1*}_{n+1} \geqslant p_n + \lambda^{2*}_{n+1}$ alors $\lambda^{1*}_n = \lambda^{1*}_{n+1}$

2.2 $\lambda^{1*}_{n+1} \leqslant p_n + \lambda^{2*}_{n+1}$ alors $\lambda^{1*}_n = p_n + \lambda^{2*}_{n+1}$

La comparaison des 4 cas ci-dessus (et des équations qu'ils fournissent pour l'évaluation des λ^i_n) avec les 4 cas rencontrés en programmation dynamique et en contrôle discret (et les équations de transition entre les λ^i_n qu'ils contiennent) montre que les variables λ^i_n de ce programme dual ne sont autres que les multiplicateurs de Green rencontrés dans les deux résolutions précédentes.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ATHANS M, FALB P. – *Optimal Control,* Mc Graw Hill.

[2] BOUZITAT J. – *Cahiers du B.U.R.O* – n° 12.

[3] DENN, ARIS – *Ind. Eng. Chem. Fundamentals,* 4 (7) (1965)
DENN, ARIS – *Chem. Eng. Sci.* 20. (373), 1965
DENN, ARIS – *AIChEJ,* 11(367), 1965

[4] GANTMACHER – *Théorie des matrices* – Dunod. (Tome 2 p. 121)

[5] GUILBAUD G.Th. – Programmes dynamiques et programmes linéaires : note sur un modèle de Bellman. *Cahiers du Bureau Universitaire de R.O.* n° 2 pp. 37-41.

[6] HESTENES – *Calculus of variations and optimal control Theory* Wiley.

[7] KIRK D.E. – *Optimal control Theory,* Prentice Hall.

[8] MILLER K.S. – *Linear Difference Equations,* Benjamin.

[9] TEICHROEW – *Introduction to management Science,* Wiley.

[10] WILDE, BEIGHTLER – *Foundations of optimization,* Prentice Hall.

[11] YASPAN, SASIENI, FRIEDMAN – *Operations Research,* Wiley.