A. M. DECAILLOT

Une variante de la méthode primale-duale

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 15 (1970), p. 43-52

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1970__15__43_0>

UNE VARIANTE DE LA MÉTHODE PRIMALE-DUALE

par

A. M. DECAILLOT

Les algorithmes ci-dessous ont été suggérés par les travaux de L.V. Kantorovitch, dont l'ouvrage principal, *Calcul économique et utilisation des ressources,* est paru il y a quelques années déjà dans sa traduction française. Si les méthodes proposées ne diffèrent pas essentiellement de celles de la programmation linéaire convexe, bien connue dans la littérature anglo-saxonne, elles ont le mérite d'avoir compté parmi les toutes premières recherches en ce domaine (certains travaux de L.V. Kantorovitch remontent à 1939).

On notera toutefois que, dans la méthode ci-dessous, la fonction objectif à maximiser demeure au cours de tous les programmes réduits la même que dans le programme initial, ce qui la distingue de la méthode primale-duale classique.

1. INTRODUCTION

Dans l'annexe mathématique de son ouvrage(*), L.V. Kantorovitch considère le problème qui peut se formuler de la façon suivante(**) :

Soient les ensembles finis d'indices

$$I = \{1, 2, \dots, p\}\ , J = \{p+1\ , p+2, \dots,\ p+q\}, K = \{1, 2, \dots, r\}$$

et les tableaux de nombres réels

$$\{a_i^k\ ;\ i \in I \cup J\ ;\ k \in K\} \quad \text{et} \quad \{b_i\ ,\ i \in I\}.$$

(*) L.V. Kantorovitch : *Calcul économique et utilisation des ressources* (Dunod 1963).

(**) op. cit., p. 247, problème D.

Pour tout vecteur $x \in \mathbf{R}^{r+1}$ de coordonnées $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_r, z\}$ dans la base canonique de $\mathbf{R}^{r+1}$, et pour tout indice $i \in I \cup J$, on pose

$$z_i = \Sigma \{a_i^k x_k , k \in K\}.$$

Il s'agit de déterminer le vecteur $x \in \mathbf{R}^{r+1}$, solution du programme linéaire :

$$\left\{\begin{array}{ll} & \operatorname{Max} z \\ & x \geqslant 0 \\ \forall i \in I & z_i \geqslant b_i \\ \forall i \in J & z_i \geqslant z. \end{array}\right.$$

Par un changement de notations, ce programme apparaît comme un cas particulier du programme classique que nous désignerons dans la suite par "programme P_1" :

$$P_1 \left\{\begin{array}{ll} \operatorname{Max} & c\,x \\ & x \geqslant 0 \quad (1) \\ & A\,x \geqslant b \quad (2) \end{array}\right.$$

où x est un vecteur à déterminer de $\mathbf{R}^n$, c un vecteur donné de $\mathbf{R}_n$ (dual de $\mathbf{R}^n$), b un vecteur donné de $\mathbf{R}^m$ et A une matrice donnée représentant une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$.

Les conditions d'existence d'une solution optimale formulées par L.V. Kantorovitch(*) sont équivalentes aux conditions classiques suivantes :

– L'ensemble des vecteurs admissibles est non vide ($\Longleftrightarrow P_1$ est compatible)

– Il existe un nombre M tel que, pour tout vecteur x admissible, $cx \leqslant M$ ($\Longleftrightarrow P_1$ est borné).

Ces deux conditions sont supposées remplies par la suite.

Des résultats bien connus(**) de la programmation linéaire nous indiquent que, pour que le programme P_1 admette une solution optimale, il faut et il suffit que son dual admette une solution optimale. Dans le cas présent ce dual, noté P_2, s'écrit :

$$P_2 \left\{\begin{array}{ll} \operatorname{Max} & ub \\ & u \geqslant 0 \quad (3) \\ & uA + c \leqslant 0 \quad (4) \end{array}\right.$$

où u est un vecteur à déterminer de $\mathbf{R}_m$ (dual de $\mathbf{R}^m$).

(*) Op. cit., p. 251

(**) On pourra consulter à ce sujet les ouvrages [2] et [3] de la bibliographie ci-jointe.

Enfin, si x^0 est une solution optimale de P_1, il existe une solution optimale u_0 de P_2, telle que l'on ait les relations de "complémentarité" suivantes :

$$(u_0 A + c)\, x^0 = 0 \tag{5}$$

$$u_0\, (Ax^0 - b) = 0\,. \tag{6}$$

De plus pour tous les vecteurs x et u admissibles, on a :

$$cx \leqslant -ub\,. \tag{7}$$

Cette inégalité se transforme en égalité lorsque x et u sont des solutions optimales de P_1 et P_2.

Ces résultats permettent à L.V. Kantorovitch d'énoncer un théorème classique(*) qui peut se formuler ainsi :

Théorème : Pour qu'un vecteur x, vérifiant les conditions (1) et (2), soit une solution optimale de P_1, il faut et il suffit qu'il existe un vecteur $u \in \mathrm{R}_m$ tel que les conditions (3), (4), (5) et (6) soient satisfaites par ces deux vecteurs.

2. EXPOSE DE L'ALGORITHME

L.V. Kantorovitch propose(**) l'algorithme suivant de construction d'une solution optimale de P_1 :

a) Supposons que l'on connaisse un vecteur $v_0 \in \mathrm{R}_m$ solution admissible de P_2 :

$$v_0 \geqslant 0$$

$$v_0\, A + c \leqslant 0\,.$$

A étant une matrice à m lignes et n colonnes, nous désignerons par $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ l'ensemble des indices repérant les colonnes de A et les coordonnées de c.

Posons

$$\forall\, s \in S \qquad V_0^s = v_0\, A^s + c^s\,.$$

- - - - - - - - - - - - - -

(*) L.V. Kantorovitch *Calcul économique. . . .* , p. 247, Théorème 3.

(**) op. cit., p. 288 et suivantes.

D'après les hypothèses faites $\forall\ s \in S \quad V_0^s \leqslant 0$.

Désignons par :

$$S_0 = \{s\ ;\ s \in S\ ;\ V_0^s = 0\}.$$

b) La méthode consiste à résoudre les programmes réduits ci-dessous (le programme primal réduit est noté R_0, son dual R_0^*) :

Programme réduit R_0

Déterminer $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$

tel que :

$$\begin{cases} \text{Max } cx \\ x \geqslant 0 \\ Ax \geqslant b \\ \forall s \notin S_0,\ x_s = 0 \end{cases}$$

Programme R_0^*

Déterminer $u \in \mathbf{R}_m$

tel que :

$$\begin{cases} \text{Max } ub \\ u \geqslant 0 \\ \forall\ s \in S_0 \quad U^s = uA^s + c^s \leqslant 0 \end{cases}$$

P_1 étant supposé borné, le programme R_0 l'est a fortiori. R_0^* est compatible puisque P_2 l'est par hypothèse. Reste à savoir si R_0 est compatible, ou, ce qui revient au même, si R_0^* est borné.

L.V. Kantorovitch n'aborde pas cette question, mais utilise(*) dans ses exemples numériques un vecteur $b \leqslant 0$. On peut remarquer qu'alors la solution $x = 0$ est toujours admissible aussi bien pour P_1 que pour R_0.

c) S'il n'en est pas ainsi, c'est-à-dire si R_0 n'est pas compatible ou bien si R_0^* n'est pas borné, on peut chercher comment modifier S_0 de façon que le programme associé R_0 devienne compatible. On est alors amené(**) à résoudre le programme préliminaire H_0, dans lequel s'introduit une variable "artificielle" $y \in \mathbf{R}$:

H_0

Déterminer $x \in R^n$ et $y \in \mathbf{R}$

tels que

$$\begin{cases} \text{Max } y \\ x \geqslant 0 \\ Ax \geqslant b + y \\ \forall s \notin S_0 \quad x_s = 0 \end{cases}$$

H_0^* (dual de H_0)

Déterminer $w = (w^1, w^2, \ldots, w^m) \in \mathbf{R}_m$

tel que :

$$\begin{cases} \text{Max } wb \\ w \geqslant 0 \\ \Sigma\{w^i\ ;\ i = 1, 2, \ldots m\} = 1 \\ \forall s \in S_0 \quad wA^s \leqslant 0 \end{cases}$$

- - - - - - - - - - - - - -

(*) L.V. Kantorovitch *Calcul économique. . .* , p. 284 et suivantes

(**) On trouvera un exposé de cette méthode dans l'ouvrage [3] de la bibliographie ci-jointe, notamment dans l'article de J. ABADIE, p. 25 de cet ouvrage.

Il est clair que H_0 est toujours compatible : il suffit de prendre $x = 0$ et y inférieur à toutes les coordonnées de $-b$. Lors de la résolution de H_0 deux cas se présentent :

1er cas :

$0 \leqslant \text{Max } y \leqslant +\infty$; il est évident que le programme réduit R_0 est compatible ; la résolution de H_0 fournit d'ailleurs une solution admissible de R_0.

2ème cas :

$\text{Max } y < 0$: H_0 étant compatible et borné, son dual H_0^* admet une solution optimale que nous désignerons par w_0. Il résulte des hypothèses que :

$$w_0\, b > 0\,.$$

Considérons alors le vecteur $v_1 = v_0 + \lambda w_0$, λ étant un nombre strictement positif précisé par la suite.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} v_1 A + c &= v_0 A + c + \lambda w_0 A \\ v_1 b &= v_0 b + \lambda w_0 b \\ v_1 &\geqslant 0\,. \end{aligned}$$

Supposons tout d'abord que $w_0 A \leqslant 0$, ce qui signifie :

$$\forall\, s \in S \;,\; w_0 A^s \leqslant 0\,.$$

λ étant un nombre positif, et v_0 un vecteur admissible de P_2, ceci implique : $v_1 A + c \leqslant 0$. Donc, quelque soit $\lambda > 0$, v_1 est un vecteur admissible de P_2, dans ces hypothèses.

L'égalité $v_1 b = v_0 b + \lambda w_0 b$, et l'hypothèse $w_0 b > 0$, permettent alors de conclure que la fonction objectif de P_2 n'est pas bornée, ce qui contredit notre hypothèse de départ.

Nous sommes donc dans le cas suivant :

$$\exists\, s \in S \qquad \text{tel que} \qquad w_0 A^s > 0\,.$$

On peut préciser que cet indice (ou ces indices) s n'appartiennent pas à S_0, car sinon w_0 ne serait pas un vecteur admissible de H_0^*, et donc que les valeurs correspondantes des nombres V_0^s sont strictement négatives.

On peut alors déterminer λ tel que :

$$\forall s \in S \quad V_1^s = v_1 A^s + c^s = V_0^s + \lambda w_0 A^s \leqslant 0.$$

Il suffit de choisir :

$$\lambda = \inf \left\{ -\frac{V_0^s}{w_0 A^s} \; ; \; s \in S \; ; \; w_0 A^s > 0 \right\}.$$

Ce qui précède entraîne que $\lambda > 0$.
v_1 est donc une solution admissible de P_2 telle que $S_1 = \{s \; ; s \in S \; ; V_1^s = 0\}$ contient au moins un indice s n'appartenant pas à S_0. Donc $S_0 \neq S_1$.

Il suffit de reprendre le raisonnement ci-dessus [§ a, b et c],le vecteur v_1 et l'ensemble S_1 remplaçant respectivement v_0 et S_0, aussi longtemps que le maximum du problème H* associé demeure strictement positif.

Le processus indiqué converge nécessairement en un nombre fini d'étapes puisque :

1/ $S_0 \neq S_1$

2/ $v_1 b = v_0 b + \lambda w_0 b > v_0 b$

3/ le nombre de sous-ensembles de S est fini ; si l'on parvient à $S_0 = S$ le programme R_0 se confond avec P_1, qui est compatible par hypothèse.

Par ce procédé, nous arrivons donc toujours à déterminer un vecteur, que nous continuerons à appeler v_0, admissible pour P_2 et tel que le programme R_0 associé soit compatible. Nous poursuivrons les calculs avec ce vecteur v_0 dans la phase suivante.

d) D'après le choix fait au paragraphe précédent de v_0 et S_0, le programme R_0 admet une solution optimale x_0. Le théorème rappelé dans le premier paragraphe, nous permet de lui associer un vecteur u_0, solution optimale de R_0^*. tel que les conditions (1), (2), (3), (5) et (6) soient satisfaites.

En ce qui concerne (4), nous pouvons seulement affirmer que :

$$\forall s \in S_0 \qquad U_0^s = u_0 A^s + c^s \leqslant 0 .$$

Deux cas se présentent :

1er cas :

$$\forall s \notin S_0 \qquad U_0^s = u_0 A^s + c^s \leqslant 0 .$$

La condition (4) est alors remplie et, d'après le théorème précité, les vecteurs x^0 et u_0 sont des solutions optimales de P_1 et P_2.

Remarque. – En particulier si $v_0 b = u_0 b$, le vecteur v_0 est un vecteur optimal de R_0^*. Il est alors également un vecteur optimal de P_2. En effet, x^0 et v_0 vérifient toutes les conditions (1), (2), (3), (4), (5) et (6) puisque :

$$cx^0 = -u_0 b = -v_0 b \qquad \text{par hypothèse}$$

$$(v_0 A + c)\, x^0 = 0 \quad \text{car} \quad x_s^0 = 0 \quad \text{si} \quad s \notin S_0 \quad \text{et} \quad V_0^s = 0 \quad \text{si} \quad s \in S_0 \qquad (5)$$

$$v_0(Ax^0 - b) = -cx^0 - v_0 b = 0 \qquad \text{d'après ce qui précède.} \qquad (6)$$

Dans ce cas x^0 est une solution optimale de P_1.

Nous supposons donc par la suite que $v_0 b < u_0 b$.

2ème cas :

$$\exists\, s \notin S_0 \qquad \text{tel que} \qquad U_0^s = u_0 A^s + c^s > 0$$

On construit alors un vecteur v_1' tel que le nouvel ensemble S_1' correspondant contienne l'un au moins des indices $s \notin S_0$. Il suffit de poser :

$$v_1' = \varepsilon\, u_0 + (1 - \varepsilon)\, v_0$$

avec

$$\varepsilon = \inf \left\{ \frac{V_0^s}{V_0^s - U_0^s} \quad ; \quad s \in S \quad ; \quad U_0^s > 0 \right\}$$

Il est clair que $0 < \varepsilon < 1$ et donc que :

$$v_1' \geqslant 0$$

$$v_1' A + c \leqslant 0.$$

La première de ces inégalités est évidente. Pour établir la seconde, on doit vérifier que :

$$\forall s \in S \qquad V_1'^s = v_1' A^s + c^s = \varepsilon\, U_0^s + (1 - \varepsilon)\, V_0^s \leqslant 0\,.$$

Deux cas se présentent :

– ou bien $s \in S_0 \Longrightarrow V_0^s = 0$ et l'inégalité se réduit à $U_0^s \leqslant 0$, ce qui est vrai.

– ou bien $s \notin S_0$: • si $U_0^s \leqslant 0$ elle est évidente puisque $V_0^s < 0$.
  • si $U_0^s > 0$, elle résulte du choix de ε.

A partir du vecteur v_1' admissible pour P_2 on peut donc répéter les calculs décrits ci-dessus :

a) Déterminer $S_1' = \{s \; ; \; s \in S \; ; \; V_1'^s = 0\}$. Remarquons que S_1' contient au moins un $s \notin S_0$. Donc $S_1' \neq S_0$.

b) A v_1' on associe le programme réduit R_1.

R_1 est évidemment borné et compatible. Il suffit pour cela de prouver que x^0 solution optimale de R_0 est admissible pour R_1, ou encore :

$$s \notin S_1 \Longrightarrow x_s^0 = 0 .$$

Soit $s \notin S_1$

Deux cas se présentent :

· ou bien $s \notin S_0 \Longrightarrow x_s^0 = 0$ car x^0 est solution de R_0.

· ou bien $s \in S_0$. Supposons $x_s^0 > 0$; ceci implique $U_0^s = 0$ et donc $V_1'^s = 0$; par conséquent $s \in S_1$ ce qui contredit l'hypothèse. Donc $x_s^0 = 0$.

Par conséquent, le programme R_1 est compatible : il est donc inutile d'appliquer la phase préliminaire correspondant au § c.

d) Soit x^1 une solution optimale de R_1. On peut affirmer que :

$$cx^1 > cx^0 .$$

En effet x^0 est une solution optimale de R_0 et une solution admissible de R_1, donc $cx^1 \geqslant cx^0$.

De plus :

$$cx^1 > cx^0 \Longleftrightarrow v_1'b > v_0 b \; .$$

Or : $$v_1'b = v_0 b + \varepsilon\,(u_0 b - v_0 b) \, .$$

D'après la remarque du § d, 1er cas, nous pouvons toujours supposer que $u_0 b > v_0 b$ et donc $v_1' b > v_0 b$.

La fonction objectif cx croît donc *strictement* à chaque étape.

En conclusion, à chaque étape :

$$1/ \; S_1' \neq S_0$$

$$2/ \; cx^0 < cx^1 .$$

Comme le nombre de parties de S est fini, le processus décrit converge au bout d'un nombre fini d'étapes. Remarquons que les seuls cas de dégénérescence qui peuvent intervenir sont ceux qui ont trait à la résolution des programmes réduits.

3. CONCLUSION

L'organigramme de la méthode suggérée par L.V. Kantorovitch peut se résumer ainsi (les notations utilisées sont celles qui ont été définies au cours des paragraphes précédents) :

Algorithme 1

Soit v_0 une solution admissible de P_2, telle que le programme réduit associé R_0 soit incompatible, ou, ce qui revient au même, telle que son dual R_0^* ne soit pas borné.

① Résoudre le programme H_0 associé à v_0. Deux cas :

ⓐ $0 \leqslant \text{Max } y \leqslant +\infty$: R_0 est compatible et R_0^* borné
Fin de l'algorithme

ⓑ $\text{Max } y < 0$: Passer à ②

② Résoudre le programme H_0^*, dual de H_0 : soit w_0 une solution optimale de H_0^*.
Prendre

$$v_1 = v_0 + \lambda w_0$$

avec

$$\lambda = \inf \left\{ -\frac{V_0^s}{w_0 A^s} \quad ; \quad s \in S \quad ; \quad w_0 A^s > 0 \right\}$$

Reprendre ① en remplaçant v_0 par v_1.

Algorithme 2

Soit v_0 une solution admissible de P_2.

① Résoudre le programme réduit R_0^* associé à v_0. Deux cas :

ⓐ $\text{Max } ub = +\infty$: R_0^* n'est pas borné et R_0 est incompatible.
Appliquer l'algorithme 1 et passer à ② avec le nouveau vecteur v_0 obtenu.

ⓑ $\text{Max } ub < +\infty$: Passer à ②

(2) Soit u_0 une solution optimale de R_0^*, et x^0 la solution optimale de R_0 qui lui est associée par le théorème rappelé au paragraphe 1. Deux cas :

(a) $v_0 b = u_0 b$: v_0 est solution optimale P_2 et x^0 de P_1.
Fin de l'algorithme.

(b) $v_0 b < u_0 b$: passer à (3)

(3) Calculer $\forall s \notin S_0 \quad U_0^s = u_0 A^s + c^s$. Deux cas :

(a) $\forall s \notin S_0 \quad U_0^s \leqslant 0$: u_0 et x^0 sont solutions optimales de P_2 et P_1.
Fin de l'algorithme.

(b) $\exists\, s \notin S_0$ tel que $U_0^s > 0$: reprendre (2) en remplaçant v_0 par

$$v_1 = \varepsilon u_0 + (1 - \varepsilon)\, v_0$$

avec

$$\varepsilon = \inf \left\{ \frac{V_0^s}{V_0^s - U_0^s} \; ; \; s \in S \; ; \; U_0^s > 0 \right\}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] KANTOROVITCH L.V. – *Calcul économique et utilisation des ressources* (Dunod 1963).

[2] DANTZIG G.B., FORD L.R., FULKERSON D.R. – *Linear Inequalities and Related Systems,* edited by H.W. KUHN and A.W. TUCKER. – *Annals of Mathematics Studies* Number 38, Princeton University Press, 1956.

[3] HUARD P. et coll. – *Mathématique des programmes économiques* Dunod 1964, AFIRO.

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN
Publications scientifiques et littéraires
TYPO - OFFSET
05 - GAP - Téléphone 14 23 14 24
Dépôt légal 356 - 1970