CAHIERS DU BURO

MONIQUE GUIGNARD

Conditions d'optimalité et dualité en programmation mathématique

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 14 (1970), p. 7-62

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1970__14__7_0>

CHAPITRE PREMIER
NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Nous introduirons dans ce chapitre les notations et définitions qui seront utilisées dans la suite de l'exposé et rappellerons ou démontrerons certaines propriétés élémentaires.

I §1 - NOTATIONS

- J étant un ensemble d'indices, $|J|$ représente le cardinal de J.
- Soit $\mathbf{R}^n$ l'espace euclidien à n dimensions. $\mathbf{R}^n$ est donc muni :

  1) du produit intérieur ou produit scalaire :

     $\forall x,y \in \mathbf{R}^n$, $<x,y>$ représente leur produit scalaire.

  2) de la norme associée à ce produit scalaire :

     $\forall x \in \mathbf{R}^n$, $\|x\|$ représente sa norme, avec $\|x\|^2 = <x,x>$.

  3) de la topologie définie par la norme.
     On notera $B_\varepsilon(\overline{x}) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x-\overline{x}\| \leqslant \varepsilon\}$ la boule fermée de centre $\overline{x}$ et de rayon ε.
     Si A est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^n$, on notera $\overline{A}$ l'adhérence de A et $\overset{\circ}{A}$ son intérieur. Alors $Fr(A) = \overline{A} - \overset{\circ}{A}$ est la frontière de A.

- On identifie tout vecteur x de $\mathbf{R}^n$ à la matrice colonne dont les éléments sont les composantes de x par rapport à la base canonique. Si cette matrice colonne est indicée par $|J|$, avec $|J| = n$, soit $j \in J$, x_j représente la composante d'indice j de x.

- Soit $(\mathbf{R}^m)^* = \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R})$ le dual de $\mathbf{R}^m$. On identifie tout vecteur u de $(\mathbf{R}^m)^*$ à la matrice ligne dont les éléments sont les composantes de u par rapport à la base duale de la base canonique de $\mathbf{R}^m$. Si cette matrice ligne est indicée par I, avec $|I| = m$, soit $i \in I$, u^i représente la composante d'indice i de u. Soit $y \in \mathbf{R}^m$, dont les composantes sont notées y_i, $i \in I$. A y, l'application linéaire u fait correspondre dans $\mathbf{R}$ le scalaire $u.y = \sum_{i \in I} u^i y_i$, c'est-à-dire le produit de la matrice ligne u par la matrice colonne y. A toute fonction linéaire $u \in (\mathbf{R}^m)^*$ correspond un vecteur déterminé $\tilde{u}$ de $\mathbf{R}^m$ tel que

$$\forall v \in \mathbf{R}^m, \ u.v = \langle \tilde{u}, v \rangle.$$

Les vecteurs de $\mathbf{R}^m$ représentent biunivoquement les fonctions linéaires définies sur $\mathbf{R}^m$. On utilisera cette propriété pour identifier, dans les interprétations géométriques, un sous-ensemble $\mathfrak{a}$ de $(\mathbf{R}^m)^*$ (resp. de $\mathbf{R}^m$) et le sous-ensemble isomorphe $\tilde{\mathfrak{a}}$ de $\mathbf{R}^m$ (resp. de $(\mathbf{R}^m)^*$).

- Soit $l \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$. Cette application linéaire est représentée par une matrice L indicée par $I \times J$, avec $|I| = m$ et $|J| = n$.

 Soit $i \in I$. L_i représente la ligne d'indice i de L.

 Soit $j \in J$. L^j représente la colonne d'indice j de L.

 L_i^j est alors l'élément situé à l'intersection de cette ligne et de cette colonne.

- Soient $\left.\begin{array}{l} f : X \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \\ \text{et } g : Y \subset \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R} \end{array}\right\}$ avec $X \cap Y \neq \emptyset$

 a) Si $\left.\begin{array}{l} .\ \exists Z \subset X \cap Y \\ .\ \exists \lambda \in]0, +\infty[\end{array}\right\}$ tels que $\forall x \in Z : |g(x)| \leqslant \lambda\, |f(x)|$,

 on écrira

$$g = O(f).$$

 b) Si $\forall \varepsilon > 0, \exists Z \subset Y \cap Y$ tel que $\forall x \in Z : |g(x)| < \varepsilon |f(x)|$ on écrira

$$g = o(f).$$

- Soit $\varphi : W \subset \mathbf{R}^q \longrightarrow \mathbf{R}^p$.

 Soit $\bar{x} \in W$. On écrira $\bar{\varphi}$ pour $\varphi(\bar{x})$.

Si $\varphi(x)$ est indicé par J, avec $|J| = p$, on écrira $\varphi(x) \geqslant 0$ pour $\varphi_j(x) \geqslant 0$, $\forall j \in J$.

I §2 - DEFINITIONS

I §2.A - Convexité, quasi-convexité, pseudo-convexité

Définition 1a : fonctions quasi-concaves et quasi-convexes

Soit $\varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$.

φ est *quasi-concave* si $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\{y \in \mathbf{R}^n : \varphi(y) \geqslant \alpha\}$ est convexe.
φ est *quasi-convexe* si $(-\varphi)$ est quasi-concave.

Soit $\varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^p$.

φ est *quasi-concave* si chacune des fonctions coordonnées est quasi-concave.
φ est *quasi-convexe* si $(-\varphi)$ est quasi-concave.

Propriété des fonctions quasi-concaves

Si $\varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$ est quasi-concave, et différentiable en $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, alors

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(\bar{x}) \Longrightarrow \overline{\frac{d\varphi}{dx}}(x-\bar{x}) \geqslant 0$$

Si φ est quasi-concave

$$\varphi(x) \geqslant \varphi(\bar{x}) \Longrightarrow \varphi[\theta x + (1-\theta)\bar{x}] \geqslant \varphi(\bar{x}), \ \forall \theta \in [0,1]$$

Soit $\psi(\theta) = \varphi[\theta x + (1-\theta)\bar{x}]$

alors $\psi(\theta) \geqslant \varphi(\bar{x}) = \psi(0)$

donc

$$\left[\frac{d\psi(\theta)}{d\theta}\right]_{\theta=0} \geqslant 0 \text{ ou encore } \overline{\frac{d\varphi}{dx}}(x-\bar{x}) \geqslant 0$$

Définition 1 b : fonctions pseudo-concaves

Soit $\varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, différentiable en $\bar{x} \in A \subset \mathbf{R}^n$.

φ est *pseudo-concave sur A en $\bar{x}$* si :

$$\forall\ x \in A,\ \overline{\frac{d\varphi}{dx}}(x-\bar{x}) \leqslant 0 \Longrightarrow \varphi(x) - \varphi(\bar{x}) \leqslant 0.$$

On dira que φ *est pseudo-concave* si $\forall x \in \mathbb{R}^n$, φ est pseudo-concave sur $\mathbb{R}^n$ en x. Réf : [33]

Définition 1 c : ensemble pseudo-convexe en un point

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in A$ et P_A le pseudo-cône tangent à A en $\bar{x}$ (cf. définition 4)

A est pseudo-convexe en $\bar{x}$ si

$$\forall\ x \in A,\ x - \bar{x} \in P_A.$$

A est pseudo-convexe si $\forall\ \bar{x} \in A$, A est pseudo-convexe en $\bar{x}$.

I §2. B - Vecteurs, cônes et pseudo-cônes tangents, cônes polaires

Définition 2 : Cône. Cône polyédrique

Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

$Q \subset F$ est un *cône* si 1) $0 \in Q$.

$$2)\ \left.\begin{array}{l}\forall x \in Q\\ \forall \lambda > 0\end{array}\right\}\quad \lambda x \in Q.$$

$Q \subset F$ est un *cône polyédrique* si Q est un cône défini par l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés dont les hyperplans générateurs passent par l'origine.

Remarque : Un cône polyèdrique est un cône convexe.

Définition 3 : Vecteur tangent

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{x} \in \bar{A}$, et $\xi \in \mathbb{R}^n$.

ξ est un *vecteur tangent* à A en $\bar{x}$ si

1) il existe une suite $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs

2) il existe une suite $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de points de A convergeant vers $\bar{x}$ quand k tend vers l'infini,

telles que la suite $\{\lambda_k(x_k - \bar{x})\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ξ.

Réf : [1].

Remarque

Le vecteur nul est toujours vecteur tangent à A en $\bar{x}$, $\forall A$, $\forall \bar{x} \in \bar{A}$.

Définition 4 : Cône et pseudo-cône tangents

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$, et $\bar{x} \in \bar{A}$.

Le *cône tangent* à A en $\bar{x}$ est l'ensemble T_A des vecteurs tangents à A en $\bar{x}$.

Le *pseudo-cône tangent* à A en $\bar{x}$ est l'adhérence P_A du plus petit cône convexe contenant T_A.

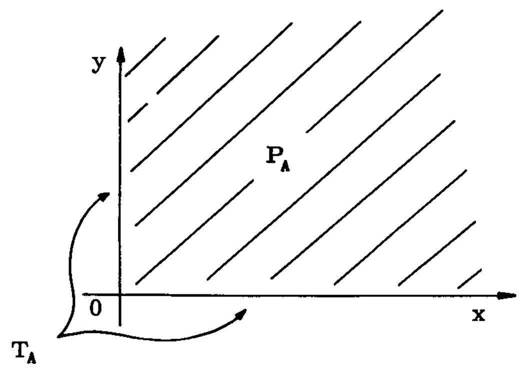
Remarques

. Le cône tangent est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Réf : [1].

. Le cône tangent n'est jamais vide, puisqu'il contient au moins le vecteur nul.

Exemple



$\bar{x} = (0,0) \in \mathbb{R}^2$.

$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0 \text{ et } x+y = \frac{1}{n}, n \text{ entier positif}\right\}$

$T_A = \{\xi = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha\beta = 0\}$

$P_A = \mathbb{R}^2_+$.

Théorème I : Cône tangent à un ensemble convexe

Si . $A \subset \mathbb{R}^n$ est convexe

. $\bar{x} \in A$

. T_A est le cône tangent à A en $\bar{x}$

alors $\forall x \in A,\ x - \bar{x} \in T_A$.

$$\left.\begin{array}{l}A \text{ convexe}\\ \bar{x} \in A\end{array}\right\} \Longrightarrow \forall x \in A,\ \forall \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)\ \bar{x} \in A.$$

Soit $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbf{N}}$ une suite quelconque de nombres positifs, inférieurs à 1, convergeant vers 0 quand k tend vers l'infini.

Soit $x_k = \bar{x} + \lambda_k (x - \bar{x})$.

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \bar{x}$. Soit $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k}$, $\forall k$. Alors $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_k (x_k - \bar{x}) = x - \bar{x}$

et $x - \bar{x}$ est bien vecteur tangent à A en $\bar{x}$ si x est élément de A.

Remarque : Un ensemble convexe est donc pseudo-convexe en chacun de ses points, c'est-à-dire pseudo-convexe.

Théorème 2 : Intersection de cônes tangents

Si . $A, B \subset \mathbf{R}^n$

. $\bar{x} \in A \cap B$.

alors $T_{A\cap B} \subset T_A \cap T_B$ et $P_{A\cap B} \subset P_A \cap P_B$.

Un vecteur tangent à $A \cap B$ en $\bar{x}$ est tangent à A et à B en $\bar{x}$, donc

$$T_{A\cap B} \subset T_A \cap T_B,$$

or $P_A \cap P_B \supset T_A \cap T_B$, donc $P_A \cap P_B \supset T_{A\cap B}$. $P_A \cap P_B$, intersection de deux cônes convexes fermés est aussi un cône convexe fermé. D'autre part, $P_{A\cap B}$ est le plus petit cône fermé convexe contenant $T_{A\cap B}$. Par conséquent

$$P_{A\cap B} \subset P_A \cap P_B.$$

Remarque

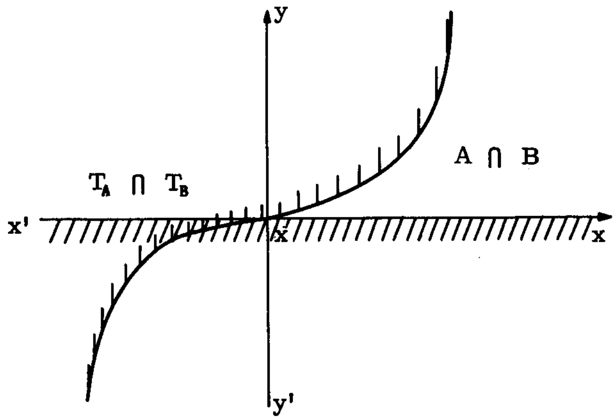
La réciproque n'est pas vraie. Il est possible en effet que $T_A \cap T_B \not\subset T_{A\cap B}$, comme le montre l'exemple suivant :

$$A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq x^3\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0\}$$

$$\bar{x} = (0,0) \in A \cap B.$$

$$\begin{cases} Ox' \subset T_A \cap T_B = x'Ox \\ Ox' \not\subset T_{A\cap B} = Ox. \end{cases}$$



Définition 5 : Cône polaire ou cône dual

Soit Q un cône de $\mathbf{R}^n$.

Le cône polaire (négatif) ou cône dual de Q est l'ensemble $\Gamma(Q)$ défini par

$$\Gamma(Q) = \{\eta \in (\mathbf{R}^n)^* : \eta.\xi \leqslant 0 \qquad \forall \xi \in Q\}.$$

Remarques

- Pour tout cône Q de $\mathbf{R}^n$, $0 \in Q \cap \Gamma(Q)$.
- On identifiera souvent, à un isomorphisme près, $\Gamma(Q)$ et

$$\widetilde{\Gamma(Q)} = \{\nu \in \mathbf{R}^n : \langle \nu, \xi \rangle \leqslant 0 \ \forall \xi \in Q\}.$$

Propriétés des cônes polaires

- $\forall Q$ cône de $\mathbf{R}^n$:
  - . $\Gamma(Q)$ est un cône fermé.
  - . $\Gamma[\Gamma(Q)]$ est l'adhérence du plus petit cône convexe contenant Q.

  Par conséquent si Q est un cône convexe et fermé

$$\Gamma[\Gamma(Q)] = Q.$$

- $\forall Q_1, Q_2$ cônes de $\mathbf{R}^n$:
  - . $Q_1 \subset Q_2 \Longrightarrow \Gamma(Q_1) \supset \Gamma(Q_2)$

- $\forall\, Q_1,\ Q_2$ cônes convexes de $\mathbb{R}^n$:
  . $\Gamma(Q_1 + Q_2) = \Gamma(Q_1) \cap \Gamma(Q_2)$

  . $\Gamma(\bar{Q}_1 \cap \bar{Q}_2) = \overline{\Gamma(Q_1) + \Gamma(Q_2)}$

Si Q_1 et Q_2 sont des cônes polyédriques, $\Gamma(Q_1) + \Gamma(Q_2)$ est un cône fermé, Q_1 et Q_2 sont cônes fermés, donc

$$\Gamma(Q_1 \cap Q_2) = \Gamma(Q_1) + \Gamma(Q_2).$$

Réf : [16] et [45].

I §2. C - Programmes mathématiques

Définition 6 : Programme mathématique

Soient $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ et $A \subset \mathbb{R}^n$.

On appelle *programme mathématique* le problème suivant

$$\text{Max } \{\varphi(x) : x \in A\}$$

c'est-à-dire la recherche du maximum d'une fonction φ sur une partie A de $\mathbb{R}^n$.

On appelle *contraintes* la condition $x \in A$.

On appelle *solution réalisable* tout x satisfaisant aux contraintes.

Remarques

. Le problème Min $\{\varphi(x) : x \in A\}$ est aussi un programme mathématique puisqu'il peut s'écrire

$$\text{Max } \{-\varphi(x) : x \in A\}.$$

. On emploie aussi le mot "contraintes" pour désigner la frontière de A.

Définition 7 : Maximum local, maximum global

Etant donné le programme Max $\{\varphi(x) : x \in A\}$ et $\bar{x} \in A$,

on dit que $\bar{x}$ *maximise localement* φ *sur* A (ou est un maximum local pour φ sur A) si

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall\, y \in A \cap B_\varepsilon(\bar{x}),\ \varphi(\bar{x}) \geqslant \varphi(y).$$

on dit que $\bar{x}$ *maximise (globalement)* φ *sur A* (ou est un maximum (global) pour φ sur A) si

$$\forall\ y \in A,\ \varphi(\bar{x}) \geqslant \varphi(y).$$

Remarques

. Si $\bar{x}$ maximise φ sur A , $\bar{x}$ est solution optimale du programme

$$\text{Max }\{\varphi(x) : x \in A\}.$$

. Si $\bar{x}$ maximise *simultanément* les fonctions φ_j, $j \in J$, sur A , on dira que $\bar{x}$ maximise φ_j sur A.

Théorème 3 : Maximum local et global

Si . $A \subset \mathbf{R}^n$ est convexe

. $\bar{x} \in A$

. $\varphi : A \longrightarrow \mathbf{R}$ est concave

. $\bar{x}$ maximise localement φ sur A

alors $\bar{x}$ maximise φ sur A.

Supposons qu'il existe $x \in A$, $x \neq \bar{x}$ tel que $\varphi(x) > \varphi(\bar{x})$. $\bar{x}$ étant un maximum local pour φ sur A :

$$\exists\ \varepsilon > 0 : y \in A \cap B_\varepsilon(\bar{x}) \Longrightarrow \varphi(y) \leqslant \varphi(\bar{x}).$$

A étant convexe, $\forall\ \lambda \in [0,1] : \lambda x + (1-\lambda)\ \bar{x} \in A$, donc

$$\exists \lambda_1 \in]0,1] : \lambda_1 x + (1-\lambda_1)\ \bar{x} \in A \cap B_\varepsilon(\bar{x}).$$

φ étant concave, $\forall\ \lambda \in [0,1] : \varphi[\lambda x + (1-\lambda)\bar{x}] \geqslant \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(\bar{x})$

$$\text{donc}\quad \varphi[\lambda_1 x + (1-\lambda_1)\ \bar{x}] \geqslant \lambda_1 \varphi(x) + (1-\lambda_1)\ \varphi(\bar{x})$$
$$> \lambda_1 \varphi(\bar{x}) + (1-\lambda_1)\ \varphi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}),$$

ce qui contredit le fait que $\bar{x}$ maximise φ sur $A \cap B_\varepsilon(\bar{x})$.
Par conséquent il n'existe pas de $x \in A$, $x \neq \bar{x}$, tel que $\varphi(x) > \varphi(\bar{x})$.

I §2.D - Programmes sous contraintes mixtes. Problèmes de col

Définition 8 : Programme sous contraintes mixtes

Soient $\varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, $a : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$, et $C \subset \mathbf{R}^n$.

On appellera *programme sous contraintes mixtes* le problème suivant :

$$\operatorname{Max} \{\varphi(x) : x \in C,\ a(x) \geqslant 0\}.$$

On appellera *contraintes* la condition $x \in A = \{x : a(x) \geqslant 0\} \cap C$.

Remarque

On suppose $a(x)$ indicé par L, avec $|L| = m$. L'hypersurface définie par $a_l(x) = 0$ où $l \in L$, est appelée *contrainte d'indice l*.

Définition 9 : Contraintes actives

On appelle *contraintes actives en* $\bar{x} \in A$ les contraintes indicées par $E \subset L$ avec

$$\begin{cases} a_E(\bar{x}) = 0 \\ a_{L-E}(\bar{x}) > 0. \end{cases}$$

On notera $L-E = \bar{E}$. Si $|E| = k$, $\bar{x}$ appartient à la $(n-k)$-variété définie par $a_E(x) = 0$.

Définition 10 : Hypothèses H(G), H(0) et H.

On pose $\Delta = \{x \in \mathbf{R}^n : a(x) \geqslant 0\}$, et $A = \Delta \cap C$. On suppose que a est différentiable en $\bar{x} \in A$. Soient G un cône convexe fermé, P_C le pseudo-cône tangent à C en $\bar{x}$, P_A le pseudo-cône tangent à A en $\bar{x}$.

Soit $K_0 = \left\{\xi \in \mathbf{R}^n : \overline{\dfrac{da_E}{dx}} \cdot \xi \geqslant 0\right\}$ et soit $K_g = K_0 \cap G$.

$\bar{x}$ vérifie *l'hypothèse* H(G) sur A si $\begin{cases} \Gamma(K_0) + \Gamma(G) \text{ est fermé} \\ K_g = P_A. \end{cases}$

On sera amené à envisager les cas particuliers suivants :

Si $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) avec $G = \mathbf{R}^n$, ou encore si $K_0 = P_A$, on dira que $\bar{x}$ vérifie *l'hypothèse H(0)* sur A.

Si $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) avec $G = P_C$, ou encore si

$$\begin{cases} \Gamma(K_0) + \Gamma(P_C) & \text{est fermé} \\ K_0 \cap P_C = P_A & \end{cases}$$

on dira que $\bar{x}$ vérifie *l'hypothèse H* sur A.

Remarques

. Si on pose $K = K_0 \cap P_C$, il est facile de voir que $K_0 \supset K_g \supset K$, lorsque $G \supset P_C$.

. Pour que $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(O) sur A , il suffit que $K_0 = P_A$. En effet

$$\Gamma(K_0) + \Gamma(G) = \Gamma(K_0) + \Gamma(R^n) = \Gamma(K_0) + \{0\} = \Gamma(K_0)$$

est un cône fermé.

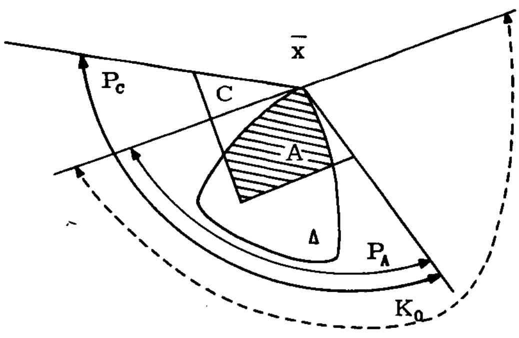
. Si G est polyédrique, $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ est un cône fermé.

Réf : [45]

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, un cône convexe fermé G ne peut être que polyédrique, donc on aura toujours $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ fermé.

Le gradient correspondant à l'une des contraintes est ici nul en $\bar{x} = 0$. $K_0 \supset P_A$, mais $K_0 \not\subset P_A$, donc $\bar{x}$ ne vérifie pas l'hypothèse H(O) sur A.



$K_0 \cap P_C = P_A$, donc $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H sur A.

Si G_1 et G_2 sont deux cônes convexes fermés,

si $G_1 \cap (K_0 - P_A) = \emptyset$, $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(G_1)$ sur A,

si $G_2 \cap (K_0 - P_A) \neq \emptyset$, $\bar{x}$ ne vérifie pas l'hypothèse $H(G_2)$ sur A.

Définition 11 : Col.

Soit $\psi : X \times U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}$,

$(\bar{x},\bar{u}) \in X \times U$ est un *col* pour ψ sur $X \times U$ si

$$\forall\ (x,u) \in X \times U : \psi(x,\bar{u}) \leqslant \psi(\bar{x},\bar{u}) \leqslant \psi(\bar{x},u).$$

Remarques

. On emploie parfois le mot "point-selle" à la place de "col".

. Si $(\bar{x},\bar{u})$ est un col pour ψ sur $X \times U$:

$$\mathrm{Inf}\ \{\psi(\bar{x},u) : u \in U\} = \psi(\bar{x},\bar{u}) = \mathrm{Sup}\ \{\psi(x,\bar{u}) : x \in X\}.$$

Définition 12 : problème de col.

On appelle *problème de col* la recherche d'un col pour ψ sur $X \times U$.

On appelle *solution réalisable du problème de col* tout $(x,u) \in X \times U$.

CHAPITRE II
CONDITIONS D'OPTIMALITÉ

Nous envisagerons dans ce chapitre des programmes mathématiques, sous des contraintes éventuellement mixtes, de la forme générale Max $\{\varphi(x) : x \in A\}$, et les conditions, nécessaires ou suffisantes, pour que $\bar{x} \in A$ maximise, localement ou globalement, φ sur A.

II §1 - PREMIERE CONDITION D'OPTIMALITE

Théorème 4 : Première condition d'optimalité

Soient $A \subset \mathbf{R}^n$, et $\bar{x} \in A$.

$\varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$, est différentiable en $\bar{x}$.

Soit P_A le pseudo-cône tangent à A en $\bar{x}$.

A. Si $\bar{x}$ maximise φ sur A,

alors $\overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} \in \Gamma(P_A)$.

B. Si . φ est pseudo-concave sur A en $\bar{x}$

. A est pseudo-convexe en $\bar{x}$

. $\overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} \in \Gamma(P_A)$

alors $\bar{x}$ maximise φ sur A.

A. Soit $\xi \in T_A \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \exists\{\lambda_k\}_{k\in\mathbf{N}}, \lambda_k \in \mathbf{R}_+^* \\ \exists\{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}, x_k \in A, \lim\limits_{k\to\infty} x_k = \bar{x} \end{array}\right\} : \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k(x_k - \bar{x}) = \xi$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} \text{ maximise } \varphi \text{ sur } A \\ x_k \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall\, k \in \mathbf{N},\ \varphi(x_k) \leqslant \varphi(\bar{x})$$

$$\text{ou} \quad \varphi(x_k) - \varphi(\bar{x}) = \overline{\frac{d\varphi}{dx}} \cdot (x_k - \bar{x}) + o\,(\|x_k - \bar{x}\|) \leqslant 0$$

$$\lambda_k > 0 \Longrightarrow \overline{\frac{d\varphi}{dx}} \cdot \lambda_k (x_k - \bar{x}) \leqslant -\, o\,(\|x_k - \bar{x}\|)\,.\ \lambda_k\,.$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{k\to\infty} \overline{\frac{d\varphi}{dx}} \cdot \lambda_k (x_k - \bar{x}) = \overline{\frac{d\varphi}{dx}} \cdot \xi \\ &\lim_{k\to\infty} [-o(\|x_k-\bar{x}\|).\lambda_k] = \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{o(\|x_k-\bar{x}\|)}{\|x_k-\bar{x}\|}.\lambda_k\|x_k-\bar{x}\|\right] \\ &\qquad = 0\|\xi\| \\ &\qquad = 0. \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \overline{\frac{d\varphi}{dx}}.\xi \leqslant 0$$

Cette inégalité est vraie pour tout η limite d'une suite de combinaisons linéaires convexes de vecteurs tangents,

c'est-à-dire : $\forall\ \eta \in P_A$, $\overline{\frac{d\varphi}{dx}} \cdot \eta \leqslant 0$, ou encore $\overline{\frac{d\varphi}{dx}} \in \Gamma(P_A)$.

B. $$\left.\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &\overline{\frac{d\varphi}{dx}} \in \Gamma(P_A) \\ &A \text{ pseudo-convexe en } \bar{x} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \overline{\frac{d\varphi}{dx}} \cdot (x-\bar{x}) \leqslant 0,\ \forall x \in A \\ &\qquad \varphi \text{ pseudo-concave sur } A \text{ en } \bar{x} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\varphi(x)-\varphi(\bar{x}) \leqslant 0, \\ &\forall\ x \in A \end{aligned}$$

Remarques

. Dans la suite du chapitre, on envisagera le programme sous contraintes mixtes suivant : Max $\{\varphi(x) : x \in C,\ a(x) \geqslant 0\}$,

$$\text{où } \varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R},\ a : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m,\ C \subset \mathbf{R}^n.$$

Soient $\Delta = \{x \in \mathbf{R}^n : a(x) \geqslant 0\}$ et $A = \Delta \cap C$.

Soit $\bar{x} \in A$. E sera l'ensemble des indices des contraintes actives en $\bar{x}$. P_A, P_Δ et P_C seront les pseudo-cônes tangents respectivement à A, à Δ et à C, en $\bar{x}$. G est un cône convexe fermé.

. Si a est différentiable en $\bar{x}$,

soient $K_0 = \left\{\xi \in \mathbf{R}^n : \overline{\frac{da_E}{dx}} \cdot \xi \geqslant 0\right\}$,

$$K_g = K_0 \cap G, \quad \text{et} \quad K = K_0 \cap P_C.$$

Corollaire : Théorème 5 :

Si a est différentiable en $\bar{x}$,
alors . $P_\Delta \subset K_0$
. $P_A \subset K \subset K_0$

. $\forall\ x \in \Delta,\ -\ a_E(x) \leqslant -\ a_E(\bar{x}) = 0.$
$\bar{x}$ maximise $(-a_E)$ sur Δ , et, d'après le théorème 4 :

$$\forall j \in E : -\ \frac{\overline{da_j}}{dx} \in \Gamma(P_\Delta), \quad \text{ou encore} \quad \frac{\overline{da_E}}{dx} \cdot \xi \geqslant 0 \quad \forall\ \xi \in P_\Delta$$

donc $P_\Delta \subset K_0$.

$$\left.\begin{array}{l} .\ P_A = P_{\Delta \cap c} \subset P_\Delta \cap P_c \ \text{(théorème 3)} \\ P_\Delta \subset K_0 \end{array}\right\} \Longrightarrow P_A \subset P_\Delta \cap P_c \subset K_0 \cap P_c \subset K_0$$

c'est-à-dire $P_A \subset K \subset K_0$.

Remarque : Comme $K_0 \supset K \supset P_A$, $H(O) \Longrightarrow H$.

II §2 - SECONDE CONDITION D'OPTIMALITE : CONDITIONS DE KUHN ET TUCKER GENERALISEES

Pour le programme Max $\{\varphi(x) : x \in C,\ a(x) \geqslant 0\}$, G étant un cône convexe fermé, ces conditions s'écrivent :

$$(1)\ \exists u \in (\mathbb{R}^m)^* : \begin{cases} u \geqslant 0 \\ \dfrac{\overline{d\varphi}}{dx} + u\, \dfrac{\overline{da}}{dx} \in \Gamma(G) \\ u a(\bar{x}) = 0 \end{cases} \text{ou } (2)\ \exists u \in (\mathbb{R}^m)^* \text{ et } v \in \Gamma(G) : \begin{cases} u \geqslant 0 \\ \dfrac{\overline{d\varphi}}{dx} + u\, \dfrac{\overline{da}}{dx} = v \\ u a(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

Les composantes de u seront appelées "multiplicateurs".

II §2 - A. Conditions suffisantes

Le théorème 6 adapte des résultats de [36] aux programmes sous contraintes mixtes et aux conditions de Kuhn et Tucker généralisées.

Théorème 6 : Optimum local

Si . φ et a sont deux fois continûment différentiables au voisinage de $\bar{x}$
. au voisinage de $\bar{x}$, $x \in A \Longrightarrow x - \bar{x} \in G$.

. les conditions de Kuhn et Tucker généralisées sont vérifiées en $\bar{x}$ et

$\exists E' \subset E,\ E' \neq \emptyset : u^{E'} \neq 0,\ u^{L-E'} = 0$

$$. \ \forall h \neq 0, \left.\begin{array}{l} \overline{\dfrac{da_{E'}}{dx}} \, . \, h = 0 \\ \overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} \, . \, h = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \tilde{h} \, . \, \overline{\frac{d^2[\varphi + ua]}{dx^2}} \, . \, h < 0$$

alors $\bar{x}$ est un maximum local strict pour φ sur A.

N.B. $\tilde{h}$ représente la matrice-ligne transposée de la matrice-colonne h.

Supposons que $\bar{x}$ ne soit pas un maximum local strict :

$$\exists \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \ : \ \left\{\begin{array}{l} x_k \in A,\ x_k \neq \bar{x} \quad \forall k. \\ \lim\limits_{k \to \infty} x_k = \bar{x} \\ \varphi(x_k) \geqslant \varphi(\bar{x}) \end{array}\right.$$

On peut supposer de plus en raison de la compacité de la sphère unité, que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{x_k - \bar{x}}{\|x_k - \bar{x}\|} = h \neq 0.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Au voisinage de } \bar{x},\ x_k \in A \longrightarrow x_k - \bar{x} \in G \\ \overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} + u \, \overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma(G) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left[\overline{\frac{d\varphi}{dx}} + u \, \overline{\frac{da}{dx}}\right] . \, (x_k - \bar{x}) \leqslant 0.$$

G étant un cône fermé : $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{x_k - \bar{x}}{\|x_k - \bar{x}\|} = h \in G$

donc $\left[\overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} + u \, \overline{\dfrac{da}{dx}}\right] . \ h \leqslant 0$

$$\left.\begin{array}{l} x_k \in \Delta \Longrightarrow a_E(\bar{x}_k) \geqslant 0 \\ \qquad\qquad a_E(\bar{x}) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_E(x_k) - a_E(\bar{x}) \geqslant 0$$

ou, $\forall j \in E : a_j(x_k) - a_j(\bar{x}) = \overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot (x_k - \bar{x}) + o(\|x_k - \bar{x}\|)$

$$= \left[\overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot \frac{(x_k - \bar{x})}{\|x_k - \bar{x}\|} + 0(\|x_k - \bar{x}\|) \right] . \|x_k - \bar{x}\| \geqslant 0$$

donc $\lim\limits_{k \to \infty} \left[\overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot \frac{x_k - \bar{x}}{\|x_k - \bar{x}\|} + 0(\|x_k - \bar{x}\|) \right] = \overline{\frac{da_j}{dx}} . h \geqslant 0$

a) Supposons que $\overline{\frac{d\varphi}{dx}} . h < 0$

ou encore que $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{\varphi(x_k) - \varphi(\bar{x})}{\|x_k - \bar{x}\|} = \lim\limits_{k \to \infty} \left[\overline{\frac{d\varphi}{dx}} . \frac{x_k - \bar{x}}{\|x_k - x\|} + 0(\|x_k - \bar{x}\|) \right] < 0$

Alors $\exists N > 0 : k \geqslant N \Longrightarrow \varphi(x_k) - \varphi(\bar{x}) < 0$, car $x_k \neq \bar{x} \ \forall k$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent $\overline{\frac{d\varphi}{dx}} . h \geqslant 0$.

b) Supposons que

$$\exists \ E'' \subset E' , \ E'' \neq \emptyset : \forall j \in E'', \ \overline{\frac{da_j}{dx}} . h > 0.$$

Alors $\overline{\frac{d\varphi}{dx}} . h \leqslant -u^{E''} . \overline{\frac{da_{E''}}{dx}} . h < 0$

ce qui, d'après a), est contraire à l'hypothèse.

Par conséquent $\overline{\frac{da_{E'}}{dx}} . h = 0$.

c) Il faut donc que $\overline{\frac{d\varphi}{dx}} . h = 0$.

Soit $\psi(x) = \varphi(x) + ua(x)$.

Alors $\tilde{h} . \overline{\frac{d^2\psi}{dx^2}} . h < 0$.

Or $\overline{\frac{d\psi}{dx}} . (x_k - \bar{x}) = \left(\overline{\frac{d\varphi}{dx}} + u \overline{\frac{da}{dx}} \right) . (x_k - \bar{x}) \leqslant 0$

$$\psi(x_k) - \psi(\bar{x}) = \overline{\frac{d\psi}{dx}} \cdot (x_k - \bar{x}) + \frac{1}{2}\,\widetilde{(x_k-\bar{x})}\,\overline{\frac{d^2\psi}{dx^2}}\,(x_k-\bar{x}) + o(\|x_k-\bar{x}\|^2)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\,\widetilde{(x_k-\bar{x})} \cdot \overline{\frac{d^2\psi}{dx^2}} \cdot (x_k-\bar{x}) + o\,(\|x_k-\bar{x}\|^2)$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\psi(x_k)-\psi(\bar{x})}{\|x_k-\bar{x}\|^2} \leqslant \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\widetilde{(x_k-\bar{x})}}{\|x_k-\bar{x}\|} \cdot \overline{\frac{d^2\psi}{dx^2}}\, \frac{(x_k-\bar{x})}{\|x_k-\bar{x}\|} + \frac{o\,(\|x_k-\bar{x}\|^2)}{\|x_k-\bar{x}\|^2} \right]$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\,\tilde{h}.\,\overline{\frac{d^2\psi}{dx^2}} \,.\, h < 0$$

alors $\exists N' > 0 : k \geqslant N' \Longrightarrow \psi(x_k) - \psi(\bar{x}) < 0$

et $\varphi(x_k) \leqslant \psi(x_k) < \psi(\bar{x}) = \varphi(\bar{x})$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il n'existe donc pas de telle suite $\{x_k\}$ et $\bar{x}$ est bien un maximum local strict sur A.

Lemme

Si
- . A ou Δ est convexe
- . φ et a sont différentiables en $\bar{x} \in A$
- . $\forall x \in A,\ x - \bar{x} \in G$
- . les conditions de Kuhn et Tucker généralisées sont vérifiées en $\bar{x}$

alors $\overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} \cdot (x - \bar{x}) \leqslant 0, \quad \forall x \in A.$

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \Longrightarrow x-\bar{x} \in G \\ \overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} + u\,\overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma(G) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(\overline{\frac{d\varphi}{dx}} + u\,\overline{\frac{da}{dx}}\right) \cdot (x-\bar{x}) \leqslant 0 \quad (1)$$

Si A ou Δ est convexe

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} x,\bar{x} \in A,\ \forall\theta\in[0,1] : (1-\theta)\,\bar{x}+\theta x \in \Delta \\ a_E(\bar{x}) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_E[(1-\theta)\bar{x}+\theta x] \geqslant a_E(\bar{x}) \\ a_E \text{ différentiable en } \bar{x} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{\frac{da_E}{dx}} \cdot (x-\bar{x}) \geqslant 0$$

$$\left.\begin{array}{l} u^{\bar{g}}=0 \\ \\ u^{g}\geqslant 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow -u.\overline{\frac{da}{dx}}.(x-\bar{x})\leqslant 0 \quad (1) \; \left.\right\} \Longrightarrow \overline{\frac{d\varphi}{dx}}.(x-\bar{x})\leqslant -u.\overline{\frac{da}{dx}}.(x-\bar{x})\leqslant 0$$

Théorème 7 : Optimum global

Si . A ou Δ est convexe

. φ et a sont différentiables en $\bar{x} \in A$

. $\forall x \in A,\ x - \bar{x} \in G$

. (α) φ est pseudo-concave sur A en $\bar{x}$, ou

$$(\beta)\left\{\begin{array}{l}\varphi \text{ est quasi-concave et continue} \\ \overline{\frac{d\varphi}{dx}} \neq 0\end{array}\right.$$

. les conditions de Kuhn et Tucker généralisées sont vérifiées en $\bar{x}$

alors $\bar{x}$ maximise φ sur A.

$$(\alpha)\quad \left.\begin{array}{l}\forall x \in A,\ \overline{\frac{d\varphi}{dx}}.(x-\bar{x})\leqslant 0 \text{ d'après le lemme} \\ \varphi \text{ est pseudo-concave sur A en } \bar{x}\end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi(x)-\varphi(\bar{x})\leqslant 0$$

$$(\beta)\quad \overline{\frac{d\varphi}{dx}} \neq 0 \Longrightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R}^n \ : \ \overline{\frac{d\varphi}{dx}}.(x_0-\bar{x}) < 0$$

Soit $x \in A$.

$$\text{Soient}\left\{\begin{array}{l}\theta \in [0,1] \\ x(\theta) = x + \theta(x_0 - x) \\ \bar{x}(\theta) = \bar{x} + \theta(x_0-\bar{x})\end{array}\right.$$

$$\overline{\frac{d\varphi}{dx}}.[\bar{x}(\theta)-\bar{x}] = \theta.\overline{\frac{d\varphi}{dx}}.(x_0-\bar{x}) < 0,\ \forall\theta > 0.$$

$\overline{\frac{d\varphi}{dx}}.[x(\theta)-\bar{x}(\theta)] = (1-\theta).\overline{\frac{d\varphi}{dx}}.(\bar{x}-x)\leqslant 0,\ \forall\theta\in[0,1]$, d'après le lemme.

Donc $\overline{\frac{d\varphi}{dx}}.[x(\theta)-\bar{x}] = \frac{d\varphi}{dx}.[x(\theta)-\bar{x}(\theta)]+\frac{d\varphi}{dx}.[\bar{x}(\theta)-\bar{x}]<0,\ \forall\theta\in]0,1]$.

φ étant quasi-concave, ceci implique que $\varphi[x(\theta)] < \varphi(\bar{x})$.

Or $\lim_{\theta \to 0} x(\theta) = x$ et $\lim_{\theta \to 0} \varphi[x(\theta)] = \varphi(x)$, puisque φ est continue.

Donc $\forall x \in A,\ \varphi(\bar{x}) \geqslant \varphi(x)$.

II §2 - B. Conditions nécessaires

Théorème 8

Si . φ et a sont différentiables en $\bar{x} \in A$

. $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) sur A

. $\bar{x}$ maximise φ sur A

alors les conditions de Kuhn et Tucker généralisées sont vérifiées en $\bar{x}$.

. Si $\bar{x}$ maximise φ sur A, d'après le théorème 4-A, $\overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} \in \Gamma(P_A)$

$$\left.\begin{array}{l} P_A, K_0 \text{ et } G \text{ sont des cônes convexes fermés} \\ \Gamma(K_0) + \Gamma(G) \text{ est fermé} \\ K_0 \cap G = P_A \end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma(P_A) = \Gamma(K_0) + \Gamma(G).$$

Donc $\exists \alpha \in \Gamma(K_0)$ et $\beta \in \Gamma(G)$ tels que $\overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} = \alpha + \beta$.

. Soit $B = \left\{ b : b = u^E \left(-\overline{\dfrac{da_E}{dx}}\right),\ u^E \geqslant 0 \right\}$.

$$\forall \eta \in \Gamma(B),\ u^E \left(-\overline{\frac{da_E}{dx}}\right).\ \eta \leqslant 0\ \forall u^E \geqslant 0 \Longrightarrow -\overline{\frac{da_E}{dx}}.\ \eta \leqslant 0 \Longrightarrow \eta \in K_0.$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Donc } \Gamma(B) \subset K_0 \Longrightarrow \Gamma(K_0) \subset \Gamma[\Gamma(B)] \\ \text{B cône convexe fermé} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Gamma(K_0) \subset B.$$

$$\left.\begin{array}{r} .\ \alpha \in \Gamma(K_0) \Longrightarrow \exists u^E \geqslant 0 : \alpha = u^E \left[-\overline{\dfrac{da_E}{dx}}\right] \\ \text{Soit } u = [u^E\ u^{\bar{E}}] \text{ avec } u^{\bar{E}} = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \overline{\frac{d\varphi}{dx}} + u\ \overline{\frac{da}{dx}} \in \Gamma(G)$$

Applications

Si $\overline{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) avec $G = P_c$, on retrouve les résultats classiques suivants :

(1) Si $C = \mathbb{R}^n$, $P_c = G = \mathbb{R}^n$, $\Gamma(G) = \Gamma(P_c) = \{0\}$.

On obtient les conditions d'optimalité suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max } \varphi(x) \\ a(x) \geqslant 0 \\ (x) \end{array}\right| \begin{array}{l} \exists u \geqslant 0 \\ \overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} + u\,\overline{\dfrac{da}{dx}} = 0 \\ u a(\overline{x}) = 0 \end{array}$$

(2) Si $C = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geqslant 0\}$, $C \supset C' = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geqslant \overline{x}\}$.

Alors $P_c \supset P_{c'} = \mathbb{R}^n_+$ et $\Gamma(P_c) \subset \Gamma(P_{c'}) = \Gamma(\mathbb{R}^n_+) = [(\mathbb{R}^n)^*]$.

$$\left.\begin{array}{r} \text{C étant convexe, } x-\overline{x} \in P_c \ \forall x \in C \\ \text{Soit } \xi \in \Gamma(P_c) \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \in C \longrightarrow \xi.\overline{x} \geqslant 0 \\ x = 2\overline{x} \in C \longrightarrow \xi.\overline{x} \leqslant 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \xi.\overline{x} = 0.$$

$\Gamma(G) = \Gamma(P_c) = \{\xi \in (\mathbb{R}^n)^* : \xi < 0,\ \xi.\overline{x} = 0\}$.

On obtient les conditions d'optimalité suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \text{Max } \varphi(x) \\ a(x) \geqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \exists u \geqslant 0 \\ \overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} + u\,\overline{\dfrac{da}{dx}} \leqslant 0 \\ \left(\overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} + u\,\overline{\dfrac{da}{dx}}\right) . \overline{x} = 0 \\ u a(\overline{x}) = 0 \end{array}$$

II §2. C - <u>Etude des conditions de Kuhn et Tucker généralisées</u>

La généralisation par rapport à la théorie de Kuhn et Tucker porte sur les points suivants :

(a) Les contraintes sont de deux types : $a(x) \geqslant 0$, et $x \in C$, où C est un sous-ensemble quelconque de $\mathbf{R}^n$. Ceci est intéressant lorsque C ne peut être défini par un système d'inéquations algébriques (exemple : $C = \mathbf{Z}^n$).

(b) L'hypothèse $H(G)$, soit : $K_0 \cap G$ et P_A coincident, et $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ est fermé, est plus faible que les hypothèses précédemment énoncées lorsque $A = \Delta$ et $G = C = \mathbf{R}^n$. Elle s'écrit alors $K_0 = P_\Delta$.

$$\text{Soit } C(x) = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \psi : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}^n \text{, différentiable à droite à l'ori-} \\ \text{gine vérifiant } \psi(0) = \bar{x},\ \psi'(+0) = \lambda(x - \bar{x}) \text{, avec} \\ \lambda > 0 \text{ et } \psi(0) \in \Delta,\ \forall \theta \in [0,1] \end{array} \right\}$$

Ces hypothèses étaient les suivantes :

(α) Hypothèse de Kuhn et Tucker : $K_0 = C(\bar{x})$ [29]

(β) Hypothèse de Arrow, Hurwicz, et Uzawa : $K_0 = \overline{\{C(\bar{x})\}}$, où $\{C(\bar{x})\}$ est le plus petit cône convexe contenant $C(\bar{x})$. [4]

(γ) Hypothèse d'Abadie : $K_0 = T_\Delta$. [1]

L'hypothèse analogue dans cet exposé est $H(O)$, elle est liée aux hypothèses α, β et γ par les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \subset \beta \\ \alpha \subset \gamma \end{array}\right\} \subset H(O)$$

où la relation $A \subset B$ signifie que lorsque $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse A, $\bar{x}$ vérifie a fortiori l'hypothèse B.

(c) Lorsque $C = \mathbf{R}^n$, si l'hypothèse $H(O)$ n'est pas vérifiée en $\bar{x}$, on peut dans certains cas trouver un cône convexe fermé G tel que $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse $H(G)$ sur Δ. Comme $K_0 \supset P_A$, l'hypothèse $H(G)$ ne peut être vérifiée que si $G \supset P_A$. Si $\Gamma(P_A) + \Gamma(K_0)$ est fermé, le choix $G = P_A$ est satisfaisant, mais conduit au même résultat que le théorème 4.

Lorsque $P_A = \{0\}$, on peut prendre pour G le cône $\widetilde{\Gamma(K_0)}$, isomorphe dans $\mathbf{R}^n$ à $\Gamma(K_0)$.

(d) Les conditions de Kuhn et Tucker généralisées s'écrivent

$$\exists u \in (\mathbb{R}^{m})^{*} : \begin{cases} u \geqslant 0 \\ \overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} + u\,\overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma(G) \\ ua(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

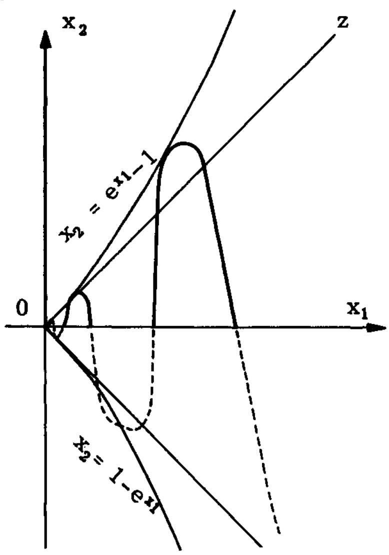
Si K_0 est différent de P_A , et s'il existe plusieurs cônes convexes fermés G satisfaisant à l'hypothèse H(G) , le plus grand de ces cônes, correspondant au plus petit des cônes $\Gamma(G)$, fournira davantage de précisions sur les multiplicateurs.

- Les exemples suivants illustreront ces propriétés :

Exemple 1

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max } \varphi(x) \\ a_1(x) = \left.\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x_1 = 0 \\ -\left[x_2 - (e^{x_1} - 1)\sin\dfrac{1}{x_1}\right]^2 x_1^2 & \text{sinon.} \end{cases}\right\} \geqslant 0 \\ a_2(x) = x_1 \geqslant 0 \\ a_3(x) = x_2 \geqslant 0 \end{array}\right.$$



Soit $\overline{x} = (0,0)$.

$$K_0 = \{\xi : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \ \xi \geqslant 0\} = \{\xi : \xi_1 \geqslant 0, \ \xi_2 \geqslant 0\}$$

$$C(\overline{x}) = \overline{\{C(\overline{x})\}} = 0x_2$$

$$T_A = (x_1 0z) \cup (0x_2).$$

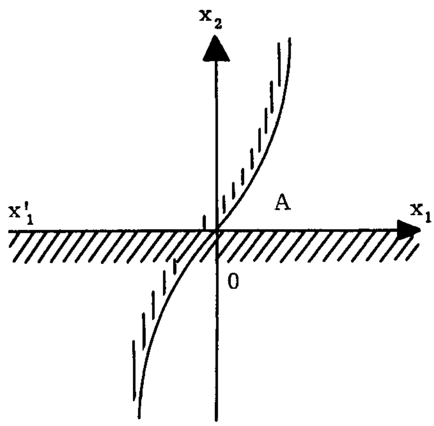
Aucune des hypothèses α, β, γ n'est vérifiée.

$$P_A = (x_1 0 x_2) = K_0.$$

L'hypothèse H(O) est vérifiée.

$$\exists\, u \in (\mathbb{R}^3)^* : \begin{cases} u \geqslant 0 \\ \dfrac{\overline{d\varphi}}{dx} + u \dfrac{\overline{da}}{dx} \in \Gamma(\mathbb{R}^n) \Longleftrightarrow \dfrac{\overline{d\varphi}}{dx} + u \dfrac{\overline{da}}{dx} = 0. \\ u a(\overline{x}) = 0. \end{cases}$$

Exemple 2. $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$



$$\left[\begin{array}{l} \text{Max } \varphi(x) \\ a_1(x) = x_1^3 - x_2 \geqslant 0 \\ a_2(x) = x_2 \geqslant 0. \end{array}\right.$$

Soit $\overline{x} = (0,0)$.

$$K_0 = \{\xi : \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \xi \geqslant 0\} = \{\xi : \xi_2 = 0\} = x_1'0x_1$$

$$C(\overline{x}) = \overline{\{C(\overline{x})\}} = T_A = P_A = 0x_1.$$

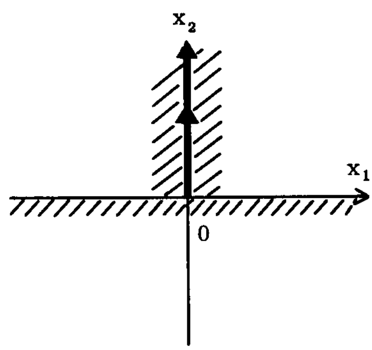
Aucune des hypothèses α, β, γ, H(O) n'est vérifiée.

L'hypothèse H(G) est vérifiée avec $G = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

$$\exists u \in (\mathbb{R}^2)^* : \begin{cases} u \geqslant 0 \\ \overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} + u \,\overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma(G) \\ ua(\overline{x}) = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \overline{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}} + u \,\overline{\dfrac{\partial a}{\partial x_1}} \leqslant 0 \\ \overline{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}} + u \,\overline{\dfrac{\partial a}{\partial x_2}} = 0 \end{cases}$$

Exemple 3. $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\left[\begin{array}{l} \text{Max } \varphi(x) \\ a_1(x) = -x_1^2 \geqslant 0 \\ a_2(x) = x_2 \geqslant 0. \end{array}\right.$$



Soit $\overline{x} = (0,0)$. $K_0 = \{\xi : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \xi \geqslant 0\} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}_+$.

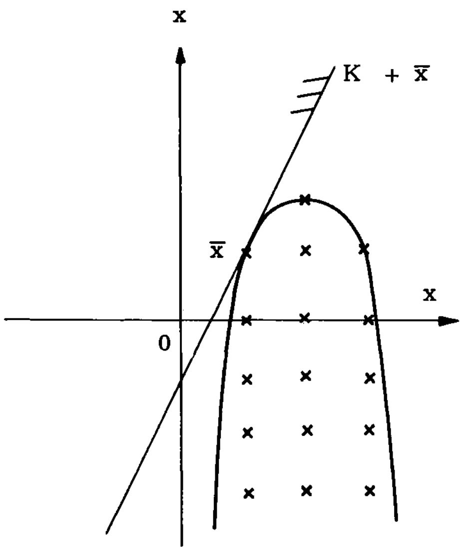
$C(\overline{x}) = \overline{\{C(\overline{x})\}} = T_A = P_A = 0x_2$.

Aucune des hypothèses α, β, γ, H(O) n'est vérifiée.

L'hypothèse H(G) est vérifiée avec $G = P_A = \{0\} \times R_+ = Ox_2$.

On retrouve le résultat du théorème 4 : $\overline{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}} \leqslant 0$.

Exemple 4



$$\begin{cases} \text{Max } \varphi(x) \\ a_1(x) = -x_1^2 + 4x_1 - x_2 - 2 \geqslant 0 \\ x = (x_1, x_2) \in Z^2 \end{cases}$$

Soit $\overline{x} = (1,1)$.

$K_0 = \{\xi : [2 -1].\xi \geqslant 0\} = \{\xi : 2\xi_1 - \xi_2 \geqslant 0\}$

$T_A = P_A = \{0\}$.

$G = \widetilde{\Gamma(K_0)} = \{\xi : \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \xi_2 \leqslant 0\}$.

L'hypothèse H(G) est vérifiée, avec $G = \widetilde{\Gamma(K_0)}$.

$$\exists\, u \in (\mathbf{R}^1)^* : \begin{cases} u \geqslant 0 \\ \overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} + u\,\overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma(G) = \widetilde{K}_0 \Longleftrightarrow 2\left[\overline{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}} + u\,\overline{\dfrac{\partial a}{\partial x_1}}\right] \geqslant \left[\overline{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}} + u\,\overline{\dfrac{\partial a}{\partial x_2}}\right] \\ ua(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

II §2. D - Hypothèse H(G) et conditions de Kuhn et Tucker

Théorème 9

Si . A est pseudo-convexe en $\bar{x}$

. G est un cône convexe fermé contenant P_A, tel que $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ soit fermé

alors une condition nécessaire et suffisante pour que *toutes* les fonctions φ différentiables en $\bar{x} \in A$ et atteignant leur maximum sur A en $\bar{x}$ vérifient les conditions de Kuhn et Tucker généralisées

est que

$\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) sur A.

LA CONDITION EST SUFFISANTE

cf. théorème 8.

LA CONDITION EST NECESSAIRE

Soit $H = \{h \in \mathbf{R}^n : h = \lambda(x-\bar{x}),\ \lambda \geqslant 0,\ x \in A\}$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{A est pseudo-convexe en } \bar{x} \Longrightarrow \forall x \in A,\ x-\bar{x} \in P_A \\ P_A \text{ est un cône} \end{array}\right\} \Longrightarrow \forall \lambda \geqslant 0,\ \lambda(x-\bar{x}) \in P_A \end{array}\right\} \Longrightarrow H \subset P_A.$$

$$\left.\begin{array}{l} H \subset P_A. \\ \text{Soit } F = \overline{\{H\}}, \text{ où } \{H\} \text{ est le plus petit cône convexe contenant } H \end{array}\right\} \Longrightarrow F \subset P_A.$$

Soit $\alpha \in \Gamma(F) \Longrightarrow \alpha\eta \leqslant 0,\ \forall \eta \in F \Longrightarrow \alpha\eta \leqslant 0,\ \forall \eta \in H$.

$$\left.\begin{array}{l} \lambda > 0 \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \lambda(x-\bar{x}) \in H \Longrightarrow \alpha\lambda(x-\bar{x}) \leqslant 0.$$

Si $\lambda = 1$, $\lambda x \leqslant \lambda\bar{x}$, $\forall x \in A$.

La fonction $\varphi(x) = \alpha x$ atteint son maximum sur A en $\bar{x}$, et satisfait donc aux conditions de Kuhn et Tucker en $\bar{x}$:

$$\left.\begin{array}{l}
\exists u \in (\mathbb{R}^{m})^{*} : \left\{\begin{array}{l} u \geqslant 0 \\ \alpha + u \, \overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma(G) \\ ua(\bar{x}) = 0 \end{array}\right. \\[2ex]
\left.\begin{array}{l} u \geqslant 0 \\ ua(\bar{x}) = 0 \\ a_E(\bar{x}) = 0 \\ a_{\bar{E}}(\bar{x}) > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow u^{\bar{E}} = 0
\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha + u^{E} \, \overline{\frac{da_E}{dx}} \in \Gamma(G).$$

$$\text{Soit } \xi \in K_E \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \xi \in G \\ \overline{\dfrac{da_E}{dx}} \, . \, \xi \geqslant 0. \end{array}\right. \Longrightarrow u^{E} \, \overline{\frac{da_E}{dx}} \, \xi \geqslant 0$$

$$\Longrightarrow \alpha\xi \leqslant 0.$$

c'est-à-dire $\forall \alpha \in \Gamma(F)$, $\alpha\xi \leqslant 0$, donc $\xi \in \Gamma[\Gamma(F)] = F$ puisque F est un cône convexe fermé.

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} F \subset P_A \\ \xi \in F \end{array}\right\} \Longrightarrow \xi \in P_A \qquad \Longrightarrow K_E \subset P_A \\[2ex]
\left.\begin{array}{l} \text{D'après le théorème 5, } K_0 \supset P_A \\ \text{Par hypothèse, } \qquad G \supset P_A \end{array}\right\} \Longrightarrow K_E \supset P_A
\end{array}\right\} \Longrightarrow K_E = P_A.$$

et $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) sur A, puisque par hypothèse $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ est fermé.

Remarques

. Ce résultat généralise les conclusions de [4], en envisageant un programme sous contraintes mixtes et les conditions de Kuhn et Tucker généralisées. Il convient de remarquer que l'hypothèse de convexité du domaine A est remplacée par une hypothèse de pseudo-convexité en $\bar{x}$.

L'hypothèse H(G), comme les hypothèses α, β, γ, ne fait pas intervenir explicitement la fonction à maximiser. Il se peut qu'un domaine A soit tel que $\bar{x}$ ne vérifie pas d'hypothèse H(G) , quel que soit G, mais que cependant *certaines* fonctions différentiables en $\bar{x}$ et atteignant leur maximum sur A en $\bar{x}$ satisfassent en $\bar{x}$ aux conditions de Kuhn et Tucker généralisées. Dans le chapitre III sera introduite une hypothèse appelée "sup", dûe à Stoer [48], qui tiendra compte *simultanément* de la fonction à maximiser et du domaine A.

II §2. E - Critères relatifs à l'hypothèse H(G)

Théorème 10

Si . (1) au voisinage de $\bar{x}$, $x-\bar{x} \in K_g \Longrightarrow x \in C$

. (2) $\exists \bar{\xi} \in K_g$ tel que, pour tout $j \in E$:

α - ou a_j est localement convexe au voisinage de $\bar{x}$

β - ou $a_j(\bar{x} + \xi)$ atteint son minimum sur K_g en $\xi_0 = 0$

γ - ou $\overline{\dfrac{da_j}{dx}} \cdot \xi > 0$

. (3) G est un cône convexe fermé contenant P_A et tel que $\Gamma(K_0) + \Gamma(G)$ soit fermé

alors $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H(G) sur A.

N. B. Si toutes les fonctions a_j, $j \in E$, vérifient $2\text{-}\alpha$ ou $2\text{-}\beta$, on prendra

$$\bar{\xi} = 0.$$

Démonstration :

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{- Soient } \eta \in K_g,\ \alpha > 0 \text{ et } \theta \geqslant 0 \\ \bar{\xi} \in K_g \end{array}\right\} \Longrightarrow \theta(\eta+\alpha\bar{\xi}) \in K_g \\ \text{Soit } \psi(\theta) = \bar{x} + \theta(\eta+\alpha\bar{\xi}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\theta) - \bar{x} \in K_g \quad \left.\begin{array}{l} \\ (1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\theta) \in C$$

au voisinage de $\theta = 0$.

$$\forall j \in E : \left[\frac{da_j}{d\theta}\,(\psi(\theta))\right]_{\theta=0} = \overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot \left[\frac{d\psi(\theta)}{d\theta}\right]_{\theta=0}$$

$$= \overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot (\eta+\alpha\bar{\xi})$$

$$= \overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot \eta + \alpha \overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot \overline{\xi}$$

$$\eta \in K_g \Longrightarrow \left[\frac{da_j}{d\theta} (\psi(\theta))\right]_{\theta=0} \geqslant \alpha \overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot \overline{\xi} .$$

α - Si a_j est localement convexe au voisinage de $\overline{x}$:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{\xi} \in K_g \\ \alpha > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha \overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot \overline{\xi} \geqslant 0 \Longrightarrow \left[\frac{da_j}{d\theta} (\psi(\theta))\right]_{\theta=0} \geqslant 0$$

et au voisinage de $\theta = 0$,

$$\theta \geqslant 0 \Longrightarrow a_j\ [\psi(\theta)] \geqslant a_j\ [\psi(0)] = a_j(\overline{x}) = 0.$$

β - Si $\xi_0 = 0$ minimise $a_j(\overline{x} + \xi)$ sur K_g :

$$\forall \xi \in K_g : a_j\ [\overline{x} + \xi] \geqslant a_j\ (\overline{x})$$

$$\left.\begin{array}{r} \psi(\theta) - \overline{x} \in K_g \\ \theta \geqslant 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_j\ [\psi(\theta)] \geqslant a_j\ [\psi(0)] = a_j\ (\overline{x}) = 0.$$

γ - Si $\overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot \overline{\xi} > 0$,

$$\forall \alpha > 0,\ \alpha \overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot \overline{\xi} > 0 \Longrightarrow \left[\overline{\frac{da_j}{d\theta}} (\psi(\theta)\right]_{\theta=0} > 0.$$

Donc au voisinage de $\theta = 0$,

$$\theta \geqslant 0 \Longrightarrow a_j\ [\psi(\theta)] \geqslant a_j\ [\psi(0)] = a_j(\overline{x}) = 0.$$

- Dans les trois cas, au voisinage de $\theta = 0$,

$$\theta \geqslant 0 \Longrightarrow a_g\ [\psi(\theta)] \geqslant a_g\ [\psi(0)] = a_g(\overline{x}) = 0 \qquad (4)$$

D'autre part $\quad a_{\overline{g}}\ [\psi(0)] = a_{\overline{g}}(\overline{x}) > 0$,

donc au voisinage de $\theta = 0$,

$$\theta > 0 \Longrightarrow a_g\,[\psi(\theta)] > 0. \tag{5}$$

$$\left.\begin{matrix}(4)\\ \\ (5)\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{matrix}\text{au voisinage de } \theta = 0,\ \theta \geqslant 0 \Longrightarrow a[\psi(\theta)] \geqslant 0 \\ \Delta = \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \geqslant 0\}\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \psi(\theta) \in \Delta$$

$$\left.\begin{matrix}-\ \psi(\theta) \in C \\ \psi(\theta) \in \Delta\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \psi(\theta) \in A.$$

$\eta + \alpha\bar{\xi} = \dfrac{\psi(\theta)-\bar{x}}{\theta}$ est un vecteur tangent à A en $\bar{x}$: il suffit de choisir une suite $\{\theta_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ au voisinage de $\theta = 0$, convergeant vers 0 : la suite $\{\psi(\theta_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ de points de A converge vers $\bar{x}$, la suite $\left\{\dfrac{1}{\theta_k}\,[\psi(\theta_k) - \bar{x}]\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $\eta+\alpha\bar{\xi}$, donc

$$\forall\alpha > 0,\ \eta + \alpha\bar{\xi} \in T_A.$$

$\lim\limits_{\alpha\to 0} \eta + \alpha\bar{\xi} = \eta \in T_A$, puisque T_A est fermé.

$$\left.\begin{matrix}\text{Donc } K_g \subset T_A \subset P_A \\ (3)\end{matrix}\right\} \Longrightarrow \bar{x} \text{ vérifie l'hypothèse } H(G) \text{ sur } A.$$

Applications

$\bar{x}$ satisfaisant aux hypothèses (1) et (3), l'hypothèse (2) sera vérifiée en particulier

- si A est pseudo-convexe en $\bar{x}$ et a un intérieur non vide, et si $\forall j \in E,\ \dfrac{\overline{da_j}}{dx} \neq 0.$

  a_g vérifie alors l'hypothèse $2\text{-}\gamma$.

  En effet :

  $$\left.\begin{matrix}A \text{ étant pseudo-convexe en } \bar{x},\ A \subset \bar{x} + P_A. \\ \left.\begin{matrix}\text{D'après le théorème 5, } P_A \subset K_0 \\ \text{D'après l'hypothèse (3), } P_A \subset G\end{matrix}\right\} \Longrightarrow P_A \subset K_g\end{matrix}\right\} \Longrightarrow A \subset \bar{x} + K_g.$$

  A ayant un intérieur non vide, il en est de même pour K_g qui a donc même dimension que l'espace entier.

Si pour $j \in E$, $\overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot \xi = 0 \quad \forall \xi \in K_g$.

alors $\overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot \xi = 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^n$

et donc $\overline{\frac{da_j}{dx}} = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc $\forall j \in E, \quad \exists \overset{j}{\xi} \in K_g : \overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot \overset{j}{\xi} > 0.$

et $\forall k \in E,\ k \neq j : \overline{\frac{da_j}{dx}} \cdot \overset{k}{\xi} \geqslant 0.$

Soit alors $\overline{\xi} = \sum_{j \in E} \overset{j}{\xi} : \overline{\frac{da_E}{dx}} \cdot \overline{\xi} > 0.$

. si chacune des contraintes actives est

- soit linéaire

  elle vérifie alors l'hypothèse $2\text{-}\alpha$

- soit convexe

  elle vérifie alors l'hypothèse $2\text{-}\alpha$

- soit pseudo-convexe sur K_g en $\overline{x}$

- soit quasi-convexe avec $\overline{\frac{da_j}{dx}} \neq 0$

dans ces deux cas, elle vérifie alors l'hypothèse $2\text{-}\beta$. En effet : supposons qu'il s'agisse de la contrainte d'indice j, d'après le théorème 7, les conditions de Kuhn et Tucker sont alors suffisantes pour que $\xi_0 = 0$ maximise $-\ a_j(\overline{x} + \xi)$ pour $\xi \in K_g$. Ces conditions s'écrivant

$$\exists u \in (\mathbf{R}^{|E|})^* : \begin{cases} u^E \geqslant 0,\ u^E \cdot \dfrac{da_E(\overline{x})}{dx} \cdot \xi_0 = 0 \\[2ex] -\overline{\dfrac{da_j}{dx}} + u^E\, \overline{\dfrac{da_E}{dx}} = 0 \end{cases}$$

sont vérifiées si l'on prend $u^k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

- soit concave, et E_1 étant l'ensemble des indices des contraintes actives concaves, $\exists \mathring{x} \in \bar{x} + G : a_{E_1}(\mathring{x}) > 0$.

a_{E_1} vérifie alors l'hypothèse 2-γ.

En effet :

$$\overline{\frac{da_{E_1}}{dx}} \cdot (\mathring{x} - \bar{x}) \geq a_{E_1}(\mathring{x}) - a_{E_1}(\bar{x})$$

$$\geq a_{E_1}(\mathring{x})$$

et il existe $\bar{\xi}$:

$$\bar{\xi} = \mathring{x} - \bar{x} \in K_0 \cap G$$

tel que $\overline{\frac{da_{E_1}}{dx}} \cdot \bar{\xi} > 0$.

. si $G = \mathbb{R}^n$ et si $\overline{\frac{da_E}{dx}}$ est de rang égal à $|E|$.

a_E vérifie alors l'hypothèse 2-γ.

En effet :

soit $u > 0$. $\exists \bar{\xi} : \overline{\frac{da_E}{dx}} \cdot \bar{\xi} = u > 0$.

$\bar{\xi}$ appartient alors à $K_E = K_0 \cap G = K_0 \cap \mathbb{R}^n$.

CHAPITRE III

DUALITÉ

Nous envisagerons dans ce chapitre les relations existant entre deux programmes mathématiques dits "en dualité", entre leurs solutions et entre leurs valeurs optimales.

III §1 - PROBLEMES DUALS ET MINIMAX

Dans [48], Stoer, puis dans [32], Mangasarian et Ponstein ont défini deux programmes duals très généraux et un problème de col associé.

Soit $\psi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}$,

et soient $X \subset \mathbf{R}^n$ et $U \subset \mathbf{R}^m$.

1 - Soit $\mathfrak{P}$ le premier programme (programme "primal") :

$$\operatorname*{Sup}_{x \in X} \operatorname*{Inf}_{u \in U} \psi(x,u),$$

ou encore, en posant $(\mathfrak{P}) = \{(x,u) : \psi(x,u) = \operatorname*{Inf}_{\eta \in U} \psi(x,\eta)\}$,

$$\operatorname{Sup} \{\psi(x,u) : (x,u) \in (\mathfrak{P})\}.$$

Soit $(\overset{\circ}{x},\overset{\circ}{u})$ une solution de $\mathfrak{P}$: alors

$$\psi(\overset{\circ}{x},\overset{\circ}{u}) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} \operatorname*{Inf}_{u \in U} \psi(x,u) = \operatorname*{Inf}_{u \in U} \psi(\overset{\circ}{x},u).$$

2 - Soit $\mathfrak{D}$ le second programme (programme "dual") :

$$\operatorname*{Inf}_{u \in U} \operatorname*{Sup}_{x \in X} \psi(x,u),$$

ou encore en posant $(\mathcal{D}) = \{(x,u) : \psi(x,u) = \operatorname*{Sup}_{y\in X} \psi(y,u)\}$

$$\operatorname{Inf} \{\psi(x,u) : (x,u) \in (\mathcal{D})\}.$$

Soit (x^*, u^*) une solution de $\mathcal{D}$: alors

$$\psi(x^*,u^*) = \operatorname*{Inf}_{u\in U} \operatorname*{Sup}_{x\in X} \psi(x,u) = \operatorname*{Sup}_{x\in X} \psi(x,u^*).$$

3 - Soit P^* le problème associé (problème "de col") :

$$\exists ? (\bar{x},\bar{u}) \in X \times U : \forall (x,u) \in X \times U,\ \psi(x,\bar{u}) \leqslant \psi(\bar{x},\bar{u}) \leqslant \psi(\bar{x},u),$$

ou encore $\psi(\bar{x},\bar{u}) = \operatorname*{Sup}_{x\in X} \psi(x,\bar{u}) = \operatorname*{Inf}_{u\in U} \psi(\bar{x},u)$.

P^* peut donc s'écrire

$$\exists ? (\bar{x},\bar{u}) \in (\mathcal{R}) \cap (\mathcal{D}).$$

Remarque

Ces problèmes peuvent ne pas avoir de solution (si l'inf ou le sup n'est pas atteint ou si $(\mathcal{R})$, $(\mathcal{D})$ ou $(\mathcal{R}) \cap (\mathcal{D})$ est vide par exemple).

- Il y a équivalence entre le problème de col P^* et les deux problèmes $\mathcal{R}$ et $\mathcal{D}$.

Lemme 1

$(\bar{x},\bar{u})$ est solution de P^* (1)

$$\Updownarrow$$

$(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathcal{R}$ *et* de $\mathcal{D}$. (2)

. (1) $\Longrightarrow$ (2) :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{- Soit } (x,u) \in (\mathcal{R}) \\ \bar{u} \in U\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(x,u) \leqslant \psi(x,\bar{u}) \\ \left.\begin{array}{l}(\bar{x},\bar{u}) \text{ est solution de } P^* \\ x \in X\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(x,\bar{u}) \leqslant \psi(\bar{x},\bar{u})\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(x,u) \leqslant \psi(\bar{x},\bar{u})$$

et $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathcal{R}$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{- Soit } (x,u) \in (\mathcal{D}) \\ \qquad \bar{x} \in X\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(x,u) \geqslant \psi(\bar{x},u) \\ \left.\begin{array}{l}(\bar{x},u) \text{ est solution} \\ \qquad \text{de } P^* \\ \qquad u \in U\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\bar{x},u) \geqslant \psi(\bar{x},\bar{u})\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(x,u) \geqslant \psi(\bar{x},\bar{u})$$

et $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathcal{D}$.

. (2) $\Longrightarrow$ (1) :

$$\left.\begin{array}{l}(\bar{x},\bar{u}) \text{ solution de } \mathcal{D} \longrightarrow (\bar{x},\bar{u}) \in (\mathcal{D}) \\ (\bar{x},\bar{u}) \text{ solution de } \mathcal{R} \Longrightarrow (\bar{x},\bar{u}) \in (\mathcal{R})\end{array}\right\} \Longrightarrow (\bar{x},\bar{u}) \in (\mathcal{R}) \cap (\mathcal{D})$$

et $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de P^*.

Remarques

- . Aucune hypothèse de continuité ni de concavité n'a été faite sur ψ.
- . On adoptera les conventions suivantes :

$$\operatorname*{Inf}_{x \in \emptyset} h(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \operatorname*{Sup}_{x \in \emptyset} h(x) = -\infty$$

si $h : \mathbf{R}^q \longrightarrow \mathbf{R}$.

Lemme 2.

Si $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{D})$ sont non vides :

$$\left.\begin{array}{l}\forall (\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \in (\mathcal{R}) \\ \forall (\overset{2}{x},\overset{2}{u}) \in (\mathcal{D})\end{array}\right\} \quad \psi(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \leqslant \psi(\overset{2}{x},\overset{2}{u}) \qquad (1)$$

$$\operatorname{Inf} \{\psi(x,u) : (x,u) \in (\mathcal{D})\} \geqslant \operatorname{Sup} \{\psi(x,u) : (x,u) \in (\mathcal{R})\} \qquad (2)$$

(1)

$$(\mathcal{R}) \neq \emptyset \Longrightarrow \exists (\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \in (\mathcal{R}) : \forall u \in U, \ \psi(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \leqslant \psi(\overset{1}{x},u)$$

$$(\mathcal{D}) \neq \emptyset \Longrightarrow \exists (\overset{2}{x},\overset{2}{u}) \in (\mathcal{D}) : \forall x \in X, \ \psi(x,\overset{2}{u}) \leqslant \psi(\overset{2}{x},\overset{2}{u})$$

$$\left.\begin{array}{l}\overset{2}{u} \in U \\ \overset{1}{x} \in X\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \leqslant \psi(\overset{1}{x},\overset{2}{u}) \leqslant \psi(\overset{2}{x},\overset{2}{u})$$

et $\psi(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \leqslant \psi(\overset{2}{x},\overset{2}{u})$.

(2)

$(\mathfrak{X})$ et $(\mathcal{D})$ étant non vides

$$\left.\begin{array}{l} \forall(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \in (\mathfrak{X}) \\ \forall(\overset{2}{x},\overset{2}{u}) \in (\mathcal{D}) \end{array}\right\} \qquad \psi(\overset{1}{x},\overset{1}{u}) \leq \psi(\overset{2}{x},\overset{2}{u})$$

et donc $\text{Sup}\ \{\psi(x,u) : (x,u) \in (\mathfrak{X})\} \leq \text{Inf}\{\psi(x,u) : (x,u) \in (\mathcal{D})\}$.

Remarque

Si $(\mathfrak{X})$ et/ou $(\mathcal{D})$ est vide, d'après les conventions adoptées

$$\text{Sup}\ \{\psi(x,u) : (x,u) \in \emptyset\} = -\infty$$
$$\text{Inf}\ \{\psi(x,u) : (x,u) \in \emptyset\} = +\infty,$$

et la relation (2) est encore vérifiée.

- La suite du paragraphe reprend l'étude de Stoer, Mangasarian et Ponstein, en utilisant toutefois, lorsque cela est possible, (théorèmes 12 et 13) des fonctions quasi-concaves (resp. quasi-convexes) et s.c.s (resp. s.c.i) au lieu de fonctions concaves (resp. convexes) et continues, grâce à une généralisation du théorème du Minimax de Kakutani [27] et Von Neumann due à Sion [46].

Théorème II : Théorème du Minimax

Soit $\psi : (x,u) \in X \times U \longrightarrow \psi(x,u) \in \mathbb{R}$.

Si . X et U sont deux sous-ensembles convexes compacts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement

. ψ est

(Kakutani) $\left\{\begin{array}{l}\text{continue et concave en } x \\ \text{continue et convexe en } u\end{array}\right.$

(Von Neumann) $\left\{\begin{array}{l}\text{s.c.s et concave en } x \\ \text{s.c.i et convexe en } u\end{array}\right.$

(Sion) $\left\{\begin{array}{l}\text{s.c.s et quasi-convave en } x \\ \text{s.c.i et quasi-convexe en } u\end{array}\right.$

alors

. $\underset{x \in X}{\mathrm{Max}}\ \underset{u \in U}{\mathrm{Min}}\ \psi(x,u) = \underset{u \in U}{\mathrm{Min}}\ \underset{x \in X}{\mathrm{Max}}\ \psi(x,u).$

. $\exists (\overset{o}{x},\overset{o}{u}) \in X \times U$ tel que

$\forall (x,u) \in X \times U : \psi(x,\overset{o}{u}) \leqslant \psi(\overset{o}{x},\overset{o}{u}) \leqslant \psi(\overset{o}{x},u).$

Démonstration : cf. [46].

Définition 13

Soit $\psi : X \times U \longrightarrow \mathbb{R}$, où X et U sont des convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

ψ a *la propriété inf* en $(\bar{x},\bar{u}) \in X \times U$ si

$$\left.\begin{array}{l} \exists V(\bar{u}) \text{ voisinage fermé de } \bar{u} \\ \exists E \subset X \text{ compact convexe} \end{array}\right\} : \forall u \in V(\bar{u}) \cap U,\ \psi(\bar{x},\bar{u}) < \underset{x \in E}{\mathrm{Max}}\ \psi(x,u)$$

ψ a *la propriété sup* en $(\bar{x},\bar{u}) \in X \times U$ si

$$\left.\begin{array}{l} \exists V(\bar{x}) \text{ voisinage fermé de } \bar{x} \\ \exists F \subset U \text{ compact convexe} \end{array}\right\} : \forall x \in V(\bar{x}) \cap X : \psi(\bar{x},\bar{u}) \geqslant \underset{u \notin F}{\mathrm{Min}}\ \psi(x,u)$$

Théorème 12 : Théorème de Stoer

Soit $\psi : X \times U \longrightarrow \mathbb{R}$, où X et U sont des convexes fermés de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement.

A Si . ψ est continue et concave en x

et s.c.i. et quasi-convexe en u

. $\exists (x,u) \in X \times U : \psi(\bar{x},\bar{u}) = \mathrm{Inf}\ \{\psi(\bar{x},u) : u \in U\}$ (A)

alors une *condition nécessaire et suffisante* pour que

$$\exists \overset{o}{u} \in U : \begin{cases} (1) & (\bar{x},\overset{o}{u}) \text{ est un col pour } \psi \text{ sur } X \times U \\ (2) & \psi(\bar{x},\overset{o}{u}) = \psi(\bar{x},\bar{u}) \end{cases}$$

est que ψ ait la *propriété sup* en $(\bar{x},\bar{u})$.

B Si . ψ est s.c.s. et quasi-concave en x
et continue et convexe en u

. $\exists(\bar{x},\bar{u}) \in X \times U : \psi(\bar{x},\bar{u}) = \mathrm{Sup}\,\{\psi(x,\bar{u}) : x \in X\}$ (B)

alors une *condition nécessaire et suffisante* pour que

$$\exists \mathring{x} \in X : \begin{cases} (1) & (\mathring{x},\bar{u}) \text{ est un col pour } \psi \text{ sur } X \times U \\ (2) & \psi(\mathring{x},\bar{u}) = \psi(\bar{x},\bar{u}) \end{cases}$$

est que ψ ait la *propriété inf* en $(\bar{x},\bar{u})$

Réf : [48].

B. LA CONDITION EST NECESSAIRE

Soit $(\mathring{x},\bar{u})$ un col pour ψ sur $X \times U$, vérifiant (2).

Soient $E = \{\mathring{x}\}$ et $V(\bar{u})$ un voisinage fermé quelconque de $\bar{u}$.

$\forall (x,u) \in E \times (V(\bar{u}) \cap U) : \psi(\bar{x},\bar{u}) = \psi(\mathring{x},\bar{u}) \leqslant \psi(x,u)$.

$\psi(\bar{x},\bar{u}) \leqslant \underset{x \in E}{\mathrm{Max}}\ \psi(x,u)$, $\forall u \in V(\bar{u}) \cap U$,

et ψ a la propriété "inf" en $(\bar{x},\bar{u})$.

LA CONDITION EST SUFFISANTE

- D'après le théorème 11

$\exists (\mathring{x},\mathring{u}) \in E \times (V(\bar{u}) \cap U)$:

$\forall (x,u) \in E \times (V(\bar{u}) \cap U)$, $\psi(\mathring{x},u) \geqslant \psi(\mathring{x},\mathring{u}) \geqslant \psi(x,\mathring{u})$ (3)

et $\psi(\mathring{x},\mathring{u}) = \underset{u \in V(\bar{u}) \cap U}{\mathrm{Min}}\ \underset{x \in E}{\mathrm{Max}}\ \psi(x,u)$ (4)

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (4) \\ \text{Propriété inf en } (\bar{x},\bar{u}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\bar{x},\bar{u}) \leqslant \psi(\mathring{x},\mathring{u}) \\ \left.\begin{array}{l} (3) \\ \bar{u} \in V(\bar{u}) \cap U \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\mathring{x},\mathring{u}) \leqslant \psi(\mathring{x},\bar{u}) \\ \left.\begin{array}{l} (B) \\ \mathring{x} \in X \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\mathring{x},\bar{u}) \leqslant \psi(\bar{x},\bar{u}) \end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\bar{x},\bar{u}) = \psi(\mathring{x},\bar{u}) = \psi(\mathring{x},\mathring{u}) \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l}(5)\\(B)\end{array}\right\} \Longrightarrow \forall x \in X,\ \psi(x,\bar{u}) \leqslant \psi(\overset{o}{x},\bar{u})$$

$$\left.\begin{array}{l}(3)\\(5)\end{array}\right\} \Longrightarrow \forall u \in V(\bar{u}) \cap U,\ \psi(\overset{o}{x},\overset{o}{u}) = \psi(\overset{o}{x},\bar{u}) \leqslant \psi(\overset{o}{x},u) \qquad (6)$$

- $\forall u \in U,\ u \notin V(\bar{u}),\ \exists \mu \in]0,1[\ :\ \overset{1}{u} = [\mu u + (1-\mu)\ \bar{u}] \in V(\bar{u}).$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}(6)\\ \overset{1}{u} \in V(\bar{u})\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\overset{o}{x},\bar{u}) \leqslant \psi(\overset{o}{x},\overset{1}{u})\\ \psi \text{ convexe en } u \Longrightarrow \psi(\overset{o}{x},\overset{1}{u}) \leqslant \mu\psi(\overset{o}{x},u) + (1-\mu)\ \psi(\overset{o}{x},\bar{u})\end{array}\right\} \Longrightarrow \psi(\overset{o}{x},\bar{u}) \leqslant \psi(\overset{o}{x},u) \quad (7)$$

$$- \left.\begin{array}{l}(6)\\(7)\end{array}\right\} \Longrightarrow \forall (x,u) \in X \times U : \psi(x,\bar{u}) \leqslant \psi(\bar{x},\bar{u}) = \psi(\overset{o}{x},\overset{o}{u}) = \psi(\overset{o}{x},\bar{u}) \leqslant \psi(\overset{o}{x},u)$$

A. La démonstration est analogue.

Théorème 13 : Théorème général de dualité

Soient $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{D}$ les programmes primal et dual définis au début de ce chapitre, $(\mathfrak{P})$ et $(\mathfrak{D})$ l'ensemble de leurs solutions réalisables. On suppose que X et U sont deux *convexes fermés* de $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^m$ respectivement.

A. Si ψ est continue et concave en x
et s.c.i et quasi-convexe en u
alors *une condition nécessaire et suffisante* pour que $(\bar{x},\bar{u})$ soit solution de $\mathfrak{P}$ est que

$\exists \overset{o}{u} \in U$ tel que $(\bar{x},\overset{o}{u})$ soit solution de $\mathfrak{P}$ et de $\mathfrak{D}$, si et seulement si ψ a la propriété sup en $(\bar{x},\bar{u})$.

B. Si ψ est s.c.s et quasi-concave en x,
et continue et convexe en u,
alors *une condition nécessaire et suffisante* pour que $(\bar{x},\bar{u})$ soit solution de $\mathfrak{D}$ est que

$\exists \overset{o}{x} \in X$ tel que $(\overset{o}{x},\bar{u})$ soit solution de $\mathfrak{P}$ et de $\mathfrak{D}$, si et seulement si ψ a la propriété inf en $(\bar{x},\bar{u})$.

Réf : [48] et [32].

A. $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathfrak{P} \Longrightarrow \psi(\bar{x},\bar{u}) = \operatorname{Inf}\{\psi(\bar{x},u) : u \in U\}$

$$\text{Théorème 12-A} \Longrightarrow \exists \mathring{u} \in U : \begin{cases} \psi(\bar{x},\mathring{u}) = \psi(\bar{x},\bar{u}) & (1) \\ (\bar{x},\mathring{u}) \text{ est un col pour } \psi \text{ sur } X{\times}U & (2) \end{cases}$$

si et seulement si ψ a la propriété sup en $(\bar{x},\bar{u})$.

$$\left.\begin{array}{l} (2) \\ \text{Lemme 1} \end{array}\right\} \Longrightarrow (\bar{x},\mathring{u}) \text{ est solution de } \mathfrak{P} \text{ } et \text{ de } \mathfrak{D}.$$

B. La démonstration, analogue à celle de A, utilise la partie B du théorème 12.

Théorème 14 : Théorème strict de dualité

Il est des cas particuliers où on peut montrer que ψ vérifie soit la propriété sup, soit la propriété inf.

On suppose ψ convexe en u, concave en x, et continue.

A. Si . $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathfrak{P}$,

. $\psi(\bar{x},u)$ est strictement convexe dans un voisinage de $\bar{u}$

alors $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathfrak{D}$.

B. Si . $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathfrak{D}$,

. $\psi(x,\bar{u})$ est strictement concave dans un voisinage de $\bar{x}$

alors $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de $\mathfrak{P}$.

Réf : [32]

B. La fonction $\psi(x,u)$ a la propriété inf en $(\bar{x},\bar{u})$.

Soit $\varepsilon > 0$, et soit $A = \{x \in X : \psi(x,\bar{u}) > \psi(\bar{x},\bar{u}) - \varepsilon\}$.

$$\bar{x} \in A$$

. A est *convexe* et *fermé*.

. Supposons que A ne soit pas borné.

$\forall \omega_1 > 0,\ \exists x_1 : \|x_1\| = 1$ et $\bar{x} + \omega_1 x_1 \in A$.

A convexe $\Longrightarrow \forall \rho \in]0,\omega_1],\ \bar{x} + \rho x_1 \in A$.

Si ω_1 tend vers l'infini, $Q = \{x_1 : ||x_1|| = 1, \bar{x} + \omega_1 x_1 \in A\}$ est un ensemble infini contenu dans le compact $S = \{x : ||x|| = 1\}$, il contient donc un point d'accumulation, soit x^*.

Alors $\forall \rho \geqslant 0$, $\bar{x} + \rho x^* \in A$, x^* étant un point d'accumulation de Q et ψ étant continue.

$\psi(x, \bar{u})$ étant strictement concave au voisinage de $\bar{x}$:

$\forall \bar{\rho} > 0$, $\psi[\bar{x} + \bar{\rho} x^*, \bar{u}] < \psi(\bar{x}, \bar{u})$.

Appelons $\bar{\delta}$ la différence $\psi(\bar{x}, \bar{u}) - \psi(\bar{x} + \bar{\rho} x^*, \bar{u})$, alors $\bar{\delta} > 0$.

Soit $\rho > \bar{\rho}$, alors $\bar{x} + \bar{\rho} x^* = \frac{\bar{\rho}}{\rho} (\bar{x} + \rho x^*) + \left(1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho}\right) \bar{x}$. Alors $\psi(\bar{x} + \bar{\rho} x^*, \bar{u}) \geqslant \frac{\bar{\rho}}{\rho} \psi(\bar{x} + \rho x^*, \bar{u}) + \left(1 - \frac{\bar{\rho}}{\rho}\right) \psi(\bar{x}, \bar{u})$, puisque ψ est concave en x. On en déduit que

$$\psi(\bar{x} + \rho x^*, \bar{u}) \leqslant \frac{\rho}{\bar{\rho}} \psi(\bar{x} + \bar{\rho} x^*, \bar{u}) + \frac{\bar{\rho} - \rho}{\bar{\rho}} \psi(\bar{x}, \bar{u})$$

$$\leqslant \psi(\bar{x}, \bar{u}) - \frac{\rho \bar{\delta}}{\bar{\rho}}.$$

ρ pouvant être choisi arbitrairement grand.

Si $\rho > \varepsilon \frac{\bar{\rho}}{\bar{\delta}}$, $\psi(\bar{x} + \rho x^*, \bar{u}) < \psi(\bar{x}, \bar{u}) - \varepsilon$

et $\bar{x} + \rho x^* \notin A$, contrairement à l'hypothèse faite.

Par conséquent, A est *borné*.

. Soit $V(\bar{u})$ un voisinage de $\bar{u}$ tel que

$$V(\bar{u}) \cap U = \left\{u \in U : |\psi(x, u) - \psi(x, \bar{u})| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \ \forall x \in A.$$

Un tel voisinage existe, car ψ est continue, et donc uniformément continue sur $A \times (B \cap U)$, où B est un compact quelconque contenant $\bar{u}$.

$\psi(x, u)$ étant continue

$$\forall x^* \in X, \ x^* \in A, \ \exists \lambda \in]0,1[: \begin{cases} \lambda \bar{x} + (1 - \lambda) x^* \in A. \\ \psi[\lambda \bar{x} + (1-\lambda) x^*, \bar{u}] = \psi(\bar{x}, \bar{u}) - \varepsilon. \end{cases}$$

Soit $u \in V(\bar{u}) \cap U$:

$$\psi(\bar{x},u) \geqslant \psi(\bar{x},\bar{u}) - \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\bar{x} \in A)$$

$$\geqslant \psi[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\, x^*,\ \bar{u}] + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\geqslant \psi[\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\, x^*,\ u] \qquad (\lambda\bar{x} + (1-\lambda)\, x^* \in A)$$

$$\geqslant \lambda\psi(\bar{x},u) + (1-\lambda)\, \psi(x^*,u) \qquad (\psi \text{ concave en } x)$$

donc

$\psi(\bar{x},u) > \psi(x^*,u)$, $\forall x^* \in X$, $x^* \notin A$.

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ compact} \\ \psi \text{ continue en } x \end{array}\right\} \Longrightarrow \operatorname*{Max}_{x\in A} \psi(x,u) = \operatorname*{Sup}_{x\in X} \psi(x,u),\ \forall u \in V(\bar{u}) \cap U.$$

$(\bar{x},\bar{u})$ étant solution de $\mathcal{D}$:

$$\psi(\bar{x},\bar{u}) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x\in X} \psi(x,u) = \operatorname*{Max}_{x\in A} \psi(x,u),\ \forall u \in V(\bar{u}) \cap U,$$

et ψ a la propriété inf en $(\bar{x},\bar{u})$.

$$.\ \exists \mathring{x} \in X : \left\{\begin{array}{l} (\mathring{x},\bar{u}) \text{ est solution de } \mathcal{P} \text{ et de } \mathcal{D}. \\ \psi(\bar{x},\bar{u}) = \psi(\mathring{x},\bar{u}). \end{array}\right.$$

$\psi(x,\bar{u})$ étant strictement concave au voisinage de $\bar{x}$,

$$\mathring{x} = \bar{x}.$$

Q.E.D.

A. La démonstration est analogue.

III §2 - DUALITE EN PROGRAMMATION MATHEMATIQUE

- Soient $\varphi : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$,

  $a : \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^m$,

  $X = C \subset \mathbf{R}^n$.

Posons $\psi(x,u) = \varphi(x) + ua(x)$ et $U = \{u \in (\mathbb{R}^n)^* : u \geqslant 0\}$.

Soit $i(x) = \text{Inf}\ \{\psi(x,u) : u \in U\}$

$$= \text{Inf}\ \{\varphi(x) + ua(x) : u \geqslant 0\} = \begin{cases} \varphi(x) \text{ si } a(x) \geqslant 0 \\ -\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

$\mathcal{P}$ s'écrit alors

P : $\underset{x \in C}{\text{Sup}}\ \{\varphi(x) : a(x) \geqslant 0\}$ ou $\text{Sup}\ \{\varphi(x) : x \in C,\ a(x) \geqslant 0\}$.

Remarques :

. Si $\{x \in C : a(x) \geqslant 0\} = \emptyset$, d'après les conventions antérieures, le sup vaudra $-\infty$.

. Nous retrouvons pour P le programme étudié au chapitre II.

- Le dual $\mathcal{D}$ de $\mathcal{P}$ s'écrit

D : $\underset{u \geqslant 0}{\text{Inf}}\ \underset{x \in C}{\text{Sup}}\ \{\varphi(x) + ua(x)\}$.

Remarque : En programmation mathématique, les solutions acceptables correspondent à des inf ou sup finis, atteints à distance finie. On remplacera par la suite inf par min et sup par max.

. *Cas particulier :*

Si (1) a et φ sont différentiables sur C

(2) C est pseudo-convexe

(3) $\varphi(x) + ua(x)$ est pseudo-concave sur C, $\forall u \geqslant 0$

alors, d'après le théorème 4 :

$s(u) = \text{Sup}\ \{\psi(x,u) : x \in C\}$

$$= \varphi(x) + ua(x) \text{ si et seulement si } \frac{d\varphi}{dx}(x) + u\,\frac{da}{dx}\,(x) \in \Gamma\,[P_c(x)]$$

$P_c(x)$ désignant le pseudo-cône tangent à C en x.

D s'écrit alors :

$$D' : \underset{u \geqslant 0}{\text{Inf}} \left\{ \varphi(x) + ua(x) : \frac{d\varphi}{dx}\,(x) + u\,\frac{da}{dx}\,(x) \in \Gamma\,[P_c(x)] \right\}$$

ou encore, en supposant l'inf fini et atteint à distance finie :

$$D' : \left[\begin{array}{l} \text{Min } \varphi(x) + ua(x) \\ \frac{d\varphi}{dx}(x) + u\,\frac{da}{dx}(x) \in \Gamma[P_C(x)] \\ u \geqslant 0. \end{array} \right.$$

Remarque : Si $C = \mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{R}^n_+$,
on retrouve le problème dual défini antérieurement dans [24] ou [54] par exemple.

- Nous ferons par la suite l'hypothèse que C est convexe et fermé.
- Nous pouvons appliquer aux problèmes P et D les théorèmes 13 et 14.

Théorème 15 : Théorème de dualité en programmation mathématique.

A. Si φ et a sont continues et concaves,
une condition nécessaire et suffisante pour que $\bar{x}$ soit solution de P est que

$$\exists\, \bar{u} \geqslant 0 : \begin{cases} (1) & (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } D \\ (2) & \bar{u}a(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

si et seulement si $\varphi(x) + ua(x)$ a la propriété sup en $(\bar{x}, u^*)$, où u^* est non négatif et vérifie

$$u^* a(\bar{x}) = 0.$$

B. Si φ et a sont semi-continues inférieurement et quasi-concaves, une condition nécessaire et suffisante pour que $(\bar{x}, \bar{u})$ soit solution de D est que

$$\exists\, \overset{\circ}{x} \in C : \begin{cases} (1) & \overset{\circ}{x} \text{ est solution de } P \\ (2) & (\overset{\circ}{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } D \\ (3) & \bar{u}a(\overset{\circ}{x}) = \bar{u}a(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

si et seulement si $\varphi(x) + ua(x)$ a la propriété inf en $(\bar{x}, \bar{u})$.

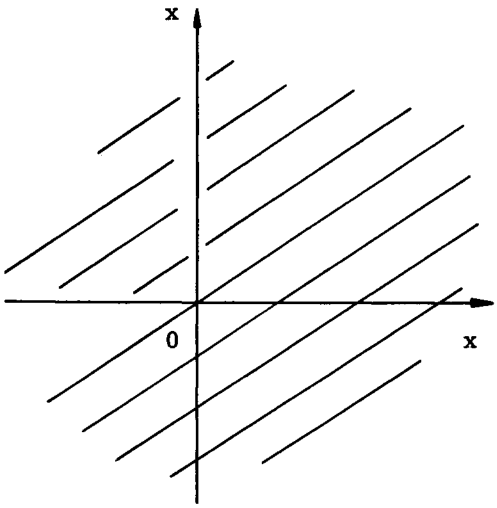
Il suffit d'appliquer le théorème 13.

Exemple 1.

Soit P : Max $\{\varphi(x) : a(x) \geqslant 0\}$

où $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\varphi(x) = -\,x_2$$
$$a_1(x) = -\,(x_1)^2$$
$$a_2(x) = x_2,$$



soit encore

$$P : \left[\begin{array}{l} \text{Max} - x_2 \\ -(x_1)^2 \qquad \geqslant 0 \\ \qquad\quad x_2 \geqslant 0 \end{array}\right.$$

$$\Delta = \{x : a(x) \geqslant 0\} = 0x_2, C = \mathbb{R}^2$$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est solution de P.

Ecrivons le dual D de P :

$$\text{Min}\ \{\varphi(x) + ua(x) : u \geqslant 0,\ \varphi(x) + ua(x) = \underset{\xi \in \mathbb{R}^2}{\text{Max}}\ \varphi(\xi) + ua(\xi)\}$$

$$D : \begin{cases} \text{Min } - x_2 - u^1(x_1)^2 + u^2 x_2 \\ u^1 \geqslant 0 \\ u^2 \geqslant 0 \\ - x_2 - u^1(x_1)^2 + u^2 x_2 = \underset{\xi \in \mathbf{R}^2}{\text{Max}} \{- \xi_2 - u^1(\xi_1)^2 + u^2 \xi_2\} \end{cases}$$

Si $\bar{x}$ fait partie d'une solution $(\bar{x}, u)$ de D,

avec $u = [u^1 \; u^2] \geqslant 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \underset{\xi \in \mathbf{R}^2}{\text{Max}} \{\xi_2(u^2 - 1) - u^1(\xi_1)^2\} \\ &= \underset{\xi_2 \in \mathbf{R}}{\text{Max}} \{\xi_2(u^2 - 1)\} \text{ car } u^1 \geqslant 0. \end{aligned}$$

ξ_2 étant de signe quelconque, il faut que $u^2 - 1 = 0$.

Si $(\bar{x}, u)$ est solution de D, on a donc $u^2 = 1$.

Prenons pour voisinage $V(\bar{x})$ la boule $B(0, \varepsilon)$, avec $\varepsilon > 0$, et pour compact F l'ensemble $\{u^* : u^{*1} = 0,\ u^{*2} = 1\}$. Alors $\psi(x, u) = \varphi(x) + ua(x)$ a la propriété sup en $(\bar{x}, u^*)$:

$$\forall x \in V(\bar{x}) \cap X : \psi(\bar{x}, u^*) \geqslant \underset{u \in F}{\text{Min}} \; \psi(x, u).$$

En effet

$$\begin{aligned} \underset{x \in B(0,\varepsilon)}{\text{Max}} \; \underset{u = u^*}{\text{Min}} \{\varphi(x) + ua(x)\} &= \underset{x \in B(0,\varepsilon)}{\text{Max}} [- x_2 + 0 \times (-x_1)^2 + 1 \times x_2] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 2.

Soit P : Max $\{\varphi(x) : a(x) \geqslant 0\}$

où $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2$,

$\varphi(x) = x_1 - x_2$,

$a_1(x) = -(x_1)^2$,

$a_2(x) = x_2$,

soit encore

$$P : \begin{cases} \text{Max } x_1 - x_2 \\ -(x_1)^2 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ est solution de P .

Ecrivons le dual D de P :

$$\text{Min } \{\varphi(x) + ua(x) : u \geqslant 0,\ \varphi(x) + ua(x) = \underset{\xi \in \mathbb{R}^2}{\text{Max}}\ \varphi(\xi) + ua(\xi)\}$$

ou

$$D : \begin{cases} \text{Min } x_1 - x_2 - u^1(x_1)^2 + u^2 x_2 \\ u^1 \geqslant 0 \\ u^2 \geqslant 0 \\ x_1 - x_2 - u^1(x_1)^2 + u^2 x_2 = \underset{\xi \in \mathbb{R}^2}{\text{Max}}\ \{\xi_1 - \xi_2 - u^1(\xi_1)^2 + u^2\xi_2\} \end{cases}$$

Pour que $\bar{x}$ fasse partie d'une solution $(\bar{x}, u)$ de D , il faudrait que

$$0 = \underset{\xi \in \mathbb{R}^2}{\text{Max}}\ \{\xi_1 - \xi_2 - u^1(\xi_1)^2 + u^2\xi_2\}$$

$$= \underset{\xi \in \mathbb{R}^2}{\text{Max}}\ \{\xi_1 + \xi_2(u^2 - 1)\} \quad \text{car } u^1 \geqslant 0.$$

Ce max est non nul, puisque, ξ_1 pouvant tendre vers $+\infty$, le max vaut $+\infty$.

Vérifions alors qu'il n'existe ni voisinage fermé de $\bar{x}$ ni compact convexe F tels que

$$\varphi(\bar{x}) = 0 \geqslant \underset{x \in V(\bar{x}) \cap X}{\text{Max}}\ \underset{u \in B}{\text{Min}}\ \{x_1 - u^1(x_1)^2 + x_2(u^2 - 1)\}.$$

En effet, x_1 et x_2 pouvant varier indépendamment l'un de l'autre dans $V(\bar{x})$ avec des signes quelconques, il faudrait avoir simultanément

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x \in V(\bar{x})}{\text{Max}}\ \underset{u \in F}{\text{Min}}\ [x_1 - u^1(x_1)^2] \leqslant 0 \\ \text{et} \\ \underset{x \in V(\bar{x})}{\text{Max}}\ \underset{u \in F}{\text{Min}}\ [x_2(u^2 - 1)] \leqslant 0 \end{array}\right\} \text{car } V(\bar{x}) \text{ est un } \textit{voisinage} \text{ de } \bar{x}=0.$$

La seconde relation n'est vérifiée que si $u^2 = 1$.

Dans la première :

$$\underset{u \in F}{\text{Min}}\ [x_1 - u^1(x_1)^2] = x_1 - \alpha(x_1)^2 \text{ , où}$$

$$\alpha = \text{Max}\ \{u^1 : u \in F\}$$

$$\text{et} \quad \underset{x \in V(\bar{x})}{\text{Max}}\ [x_1 - \alpha(x_1)^2] = \frac{1}{4\alpha} > 0.$$

- Le théorème strict de dualité ne peut s'appliquer que dans sa partie B , mais nous pouvons utiliser les résultats du chapitre II et obtenir une forme particulière du théorème 15-A :

Théorème 16

A. Si . φ et a sont concaves et différentiables en $\bar{x}$,

. $\bar{x}$ est solution de P,

. C est pseudo-convexe en $\bar{x}$,

. $\bar{x}$ vérifie l'hypothèse H sur $C \cap \{x : a(x) \geq 0\}$,

alors

$$\exists\ \bar{u} \geq 0 : \begin{cases} (\bar{x}, \bar{u}) \text{ est solution de } D \\ \bar{u}a(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

B. Si . φ et a sont concaves,

. $(\bar{x}, \bar{u})$ est solution de D ,

. $\varphi(x) + \bar{u}a(x)$ est strictement concave dans un voisinage de $\bar{x}$

alors

$$\begin{cases} \bar{x} \text{ est solution de } P \\ \bar{u}a(\bar{x}) = 0 \end{cases}$$

A. Plutôt que de montrer que $\varphi(x) + ua(x)$ vérifie alors la propriété sup en un certain point (x, u^*) , il est plus rapide d'utiliser les résultats du théorème 8 :

$$\exists \bar{u} \geq 0 : \begin{cases} \overline{\dfrac{d\varphi}{dx}} + u\ \overline{\dfrac{da}{dx}} \in \Gamma\,[P_c] \\ \bar{u}a(\bar{x}) = 0. \end{cases}$$

$(\bar{x},\bar{u})$ est solution réalisable de D , d'après le théorème 4-B , et $\forall (x,u) \in (\mathcal{D})$: $\varphi(x) + ua(x) \geqslant \varphi(\bar{x}) + ua(\bar{x})$

$$\geqslant \varphi(\bar{x})$$

puisque $u \geqslant 0$ et $a(\bar{x}) \geqslant 0$,

et $$\varphi(x) + ua(x) \geqslant \varphi(\bar{x}) + \bar{u}a(\bar{x})$$

puisque $\bar{u}a(\bar{x}) = 0$.

Donc $(\bar{x},\bar{u})$ est solution de D.

B. C'est une application directe du théorème 14-B.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ABADIE J. - Problèmes d'optimisation, Institut Blaise Pascal, Paris, 1965.

[2] ABADIE J. - On the Kuhn-Tucker Theorem, Operations Research Center, University of California, Berkeley, ORC 65-18.

[3] ARROW K.J., ENTHOVEN A. C. - Quasi-concave Programming, Econometrica, 29 (1961) 779-800.

[4] ARROW K.J., HURWICZ L., UZAWA H. - Constraint qualification in maximization problems, Naval Research Log. Quarterley 8(1961) 175-191.

[5] ALTMAN M. - Stationary points in non-linear programming, Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Math. Astr. Phys. 12(1964) 29-35.

[6] BERNHOLTZ B. - A new derivation of the Kuhn-Tucker conditions, Quart. Appl. Math. 21(1963) 295-299.

[7] CHARNES A., COOPER W.W., KORTANEK K.O. - A duality theorem for convex programs for convex constraints, Bull. Amer. Math. Soc. 68(1962) 605-608.

[8] COTTLE R. - Symmetric dual quadratic programs, Quart.Appl. Math. 21(1963) 237-243.

[9] COTTLE R. - A theorem of Fritz John in Mathematical Programming, The Rand Corporation, 1963. RM 3858 PR.

[10] DORN W.S. - Duality in quadratic programming, Quart. Appl. Math. 18(1960) 155-162.

[11] DORN W.S. - A duality theorem for convex programs, IBM J. Res. Dev. 4(1960) 407-413.

[12] DORN W.S. - Self-dual quadratic programs, J. SIAM 9 (1961) 51-54.

[13] DUBOVITSKIY A.Y., MILYUTIN A.A. - Extremum problems in the presence of constraints, Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz., 5 (1965) 395-453.

[14] DUFFIN R.J. - Dual programs and minimum cost, J. SIAM 10 (1962) 119-123.

[15] EISENBERG E. - Duality in homogeneous programming, Proc. Am. Math. Soc. 12 (1961) 783-787.

[16] PENCHEL W. - Convex cones, sets and functions, Princeton University (1953).

[17] FIACCO A.W. - Second order sufficient conditions for weak and strict constrained minima, SIAM J. Appl. Math. 16 (1968) 105-108.

[18] GUIGNARD M. - Conditions d'optimalité en programmation mathématique dans un espace de Banach, C. R. Ac. Sc. 267 (1968) 5, 223-225.

[19] GUIGNARD M. - Generalized Kuhn-Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space, IBM Data Proc. Div. Report 320-2920. SIAM J. on Control 7. (1969) 232-241.

[20] HALKIN H. - An abstract framework for the theory of process optimization, Bull. Amer. Math. Soc. 72 (1966) 677-678.

[21] HALKIN H. - Nonlinear nonconvex programming in an infinite dimensional space, Mathematical Theory of Control, ed. A.V. Balakrishnan, Academic Press, New York, (1967) 10-25.

[22] HALKIN H., NEUSTADT L.W. - General necessary conditions for optimization problems, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 56 (1966) 1066-1071.

[23] HANSON M.A. - A duality theorem in nonlinear programming with nonlinear constraints, Austr. J. Stat. 3 (1961) 64-72.

[24] HUARD P. - Dual programs, IBM J. Res. Dev. 6 (1962) 137-139.

[25] HUARD P. - Programme dual, Math. des Progr. Economiques, Monographies de Recherche operationnelle, 1, 13-17.

[26] JOHN F. - Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions, Studies and Essays Interscience Pub. Inc., New York (1948) 187-204.

[27] KAKUTANI S. - A generalization of Brouwer fixed point theorem, Duke Math. 8 (1941) 418-457.

[28] KAO R.C. - A note on Lagrangian multipliers, The Rand Corporation, (1963) P 2713-1.

[29] KUHN, H.W., TUCKER A.W. - Nonlinear programming, Proc, 2nd Berkeley Symposium University of California Press, Berkeley, (1951) 481-492.

[30] MANGASARIAN O.L. - Duality in nonlinear programming, Quart. Appl. Math. 20 (1962) 300-302.

[31] MANGASARIAN O.L., FROMOVITZ S. - The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints, J. Math. An. Appl. 17 (1967) 37-47.

[32] MANGASARIAN O.L., PONSTEIN J. - Minimax and duality in nonlinear programming, J. Math. An. Appl. 11 (1965) 504-518.

[33] MANGASARIAN O.L. - Pseudo-convex functions, J. SIAM Control 3 (1965) 281-290.

[34] Mc CORMICK G.P. - Second order conditions for constrained minima, SIAM J. Appl. Math. 15 (1967) 641-652.

[35] NEUSTADT L.W. - An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization problems, Report of the Electronic Sciences Laboratory, University of Southern California, Los Angeles.

[36] PALLU DE LA BARRIERE R. - Compléments à la théorie des multiplicateurs en programmation non linéaire, Revue française de Recherche opérationnelle, 27 (1963) 163-180.

[37] PHIPPS C.G. - Maxima and minima under restraint, Amer. Math. Monthly 59 (1952) 230-235.

[38] PONSTEIN J. - An extension of the min-max theorem, SIAM Review 7 (1965) 181-188.

[39] PSCHENICHENIY B.N. - Convex programming in a normed space, Kibernetika 5 (1965) 46-54.

[40] RAFFIN C. - Programmation mathématique et dualité, Université de Poitiers, Séminaire de Statistiques et Econométrie (1966)

[41] RICE D.R., THOMAS M.E. - Sufficiency conditions in nonlinear programming, College of Engineering, University of Florida (1967).

[42] RITTER K. - Duality for nonlinear programming in a Banach space, SIAM J. Appl. Math. 15 (1967) 294-302.

[43] RUBINOV A.M. - Necessary conditions for an extreme value and their use in the study of certain equations, Soviet Math. Dokl. (trad. angl.) 7 (1966) 978-980.

[44] RUSSEL D.L. - The Kuhn-Tucker conditions in Banach space with an application to control theory, J. Math. An. Appl. 15 (1966) 200-212.

[45] SIMMONARD M. - Programmation linéaire, Dunod, Paris (1962).

[46] SION - Sur une généralisation du théorème du minimax, C. R. Ac. Sci. Paris 244 (1957) 2120.

[47] SLATER - Lagrange multipliers revisited, The Rand Corporation, (1951) RM 676.

[48] STOER J. - Duality in nonlinear programming and the min-max theorem, Num. Math. 5 (1963) 371-379.

[49] UZAWA H. - The Kuhn-Tucker theorem in concave programming, Studies in linear and nonlinear programming, Stanford University Press, 32-37.

[50] VAJDA - Dans Nonlinear Programming, North Holland Pub. Amsterdam (1966).

[51] VARAIYA P.P. - Nonlinear programming in Banach space, SIAM J. Appl. Math. 15 (1967) 284-293.

[52] VARAIYA P.P. - Nonlinear programming and optimal control, ERL Technical Memorandum M-129, University of California, Berkeley (1965).

[53] WILDE D.J. - Differential calculus in nonlinear programming, Opns. Res. 10 (1962) 764-773.

[54] WHINSTON A. - Conjugate functions and dual programs, Nav. Res. Log. Quart. 12 (1965) 315-322.

[55] WOLFE P. - A duality theorem for nonlinear programming, The Rand Corporation, P 2028.