

# CAHIERS DU BURO

BRIGITTE ESCOFIER-CORDIER

## L'analyse factorielle des correspondances

*Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle.*

*Série Recherche*, tome 13 (1969), p. 25-59

[http://www.numdam.org/item?id=BURO\\_1969\\_\\_13\\_\\_25\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BURO_1969__13__25_0)

© Institut Henri Poincaré — Institut de statistique de l'université de Paris, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# L'ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES

par

Brigitte ESCOFIER-CORDIER

## INTRODUCTION

L'analyse factorielle a pour objet de traiter des informations obtenues dans les domaines les plus divers, dans des situations très complexes où un grand nombre de variables sont corréllées. Elle détermine des paramètres ou facteurs en fonction desquels on peut exprimer d'une manière condensée les informations. La diminution du volume des données facilite les manipulations postérieures. De plus l'image simplifiée que l'on obtient du phénomène étudié permet d'en avoir une meilleure intuition et très souvent cela permet d'en dégager les différentes composantes naturelles. On peut aussi utiliser les facteurs obtenus pour représenter géométriquement dans un espace de petite dimension l'ensemble des variables étudiées.

Nous exposons ici une nouvelle méthode d'analyse factorielle qui s'applique aux cas où dans un processus expérimental ou naturel deux ou plusieurs ensembles se trouvent en relation, ceci quelle que soit la nature de ces ensembles. L'application de cette technique permet de dégager une structure de chacun de ces ensembles, considéré uniquement du point de vue de ses relations avec l'autre ou avec les autres. Cette structure étant schématisée en un petit nombre de facteurs prenant une valeur numérique réelle pour chacun des éléments de l'ensemble on pourra exprimer avec une approximation satisfaisante le comportement de cet ensemble vis-à-vis des autres en fonction uniquement de ces facteurs. Ces derniers ont très souvent une interprétation évidente liée à la nature propre des ensembles considérés.

On pourra représenter géométriquement ces ensembles et leurs liaisons en prenant comme image d'un élément un point d'un espace Euclidien dont la dimension est égale au nombre de facteurs extraits et dont les coordonnées sont respectivement égales aux

coefficients de cet élément pour chacun des facteurs. On aura pu ainsi déterminer des coordonnées continues sur les ensembles étudiés.

La technique utilisée se rapproche de l'analyse factorielle classique par le fait que l'on construit des nuages de points, représentant ici les ensembles en correspondance, dans un espace de grande dimension, que l'on ajuste ensuite à ce nuage un sous-espace en déterminant successivement certaines directions d'allongement du nuage auxquelles on associe ensuite un facteur.

Mais elle en diffère par le fait que le nuage ne provient pas directement des données mais est construit de manière à répondre à certains axiomes que les études distributionnelles nous amènent à considérer comme naturels.

Dans une première partie nous préciserons ce que nous entendons par ensembles en correspondance en montrant avec des exemples à l'appui à quel genre de données s'applique la méthode. Nous définirons ensuite une distance sur les ensembles, associée à la correspondance. Puis nous construirons des nuages de points respectant cette distance après avoir exposé la technique utilisée pour l'extraction des facteurs de ces nuages. Nous démontrerons quelques théorèmes sur cette analyse factorielle des correspondances. Nous parlerons ensuite des limites de signification des résultats et des tests utilisés pour déterminer cette limite dans les cas les plus courants. Nous donnerons enfin quelques résultats obtenus avec cette méthode sur des exemples divers.

## 1 - CORRESPONDANCES

On dit que 2 ensembles  $I$  et  $J$  (cas binaire) éventuellement plusieurs ensembles  $I, J, K$  (cas ternaire), etc. sont en correspondance si il existe des relations entre les éléments de ces ensembles et plus précisément si les éléments s'associent par couples  $(i, j)$  avec  $i \in I$  et  $j \in J$  (par triplets  $(i, j, k)$  dans le cas ternaire etc.). Il existe différents types de correspondances, par exemple :

### 1.1 Correspondance ensembliste

Elle est définie pour deux ensembles  $I, J$  par une partie  $\mu \subset I \times J$ . On dit que  $i \in I$  et  $j \in J$  sont en correspondance si  $(i, j) \in \mu$ . Elle est définie de la même façon pour trois ensembles  $I, J, K$  par une partie de  $I \times J \times K$  etc..

### 1.1.1 Exemple

$I$  est l'ensemble des étudiants d'une Faculté,  $J$  l'ensemble des certificats enseignés. On peut définir entre  $I$  et  $J$  une correspondance ainsi :  $i, j \in \mu$  si l'étudiant  $i$  suit le certificat  $j$ .

## 1.2 Correspondance statistique

Elle est définie à partir d'un corpus de couples  $(i, j)$  (ou de triplets  $(i, j, k)$  etc.) qui détermine sur  $I \times J$  (ou  $I \times J \times K$  etc.) une fonction  $n$  à valeurs entières et positives :  $n(i, j)$  est le nombre de fois que le couple  $(i, j)$  est attesté dans le corpus.

### 1.2.1 Exemple

Soit une expérience psychologique consistant à associer à un stimulus  $i$  appartenant à un ensemble  $I$  de stimuli, un élément  $j$  d'un ensemble  $J$  de réponses. On considère le corpus fourni par les résultats de l'expérience. Alors  $n(i, j)$  est le nombre de fois qu'au stimulus  $i$  a été associé la réponse  $j$ .

### 1.2.2 Exemple

Soit  $I$  l'ensemble des noms utilisés dans un texte,  $J$  celui des verbes utilisés dans le même texte et  $K$  celui des adjectifs. Le texte nous donne un corpus de triplets et  $n(i, j, k)$  est le nombre de fois que le nom  $i$  a pour épithète  $k$  et est sujet du verbe  $j$ .

## 1.3 Correspondance aléatoire

Elle est définie sur  $I \times J$  par la donnée d'une mesure de probabilité décrite par une fonction  $p$  à valeur réelles et positives telle que

$$\sum_{i,j} p(i, j) = 1.$$

$p(i, j)$  est la probabilité d'apparition du couple  $(i, j)$ . Elle est de même définie sur  $I \times J \times K$  etc. par la donnée d'une fonction  $p(i, j, k)$  telle que

$$\sum_{i,j,k} p(i, j, k) = 1.$$

Ce que nous exposons ici pour une correspondance aléatoire s'applique immédiatement aux autres correspondances. Il suffit pour appliquer la méthode de connaître une matrice de nombres  $n(i, j)$

exprimant la liaison entre I et J (ou une matrice de nombres  $n(i, j, k)$  dans le cas ternaire etc.)

Nous rappelons brièvement les notions de probabilité conditionnelle et cumulée que nous utiliserons dans la suite :

$$\begin{aligned}
 p(i) &= \sum_{j \in J} p(i, j) && \text{probabilité d'avoir l'élément } i \\
 p(j) &= \sum_{i \in I} p(i, j) && \text{" " " " } j \\
 p(i/j) &= p(i, j)/p(j) && \text{probabilité d'avoir l'élément } i, j \text{ étant fixé.} \\
 p(j/i) &= p(i, j)/p(i) && \text{" " " " } j, i \text{ " " }
 \end{aligned}$$

Dans le cas ternaire :

$$p(i) = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} p(i, j, k) \quad p(i, j) = \sum_{k \in K} p(i, j, k)$$

$$p(i/j, k) = p(i, j, k)/p(j, k) \text{ et } p(i, j/k) = p(i, j, k)/p(k)$$

et toutes celles qui s'en déduisent par permutations.

## 2 - DISTANCE ASSOCIEE A UNE CORRESPONDANCE.

La correspondance entre plusieurs ensembles définit sur chacun d'eux une notion de proximité : si deux éléments  $i$  et  $i'$  de I s'associent de la même façon aux éléments de J ils sont proches l'un de l'autre. Et symétriquement 2 éléments  $j$  et  $j'$  seront d'autant plus proches que leurs associations avec les éléments de I se feront dans les mêmes proportions.

Si nous reprenons notre exemple de l'expérience psychologique d'association stimuli-réponses, cela se traduira ainsi : 2 stimuli sont proches s'ils attirent les mêmes réponses dans des proportions semblables et 2 réponses sont proches si elles sont provoquées par les mêmes stimuli.

Cette correspondance définit d'autre part une notion de proximité entre les éléments de I et ceux de J, un élément  $i \in I$  étant proche des éléments  $j \in J$  auxquels il s'associe le plus et vice-versa. Dans notre exemple, un stimulus est proche des réponses qu'il attire le plus souvent et une réponse des stimuli qui la provoquent.

Nous allons formaliser cette notion de proximité en énonçant 3 propriétés qu'elle suggère, puis nous définirons sur chacun des ensembles en correspondance une distance qui respectera ces propriétés.

Propriétés de la distance entre les éléments de  $I$  en correspondance avec  $J$  :

1/ La distance entre 2 éléments de  $I$  est d'autant plus petite que leurs probabilités conditionnelles de s'associer aux éléments  $j \in J$  sont semblables. Si ces probabilités sont toutes égales, la distance est nulle :

Si  $\forall j, p(j/i) = p(j/i') \Rightarrow d(i, i') = 0$ .

2/ Si 2 éléments  $j_1$  et  $j_2$  ayant mêmes probabilités conditionnelles de s'associer aux éléments de  $I$  (i.e.  $\forall i \in I, p(i/j_1) = p(i/j_2)$ ) sont remplacés par un seul élément  $j$  et que l'on pose :  $p(i, j_0) = p(i, j_1) + p(i, j_2)$  les distances entre les éléments de  $I$  sont inchangées.

3/ La distance ne dépend que des probabilités conditionnelles et cumulées sur  $J$ .

Nous allons définir une distance sur  $I$  respectant ces axiomes et nous la noterons  $d_{I(J)}$ . Sa valeur est donnée par la formule suivante :

$$d_{I(J)}^2(i, i') = \sum_{j \in J} p(j) \left[ \frac{p(i/j)}{p(i)} - \frac{p(i'/j)}{p(i')} \right]^2.$$

Nous vérifions facilement que cette distance respecte les trois propriétés. Pour l'ensemble  $J$  nous avons des propriétés et une formule symétriques :

$$d_{J(I)}^2(j, j') = \sum_{i \in I} p(i) \left[ \frac{p(j/i)}{p(j)} - \frac{p(j'/i)}{p(j')} \right]^2$$

Dans le cas d'une correspondance entre plus de 2 ensembles, par exemple une correspondance ternaire, ceci se généralise. Nous avons le choix entre 2 procédés pour déterminer une distance.

Considérer cette correspondance ternaire comme une correspondance binaire entre  $I$  et  $J \times K$ . Ce qui nous ramène au cas précédent et nous définit sur  $I$  une distance que nous notons  $d_{I(J \times K)}$

Ou considérer les 2 correspondances binaires entre  $I$  et  $J$  d'une part et entre  $I$  et  $K$  d'autre part, définies par les nombres  $p(i, j)$  et  $p(i, k)$ , et les distances  $d_{I(J)}$  et  $d_{I(K)}$  associées. On définira alors sur  $I$  une distance notée  $d_{I(J \times K)}$  et dont le carré est égal à la somme des carrés de  $d_{I(J)}$  et  $d_{I(K)}$  :

$$d_{I(J+K)}^2(i, i') = d_{I(J)}^2(i, i') + d_{I(K)}^2(i, i')$$

La généralisation à un nombre quelconque fini d'ensembles en correspondance est immédiate.

Nous préciserons dans la suite les notions de proximité entre les éléments de 2 ensembles différents.

Nous voulons représenter dans un espace vectoriel de dimension aussi petite que possible ces ensembles munis de la distance que nous venons de définir. Nous procéderons pour cela en 2 étapes. D'abord nous figurerons les ensembles dans un espace de grande dimension muni d'une forme quadratique qui définira entre les images de 2 éléments la distance voulue. Puis nous réduirons les dimensions de l'espace où est figuré le nuage en lui ajustant un sous-espace et en le projetant dans ce sous-espace.

Pour cela nous déterminerons les axes principaux d'inertie du nuage dans l'ordre décroissant des moments principaux d'inertie, ce qui correspond aux directions dans lesquelles s'allonge le plus le nuage. A chaque axe est associé une application linéaire qui est la projection sur cet axe et que nous appellerons facteur. La valeur de ce facteur au point image de l'élément  $i$  sera le coefficient de  $i$  dans ce facteur ou si nous voulons utiliser une représentation géométrique une coordonnée de  $i$ , les axes principaux étant alors pris comme vecteurs de base d'un sous-espace dans lequel est figuré  $I$ . Si par exemple nous avons extrait 2 facteurs  $\mathfrak{F}_1$  et  $\mathfrak{F}_2$  associés aux 2 plus grands moments d'inertie d'un nuage représentant  $I$ ,  $i$  étant situé en  $X(i)$ , nous aurons une projection du nuage dans un plan, une représentation de l'ensemble  $I$  dans un plan, l'élément  $i$  étant situé au point de coordonnées

$$\{ \mathfrak{F}_1(X(i)), \quad \mathfrak{F}_2(X(i)) \}.$$

Plus le nombre de facteurs extraits est grand plus la distance entre les images  $i$  et  $i'$  dans le sous-espace sera proche de la distance définie ci-dessus. Elle lui sera égale si le nombre de facteurs extraits est égal à la dimension du sous-espace engendré par le nuage.

Mais nous n'en extrairons qu'un petit nombre, en général 1, 2 ou 3, nous préciserons dans le § VII comment on détermine le nombre de facteurs à extraire.

Nous avons donc besoin d'une technique pour extraire les axes principaux d'inertie d'un nuage de points situé dans un espace muni d'une forme quadratique quelconque définissant la distance. C'est ce que nous allons exposer dans le paragraphe suivant.

### 3 - ANALYSE FACTORIELLE D'UN NUAGE DE POINTS

Cf Cours de Linguistique 4ème leçon, J.P. Benzécri, ou Publications de l'Institut de Statistique de l'université de Paris, vol. 13, 1964, p. 235.

Soit un nuage de points  $M_i$  munis des masses  $m_i$  situé dans l'espace  $E$  dans lequel est définie la forme quadratique  $Q$  définissant la distance. On recherche les axes principaux au centre de gravité  $G$  du nuage ainsi défini :

$$\vec{OG} = \frac{1}{m} \sum_{i \in I} m_i \vec{OM}_i$$

avec  $m = \sum_{i \in I} m_i$  la masse totale du nuage.

Si  $E$  était muni de la forme quadratique associée au produit scalaire ordinaire on pourrait utiliser le procédé suivant que l'on généralise au cas d'une forme quadratique  $Q$  quelconque.

3.1 -  $E$  étant Euclidien, à tout vecteur  $u \in E$  correspond canoniquement la forme linéaire, élément du dual  $E^*$  de  $E$  "produit scalaire par  $u$ " que l'on note aussi  $u$ . La distance d'un point  $M_i$  à l'hyperplan  $H$  passant par  $G$  et orthogonal au vecteur  $u$  vaut alors :

$$u \cdot \vec{GM}_i = u(\vec{GM}_i)$$

Le moment d'inertie du nuage par rapport à ce plan  $H$  vaut donc :

$$\sum_{i \in I} m_i [u \cdot (\vec{GM}_i)]^2$$

Et le produit d'inertie du nuage par rapport à  $H$  et à l'hyperplan  $K$  perpendiculaire à un vecteur  $v$  est :

$$\sum_{i \in I} m_i u(\vec{GM}_i) \cdot v(\vec{GM}_i)$$

D'où la définition d'une matrice, que l'on appelle matrice d'inertie du nuage, dont les termes diagonaux sont les moments d'inertie par rapport aux hyperplans orthogonaux aux vecteurs de base et les autres termes les produits d'inertie. Cette matrice que l'on note  $\mu$  a pour terme général :

$$\mu(k, l) = \sum_{i \in I} m_i (x_i^k - x_0^k) (x_i^l - x_0^l)$$

où  $x_i^k$  est la kème composante de  $M_i$  et  $x_G^k$  celle de  $G$ . Les moments principaux d'inertie seront alors égaux aux valeurs propres de  $\mu$  et les axes principaux à ses vecteurs propres.

On peut considérer cette matrice comme la matrice d'une forme quadratique sur  $E^*$ , la forme quadratique d'inertie, ou d'une application linéaire de  $E^*$  identifiée à  $E$  dans  $E$  :

$$\begin{aligned} u, v \in E^* \quad \mu(u, v) &= \sum_{i \in I} m_i \overrightarrow{u(GM_i)} \cdot \overrightarrow{v(GM_i)} \in \mathbb{R} \\ u \in E^* \quad \mu(u) &= \sum_{i \in I} m_i \overrightarrow{u(GM_i)} \cdot \overrightarrow{GM_i} \in E \end{aligned}$$

**3.2** - Considérons maintenant le cas où  $Q$  est une forme quadratique quelconque. On associe à un élément  $x \in E$  un élément de  $E^*$  :  $q(x)$  qui est la projection  $q$  orthogonale sur le vecteur  $x$ . On obtient les moments d'inertie d'un nuage pour la distance associée à  $Q$  en considérant le produit  $\mu \circ q$ . C'est une application linéaire de  $E$  dans  $E$ . Les valeurs propres de la matrice associée sont les moments principaux d'inertie et les vecteurs propres les axes principaux.

Soit  $s$  un axe principal d'inertie associé au moment  $\lambda$ .

$$\mu \circ Q(s) = \lambda s$$

La forme linéaire associée  $\mathfrak{S} = Q(s)$  est un facteur du nuage. On peut rapporter le nuage à ses axes principaux, les coordonnées des points relatives à cette base étant égales aux valeurs respectives des facteurs en ces points.

Pour avoir un système unitaire on normalise les axes par rapport à  $Q$  :  $Q(s, s) = 1$ .

**3.3** - On remarque qu'il est équivalent de rechercher les axes principaux ou les facteurs d'un nuage. En effet :

$$\mu \circ Q(s) = \lambda s \Rightarrow Q \circ \mu \circ Q(s) = \lambda Q(s) \Rightarrow Q \circ \mu(\mathfrak{S}) = \lambda \mathfrak{S}$$

$$Q \circ \mu(\mathfrak{S}) = \lambda \mathfrak{S} \Rightarrow \mu \circ Q \circ \mu(s) = \lambda \mu(\mathfrak{S})$$

Un facteur associé au moment  $\lambda$  est donc le vecteur propre de la matrice  $Q \circ \mu$  associée à la valeur propre  $\lambda$ , comme l'axe factoriel est le vecteur propre de  $\mu \circ Q$  associé à  $\lambda$ .

La normalisation de  $s$  par rapport à  $Q$  entraîne :

$$\mu(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}) = \lambda$$

$$s = \lambda \mu(\mathfrak{S})$$

Le moment d'inertie total du nuage pour  $Q$  au point  $G$  est :

$$M_T = \sum_{i \in I} m_i \overrightarrow{Q(GM_i, GM_i)}$$

Et si  $\mathcal{F}_i$  est le facteur associé au moment d'inertie  $\lambda_i$  on a :

$$\lambda_i = \sum_{i \in I} m_i [\mathcal{F}_i(GM_i)]^2$$

Et  $M_T$  est la somme de tous les moments principaux d'inertie  $\lambda_i$ . Quand on utilise les  $n$  premiers facteurs associés aux  $n$  moments d'inertie supérieurs pour figurer le nuage dans  $R^n$ , le moment d'inertie du nuage

$$\{ \mathcal{F}_1(M_1), \mathcal{F}_2(M_1), \dots, \mathcal{F}_n(M_1) ; m_1 \}$$

est égal à :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$$

Plus on extrait de facteurs, mieux est représentée l'inertie du nuage étudié, car l'inertie du nuage obtenu se rapproche de plus en plus de  $M_T$ .

#### 4 - CONSTRUCTION DE NUAGES DE POINTS DANS LE CAS D'UNE CORRESPONDANCE BINAIRE.

Nous voulons construire des nuages de points figurant les ensembles  $I$  et  $J$  de façon à ce que la distance entre 2 points représentant les éléments  $i$  et  $i'$  soit égale à la distance que nous avons définie au § 2. Pour cela nous devons nous placer dans un espace de grande dimension et définir une distance à l'aide d'une forme quadratique.

Pour une correspondance entre  $I$  et  $J$  nous avons 3 nuages à considérer que nous noterons respectivement  $\mathcal{N}_I$ ,  $\mathcal{N}_J$  et  $\mathcal{N}_{I,J}$ , le premier figurant  $I$ , le second  $J$  et le troisième les 2 ensembles simultanément, la distance entre deux éléments d'un même ensemble étant celle définie ci-dessus et les distances entre 2 éléments  $i \in I$  et  $j \in J$  respectant les notions de proximité que nous avons notées. En fait les 2 premiers n'ont qu'un intérêt technique car nous montrerons ensuite dans les théorèmes du § 5 que l'on peut déduire les facteurs donnés par l'analyse de ces trois nuages de l'analyse de n'importe lequel d'entre eux. Mais les résultats de l'analyse de  $\mathcal{N}_{I,J}$  contiennent implicitement ceux de  $\mathcal{N}_I$  et  $\mathcal{N}_J$  tandis que l'étude de l'un des 2 premiers est plus simple, l'espace dans lequel on travaille étant de dimension plus petite.

#### 4.1 Construction de $\mathcal{X}_I$

4.1.1 - Pour représenter l'ensemble  $I$  muni de la distance  $d_{I(J)}$  nous nous plaçons dans l'espace  $R^I$ . Un élément  $i \in I$  sera représenté par le vecteur  $e_i$ , vecteur de base de  $R^I$  dont toutes les composantes sont nulles sauf la première qui vaut 1. Ce point sera affecté d'une masse égale à  $p(i)$ .

Pour définir sur  $R^I$  une forme quadratique adéquate nous allons utiliser l'espace  $R^J$  et définir successivement :

$\Phi_I^J$  application linéaire de  $R^I$  dans  $R^J$

$$\Phi_I^J(e_i) = \left\{ \frac{p(i, j)}{p(i)p(j)} \right\}_j$$

$Q_J$  forme quadratique sur  $R^J$

$$Q_J(x, y) = \sum_{j \in J} p(j) x_j y_j$$

où  $x_j$  et  $y_j$  sont les composantes respectives de  $x$  et  $y$  dans  $R^J$ .

Et enfin  $Q_{I(J)}$  qui est la forme quadratique cherchée sur  $R^I$

$$Q_{I(J)}(x, y) = Q_J(\Phi_I^J(x), \Phi_I^J(y)) \quad \text{où } x, y \in R^I$$

$Q_{I(J)}$  définit bien entre  $e_i$  et  $e_{i'}$  la distance  $d_{I(J)}(i, i')$ ; vérifions le :

$$\begin{aligned} Q_{I(J)}(e_i - e_{i'}, e_i - e_{i'}) &= Q_J(\Phi_I^J(e_i - e_{i'}), \Phi_I^J(e_i - e_{i'})) \\ &= \sum_{j \in J} p(j) \left[ \frac{p(i, j)}{p(i)p(j)} - \frac{p(i', j)}{p(i')p(j)} \right]^2 \\ &= \sum_{j \in J} p(j) \left[ \frac{p(i/j)}{p(i)} - \frac{p(i'/j)}{p(i')} \right]^2 \\ &= d_{I(J)}(i, i') \end{aligned}$$

4.1.2 - L'analyse factorielle d'un nuage de points ne dépendant que des distances entre ces points et de leur masse, il est équivalent de faire l'analyse d'un nuage de points ou de son image par une application qui concerne ces deux grandeurs. Un axe d'inertie du nuage image est l'image d'un axe d'inertie du nuage origine et les facteurs associés à ces axes prennent les mêmes valeurs pour chacun des points du nuage et de son image.

Or l'application linéaire  $\Phi_I^J$  de  $R^I$  dans  $R^J$  conserve les distances entre les points de  $\mathcal{X}_I^I$  si  $R^J$  est muni de la forme quadratique  $Q$ . En effet :

$$\begin{aligned} d_{I(J)}^2(e_i, e_{i'}) &= Q_{J(I)}(e_i - e_{i'}, e_i - e_{i'}) \\ &= Q_J[(\Phi_I^J(e_i) - \Phi_I^J(e_{i'})), (\Phi_I^J(e_i) - \Phi_I^J(e_{i'}))] \\ &= d_J^2[\Phi_I^J(e_i) - \Phi_I^J(e_{i'})] \end{aligned}$$

Il est donc équivalent d'étudier  $\mathcal{X}_I$  dans  $R^I$  muni de  $Q_{I(J)}$  ou  $\mathcal{X}_I'$  des  $\{\Phi_I^J(e_i)\}$  affectés des masses  $p(i)$  dans  $R^J$  muni de  $Q_J$ .

L'image d'un élément  $i$  de  $I$  par un facteur  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{X}_I$  ou par le facteur  $\mathcal{F}'$  correspondant de  $\mathcal{X}_I'$  est :

$$\mathcal{F}(e_i) = \mathcal{F}'(\Phi_I^J(e_i))$$

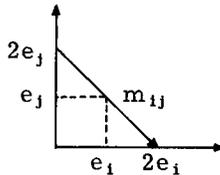
On utilise l'équivalence de l'analyse de ces 2 nuages dans le § VI pour la démonstration des théorèmes.

#### 4.2 Construction de $\mathcal{X}_{IJ}$

Pour la représentation simultanée des 2 ensembles  $I$  et  $J$ , nous nous placerons dans l'espace  $R^I \times R^J$ . Les deux axes  $R^I$  et  $R^J$  sont orthogonaux et munis respectivement des normes associées aux formes quadratiques  $Q_{I(J)}$  et  $Q_{J(I)}$ . La forme quadratique  $Q$  ainsi définie sur  $R^I \times R^J$  s'exprime de la manière suivante sous forme matricielle.

$$Q = \begin{vmatrix} Q_{I(J)} & 0 \\ 0 & Q_{J(I)} \end{vmatrix}$$

Le nuage considéré est celui des points  $m_{ij} = (e_i, e_j)$  muni des masses  $p(i, j)$ . Le point  $m_{ij}$  est le milieu du segment  $(2e_i, 2e_j)$  :



Le vecteur  $e_i$  (resp.  $(e_j)$ ) dans  $R^I \times R^J$  représente toujours l'élément  $i \in I$  (resp  $j \in J$ ). La distance entre  $e_i$  et  $e_{i'}$  est inchangée par rapport à celle définie dans  $R^I$  pour  $\mathcal{P}_I$ .

Un facteur  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{P}_{I,J}$  respectant le plus possible les distances entre les  $m_{ij}$  respectera de la même façon les distances entre les  $e_i$  (resp les  $e_j$ ). Et l'image par  $\mathcal{F}$  de l'élément  $i \in I$  sera :  $\mathcal{F}(e_i, 0)$  tandis que l'image de  $j \in J$  sera  $\mathcal{F}(0, e_j)$ .

## 5 - CONSTRUCTION DES NUAGES DE POINTS DANS LE CAS D'UNE CORRESPONDANCE TERNAIRE.

Comme dans le cas binaire on peut construire des nuages de points représentant séparément chaque ensemble et un nuage de points représentant simultanément  $I, J, K$ .

**5.1 - Pour la représentation de  $I$**  nous procédons comme dans le cas binaire dans l'espace  $R^I$ . L'élément  $i \in I$  a pour image le vecteur  $e_i$  et est affecté de la masse  $p(i)$ .

Nous avons défini 2 distances différentes, nous avons donc le choix entre les 2 formes quadratiques :

$$Q_{I(J,K)}(e_i, e_{i'}) = \sum_{\substack{j \in J \\ k \in K}} p(j, k) \left[ \frac{p(i, j, k)}{p(i)p(j, k)} \right] - \left[ \frac{p(i', j, k)}{p(i')p(j, k)} \right]$$

et

$$Q_{I(J+K)}(e_i, e_{i'}) = Q_{I(J)} + Q_{I(K)}$$

Les deux distances  $d_{I(J,K)}$  et  $d_{I(J+K)}$  associées sont semblables mais non identiques et l'on obtient des résultats légèrement différents. Dans la seconde on utilise uniquement les probabilités cumulées  $p(i, j)$  et  $p(i, k)$  tandis que dans la première sont utilisées les  $p(i, j, k)$ . Or dans le cas d'une correspondance statistique prise comme échantillon d'une correspondance aléatoire, ce qui est le cas le plus fréquent d'application de la méthode, les probabilités cumulées sont connues avec plus de précision que les probabilités simples ce qui rend préférable l'emploi de la forme  $Q_{I(J+K)}$ .

Les calculs comportent de nombreux quotients dont le dénominateur peut être nul, ce qui ne se posait pas dans le cas d'une correspondance binaire car il suffisait de ne pas faire intervenir des éléments  $i$  ou  $j$  tels que  $p(i) = 0$  ou  $p(j) = 0$ , c'est-à-dire des éléments qui n'intervenaient pas dans la correspondance, pour qu'il n'y ait pas de dénominateurs nuls.

Mais pour la forme  $Q_{I(J \times K)}$  interviennent des quotients de la forme :

$$\frac{p(i, j, k) p(i', j, k)}{p(i) p(i') p^2(j, k)}$$

où  $p(j, k)$  peut être nul. Mais  $p(i, j, k)$  étant inférieur ou égal à  $p(j, k)$  on considère ces quotients comme nuls.

Par permutation, on obtient les représentations de  $J$  et de  $K$ .

### 5.2 Représentation simultanée de $I, J, K$

On se place dans  $R^I \times R^J \times R^K$ , ces trois axes étant orthogonaux 2 à 2 et munis respectivement soit des normes associées à  $Q_{I(J \times K)}$ ,  $Q_{J(I \times K)}$ ,  $Q_{K(I \times J)}$  soit de celles associées à  $Q_{I(J+K)}$ ,  $Q_{J(I+K)}$ ,  $Q_{K(I+J)}$ .

On considère le nuage des  $m_{i,j,k} = (e_i, e_j, e_k)$  affecté des masses  $p(i, j, k)$ . Les 3 vecteurs  $e_i, e_j, e_k$  représentant toujours les éléments  $i \in I, j \in J, k \in K$ .

Un facteur  $\mathcal{F}$  du nuage des  $m_{i,j,k}$  va donc donner des éléments de  $I, J, K$  les images respectives :

$$\mathcal{F}(e_i, 0, 0), \mathcal{F}(0, e_j, 0) \text{ et } \mathcal{F}(0, 0, e_k).$$

Pour une correspondance entre un nombre fini d'ensembles, la généralisation est évidente.

### 5.3 Processus aléatoires

Un processus aléatoire dans un ensemble  $I$  est une correspondance entre une suite infinie d'ensembles  $I$ . On ne peut évidemment pas le traiter directement mais on peut en analyser la structure de  $I$  en se limitant aux suites de 3 éléments, ce qui nous ramène au cas d'une correspondance entre 3 ensembles égaux à  $I$ ,

Par exemple  $I$  est un ensemble de  $k$  signes distincts que l'on présente à des sujets en leur disant d'en écrire une suite quelconque, on extrait de cette suite  $t_1, t_2, \dots, t_h, \dots$  où  $t_h \in I$  un corpus de triples

$$(t_1, t_2, t_3), (t_2, t_3, t_4), (t_3, t_4, t_5), \dots, (t_{h-1}, t_h, t_{h+1}), \dots$$

qui nous définit une correspondance statistique sur  $I \times I \times I$ .

Une analyse factorielle va nous permettre d'analyser I, l'analyse la plus logique est celle de l'ensemble situé au centre du triple, c'est-à-dire celle où I est muni d'une distance définie à partir de l'association d'un signe avec le précédent et le suivant. Les autres correspondant respectivement aux distances définies à partir des 2 suivants ou des 2 précédents. Et dans l'analyse simultanée, il semble aussi logique de munir les 3 espaces  $R^I$  de cette même métrique associée à l'élément central.

On peut éventuellement, au lieu de considérer les suites de triples, considérer des suites de  $N+1$  ensembles I. Cela permet de faire l'analyse factorielle de I muni d'une distance définie à partir de ses liaisons avec les  $N/2$  éléments suivants et les  $N/2$  éléments précédents.

## 6 - RELATIONS ENTRE LES FACTEURS DES NUAGES $\mathcal{N}_I$ , $\mathcal{N}_J$ et $\mathcal{N}_{IJ}$ D'UNE CORRESPONDANCE BINAIRE

6.1 - Nous allons d'abord comparer les nuages  $\mathcal{N}_I$  et  $\mathcal{N}_J$  et montrer que ces 2 nuages ont les mêmes moments principaux d'inertie et qu'un facteur de l'un se déduit facilement d'un facteur de l'autre. Pour opérer cette comparaison nous nous placerons dans le même espace ambiant par exemple  $R^J$ . Le nuage représentant J étant alors les points  $e_j$  muni des masses  $p(j)$  avec la distance associée à  $Q_{J(I)}$ . Pour la représentation de I on utilise les résultats du § 4.1, c'est-à-dire que l'élément  $i$  affecté de la masse  $p(i)$  est situé au point

$$\sum_{j \in J} \frac{p(i, j)}{p(i) p(j)} e_j$$

de  $R^J$  muni de la forme quadratique  $Q_J$ .

Calculons les termes généraux des matrices dont les valeurs propres et les vecteurs propres nous donnent les moments et les axes d'inertie des nuages.

Pour J, le centre de gravité est situé en  $G = \sum_{j \in J} p(j)e_j$ , la matrice d'inertie M est de la forme :

$$M_J(k, l) = \begin{cases} - p(k) p(l) & \text{si } k \neq l \\ - p^2(k) + p(k) & \text{si } k = l. \end{cases}$$

La matrice de  $Q_{J(I)}$  a pour terme général :

$$Q_{J(I)}(k, l) = \sum_{i \in I} \frac{p(i, k) p(i, l)}{p(i) p(k) p(l)}.$$

Le produit  $Q_{J(I)} \circ M_J$  est donc égal à :

$$\begin{aligned} Q_{J(I)} \circ M_J(k, 1) &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in I} \frac{p(i, j) p(i, k)}{p(i) p(j) p(k)} \left[ -p(j)p(1) + p(1) \sum_{i \in I} \frac{p(i, 1) p(i, k)}{p(i) p(k) p(1)} \right] \\ &= p(1) \left[ -1 + \sum_{i \in I} \frac{p(i, 1) p(i, k)}{p(i) p(1) p(k)} \right]. \end{aligned}$$

Un axe factoriel  $v$  de ce nuage associé au moment  $\lambda$  est un vecteur propre de  $M_J \circ Q_{J(I)}$  tandis que le facteur associé est un vecteur propre de  $Q_{J(I)} \circ M_J$  :

$$M_J \circ Q_{J(I)}(v) = \lambda v \quad Q_{J(I)}(v, v) = 1$$

$$Q_{J(I)} \circ M_J(\mathcal{F}) = \lambda \mathcal{F} \quad \mathcal{F} = Q_{J(I)}(v) \quad v = \frac{1}{\lambda} M_J(\mathcal{F})$$

Pour  $I$  le centre de gravité de  $\mathcal{X}_I$  est situé en  $\sum_{j \in J} e_j$ .

La matrice d'inertie  $N_I$  s'écrit donc :

$$N_I(k, 1) = \sum_{i \in I} \frac{p(i, k) p(i, 1)}{p(i) p(k) p(1)} - 1.$$

Et la forme quadratique  $Q_J$  s'écrit :

$$Q_J(k, 1) = \delta_k^1 p(1) \quad \text{où } \delta_k^1 = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \neq 1 \end{cases}.$$

D'où les produits :

$$\begin{aligned} Q_J \circ N_I(k, 1) &= p(k) \left[ -1 + \sum_{i \in I} \frac{p(i, 1) p(i, k)}{p(i) p(1) p(k)} \right] \\ N_I \circ Q_J(k, 1) &= p(1) \left[ -1 + \sum_{i \in I} \frac{p(i, 1) p(i, k)}{p(i) p(1) p(k)} \right]. \end{aligned}$$

On note  $w$  un axe factoriel de  $\mathcal{X}_I$  et  $\mathcal{G} = Q_J(w)$  le facteur associé. En composant les valeurs de leurs termes généraux on remarque l'égalité des matrices  $N_I \circ Q_J$  et  $Q_{J(I)} \circ M_J$ . Ce qui entraîne l'égalité de leurs valeurs propres, donc l'égalité des moments principaux d'inertie des nuages  $\mathcal{X}_I$  et  $\mathcal{X}_J$ . Cela entraîne aussi l'égalité de leurs vecteurs propres, c'est-à-dire que pour un

même moment d'inertie  $\lambda$  le facteur  $\mathfrak{F}$  de  $\mathcal{N}_J$  est proportionnel à l'axe factoriel  $w$  de  $\mathcal{N}_I$  associé au moment  $\lambda$ . Et symétriquement on obtient la proportionnalité des facteurs de  $\mathcal{N}_I$  et des axes de  $\mathcal{N}_J$ .

Ce qui s'écrit pour un même moment d'inertie  $\lambda$  :

$$\begin{aligned} v &= k \mathfrak{G} \\ v &= k' \mathfrak{F} \quad \text{avec } k \text{ et } k' \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Calculons les valeurs de  $k$  et de  $k'$  en utilisant les égalités provenant de la normalisation des axes factoriels  $v$  et  $w$  :

$$\begin{aligned} Q_{J(I)}(v, v) &= 1 \\ &= \mathfrak{F} \times v = \frac{1}{k'} w \times v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_J(w, w) &= 1 \\ &= \mathfrak{G} \times w = \frac{1}{k} v \times w = Q_J(k' \mathfrak{F}, k' \mathfrak{F}) = k'^2 Q_J(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) \end{aligned}$$

D'où

$$k = k' = \frac{1}{\sqrt{Q_J(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})}}$$

Or

$$Q_J(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) = \sum_{j \in J} p(j) \mathfrak{F}(e_j) \mathfrak{F}(e_j)$$

ou puisque l'image du centre de gravité du nuage est à l'origine

$$Q_J(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) = \sum_{j \in J} p(j) [\mathfrak{F}(Ge_j)]^2.$$

Or nous avons vu § III que cette dernière valeur est égale au moment d'inertie du nuage associé à  $\mathfrak{F}$ . D'où

$$Q_J(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}) = \lambda \quad \text{et } k = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

Ces relations obtenues entre les nuages  $\mathcal{N}_I$  et  $\mathcal{N}_J$  nous montre la symétrie des constructions ; elles nous permettront dans la suite de déterminer les positions respectives des éléments de  $I$  et de  $J$  dans la représentation simultanée.

Elles nous montrent aussi que l'on peut calculer d'une manière très simple les facteurs de  $\mathcal{X}_I$  si l'on connaît ceux de  $\mathcal{X}_J$  (et vice-versa) sans refaire une extraction de valeurs propres.

En effet le facteur  $\mathfrak{F}$  de  $\mathcal{X}_J$  donnant de l'élément  $j \in J$  l'image  $\mathfrak{F}(e_j)$  étant connu, le facteur  $\mathfrak{G}$  de  $\mathcal{X}_I$  associé au même moment principal d'inertie  $\lambda$  vaudra :

$$\mathfrak{G} = Q_J(w) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Q_J(\mathfrak{F}).$$

Et il donnera de l'élément  $i$  l'image :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G} \left( \sum_j \frac{p(i,j)}{p(i)p(j)} e_j \right) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Q_J(\mathfrak{F}) \left( \sum_j \frac{p(i,j)}{p(i)p(j)} e_j \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_j \frac{p(i,j)}{p(i)} \mathfrak{F}(e_j). \end{aligned}$$

## 6.2 Comparaison des facteurs des nuages de l'analyse d'un ensemble et de l'analyse simultanée

Au lieu d'étudier directement le nuage  $\mathcal{X}_{IJ}$  des  $m_{ij} = (e_i, e_j)$  dans  $R^I \times R^J$  muni de la forme  $Q = (Q_{I(I)}, Q_{J(I)})$  on procédera comme ci-dessus en étudiant son image par une application linéaire conservant les distances.

Soit  $\Psi$  l'application linéaire de  $R^I \times R^J$  dans  $R^J \times R^J$  définie ainsi :

$$\Psi(e_i, e_j) = (\Phi_I^J(e_i), e_j).$$

Elle conserve les distances entre les points du nuage si  $R^J \times R^J$  est muni de la forme quadratique  $Q'$  suivante :

$$Q' = \begin{vmatrix} Q_J & 0 \\ 0 & Q_{J(I)} \end{vmatrix}$$

i.e. les 2 axes  $R^J$  sont orthogonaux et munis respectivement des normes associées à  $Q_J$  et  $Q_{J(I)}$ .

Ce nuage se projette orthogonalement sur le premier axe  $R^J$  suivant le nuage  $\mathcal{X}_I$  et sur le 2° axe  $R^J$  suivant le nuage  $\mathcal{X}_J$ . Sa matrice d'inertie est donc de la forme :

$$M = \begin{vmatrix} N_I & m \\ m^t & M_J \end{vmatrix}$$

où  $N_I$  et  $M_J$  sont les matrices d'inertie définies au § précédent et  $m^t$  la transposée de  $m$  dont on calcule le terme général :

$$\begin{aligned} m(k, l) &= \sum_{i,j} p(i, j) \left[ \frac{p(i, k)}{p(i) p(k)} - 1 \right] (\delta_j^l p(1)) \\ &= p(1) \left[ \sum_I \frac{p(i, l) p(i, k)}{p(i) p(k) p(1)} - 1 \right] \end{aligned}$$

En comparant cette valeur aux termes généraux des matrices,  $Q_{J(I)} \circ M_J$  et  $N_I \circ Q_J$  on voit que :

$$\begin{aligned} m &= M_J \circ Q_{J(I)} = Q_J \circ N_I \\ m^t &= Q_{J(I)} \circ M_J = N_I \circ Q_J \end{aligned}$$

D'où

$$M = \begin{vmatrix} N_I & Q_{J(I)} \circ M_J \\ Q_J \circ N_I & M_J \end{vmatrix}$$

Et le produit  $M \circ Q$  va s'écrire :

$$M \circ Q = \begin{vmatrix} N_I \circ Q_J & Q_{J(I)} \circ M_J \circ Q_{J(I)} \\ Q_J \circ N_I \circ Q_J & M_J \circ Q_{J(I)} \end{vmatrix}$$

Nous allons montrer qu'un axe factoriel du nuage  $\mathcal{X}_{IJ}$  est égal au produit, ou au symétrique du produit, de 2 axes factoriels des nuages  $\mathcal{X}_I$  et  $\mathcal{X}_J$  associés au même moment d'inertie. Ce qui revient à montrer que si  $v$  est un axe de  $\mathcal{X}_J$  et  $w$  un axe de  $\mathcal{X}_I$  associés à  $\lambda$ , alors  $(w, v)$  et  $(w, -v)$  sont des vecteurs propres de  $M \circ Q$ .

Soient donc  $v$  et  $w \in R^J$  tels que :

$$N_I \circ Q_J(w) = \lambda w \quad w = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Q_{J(I)}(v)$$

$$M_J \circ Q_{J(I)}(v) = \lambda v \quad v = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} Q_J(w)$$

Appliquons  $M \circ Q$  au vecteur  $(w, v)$  :

$$\begin{aligned} M \circ Q \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} &= \begin{vmatrix} N_I \circ Q_J(w) + Q_{J(I)} \circ M_J \circ Q_{J(I)}(v) \\ Q_J \circ N_I \circ Q_J(w) + M_J \circ Q_{J(I)}(v) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \lambda w + Q_{J(I)} \circ M_J(\sqrt{\lambda}w) \\ Q_J \circ N_I(\sqrt{\lambda}w) + \lambda v \end{vmatrix} \\ &= \lambda(1 + \sqrt{\lambda}) \begin{pmatrix} w \\ v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le vecteur  $(w, v)$  est donc un vecteur propre de  $M \circ Q$  associé à la valeur propre  $\lambda(1 + \sqrt{\lambda})$ . Nous obtiendrons de même que le vecteur  $(w, -v)$  est un vecteur propre de  $M \circ Q$  associé à la valeur propre  $\lambda(1 - \sqrt{\lambda})$ . Nous avons ainsi montré que  $(w, v)$  et  $(w, -v)$  étaient des axes factoriels de  $\mathcal{X}_{IJ}$  associés respectivement aux moments d'inertie  $\lambda(1 + \sqrt{\lambda})$  et  $\lambda(1 - \sqrt{\lambda})$ . Pour avoir un axe normalisé par rapport à  $Q$  on posera :  $s = (w/\sqrt{2}, v/\sqrt{2})$ . En effet  $Q(s, s) = 1/2 Q_J(w, w) + 1/2 Q_{J(I)}(v, v) = 1$ .

Nous obtenons ainsi toute la suite des moments d'inertie de  $\mathcal{X}_{IJ}$ . On remarque que dans la suite décroissante de ces moments d'inertie se présentent d'abord ceux de la forme  $\lambda(1 + \sqrt{\lambda})$  dans l'ordre décroissant des  $\lambda$ . Un moment de la forme  $\lambda'(1 - \sqrt{\lambda'})$  ne pouvant être supérieur à  $\lambda(1 + \sqrt{\lambda})$  que si  $\lambda$  est inférieur à  $1/9$ . Comme nous n'extrayons que les premiers facteurs nous verrons que ces derniers n'interviendront pas dans nos représentations. Le fait qu'un moment d'inertie  $\lambda(1 - 1/\sqrt{\lambda})$  est toujours positif entraîne que  $\lambda$  est toujours inférieur à 1.

Nous avons pour les facteurs de  $\mathcal{X}_{IJ}$  les mêmes résultats que pour les axes factoriels. Un facteur  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{X}_{IJ}$  est de la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = Q(s) &= (Q_J(w/\sqrt{2}), \pm Q_{J(I)}(v/\sqrt{2})) \\ &= 1/\sqrt{2}(\mathcal{G}, \pm \mathcal{F}) = 1/\sqrt{2}(1/\sqrt{\lambda} Q(\mathcal{F}), \pm \mathcal{F}) \end{aligned}$$

On voit qu'un facteur de  $\mathcal{X}_{IJ}$  se déduit facilement d'un facteur de  $\mathcal{X}_J$ . Cette relation permet de plus de comparer les situations des images des éléments de  $I$  et de  $J$  par un même facteur :

$$\begin{aligned} j &\implies \mathcal{H}(0, e_j) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{F}(e_j) \\ i &\implies \mathcal{H}\left(\sum \frac{p(i, j)}{p(i)} e_j, 0\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_j \frac{p(i, j)}{p(i)} \mathcal{F}(e_j). \end{aligned}$$

Au coefficient  $1/\sqrt{\lambda}$  près l'élément  $i$  est le barycentre des  $j$  affectés des masses  $p(i, j)$  ou son opposé. Dans le premier cas cela traduit bien la notion de proximité entre les éléments de  $I$  et ceux de  $J$  et ceci d'autant plus précisément que  $\lambda$  est plus près de 1. Quand au second cas nous avons vu que cela correspondait à de petites valeurs du moment d'inertie que notre analyse négligera.

Cette formule permet aussi de placer facilement un ou plusieurs nouveaux éléments d'un des ensembles, éléments dont on n'a pas tenu compte dans les calculs et dont l'adjonction ne change pas essentiellement la correspondance. On obtient ainsi facilement la coordonnée de cet élément  $\hat{i}$  pour ce facteur :

$$\mathcal{R}(\hat{i}) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sum_j \frac{p(\hat{i}, j)}{p(\hat{i})} \mathcal{R}(e_j).$$

En effet les ensembles à étudier peuvent être très grands et nécessiter des calculs importants. Dans ce cas on peut être amené à opérer une partie seulement de leurs éléments les plus significatifs. Si l'on veut par exemple déterminer des coordonnées sémantiques pour les adjectifs français à partir de leurs associations avec les noms, il est évident que l'on ne pourra pas manier tout l'ensemble de ces adjectifs mais on pourra en se restreignant aux plus fréquents déterminer les facteurs. Et la formule ci-dessus permet d'obtenir les coordonnées d'un adjectif non étudié dans les divers facteurs.

Par raison de symétrie on a la même propriété pour les éléments de  $J$  par rapport à ceux de  $I$ .

Remarque :

Si l'on veut représenter exactement les  $i$  au barycentre des  $j$  il suffit de multiplier le facteur  $\mathcal{R}$  de  $R^I$  par le coefficient  $\sqrt{\lambda}$ , mais à ce moment on perd la symétrie entre les  $i$  et les  $j$  et la propriété n'est pas vérifiée pour ces derniers.

*Cas particulier : Correspondances symétriques.*

On dit que l'on a une correspondance symétrique sur  $I \times I$  si  $\forall i, i' \in I$  on a :  $p(i, i') = p(i', i)$ . On a par exemple une correspondance symétrique sur l'ensemble des mots à la rime d'un texte en vers avec  $k(i, i')$  nombre de fois que le mot  $i$  rime avec le mot  $i'$ .

Dans ce cas le nuage des  $(e_i, e_{i'})$  dans  $R^I \times R^I$  a 2 projections symétriques sur chaque axe  $R^I$ . Au signe près les facteurs sont les mêmes pour les 2 projections. Un facteur du nuage  $\mathcal{R}_{II}$  est donc de la forme :  $(\mathcal{R}, \pm \mathcal{R})$ .

S'il est de la forme  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})$  on dit que c'est un facteur direct . Il a la même valeur pour les vecteurs  $(e_1, 0)$  et  $(0, e_1)$  ; il donne donc deux images superposées de  $I$  et on a :  $\forall x, y \in R^1$  :  $(\mathfrak{F}, \mathfrak{F})(x, y) = (\mathfrak{F}, \mathfrak{F})(y, x)$ .

Un facteur de ce type marque la tendance des éléments à s'associer par couples suivant leurs ressemblances.

S'il est de la forme  $(\mathfrak{F}, -\mathfrak{F})$ , c'est un facteur inverse qui marque la tendance des éléments à s'associer par antithèse. Il donne 2 images symétriques de  $I$  puisque :

$$(\mathfrak{F}, -\mathfrak{F})(e_1, 0) = -(\mathfrak{F}, -\mathfrak{F})(0, e_1).$$

Ces deux facteurs sont associés aux moments d'inertie  $\lambda(1 + \sqrt{\lambda})$  et  $\lambda(1 - \sqrt{\lambda})$ . L'un est négligeable devant l'autre. Suivant le cas c'est le facteur direct ou inverse qui est prépondérant.

## 7 - CALCUL APPROCHÉ DES PROBABILITÉS DES COUPLES EN FONCTION DES RÉSULTATS DE L'ANALYSE FACTORIELLE.

On peut à partir des facteurs obtenus et des probabilités cumulées  $p(i)$  et  $p(j)$ , retrouver approximativement les probabilités  $p(i, j)$  à partir desquels a été étudiée la correspondance.

En effet considérons le nuage représentant  $I$  dans  $R^J$  ; l'élément  $i$  est situé au point :

$$X_i = \sum_{j \in J} \frac{p(i, j)}{p(i) p(j)} e_j.$$

Le centre de gravité  $G$  a pour coordonnées 1 sur chacun des axes  $e_j$ . D'où la forme du vecteur  $\overrightarrow{GX_i}$ .

$$\overrightarrow{GX_i} = \sum_{j \in J} \left( \frac{p(i, j)}{p(i) p(j)} - 1 \right) e_j.$$

En prenant comme nouveau système d'axes les axes principaux  $\omega_n$  du nuage  $\mathcal{N}_I$ , les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{GX_i}$  dans le nouveau système seront égales aux valeurs des facteurs  $G_n$  associés aux  $\omega_n$  au point  $X_i$ . Ce système étant centré au point  $G$ , le vecteur  $\overrightarrow{GX_i}$  s'écrira :

$$\overrightarrow{GX_i} = \sum_n \omega_n \overrightarrow{G_n(i)}.$$

Or nous avons vu que l'axe  $\omega_n$  du nuage  $\mathcal{N}_I$  était proportionnel au facteur  $\mathfrak{F}_n$  du nuage  $\mathcal{N}_I$  ;  $\lambda_n$  étant le moment d'inertie associé à  $\mathfrak{G}_n$  et à  $\mathfrak{F}_n$  on avait :

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \mathfrak{A}_n.$$

On peut écrire :

$$\overrightarrow{GX_1} = \sum_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \mathfrak{A}_n G_n(i).$$

En projetant sur l'axe  $e_j$  le vecteur  $\overrightarrow{GX_1}$  sous ses deux formes, on obtient l'égalité suivante :

$$\frac{p(i, j)}{p(i) p(j)} - 1 = \sum_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \mathfrak{A}_n(j) \times G_n(i).$$

D'où :

$$p(i, j) = p(i) p(j) \left[ 1 + \sum_n \mathfrak{A}_n(j) G_n(i) \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \right].$$

Cette formule nous permettrait d'obtenir exactement les valeurs des probabilités de départ si d'une part, les facteurs et les moments d'inertie étaient obtenus sans erreur ce qui n'est pas le cas puisque ce sont des calculs approchés et si d'autre part on extrayait tous les facteurs du nuage. Or nous ne cherchons que les  $N$  premiers facteurs ce qui nous donne une valeur approchée  $p'(i, j)$  de  $p(i, j)$ :

$$p'(i, j) = p(i) p(j) \left[ 1 + \sum_{n < N} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \mathfrak{A}_n(j) \times G_n(i) \right].$$

c'est cette correspondance  $p'$  qui est effectivement représentée par nos  $N$  premiers facteurs. La précision avec laquelle  $p'$  figure  $p$  est donc celle que nous donne les  $N$  premiers facteurs quand la part d'inertie négligée du nuage est de l'ordre des aléas statistiques, la différence entre  $p'$  et  $p$  est de cet ordre.

## 8 - DETERMINATION DU NOMBRE DE FACTEURS A EXTRAIRE

Nous avons dit que nous n'extrayons qu'un petit nombre de facteurs (§ 2) mais nous n'avons pas précisé lequel. Notre but dans cette analyse factorielle étant de condenser les données d'une correspondance tout en perdant le moins possible d'informations il s'agit de trouver un équilibre entre ces 2 exigences. En effet si l'on voulait ne perdre aucune information sur la correspondance, il nous faudrait représenter exactement le nuage de points construit d'après les données ( $\mathfrak{A}_i$ , ou  $\mathfrak{A}_{1j}$  etc...), c'est-à-dire représenter les ensembles dans un espace de dimension égale à celle du sous-es-

pace engendré par ce nuage, donc extraire un nombre de facteurs égal à cette dimension. Tandis que si l'on veut condenser fortement les informations il faudra nous contenter d'extraire un petit nombre de facteurs et prendre comme image des ensembles la projection du nuage sur les premiers axes principaux d'inertie. On ne peut donner à priori un nombre optimum de facteurs puisque suivant les données le nuage est allongé dans un plus ou moins grand nombre de directions et sa projection sur un espace de dimension donné est plus ou moins ressemblante.

Pour déterminer quand arrêter l'extraction des facteurs, on peut se baser sur plusieurs critères. Par exemple considérer la valeur du moment d'inertie associé au dernier facteur extrait. Si cette valeur est trop petite l'information apportée par ce facteur est négligeable et de plus nous avons vu (§ VI) qu'à ce moment la notion de proximité entre les éléments des 2 ensembles d'une correspondance binaire était très mal exprimée.

On peut calculer la part d'inertie du nuage étudié dont ne rendent pas compte les  $n$  premiers facteurs extraits. En effet nous avons vu au § 3.3. qu'à chaque nouveau facteur extrait, l'inertie du nuage obtenu se rapprochait de l'inertie du nuage initial d'une valeur égale au moment d'inertie associé. Cette différence d'inertie nous donne un ordre de grandeur de la perte d'information subie en négligeant les derniers facteurs.

Dans le cas le plus fréquent d'application de la méthode, qui est celui d'une correspondance statistique prise comme échantillon d'une correspondance aléatoire, on dispose d'un test nous permettant de déterminer la part d'inertie du nuage qui est de l'ordre des aléas statistiques. Et à ce moment on arrête l'extraction des facteurs quand la part non exprimée d'inertie est de cet ordre. Et c'est ce test que nous allons préciser ci-dessous tout d'abord dans le cas binaire. On a donc une correspondance aléatoire inconnue  $p(i, j)$  dont on possède un échantillon d'effectif  $N$  nous fournissant une valeur approchée de la loi  $p$  avec  $p'(i, j) = n(i, j)/N$ .

Le cas extrême où les variables aléatoires  $p(i)$  et  $p(j)$  sont indépendantes est un cas dont l'étude ne présente plus d'intérêt. Pour juger de la significativité des résultats des calculs effectués sur  $p'$  pour  $p$  on va étudier la probabilité pour l'échantillon étudié de provenir d'une correspondance où les variables  $p(i)$  et  $p(j)$  sont aléatoirement indépendantes. Quand cette probabilité devient trop grande les résultats ne sont plus significatifs.

Une telle correspondance où  $p(i)$  et  $p(j)$  sont indépendantes est définie par la condition :

$$\forall i, j \quad p(i, j) = p(i) \times p(j)$$

On se ramène à un test du  $\chi^2$  en considérant la quantité :

$$N \sum_{i,j} \frac{(p'(i, j) - p'(i) p'(j))^2}{p'(i) p'(j)} = N \times M_T$$

car on peut montrer que ce serait approximativement un  $\chi^2$  à  $(\bar{I} - 1)(\bar{J} - 1)$  paramètres si la loi  $p$  inconnue obéissait à cette condition ( $\bar{I}$  et  $\bar{J}$  sont les cardinaux des ensembles  $I$  et  $J$ ).

On a noté cette quantité  $N \times M_T$  car  $M_T$  est le moment d'inertie total du nuage  $\mathcal{X}_I$ . En effet :

$$\begin{aligned} M_T &= \sum_{i,j} p(i) p(j) \left[ \frac{p(i, j)}{p(i) p(j)} - 1 \right]^2 \\ &= \sum_{i \in I} p(i) \sum_{j \in J} p(j) \left[ \frac{p(i, j)}{p(i) p(j)} - 1 \right]^2 \\ &= \sum_{i \in I} p(i) Q_j \left[ (\Phi_i^j(e_1) - \mathcal{G}_1^j), \Phi_i^j(e_1) - \mathcal{G}_1^j \right] \end{aligned}$$

D'où le critère d'arrêt de l'analyse factorielle du nuage  $\mathcal{X}_I$  ; les  $n$  premiers moments d'inertie étant notés  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  : il est inutile d'extraire de nouveaux facteurs si la quantité  $N |M_T - \lambda_1 - \dots - \lambda_n|$  a une probabilité notable d'être dépassée par un  $\chi^2$  à  $(\bar{I} - 1)(\bar{J} - 1)$  degrés de liberté.

Pour le cas ternaire, on se base sur les mêmes possibilités d'indépendance des variables aléatoires  $p(i), p(j)$  et  $p(k)$  et on obtient les résultats suivants :

Pour l'analyse du nuage représentant seulement l'ensemble  $I$  l'espace  $R^I$  étant muni de la forme quadratique  $Q_{I(J)} + Q_{I(K)}$  on compare  $N(M_T - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n)$  à un  $\chi^2$  à  $(\bar{I} - 1)(\bar{J} - 1) + (\bar{J} - 1)(\bar{K} - 1)$  degrés de liberté tandis que si  $R^I$  est muni de la forme quadratique  $Q_{I(J \times K)}$  on compare l'inertie non encore exprimée du nuage à un  $\chi^2$  à  $(\bar{I} - 1)(\bar{J} \times \bar{K} - 1)$  degrés de liberté.

Pour l'analyse du nuage représentant simultanément les trois ensembles  $I, J$  et  $K$  on compare cette quantité à un  $\chi^2$  à  $s = (\bar{I} - 1)(\bar{J} - 1)(\bar{K} - 1) + (\bar{K} - 1)(\bar{I} - 1)$  degrés de liberté dans le cas où  $R^I \times R^J \times R^K$  est muni de la première norme. Et dans le cas où au contraire  $R^I \times R^J \times R^K$  est muni de la deuxième norme définie, c'est à un  $\chi^2$  à  $3(\bar{I} - 1)(\bar{J} - 1)(\bar{K} - 1) + 2s$  degrés de liberté que l'on se réfère.

## 9 - PROGRAMMES DE CALCULS.

### 9.1 Cas binaire

Un seul programme pour ce cas puisque nous avons vu que l'on peut déduire de l'analyse d'un espace celle de l'autre et que la représentation simultanée était semblable au coefficient  $\sqrt{2}$  près.

Ce programme extrait les facteurs et calcule les moments d'inertie du nuage  $\mathcal{N}_1$  et déduit les facteurs correspondants de  $\mathcal{N}_2$ . Il calcule aussi après chaque facteur la part d'inertie du nuage non exprimée par les facteurs déjà extraits que l'on peut comparer à un  $\chi^2$  pour juger de la significativité des résultats.

Nous avons vu que le calcul des facteurs et des moments d'inertie était en fait un calcul de valeurs propres et de vecteurs propres, ceux de la matrice  $Q \circ \mu$  ( $\mu$  forme d'inertie et  $Q$  forme quadratique associée à la distance).

Pour calculer le premier vecteur propre de cette matrice on construit une suite de vecteur  $u_n$  avec  $u_1 = (1)_1$  et  $u_n = Q \circ \mu(\mu_{n-1})$ .

Quand cette suite se stabilise en direction le vecteur  $u_n$  nous donne la valeur du premier vecteur propre.

On obtient la valeur propre  $\lambda$  en posant :

$$\lambda = \sqrt{\frac{(u^n, u^n)}{(u^{n-1}, u^{n-1})}}$$

et on obtient la valeur du facteur associé en normalisant  $u_n$  de manière à ce que  $\mu(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = \lambda$  :

$$\mathcal{F} = \frac{u^n}{\sqrt{\mu(u^n, u^n) \times \mu(u^{n-1}, u^{n-1})}}.$$

Les axes factoriels doivent être orthogonaux :  $Q(s_i, s_j) = 0$ . D'où  $Q(\mu(\mathcal{F}_i), \mu(\mathcal{F}_j)) = 0 \implies \mu(\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j) = 0$ .

Pour obtenir le  $p$ -ème facteur, les  $p - 1$  premiers étant obtenus, on construira la suite de vecteurs  $v_n$   $\mu$ -orthogonaux aux premiers facteurs :

$$w^n = q \circ \mu(v^{n-1}) \quad v^n = w^n - \frac{\lambda(\mathcal{F}_1, w^n)}{\lambda_1} \mathcal{F}_1 - \dots - \frac{(\mathcal{F}_{p-1}, w^n)}{\lambda_{p-1}} \mathcal{F}_{p-1}$$

Et on procède ensuite comme pour le premier facteur.

Un premier programme analyse l'ensemble  $I$  en relation avec les ensembles  $J$  et  $K$  dans  $R^I$  muni de la forme quadratique  $Q = Q_{I(J)} + Q_{I(K)}$ . Comme dans tous les cas on calcule la matrice d'inertie du nuage et la matrice de la forme quadratique et on procède pour le calcul des facteurs de la même façon que dans le cas binaire.

Pour l'analyse simultanée des 3 ensembles, il existe plusieurs programmes, l'un où l'espace  $R^I \times R^J \times R^K$  est muni de la forme quadratique  $(Q_{I(J \times K)}, Q_{J(I \times K)}, Q_{K(I \times J)})$  l'autre où cet espace est muni de la forme  $(Q_{I(J+K)}, Q_{J(I+K)}, Q_{K(I+J)})$  et le troisième s'applique aux processus où chacun des axes de l'espace  $R^I \times R^J \times R^K$  est muni de la norme associée à  $Q_{I(I'+I'')}$ . Certains sous-programmes communs à plusieurs programmes ne sont donnés que dans le premier.

## 10 - EXEMPLES

De nombreux exemples ont été traités, nous en citerons ici quelques uns pour montrer des domaines d'application de la méthode et les résultats que l'on peut obtenir.

Dans tous les cas les résultats seront présentés géométriquement, les ensembles étudiés étant représentés soit sur 1 axe s'il y a un seul facteur significatif, soit dans un plan dans le cas de 2 facteurs, soit sur des axes séparés.

Les interprétations des facteurs seront très souvent évidentes et on verra que l'on est parvenu ainsi à dégager et à schématiser la structure des ensembles étudiés. La méthode a surtout été appliquée à des données appartenant aux domaines de la linguistique et de la psychologie.

### *Exemple 1*

Dans un article intitulé "Statistique linguistique et histoire du vocabulaire" paru dans les cahiers de lexicologie de 1960. G. Gougenheim étudie les verbes dont le sens général est briser et leurs compléments dans la chanson de Roland. On donne ici, sous forme de matrice, les données statistiques, c'est-à-dire le nombre de fois que tel verbe a pour complément tel nom dans le poème.

Le test que l'on utilise nous montre que le premier facteur extrait est le seul significatif. Le graphique représentant les deux ensembles est donc une droite. (fig. page 51)

On sépare nettement les noms en 2 classes, objets mous et objets durs. Les verbes sont aussi séparés en 2 classes, chacune



d'elle étant placée près de la classe de ses compléments. Les données traitées ici étaient très simples mais on voit la possibilité, en traitant des listes plus étendues, ce qui donnerait sans doute lieu à l'apparition de plusieurs facteurs correspondant à des nuances de sens différentes, de représenter graphiquement le sens d'un nom.

Correspondance verbes - noms : Données

|                         | Freindre | Rompre | Froisser | Derompre | Briser | Recoler | Depecer | Casser |
|-------------------------|----------|--------|----------|----------|--------|---------|---------|--------|
| Ecu                     | 15       | 0      | 3        | 0        | 0      | 1       | 0       | 1      |
| Hanste                  | 5        | 0      | 3        | 0        | 2      | 0       | 1       | 0      |
| Haubert                 | 0        | 5      | 0        | 3        | 0      | 0       | 0       | 0      |
| Heaume                  | 4        | 0      | 1        | 0        | 0      | 0       | 0       | 1      |
| Durandal                | 3        | 0      | 1        | 0        | 2      | 0       | 0       | 0      |
| Tempe                   | 0        | 3      | 0        | 0        | 0      | 0       | 0       | 0      |
| Pans du<br>Haubert      | 0        | 2      | 0        | 1        | 0      | 0       | 0       | 0      |
| Tarje                   | 2        | 0      | 0        | 0        | 0      | 0       | 0       | 0      |
| Cités                   | 2        | 0      | 0        | 0        | 0      | 0       | 0       | 0      |
| Murs                    | 0        | 0      | 1        | 0        | 0      | 1       | 0       | 0      |
| Sangles<br>de la selle  | 0        | 1      | 0        | 0        | 0      | 0       | 1       | 0      |
| Ventaille<br>du haubert | 0        | 1      | 0        | 1        | 0      | 0       | 0       | 0      |

*Exemple 2*

Ce sont les résultats d'une expérience psychologique faite à la faculté des lettres de Rennes qui sont utilisés ici. On présentait à des sujets 8 couleurs projetées sur un écran. Les sujets devaient apprendre à associer aux couleurs les 8 boutons d'un clavier. Les 8 couleurs sont présentées successivement. Le sujet ayant répondu, on lui indique la réponse exacte. On établit une matrice de confusion avec les résultats obtenus en considérant le nombre de fois que sur présentation de la couleur  $i$  le sujet a répondu ce qui correspond à la couleur  $j$ .



Exemple 2

L'analyse factorielle donne un seul facteur significatif, d'où la représentation sur un axe des résultats (fig. page 53). On a noté au-dessus de l'axe les stimuli et en dessous les réponses. Les couleurs étant notées ainsi :

R : Rouge    O : Orange    J : Jaune    JV : Jaune-Vert  
 V : Vert    BV : Bleu-Vert    B : Bleu    VI : Violet

On a représenté sur un premier axe les longueurs d'ondes des couleurs utilisées.

On voit que l'on a retrouvé, mise à part l'interversion entre le Jaune et le Jaune-Vert qui sont très proches, la structure de l'ensemble des stimuli étudiés, et la proximité des stimuli et des réponses possibles.

### Exemple 3

Il s'agit ici d'une correspondance ternaire dont les données ont été calculées d'après H. A. Gleason "An introduction to descriptive linguistics".

Chaque langue possède un certain nombre de noms de couleurs de base correspondant à une zone précise du spectre et le recouvrant tout entier. Les portions du spectre définies par ces couleurs ne sont pas les mêmes dans toutes les langues. Voici d'après Gleason comment l'Anglais, le Shona (dialecte de Rhodésie), et le Bassa (Liberia) divisent le spectre.

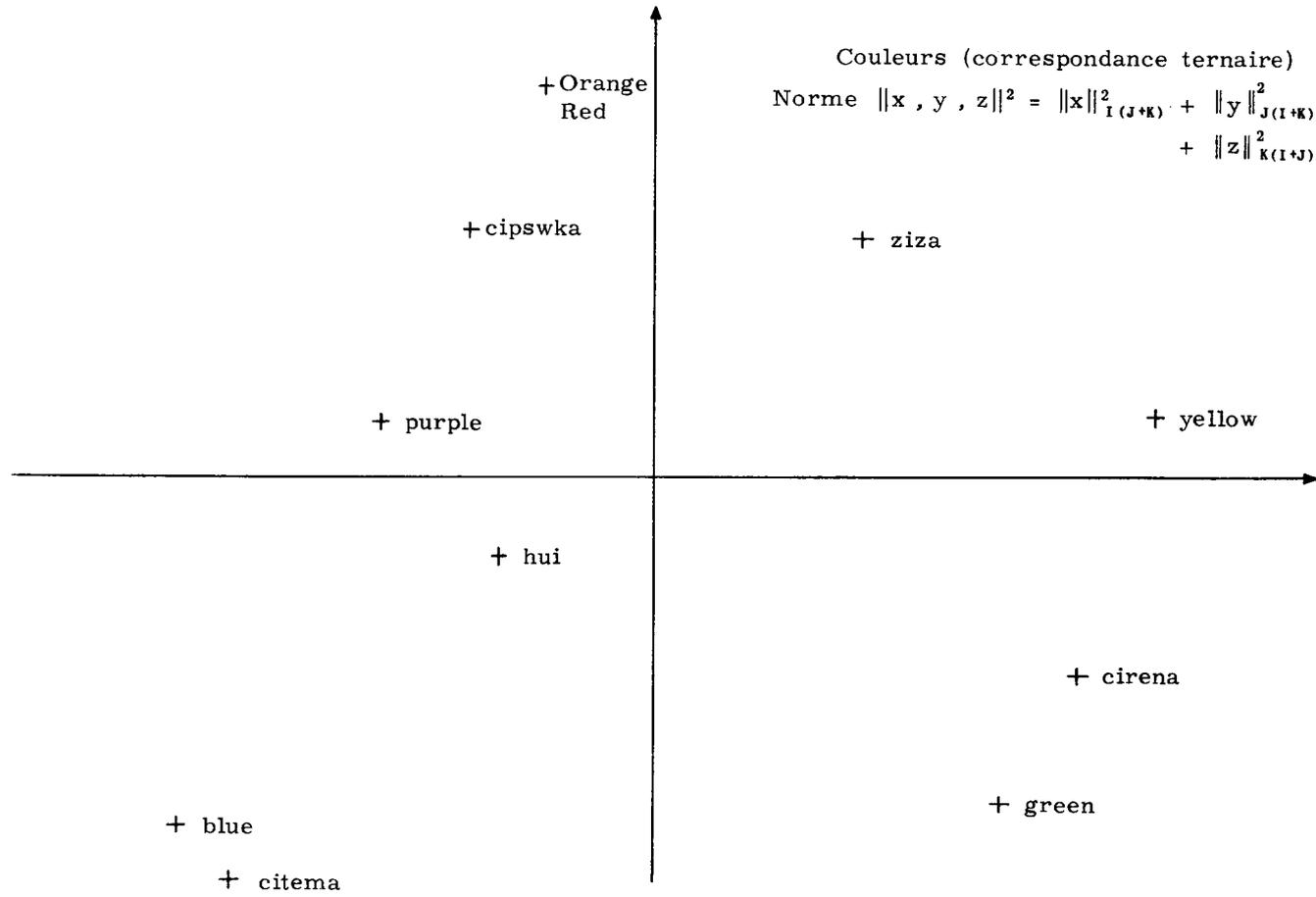
|         |                       |        |        |                       |        |     |
|---------|-----------------------|--------|--------|-----------------------|--------|-----|
| Anglais | purple                | blue   | green  | yellow                | orange | red |
| Shona   | cips <sup>W</sup> uka | citema | cicena | cips <sup>W</sup> uka |        |     |
| Bassa   | hui                   |        |        | ziza                  |        |     |

On remarque qu'en "Shona" les deux extrémités du spectre sont appelées par le même nom.

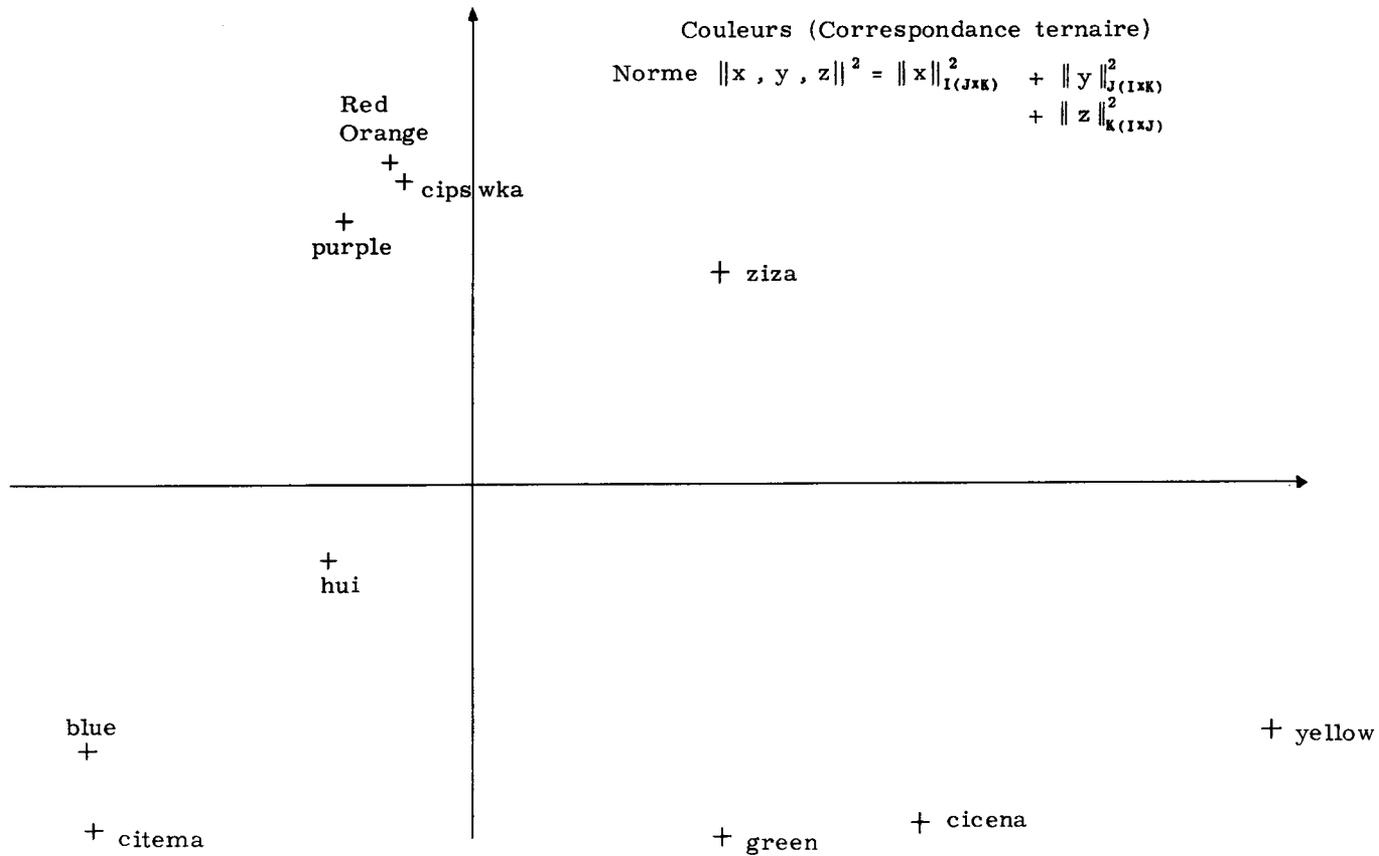
On peut déduire une correspondance ternaire entre les trois ensembles des noms de couleurs :  $n(i, j, k)$  étant par définition la longueur de portion commune du spectre pour les couleurs  $i, j, k$ .

On a étudié les trois ensembles simultanément par les deux méthodes que nous avons indiquées. On obtient des résultats semblables par les deux méthodes, on a extrait deux facteurs et obtenu ainsi une représentation dans le plan des trois ensembles (fig. pages 55 et 56).

On voit que les couleurs se rangent exactement dans l'ordre de leur fréquence moyenne autour du centre du graphique. On a pu ainsi retrouver la structure des ensembles étudiés. La matrice que nous avons utilisée pour nos calculs a été construite directement



Exemple 3



Exemple 3

d'après la signification de chaque couleur sur le spectre mais nous aurions eu des données statistiques équivalentes en présentant à trois des sujets parlant respectivement les trois langues des objets colorés reportés uniformément le long du spectre et en notant le nombre de fois que devant un même objet les couleurs  $i, j, k$  ont été simultanément prononcées, adjectifs utilisés dans certaines situations. Et on voit la possibilité de représenter graphiquement toute une série d'adjectifs appartenant à des langues différentes et considérés d'un point de vue sémantique les uns par rapport aux autres et de déterminer les coordonnées continues sur l'ensemble de ces adjectifs.

*Exemple 4*

On a étudié l'ensemble des mots à la rime se terminant en *esse* chez Corneille et chez Racine. Pour chacun des auteurs on a ainsi une correspondance binaire symétrique définie par le nombre de fois que chaque mot  $i$  rime avec chaque mot  $j$ .

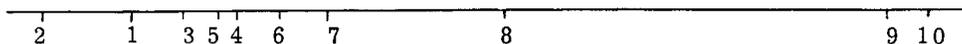
L'analyse a révélé pour chacun des auteurs un facteur unique et antithétique, c'est-à-dire que les mots représentés à une extrémité du graphique riment principalement avec ceux situés à l'autre extrémité. (fig. page 58)

*Exemple 5*

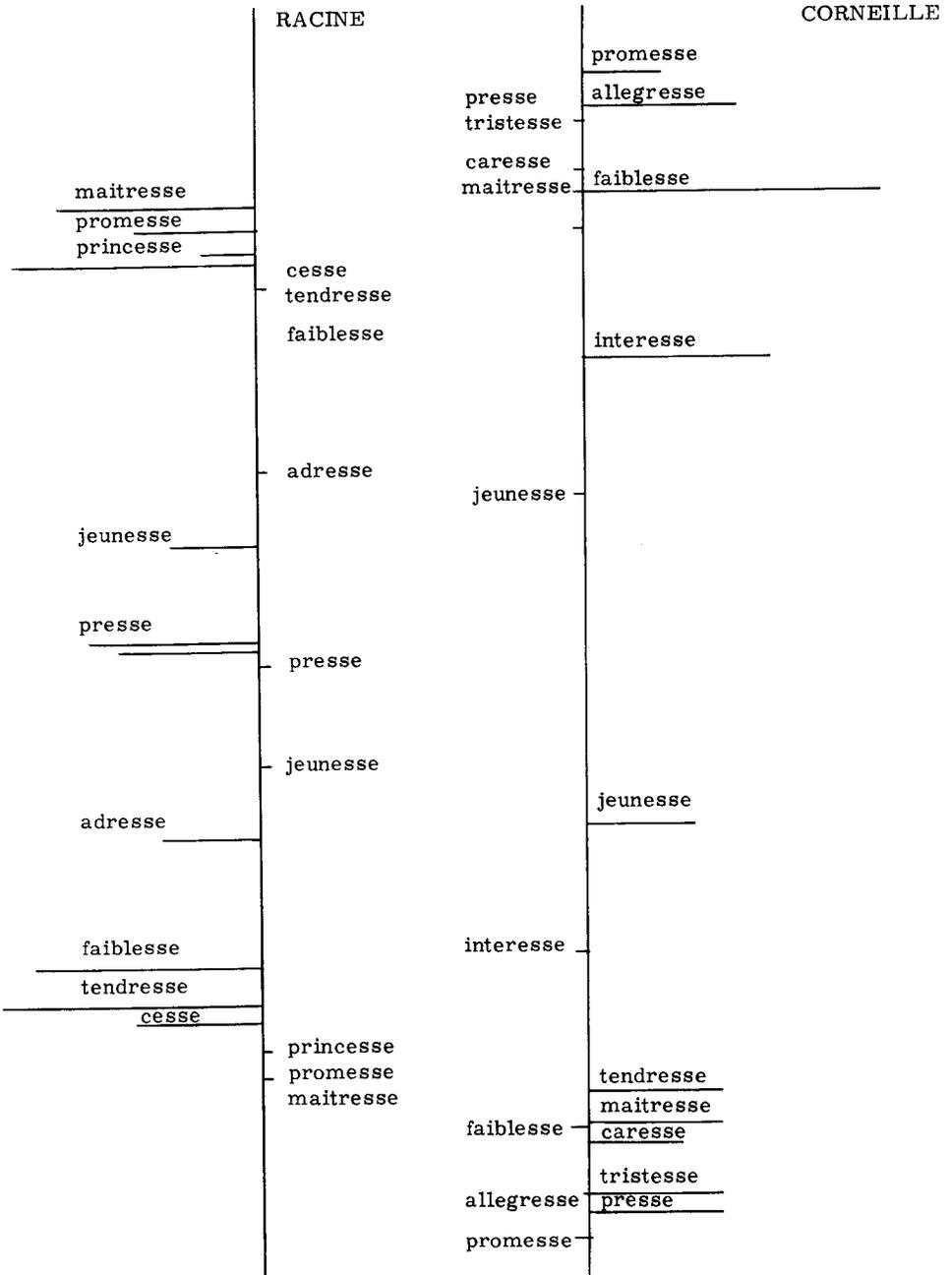
Etude d'un processus.

On a demandé à un individu de frapper au hasard un grand nombre de fois, avec un seul doigt, des touches situées sur une même ligne et que l'on a numérotées ensuite de 1 à 10 de la gauche vers la droite. De la série de chiffres obtenue on a extrait les triples ce qui permet d'avoir une représentation de l'ensemble des touches munies d'une distance définie à partir de la probabilité pour chacune que soient frappées immédiatement après elle et avant elle les différentes touches.

En extrayant un facteur on obtient le résultat suivant :



On voit que l'on a pu retrouver en grande partie l'ordre initial de ces touches.



Exemple 4

## TABLE DES MATIERES

|   | Pages |
|---|-------|
| 1 - Définition de la correspondance entre ensembles .<br>Correspondance ensembliste, statistique, aléatoire ..  | 26    |
| 2 - Distance associée à une correspondance. Notion de proximité suggérée par une correspondance. Formalisation de cette notion en axiomes. Définition d'une distance répondant à ces axiomes dans le cas d'une correspondance entre 2 et plusieurs ensembles..... | 28    |
| 3 - Analyse factorielle d'un nuage de points situé dans un espace muni d'une forme quadratique différente du produit scalaire ordinaire. Définition des axes factoriels et des facteurs.....  | 31    |
| 4 - Construction de nuages de points figurant les ensembles étudiés dans le cas d'une correspondance binaire. Représentation séparée puis simultanée des 2 ensembles.....   | 33    |
| 5 - Construction des nuages de points dans le cas ternaire. Généralisation au cas d'un nombre fini d'ensembles , d'un processus .....   | 36    |
| 6 - Relations entre les facteurs des nuages représentant simultanément et séparément les 2 ensembles d'une correspondance binaire .....   | 38    |
| 7 - Calcul approché des probabilités des couples en fonction des résultats de l'analyse factorielles .....  | 45    |
| 8 - Détermination du nombre de facteurs à extraire .....  | 46    |
| 9 - Programmes de calculs .....   | 49    |
| 10 - Exemples traités .....   | 50    |