Cahiers du Buro

J. Bouzitat

Emploi de la méthode d'élimination de Fourier dans la théorie de la dualité des programmes linéaires

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 12 (1969), p. 3-23

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1969__12__3_0>

EMPLOI DE LA MÉTHODE D'ÉLIMINATION DE FOURIER DANS LA THÉORIE DE LA DUALITÉ DES PROGRAMMES LINÉAIRES

par

J. BOUZITAT

SOMMAIRE

1. INTRODUCTION

Les démonstrations classiques du théorème de dualité des programmes linéaires s'appuient en général sur le théorème de séparation des domaines convexes, de Hahn-Banach, ou sur les théorèmes de point fixe, de Brouwer ou de Kakutani, c'est-à-dire sur des théorèmes qui sont loin d'être élémentaires. Plusieurs de ces démonstrations utilisent comme intermédiaire le lemme de Minkowski-Farkas, déduit des théorèmes précédents ou de propositions équivalentes [9, 10, 13, 16 et 17] (*).

On se propose de donner ici une démonstration élémentaire du théorème de dualité, et plus généralement d'étudier la théorie de la dualité des programmes linéaires, à partir d'un lemme auquel on donnera le nom de Fourier parce qu'il repose sur une méthode d'élimination dans les systèmes d'inégalités linéaires qui est due à Fourier [8] et a été plus tard retrouvée par Motzkin et par Ville [18]. (Le lemme de Minkowski-Farkas est d'ailleurs un cas particulier du lemme de Fourier.)

On appliquera enfin le lemme de Fourier à la démonstration du théorème de séparation des polyèdres ou tronçons convexes (cas particulier du théorème de Hahn-Banach), qui peut aussi servir de base à la théorie de la dualité des programmes linéaires [13 et 17].

2. LEMME DE FOURIER

Un système comprenant un nombre fini de relations linéaires (égalités, inégalités au sens large ou au sens strict), portant sur un nombre fini de variables, est impossible si, et seulement si, il existe une combinaison linéaire de ces relations qui mette en évidence cette impossibilité sous forme purement numérique.

Cela revient à dire que :

a) cette combinaison linéaire élimine toutes les variables du système ;

b) les multiplicateurs utilisés pour former cette combinaison linéaire sont tels que la relation obtenue puisse être écrite sans ambiguïté, c'est-à-dire que, si les inégalités sont toutes écrites dans le même sens (ce qui est toujours possible), les multiplicateurs qui les affectent sont tous de même signe et peuvent donc être

----

(*) Les numéros placés entre crochets renvoient aux références bibliographiques qui se trouvent à la fin du cahier.

supposés tous positifs ou nuls, tandis que les multiplicateurs affectant les égalités peuvent être de signes quelconques (on dira dans la suite qu' *une telle combinaison linéaire est "de type P ")* ;

c) la relation numérique (égalité ou inégalité) ainsi obtenue comme conséquence du système n'est pas vérifiée.

Il est évident qu'un système dont on peut déduire une conséquence numérique non vérifiée n'a pas de solution. (*Toute combinaison linéaire de type P conduisant à une relation numérique non vérifiée fait donc intervenir, avec des multiplicateurs non nuls, des relations linéaires incompatibles.*)

Il faut établir que, réciproquement, si un système linéaire du type considéré n'a pas de solution, on peut en tirer par une combinaison linéaire de type P, comme il a été dit, une conséquence numérique non vérifiée. C'est ce qui va être démontré de façon élémentaire, par récurrence sur le nombre m des variables.

2 . 1. Cas d'un système linéaire portant sur une seule variable ($m = 1$).

Si le système considéré comprend des relations purement numériques (c'est-à-dire où ne figure pas la variable x), alors ou bien l'une au moins de ces relations numériques n'est pas vérifiée, ce qui met en évidence l'impossibilité du système sous la forme annoncée, ou bien ces relations numériques sont toutes vérifiées et elles ne jouent aucun rôle dans la résolution du système qui est équivalent à un système de relations linéaires contenant toutes la variable x.

Chacune de ces relations est alors de l'un des types suivants :

a) $[ax - a_0 = 0 \ , \quad \text{avec} \ a \neq 0] \Longleftrightarrow \left[x = \dfrac{a_0}{a} \right]$,

b) $[bx - b_0 \geqslant 0 \ , \quad \text{avec} \ b > 0] \Longleftrightarrow \left[x \geqslant \dfrac{b_0}{b} \right]$,

c) $[cx - c_0 > 0 \ , \quad \text{avec} \ c > 0] \Longleftrightarrow \left[x > \dfrac{c_0}{c} \right]$,

d) $[dx - d_0 \geqslant 0 \ , \quad \text{avec} \ d < 0] \Longleftrightarrow \left[x \leqslant \dfrac{d_0}{d} \right]$,

e) $[ex - e_0 > 0 \ , \quad \text{avec} \ e < 0] \Longleftrightarrow \left[x < \dfrac{e_0}{e} \right]$.

Chaque relation du type a) impose une valeur à la variable x.

Chaque relation du type b) ou c) impose un minorant, au sens large ou au sens strict, à la variable x , et l'ensemble de ces relations équivaut à une seule d'entre elles, celle qui impose le minorant le plus grand. Si ce minorant maximum est imposé au sens large par une relation du type b) et au sens strict par une relation du type c), il suffit évidemment de retenir cette dernière relation.

Chaque relation du type d) ou e) impose un majorant, au sens large ou au sens strict, à la variable x , et l'ensemble de ces relations équivaut à une seule d'entre elles, celle qui impose le majorant le plus petit. Si ce majorant minimum est imposé au sens large par une relation du type d) et au sens strict par une relation du type e), il suffit évidemment de retenir cette dernière relation.

Dès lors, si le système considéré n'a pas de solution, l'une au moins des circonstances suivantes se trouve réalisée :

1/ *Deux des valeurs imposées à la variable* x *par les relations du type a) sont inégales.*

Alors l'élimination de x , par combinaison linéaire, entre les deux égalités incompatibles met en évidence l'impossibilité du système sous la forme annoncée.

Par exemple,

$$\left\{\begin{matrix} ax - a_0 = 0 \\ a'x - a'_0 = 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow [a'(ax - a_0) - a(a'x - a'_0) = -a'a_0 + aa'_0 = 0] ,$$

ce qui n'est pas vérifié si $\frac{a'_0}{a'} \neq \frac{a_0}{a}$.

2/ *Une valeur imposée à la variable* x *par une relation du type a) est soit inférieure* (ou au plus égale) *au plus grand minorant donné par une relation du type b)* (ou du type c)), *soit supérieure* (ou au moins égale) *au plus petit majorant donné par une relation du type d)* (ou du type e)).

Alors l'élimination de x , par combinaison linéaire de type P, entre l'égalité et l'inégalité incompatibles met en évidence l'impossibilité du système sous la forme annoncée.

Par exemple,

$$\left\{\begin{matrix} ax - a_0 = 0, & \text{avec } a > 0 \\ bx - b_0 \geqslant 0, & \text{avec } b > 0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow [-b(ax - a_0) + a(bx - b_0) = ba_0 - ab_0 \geqslant 0],$$

ce qui n'est pas vérifié si $\frac{a_0}{a} < \frac{b_0}{b}$;

$$\left\{\begin{array}{ll} ax - a_0 = 0, & \text{avec } a < 0 \\ ex - e_0 > 0, & \text{avec } e < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow [e(ax - a_0) - a(ex - e_0) = -ea_0 + ae_0 > 0],$$

ce qui n'est pas vérifié si $\dfrac{a_0}{a} \geqslant \dfrac{e_0}{e}$.

3/ *Le plus grand minorant donné par une relation du type b)* (ou du type c)) *est supérieur* (ou au moins égal) *au plus petit majorant donné par une relation du type d)* (ou du type e)).

Alors l'élimination de x, par combinaison linéaire de type P, entre les deux inégalités incompatibles met en évidence l'impossibilité du système sous la forme annoncée.

Par exemple,

$$\left\{\begin{array}{ll} bx - b_0 \geqslant 0, & \text{avec } b > 0 \\ ex - e_0 > 0, & \text{avec } e < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow [-e(bx - b_0) + b(ex - e_0) = eb_0 - be_0 > 0],$$

ce qui n'est pas vérifié si $\dfrac{b_0}{b} \geqslant \dfrac{e_0}{e}$.

En résumé, *un système comprenant un nombre fini de relations linéaires portant sur une seule variable* ($m = 1$) *est impossible si, et seulement si,*

- *ou bien il comprend une relation purement numérique non vérifiée ;*

- *ou bien l'élimination de* x , *par combinaison linéaire de type* P , *entre deux des relations du système* (deux égalités, ou une égalité et une inégalité, ou deux inégalités imposant l'une un minorant et l'autre un majorant à x) *donne une relation purement numérique non vérifiée.*

Dans le cas contraire, le système considéré admet soit une solution unique donnée par une relation du type a) ou par deux relations des types b) et d) imposant une même valeur comme minorant au sens large et comme majorant au sens large, soit une infinité de solutions comprises entre le plus grand minorant et le plus petit majorant (c'est-à-dire tous les points d'un intervalle fermé, ouvert ou mixte).

2.2. Cas général.

Faisons l'*hypothèse de récurrence* selon laquelle le lemme de Fourier, qui vient d'être établi pour $m = 1$, reste vrai pour $m \leqslant k$ entier positif déterminé (mais arbitraire), et montrons que, sous cette hypothèse, le lemme de Fourier est encore vrai pour $m = k+1$. Le lemme de Fourier se trouvera ainsi établi, par récurrence, dans le cas général.

Soit donc un système comprenant un nombre fini de relations linéaires portant sur $k+1$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$.

Dire que ce système n'a pas de solution, c'est dire que, quelles que soient les k valeurs numériques substituées aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_k$ dans chacune des relations du système considéré, le système ainsi obtenu, portant sur la seule variable x_{k+1}, n'a pas de solution.

Alors d'après les résultats obtenus pour le cas où $m = 1$,

- ou bien l'une des relations de ce système ne contient pas la variable x_{k+1} et n'est pas vérifiée par les valeurs numériques données à $x_1, x_2, \ldots, x_k$;

- ou bien l'élimination de x_{k+1}, par une combinaison linéaire de type P, entre deux des relations de ce système donne une relation non vérifiée par les valeurs numériques données à $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Il en est ainsi quelles que soient les valeurs numériques données à $x_1, x_2, \ldots, x_k$ si le système initial n'a pas de solution. Cela revient à dire que l'*on obtient un système impossible portant sur les k variables* $x_1, x_2, \ldots. x_k$, *à partir du système initial impossible portant sur les k + 1 variables* $x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}$, *en conservant les relations qui ne contiennent pas* x_{k+1} *et en y joignant les relations données par l'élimination de* x_{k+1} *entre les couples de relations qui le contiennent* (deux égalités, ou une égalité et une inégalité, ou deux inégalités imposant l'une un minorant et l'autre un majorant à x_{k+1}).

[Il n'est nécessaire d'écrire toutes ces relations que si le système initial ne comprend pas d'égalité contenant x_{k+1}. A partir de n inégalités contenant x_{k+1}, on peut alors obtenir, par élimination de x_{k+1}, au plus $\frac{n^2}{4}$ ou $\frac{n^2-1}{4}$ inégalités (suivant la parité de n) portant sur $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Si au contraire le système initial comprend une égalité contenant x_{k+1}, il suffit d'écrire, en plus des relations qui ne contiennent pas x_{k+1} les relations données par l'élimination de x_{k+1} entre cette égalité et chacune des autres relations contenant x_{k+1}. Mais ces considérations, importantes pour la résolution pratique du système initial par la méthode d'élimination de Fourier, n'interviennent pas dans la démonstration du lemme de Fourier.]

Or, d'après l'hypothèse de récurrence, le lemme de Fourier est applicable au système impossible ainsi obtenu, puisqu'il porte sur k variables au plus. On peut donc mettre en évidence son impossibilité sous forme purement numérique, par une combinaison linéaire de type P. Mais, comme chacune des relations de ce système est soit une relation du système initial, soit une combinaison linéaire de type P portant sur deux relations du système initial (les inégalités du système initial intervenant seulement, avec des multiplicateurs positifs, dans les inégalités du nouveau système), toute combinaison linéaire de type P portant sur les relations du nouveau système peut être obtenue par une combinaison linéaire de type P portant sur les relations du système initial.

Donc, *si le lemme de Fourier est applicable à tout système comprenant un nombre fini de relations linéaires portant sur* k *variables au plus, il est encore applicable à tout système de ce type portant sur* $k + 1$ *variables.*

Le lemme de Fourier est ainsi établi, par récurrence, dans le cas général.

Note complémentaire. - Dire qu'un système S comprenant un nombre fini de relations linéaires compatibles, portant sur un nombre fini de variables, implique une inégalité linéaire L , portant sur ces variables ou sur certaines d'entre elles, revient à dire que l'on obtient un système linéaire impossible en adjoignant au système S l'inégalité linéaire "non L" (qui est la négation de L), tandis que ni le système S ni l'égalité "non L" ne sont impossibles.

L'application du lemme de Fourier à ce système linéaire impossible montre alors que *l'inégalité* L *est impliquée par le système* S *si, et seulement si, elle est impliquée par une combinaison linéaire de type* P *des relations du système* S . (C'est sur une même fonction linéaire (homogène) des variables que portent l'inégalité L et cette combinaison linéaire des relations de S , qui peut être une égalité ou une inégalité.)

On retrouve ainsi, comme conséquence du lemme de Fourier, une généralisation du lemme de Minkowski-Farkas.

3. THEORIE DE LA DUALITE DES PROGRAMMES LINEAIRES

On établit, de façon classique [17], que tout problème de programmation linéaire peut être mis sous la "*forme canonique*" suivante :

Déterminer un ou plusieurs "vecteurs programmes" $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ satisfaisant aux n contraintes linéaires :

$$\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geqslant b_j \quad \text{pour} \quad j \in \{1, 2, \dots, n\},$$

ainsi qu'aux m conditions de signe :

$$x_i \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

et à la condition d'optimisation linéaire :

$$\sum_{i=1}^{m} x_i c_i \quad \text{minimum.}$$

Si l'on désigne par $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ le vecteur des seconds membres b_j,

- par $A = (a_{ij})$ la matrice à m lignes et n colonnes des coefficients a_{ij},

- par $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_m \end{pmatrix}$ le vecteur des coefficients c_i,

le programme linéaire précédent peut s'écrire, selon les conventions classiques du calcul vectoriel et matriciel [produit scalaire ligne par colonne, et adaptation des "formats" (p, q) des matrices $\underset{(p,q)}{M}$ à p lignes et q colonnes],

$$\text{(I)} \quad \boxed{\begin{cases} \underset{(1,m)}{x} \; \underset{(m,n)}{A} \geqslant \underset{(1,n)}{b} \\ \underset{(1,m)}{x} \geqslant \underset{(1,m)}{0} \\ \underset{(1,m)}{x} \; \underset{(m,1)}{c} \quad \text{minimum} \end{cases}}$$

3.1. Cas où le programme linéaire (I) admet une solution bornée.

Alors cette solution $\bar{x}$ vérifie les contraintes et les conditions de signe de (I), et donne à la "fonction économique" xc la valeur minimum finie $\bar{x}c = v$.

3.1.1. Théorème fondamental de dualité.

Dire que $\bar{x}$ est solution du programme (I) revient à dire que

$$\begin{Bmatrix} xA \geqslant b \\ x \geqslant 0 \end{Bmatrix} \Longrightarrow [xc \geqslant \bar{x}c = v],$$

ou, de façon équivalente, que *le système des* $(n + m + 1)$ *relations linéaires*

$$(1) \qquad \boxed{\begin{cases} xA \geqslant b \\ x \geqslant 0 \\ -xc > -\bar{x}c = -v \end{cases}}$$

n'a pas de solution en $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

D'après le lemme de Fourier, il existe donc des multiplicateurs, tous positifs ou nuls (parce que les inégalités sont toutes écrites dans le même sens),

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \cdots \\ \bar{y}_n \end{pmatrix} & \text{formant un vecteur} \quad \underset{(n,1)}{\bar{y}} \geqslant 0 \,, \\ \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 \\ \bar{\lambda}_2 \\ \cdots \\ \bar{\lambda}_m \end{pmatrix} & \text{formant un vecteur} \quad \underset{(m,1)}{\bar{\lambda}} \geqslant 0 \,, \\ \bar{\lambda}_0 \geqslant 0, & \end{cases}$$

qui, affectant respectivement les $(n + m + 1)$ inégalités du système (1), permettent d'en déduire par combinaison linéaire une inégalité purement numérique non vérifiée.

Mais, par hypothèse, les $(n + m)$ premières inégalités (contraintes et conditions de signe) sont compatibles, puisque le programme linéaire (I) admet une solution. La combinaison linéaire qui met en évidence l'impossibilité du système (1) fait donc intervenir la dernière inégalité avec un multiplicateur $\bar{\lambda}_0$ non nul. Donc $\bar{\lambda}_0 > 0$, et, en multipliant tous les multiplicateurs par une même constante positive, on peut toujours prendre $\bar{\lambda}_0 = 1$.

La combinaison linéaire ainsi formée conduit à la relation suivante (écrite sous forme matricielle) :

$$xA\bar{y} + x\bar{\lambda} - xc\bar{\lambda}_0 > b\bar{y} - \bar{x}c\bar{\lambda}_0 \,,$$

qui est une conséquence du système (1).

Puisque cette combinaison linéaire élimine toutes les variables x_i,

$$A\,\bar{y} + \bar{\lambda} - c\,\bar{\lambda}_0 = 0 .$$

Puisque la relation purement numérique ainsi obtenue, qui est une inégalité au sens strict, n'est pas vérifiée ,

$$b\,\bar{y} - \bar{x}\,c\,\bar{\lambda}_0 \geqslant 0 .$$

Ainsi, *il existe des vecteurs* $\underset{(n,1)}{\bar{y}}$ *et* $\underset{(m,1)}{\bar{\lambda}}$ *et un scalaire* $\bar{\lambda}_0$ *, tels que*

$$\begin{cases} A\,\bar{y} = c\,\bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda} , \\ \quad \bar{y} \geqslant 0 , \ \bar{\lambda} \geqslant 0 , \ \bar{\lambda}_0 > 0 , \\ b\,\bar{y} \geqslant \bar{x}\,c\,\bar{\lambda}_0 , \end{cases}$$

ou encore, de façon équivalente, puisque $\bar{\lambda} \geqslant 0$ et que l'on peut prendre $\bar{\lambda}_0 = 1$, *il existe un vecteur* $\underset{(n,1)}{\bar{y}}$ *tel que* :

$$(2) \qquad \begin{cases} A\,\bar{y} \leqslant c , \\ \quad \bar{y} \geqslant 0 , \\ b\,\bar{y} \geqslant \bar{x}\,c , \end{cases}$$

Mais, d'autre part, d'après les contraintes et les conditions de signe du programme linéaire (I), dont $\bar{x}$ est solution,

$$(3) \qquad \begin{cases} \bar{x}\,A \geqslant b , \\ \bar{x} \geqslant 0 . \end{cases}$$

Les relations (2) et (3) impliquent manifestement

$$\begin{cases} b\,\bar{y} \leqslant \bar{x}\,A\,\bar{y} \leqslant \bar{x}\,c , \\ b\,\bar{y} \geqslant \bar{x}\,c , \end{cases}$$

d'où

$$(4) \qquad \boxed{b\,\bar{y} = \bar{x}\,c = v}$$

Il en résulte que $\bar{y}$ est solution du problème de programmation linéaire

$$\text{(II)} \quad \boxed{\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \underset{(m,n)}{A} \; \underset{(n,1)}{y} \leqslant \underset{(m,1)}{c} \\ \quad\;\; \underset{(n,1)}{y} \geqslant \underset{(n,1)}{0} \end{array} \right. \\ \underset{(1,n)}{b} \; \underset{(n,1)}{y} \quad \text{maximum} \end{array}}$$

qui est, par définition, le *programme linéaire dual* du programme linéaire (I), et qui a été ainsi formé très naturellement à partir du programme (I). [A chaque contrainte de l'un des problèmes correspond une variable de l'autre problème.]

En effet les contraintes et les conditions de signe des problèmes (I) et (II) impliquent :

$$(5) \qquad \boxed{b\,y \leqslant x\,A\,y \leqslant x\,c}$$

de sorte que *la relation (4)* $b\bar{y} = \bar{x}c$ *implique à la fois :*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \bar{x}\,c = \min\limits_{x} \; x\,c\,, & \text{sous les contraintes du problèmes (I)} \\ & \qquad\qquad \text{(ce que l'on savait déjà),} \\ b\,\bar{y} = \max\limits_{y} \; b\,y\,, & \text{sous les contraintes du problème (II),} \end{array} \right.$$

c'est-à-dire que $\bar{x}$ *et* $\bar{y}$ *constituent un couple de vecteurs programmes optimums.*

Ainsi *le fait que le programme linéaire (I) admette une solution bornée* $\bar{x}$ *implique que le programme linéaire dual (II) admet une solution bornée* $\bar{y}$ *et que les deux programmes linéaires en dualité admettent des optimums égaux.*

$$\boxed{\min_{x} \; x\,c = \max_{y} \; b\,y}$$

C'est le théorème fondamental de dualité des programmes linéaires.

[Il importe d'observer que la relation de dualité entre les programmes linéaires (I) et (II) est réciproque.]

3.1.2. Relations d'exclusion.

D'après les contraintes et les conditions de signe des problèmes (I) et (II) ,

$$x\,c - b\,y = x(c - A\,y) + (x\,A - b)\,y$$

$$= \sum_{i=1}^{m} x_i \Big(c_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j\Big) + \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} - b_j\Big) y_j \geqslant 0$$

Ainsi $(x\,c - b\,y)$ est mis sous la forme d'une somme de $(m + n)$ termes tous positifs ou nuls, de sorte que :

$$(6) \qquad \boxed{[b\,\bar{y} = \bar{x}\,c] \Longleftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_i \Big(c_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{y}_j\Big) = 0 & \text{pour } i \in \{1, 2, \ldots, m\} \\ \Big(\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i a_{ij} - b_j\Big) \bar{y}_j = 0 & \text{pour } j \in \{1, 2, \ldots, n\} \end{cases}}$$

Ces $(m + n)$ conditions, dont chacune exprime la nullité d'un produit de deux facteurs positifs ou nuls (et, par conséquent, la nullité de l'un au moins de ces deux facteurs), sont donc nécessaires et suffisantes pour qu'un couple de vecteurs programmes $\underset{(1,m)}{\bar{x}}$ et $\underset{(n,1)}{\bar{y}}$ réalisables, c'est-à-dire vérifiant les contraintes et les conditions de signe des problèmes (I) et (II), soit un couple de programmes optimums.

Ce sont les relations d'exclusion, sous leur forme faible.

On peut encore les écrire de la façon suivante :

$$(7) \qquad \boxed{\begin{cases} \big[\exists\, \bar{x} \mid \bar{x}_i > 0\big] \Longrightarrow \Big[\forall\, \bar{y},\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{y}_j = c_i\Big] \\ \Big[\exists\, \bar{x} \mid \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i a_{ij} > b_j\Big] \Longrightarrow \big[\forall\, \bar{y},\ \bar{y}_j = 0\big] \end{cases}}$$

S'il existe *un* programme optimum $\bar{x}$ du problème (I) dans lequel une variable $\bar{x}_i$ est strictement positive, la contrainte correspondante du problème dual (II) est. "bloquée" (ou serrée) dans *tout* programme optimum $\bar{y}$.

S'il existe *un* programme optimum $\bar{x}$ du problème (I) dans lequel une contrainte n'est pas "bloquée" (ou serrée), la variable correspondante $\bar{y}_j$ du problème dual (II) est nulle dans *tout* programme optimum $\bar{y}$.

Les relations d'exclusion, sous leur forme forte, expriment que les implications (7) sont en fait des équivalences, ou encore que les réciproques des deux propositions précédentes sont vraies. Le lemme de Fourier permet d'en donner une démonstration élémentaire.

$\boxed{1°}$ *Supposons qu'il n'existe pas de programme optimum* $\bar{x}$ *du problème (I) dans lequel* $\bar{x}_i > 0$.

Alors le système des $(n + m + 1)$ relations linéaires

$$\begin{cases} x\,A \geqslant b\,, \\ x \geqslant 0\,, \quad \text{avec} \quad x_i > 0\,, \\ -x\,c \geqslant -\bar{x}c = -v\,, \end{cases}$$

n'a pas de solution en $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

On peut donc lui appliquer le lemme de Fourier, comme on l'a fait plus haut pour le système (1). Si l'on conserve les mêmes notations pour les multiplicateurs, on peut maintenant affirmer que $\bar{\lambda}_i > 0$, puisque l'impossibilité du système est due à la présence de l'inégalité stricte $x_i > 0$, mais on doit conserver le multiplicateur $\bar{\lambda}_0 \geqslant 0$ sans supposer a priori qu'il soit strictement positif.

Il existe donc un vecteur $\underset{(n,1)}{\bar{y}}$ et un scalaire $\bar{\lambda}_0$ tels que

$$\begin{cases} A\,\bar{y} \leqslant c\,\bar{\lambda}_0\,, \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\bar{y}_j < c_i\bar{\lambda}_0 \ (\text{puisque } \bar{\lambda}_i > 0)\,, \\ \bar{v} \geqslant 0\,,\ \bar{\lambda}_0 \geqslant 0, \\ b\,\bar{y} \geqslant \bar{x}\,c\,\bar{\lambda}_0\,. \end{cases}$$

Mais, d'autre part, ces relations, jointes aux contraintes et aux conditions de signe (3) du programme linéaire (I), dont $\bar{x}$ est solution, impliquent

$$\begin{cases} b\,\bar{y} \leqslant \bar{x}\,A\,\bar{y} \leqslant \bar{x}\,c\,\bar{\lambda}_0\,, \\ b\,\bar{y} \geqslant \bar{x}\,c\,\bar{\lambda}_0\,, \end{cases}$$

d'où
$$b\,\bar{y} = \bar{x}\,c\,\bar{\lambda}_0\,.$$

a) *Si* $\bar{\lambda}_0 > 0$, on peut prendre $\bar{\lambda}_0 = 1$, et alors $\bar{y}$ *est un programme optimum du problème (II) tel que* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\bar{y}_j < c_i$, c'est-à-dire dans lequel la contrainte correspondant à la variable x_i du problème (I) (nulle dans tout programme optimum $\bar{x}$) n'est pas bloquée.

$$\text{b) } Si \ \ \bar\lambda_0 = 0 , \quad \begin{cases} A\,\bar y \leqslant 0 , & \text{avec} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar y_j < 0 , \\ \bar y \geqslant 0 , & \\ b\,\bar y = 0 , & \end{cases}$$

et alors il suffit d'ajouter $\bar y$ à un programme optimum quelconque du problème (II) pour obtenir un programme optimum vérifiant les mêmes conditions que celui obtenu en a).

La réciproque de la première relation (7) est ainsi établie.

$\boxed{2°}$ *Supposons qu'il n'existe pas de programme optimum* $\bar x$ *du problème (I) dans lequel* $\sum_{i=1}^{m} \bar x_i\, a_{ij} > b_j$.

Alors le système des $(n + m + 1)$ relations linéaires

$$\begin{cases} x\,A \geqslant b , & \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} > b_j , \\ x \geqslant 0 , & \\ -x\,c \geqslant -\,\bar x c = -v , & \end{cases}$$

n'a pas de solution en $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

On peut donc lui appliquer le lemme de Fourier, comme on l'a fait plus haut pour le système (1). Si l'on conserve les mêmes notations pour les multiplicateurs, on peut maintenant affirmer que $\bar y_j > 0$, puisque l'impossibilité du système est due à la présence de l'inégalité stricte $\sum_{i=1}^{m} x_i\, a_{ij} > b_j$, mais on doit conserver le multiplicateur $\bar\lambda_0 \geqslant 0$, sans supposer a priori qu'il soit strictement positif.

Il existe donc un vecteur $\underset{(n,1)}{\bar y}$ et un scalaire $\bar\lambda_0$ tels que

$$\begin{cases} A\,\bar y \leqslant c\,\bar\lambda_0 , \\ \bar y \geqslant 0 , \quad \text{avec} \quad \bar y_j > 0 , \quad \bar\lambda_0 \geqslant 0 , \\ b\,\bar y \geqslant \bar x\, c\, \bar\lambda_0 , \end{cases}$$

et l'on montre, comme dans le cas $\boxed{1°}$, que $b\bar y = \bar x\, c\, \bar\lambda_0$.

a) *Si* $\bar\lambda_0 > 0$, on peut prendre $\bar\lambda_0 = 1$, et alors $\bar y$ *est un programme optimum du problème (II) tel que* $\bar y_j > 0$, c'est-à-dire dans lequel la variable $\bar y_j$ correspondant à la contrainte de rang j du problème (I) (bloquée dans tout programme optimum $\bar x$) est strictement positive.

b) *Si* $\bar{\lambda}_0 = 0$, $\begin{cases} A\,\bar{y} \leqslant 0\,, \\ \bar{y} \geqslant 0\,, \\ b\,\bar{y} = 0\,, \end{cases}$ avec $\bar{y}_j > 0$,

et alors il suffit d'ajouter $\bar{y}$ à un programme optimum quelconque du problème (II) pour obtenir un programme optimum vérifiant les mêmes conditions que celui obtenu en a).

La réciproque de la seconde relation (7) est ainsi établie.

En conclusion, on a donc établi les relations d'exlusion, sous leur forme forte :

$$(8)\quad \boxed{\begin{cases} \left[\exists\,\bar{x} \mid \bar{x}_i > 0\right] \Longleftrightarrow \left[\forall\,\bar{y}\,,\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\,\bar{y}_j = c_i\right] \\ \left[\exists\,\bar{x} \mid \sum\limits_{i=1}^{m} \bar{x}_i a_{ij} > b_j\right] \Longleftrightarrow \left[\forall\,\bar{y}\,,\ \bar{y}_j = 0\right] \end{cases}}$$

Les rôles joués dans ces relations par les programmes optimums $\bar{x}$ et $\bar{y}$, solutions des problèmes en dualité (I) et (II), peuvent bien entendu être échangés, ce qui revient à remplacer chacune des propositions qui y figurent par sa négation. (Cela permettrait d'ailleurs de déduire la seconde relation (8) de la première.)

3.2. Cas où le programme linéaire (I) n'admet pas de solution bornée.

Alors

- *ou bien les contraintes et les conditions de signe de (I) sont incompatibles,*

- *ou bien, si les contraintes et les conditions de signe de (I) sont compatibles, la forme linéaire* xc *à minimiser peut prendre des valeurs indéfiniment décroissantes.*

Dans chacun de ces deux cas, il est exclu que le programme linéaire dual (II) admette une solution bornée, ce qui impliquerait l'existence d'une solution bornée pour le programme linéaire (I), en vertu du théorème de dualité et de la réciprocité de la relation de dualité entre les programmes (I) et (II).

De plus, dans le second cas, il est exclu que les contraintes et les conditions de signe du programme linéaire dual (II) soient compatibles, car l'existence d'un couple de vecteurs programmes $\underset{(1,m)}{x}$ et $\underset{(n,1)}{y}$ réalisables impliquerait l'existence d'une solution bornée pour chacun des programmes (I) et (II), en vertu de la relation (5) $b\,y \leqslant x\,A\,y \leqslant x\,c$, vérifiée par tout couple de vecteurs programmes réalisables.

Ainsi, en plus du cas (étudié en 3.1.) où les deux programmes linéaires (I) et (II) en dualité admettent des solutions bornées $\bar{x}$ et $\bar{y}$, conduisant à des optimums égaux $\bar{x}c = b\bar{y}$ (en vertu du théorème de dualité), trois cas sont possibles :

- ou bien les contraintes et les conditions de signe de (I) sont incompatibles, et il en est de même pour les contraintes et les conditions de signe de (II);

- ou bien les contraintes et les conditions de signe de (I) sont incompatibles, et la forme linéaire by *à maximiser dans (II) peut prendre des valeurs indéfiniment croissantes ;*

- ou bien la forme linéaire xc *à minimiser dans (I) peut prendre des valeurs indéfiniment décroissantes, et les contraintes et les conditions de signe de (II) sont incompatibles.*

(Il n'est pas difficile de trouver des exemples de chacun de ces cas [17].)

Le lemme de Fourier permet encore de retrouver ces résultats.

$\boxed{1°}$ *Supposons que les contraintes et les conditions de signe du problème (I) soient incompatibles.*

Alors le système des $(n + m)$ relations linéaires

$$\begin{cases} xA \geqslant b\,, \\ x \geqslant 0\,, \end{cases}$$

n'a pas de solution en $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$.

On peut donc lui appliquer le lemme de Fourier, comme on l'a fait au § 3.1.1. pour le système (1) qui comprenait seulement une inégalité stricte de plus. Si l'on conserve les mêmes notations pour les multiplicateurs (en annulant $\bar{\lambda}_0$), on voit qu'*il existe un vecteur* $\underset{(n,1)}{\bar{y}}$ *tel que*

$$\begin{cases} A\bar{y} \leqslant 0 & \text{(exprimant que } A\bar{y} + \bar{\lambda} = 0, \quad \text{avec} \quad \bar{\lambda} \geqslant 0)\,, \\ \bar{y} \geqslant 0\,, & \\ b\bar{y} > 0 & \text{(exprimant que la relation } 0 \geqslant b\bar{y} \text{ n'est pas vérifiée).} \end{cases}$$

Alors :

- ou bien les contraintes et les conditions de signe du problème (II) sont incompatibles,

- *ou bien il suffit d'ajouter* $(k\bar{y})$, k *étant un scalaire positif assez grand, à un programme réalisable quelconque* y *du problème (II) pour obtenir un programme réalisable* $(y + k\bar{y})$ *donnant à la forme linéaire à maximiser une valeur* $(by + k\,b\bar{y})$ *aussi grande qu'on le veut.*

$\boxed{2°}$ *Supposons que la forme linéaire* xc *à maximiser dans le problème (I) puisse prendre des valeurs indéfiniment décroissantes.*

Alors le système des $(n + m + 1)$ relations linéaires

$$\begin{cases} xA \geqslant b\,, \\ x \geqslant 0\,, \\ -xc > u\,, \end{cases}$$

admet des solutions en $x = (x_1, x_2, \dots x_m)$ quel que soit le scalaire donné u.

Donc, *quel que soit le scalaire* u, il n'existe pas de combinaison linéaire de type P (cf. § 2) conduisant à une conséquence purement numérique non vérifiée de ce système.

Autrement dit (si l'on conserve encore les mêmes notations qu'au § 3.1.1. pour les multiplicateurs), il n'existe pas de vecteurs $\underset{(n,1)}{\bar{y}}$ et $\underset{(m,1)}{\bar{\lambda}}$ ni de scalaire $\bar{\lambda}_0$ vérifiant les conditions :

$$\begin{cases} A\bar{y} + \bar{\lambda} - c\,\bar{\lambda}_0 = 0\,, \\ \bar{y} \geqslant 0,\ \bar{\lambda} \geqslant 0\,,\ \bar{\lambda}_0 > 0\,, \\ b\bar{y} + u\,\bar{\lambda}_0 > 0\,, \end{cases}$$

ou encore, de façon équivalente, puisque $\bar{\lambda} > 0$, *il n'existe pas de vecteur* $\underset{(n,1)}{\bar{y}}$ *ni de scalaire* $\bar{\lambda}_0$ *tels que*

$$\begin{cases} A\bar{y} \leqslant c\,\bar{\lambda}_0\,, \\ \bar{y} \geqslant 0\,,\ \bar{\lambda}_0 > 0\,, \\ b\bar{y} \geqslant -u\,\bar{\lambda}_0\,. \end{cases}$$

Puisque cela est vrai quel que soit le scalaire u , il en résulte que le système des $(m + n)$ relations linéaires

$$\begin{cases} Ay \leqslant c\,, \\ y \geqslant 0\,, \end{cases}$$

n'a pas de solution en $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$, c'est-à-dire que les *contraintes et les conditions de signe du problème (II) sont incompatibles.*

3.3. Note sur la forme générale d'un couple de programmes linéaires en dualité.

Etant donné un programme linéaire quelconque, qui n'est pas nécessairement mis sous forme canonique, la méthode la plus sûre pour former le programme linéaire dual est sans doute d'appliquer le lemme de Fourier, comme il a été fait au § 3.1.1. pour le programme linéaire (I) mis sous forme canonique.

Soit, par exemple, le programme linéaire général suivant, à (m + p) inconnues scalaires :

$$\begin{cases} (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_m^1) = \underset{(1,m)}{x^1}, \\ (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_p^2) = \underset{(1,p)}{x^2}, \end{cases}$$

$$(\mathrm{Ig}) \quad \boxed{\begin{cases} \underset{(1,m)}{x^1} \underset{(m,n)}{A^{11}} + \underset{(1,p)}{x^2} \underset{(p,n)}{A^{21}} \geqslant \underset{(1,n)}{b^1} \\ \underset{(1,m)}{x^1} \underset{(m,q)}{A^{12}} + \underset{(1,p)}{x^2} \underset{(p,q)}{A^{22}} = \underset{(1,q)}{b^2} \\ \underset{(1,m)}{x^1} \geqslant \underset{(1,m)}{0} \\ \underset{(1,m)}{x^1} \underset{(m,1)}{c^1} + \underset{(1,p)}{x^2} \underset{(p,1)}{c^2} \text{ minimum} \end{cases}}$$

La méthode indiquée permet de former le programme linéaire dual à (n + q) inconnues scalaires :

$$\begin{pmatrix} y_1^1 \\ y_2^1 \\ \cdots \\ y_n^1 \end{pmatrix} = \underset{(n,1)}{y^1}, \quad \begin{pmatrix} y_1^2 \\ y_2^2 \\ \cdots \\ y_q^2 \end{pmatrix} = \underset{(q,1)}{y^2},$$

$$(\mathrm{IIg}) \quad \boxed{\begin{array}{l} \begin{cases} \underset{(m,n)}{A^{11}} \underset{(n,1)}{y^1} + \underset{(m,q)}{A^{12}} \underset{(q,1)}{y^2} \leqslant \underset{(m,1)}{c^1} \\ \underset{(p,n)}{A^{21}} \underset{(n,1)}{y^1} + \underset{(p,q)}{A^{22}} \underset{(q,1)}{y^2} = \underset{(p,1)}{c^2} \\ \underset{(n,1)}{y^1} \geqslant \underset{(n,1)}{0} \end{cases} \\ \underset{(1,n)}{b^1} \underset{(n,1)}{y^1} + \underset{(1,q)}{b^2} \underset{(q,1)}{y^2} \text{ maximum} \end{array}}$$

A chaque contrainte de l'un des problèmes (Ig) et (IIg) correspond une variable de l'autre problème : une variable astreinte à être positive ou nulle s'il s'agit d'une inégalité, une variable sans condition de signe s'il s'agit d'une égalité.

Et la relation de dualité entre les programmes linéaires généraux (Ig) et (IIg) est réciproque.

On pourrait reprendre sur la forme générale (Ig) (IIg) d'un couple de programmes linéaires en dualité l'étude qui a été faite sur la forme canonique (I) (II). Mais, puisque la forme générale est réductible à la forme canonique, les résultats qui ont été obtenus à partir de la forme canonique ont une validité générale [9 et 17]. Il en est ainsi, en particulier, pour le théorème fondamental de dualité et pour les relations d'exclusion.

4. THEOREME DE SEPARATION DES TRONÇONS ET POLYEDRES CONVEXES

Le lemme de Fourier permet d'établir très simplement le théorème de séparation dans le cas particulier des tronçons et polyèdres convexes.

On sait que, dans un espace vectoriel de dimension finie, un *tronçon* est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés, et qu'un *polyèdre convexe* est un tronçon borné.

Soient, dans un espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ *de dimension* n *ayant pour éléments les vecteurs* $\underset{(n,1)}{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$, *deux tronçons ou polyèdres convexes* C^1 *et* C^2 *non vides, définis par les conditions suivantes :*

- *pour* C^1,

$$\sum_{j=1}^{n} a^1_{ij}\, y_j \leqslant c^1_i \quad \text{avec} \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad \text{ou} \quad \underset{(m,n)}{A^1}\ \underset{(n,1)}{y} \leqslant \underset{(m,1)}{c^1} \ ;$$

- *pour* C^2,

$$\sum_{j=1}^{n} a^2_{hj}\, y_j \leqslant c^2_h \quad \text{avec} \quad h \in \{1, 2, \dots, p\}, \quad \text{ou} \quad \underset{(p,n)}{A^2}\ \underset{(n,1)}{y} \leqslant \underset{(p,1)}{c^2} \ .$$

Supposons que les deux domaines convexes fermés non vides C^1 *et* C^2 *soient disjoints,* c'est-à-dire qu'ils n'aient aucun point commun.

Alors le système des $(m + p)$ relations linéaires

$$(9) \qquad \begin{cases} A^1 \; y \leqslant c^1 , \\ A^2 \; y \leqslant c^2 , \end{cases}$$

n'a pas de solution en $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Mais les m premières relations, d'une part, et les p dernières relations, d'autre part, sont compatibles puisque les domaines C^1 et C^2 sont non vides.

D'après le lemme de Fourier, il existe donc des multiplicateurs, tous positifs ou nuls (parce que les inégalités sont toutes écrites dans le même sens) ,

$$\begin{cases} (\overline{x^1_1}, \overline{x^1_2}, \ldots, \overline{x^1_m}) & \text{formant un vecteur } \underset{(1,m)}{\overline{x^1}} \geqslant 0 \text{ non nul ,} \\ (\overline{x^2_1}, \overline{x^2_2}, \ldots, \overline{x^2_p}) & \text{formant un vecteur } \underset{(1,p)}{\overline{x^2}} \geqslant 0 \text{ non nul ,} \end{cases}$$

qui, affectant respectivement les $(m + p)$ inégalités du système (9), permettent d'en déduire par combinaison linéaire une inégalité purement numérique non vérifiée.

La combinaison linéaire ainsi formée conduit à la relation suivante :

$$\overline{x^1} \, A^1 \, y + \overline{x^2} \, A^2 . y \leqslant \overline{x^1} \, c^1 + \overline{x^2} \, c^2 ,$$

qui est une conséquence du système (9).

Puisque cette combinaison linéaire élimine toutes les variables y_j ,

$$\overline{x^1} A^1 + \overline{x^2} A^2 = 0 .$$

Puisque la relation purement numérique ainsi obtenue, qui est une inégalité au sens large, n'est pas vérifiée,

$$\overline{x^1} \, c^1 + \overline{x^2} \, c^2 < 0 .$$

Ainsi, *il existe des vecteurs* $\underset{(1,m)}{\overline{x^1}}$ *et* $\underset{(1,p)}{\overline{x^2}}$ *, et un scalaire* $\overline{h}$*, tels que*

$$(10) \qquad \begin{cases} \overline{x^1} \; A^1 = - \overline{x^2} \, A^2 , \\ \overline{x^1} \geqslant 0 , \quad \overline{x^2} \geqslant 0 , \\ \overline{x^1} \; c^1 < \overline{h} < - \overline{x^2} \; c^2 . \end{cases}$$

Il résulte alors des relations (10) et de la définition des domaines C^1 et C^2 que

$$\left\{\begin{array}{l} [y \in C^1] \Longleftrightarrow [A^1\ y \leqslant c^1] \Longrightarrow [\overline{x^1} A^1\ y \leqslant \overline{x^1} c^1 < \bar{h}] \\ [y \in C^2] \Longleftrightarrow [A^2\ y \leqslant c^2] \Longrightarrow [\overline{x^1}\ A^1\ y = -\overline{x^2} A^2\ y \geqslant -\overline{x^2} c^2 > \bar{h}] \end{array}\right.$$

Il existe donc, dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ *ayant pour éléments les vecteurs* $\underset{(n,1)}{y}$, *un hyperplan d'équation* $\overline{x^1} A^1 y = \bar{h}$ *qui sépare strictement les deux tronçons ou polyèdres convexes disjoints* C^1 *et* C^2 , *c'est-à-dire que*

$$\forall\ y \in C^1, \quad \overline{x^1} A^1\ y < \bar{h} \quad \text{et} \quad \forall\ y \in C^2,\ \overline{x^1} A^1\ y > \bar{h}.$$

(Puisque C^1 et C^2 sont non vides, les inégalités précédentes montrent que $\underset{(1,m)}{\overline{x^1}}\ \underset{(m,n)}{A^1} \neq \underset{(1,n)}{0}$, de sorte que l'équation $\overline{x^1} A^1 y = \bar{h}$ représente bien un hyperplan de l'espace $\mathbf{R}^n$.)

On a ainsi établi, à partir du lemme de Fourier, le théorème de séparation de Hahn-Banach, dans le cas particulier des tronçons et polyèdres convexes. Ce résultat peut aussi servir de base à la théorie de la dualité des programmes linéaires [10, 13 et 17].