CAHIERS DU BURO

J. BOUZITAT

Une application de la dualité des programmes linéaires : programme de fabrication et prix des produits fabriqués

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 12 (1969), p. 25-36
<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1969__12__25_0>

UNE APPLICATION DE LA DUALITÉ DES PROGRAMMES LINÉAIRES : PROGRAMME DE FABRICATION ET PRIX DES PRODUITS FABRIQUÉS

par

J. BOUZITAT

SOMMAIRE

1. INTRODUCTION

Le présent article voudrait apporter quelques éléments de réflexion à propos de la formation d'un système de prix sur l'ensemble des produits obtenus dans une fabrication industrielle complexe.

On sait qu'il est difficile, dans de telles conditions, de donner un sens à la notion de prix de revient d'un produit particulier, isolé de l'ensemble des produits simultanément fabriqués. Cependant, il est en général possible de définir des coûts marginaux qui présentent un grand intérêt économique.

On se propose de montrer que, dans le cas des modèles linéaires, la théorie de la dualité conduit très naturellement à la définition des coûts marginaux et met en évidence leurs principales propriétés.

(Afin d'appuyer la réflexion sur un support concret, on étudie ici le modèle simple d'un programme de fabrication destiné à satisfaire une demande donnée. Il va de soi que d'autres problèmes de programmation linéaire pourraient servir de base à des études analogues [6, 7, 9, 10, 11 et 17] (*)).

2. ETUDE D'UN PROGRAMME DE FABRICATION DESTINE A SATISFAIRE UNE DEMANDE DONNEE

2.1. Description du modèle linéaire.

Un industriel se propose de faire face à la demande de ses clients en fabriquant certains produits P_1 $P_2 \dots$ P_n en quantités respectives au moins égales à b_1, $b_2, \dots$ b_n, b_j étant la quantité demandée du produit P_j, mesurée avec une unité arbitrairement choisie, mais dont la nature (poids, volume, pièce...) dépend du produit considéré.

A cet effet, l'industriel peut mettre en oeuvre différents processus de fabrication F_1, $F_2, \dots$ F_m à des "niveaux" respectifs x_1, $x_2, \dots,$ x_m, qu'il s'agit de déterminer de telle manière que le coût de la fabrication soit minimum.

L'*hypothèse de linéarité* consiste ici à admettre que, pour chaque processus de fabrication F_i, le coût est proportionnel au niveau x_i, ainsi que les quantités des différents produits fabriqués.

Soit c_i le coût de la mise en oeuvre du processus de fabrication F_i au niveau unité. Soit a_{ij} le nombre d'unités du produit P_j obtenu à partir du processus F_i mis en oeuvre au niveau unité.

Il s'agit donc de déterminer un "programme de fabrication" optimum (x_1, $x_2, \dots$ x_m) *permettant de faire face à la demande pour un coût de fabrication minimum*, c'est-à-dire qu'il faut résoudre le problème de programmation linéaire suivant :

(*) Les numéros placés entre crochets renvoient aux références bibliographiques qui se trouvent à la fin du cahier.

Déterminer un ou plusieurs programmes $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ satisfaisant aux n contraintes (une par produit fabriqué) :

$$\begin{cases} x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \ldots + x_i a_{i1} + \ldots + x_m a_{m1} \geqslant b_1 , \\ x_1 a_{12} + x_2 a_{22} + \ldots + x_i a_{i2} + \ldots + x_m a_{m2} \geqslant b_2 , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} + \ldots + x_i a_{ij} + \ldots + x_m a_{mj} \geqslant b_j , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \ldots + x_i a_{in} + \ldots + x_m a_{mn} \geqslant b_n , \end{cases}$$

ainsi qu'aux m conditions de signe (une par processus de fabrication) :

$$\begin{cases} x_1 \geqslant 0, \\ \quad x_2 \geqslant 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_i \geqslant 0, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_m \geqslant 0, \end{cases}$$

et à la condition d'optimisation économique :

$$x_1 c_1 + x_2 c_2 + \ldots + x_i c_i + \ldots + x_m c_m \text{ minimum.}$$

(Il est possible de montrer que tout problème de programmation linéaire peut être ramené à la forme canonique ci-dessus, dont la forme la plus générale diffère seulement par le fait que certaines contraintes peuvent se présenter sous forme d'égalités, et que certaines inconnues peuvent n'être astreintes à aucune condition de signe [17].)

2.2. Expression matricielle du programme linéaire.

Il est classique de mettre le problème précédent sous une forme plus condensée en utilisant les notations vectorielles et matricielles [16].

Désignons par x le vecteur ligne $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ [programme de fabrication],

par b le vecteur ligne $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ [demande], par A la matrice des coefficients techniques a_{ij}

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

(cette matrice, ayant m lignes et n colonnes, est une matrice de "format" (m, n)) ,

par c le vecteur colonne $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_m \end{pmatrix}$ [coût].

Selon les conventions classiques du calcul vectoriel et matriciel [produit scalaire ligne par colonne, et adaptation des formats [(p, q)] , le programme linéaire précédent peut s'écrire :

$$(\mathrm{I}) \quad \boxed{\left\{\begin{array}{l} \underset{(1,m)}{x} \ \underset{(m,n)}{A} \geqslant \underset{(1,n)}{b} \\[2em] \underset{(1,m)}{x} \geqslant \underset{(1,m)}{0} \\[2em] \underset{(1,m)}{x} \ \underset{(m,1)}{c} \ \text{minimum} \end{array}\right.}$$

- représentant les contraintes $\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} \geqslant b_j$ pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- représentant les conditions de signe $x_i \geqslant 0$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$,
- représentant la condition d'optimisation $\sum_{i=1}^{m} x_i c_i$ minimum

2.3. Représentation géométrique du programme linéaire.

Les contraintes et les conditions de signe définissent l'ensemble C des programmes réalisables, et il est naturel de supposer que cet ensemble n'est pas vide, si l'on tient compte de l'interprétation concrète du modèle.

Chaque inégalité linéaire définit, dans l'espace vectoriel $\mathbf{R}^m$ de dimension m décrit par les points $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, un demi-espace limité par un "hyperplan". L'ensemble C des programmes réalisables est donc représenté dans cet espace par l'intersection de (m + n) "demi-espaces fermés", c'est-à-dire par un "tronçon", ou domaine polyédrique convexe fermé, dont les sommets (en nombre fini) représentent les programmes dits "*extrêmes*".

L'ensemble des points donnant à la fonction économique xc une valeur constante k est un hyperplan H_k , et les hyperplans obtenus pour les diverses valeurs de k forment une famille d'hyperplans parallèles dans l'espace $\mathbf{R}^m$ de dimension m .

Résoudre le programme linéaire considéré revient donc à chercher, dans le domaine polyédrique convexe fermé C, le ou les points situés dans l'hyperplan H_k correspondant à la valeur k la plus petite possible. Compte tenu de l'interprétation concrète du modèle, il est naturel de supposer ces points optimums à distance finie. Il est alors intuitif (du moins si $m \leqslant 3$, c'est-à-dire si l'on peut faire une figure dans le plan ou dans l'espace), et l'on peut établir de façon rigoureuse en s'appuyant sur la convexité du domaine C et des hyperplans H_k , que l'ensemble des points optimums comprend au moins un sommet du domaine C , et même qu'il se confond avec le domaine convexe admettant pour sommets les sommets optimums de C [9 et 16] .

Il suffit donc de rechercher les programmes optimums extrêmes (ce qui est un problème combinatoire), en "appuyant" sur le domaine polyédrique convexe C l'hyperplan H_k qui correspond à la valeur minimum de k .

On y parvient, de façon classique, par la *méthode du simplexe* (en cheminant de sommet en sommet adjacent de C , de manière à faire décroître autant qu'il est possible la valeur k de la fonction économique), ou par la *méthode duale du simplexe* (en partant de points extérieurs à C où la valeur k est trop petite, et en faisant croître k jusqu'à ce que l'hyperplan H_k s'appuie sur le domaine C) [6 et 17].

Dans le cas général où le problème ne présente pas de dégénérescence, l'hyperplan d'appui touche le domaine polyédrique convexe C en un sommet unique, qui définit le programme optimum cherché.

(Dès que le problème comporte plus de 4 ou 5 variables ou contraintes, les calculs doivent être faits à l'aide d'une machine arithmétique.)

2.4. Programme linéaire dual.

Il est classique d'associer au programme linéaire (I) un autre programme linéaire (II) formé à partir du même vecteur ligne b [demande], de la même matrice des coefficients techniques A, du même vecteur colonne c [coût], et où il s'agit de déterminer un vecteur colonne

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \text{dont il faudra chercher une} \\ \text{interprétation concrète} \end{pmatrix} :$$

(II)
$$\boxed{\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \underset{(m,n)}{A} \; \underset{(n,1)}{y} \leqslant \underset{(m,1)}{c} \\ \\ \underset{(n,1)}{y} \geqslant \underset{(n,1)}{0} \end{array} \right. \\ \\ \underset{(1,n)}{b} \; \underset{(n,1)}{y} \text{ maximum} \end{array}}$$

- représentant les contraintes $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leqslant c_i$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$,
- représentant les conditions de signe $y_j \geqslant 0$ pour $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
- représentant la condition d'optimisation $\sum_{j=1}^{n} b_j y_j$ maximum.

On dit que *les deux programmes linéaires (I) et (II) sont en dualité*, ou qu'ils se correspondent par dualité. Cette correspondance est manifestement réciproque. On voit, en particulier, qu'à chaque contrainte de l'un des problèmes correspond une variable (x_i ou y_j) de l'autre problème.

Comme les problèmes considérés sont sous forme canonique, toutes les contraintes se présentent sous forme d'inégalités (remarquer leurs sens), et toutes les variables sont astreintes à être positives ou nulles.

On remarque aussi l'échange des rôles du vecteur ligne b et du vecteur colonne c quand on passe d'un problème à l'autre, et le changement de sens de la condition d'optimisation [17].

D'après le théorème fondamental de dualité des programmes linéaires (voir, dans le premier article du présent cahier, une démonstration élémentaire de ce théorème) ,

si l'un des deux programmes en dualité admet une solution bornée (c'est-à-dire conduisant à un optimum fini), il en est de même de l'autre, et les deux optimums sont égaux :

$$\boxed{\min xc = \max by}$$

D'ailleurs, si x est un programme réalisable quelconque (c'est-à-dire vérifiant les contraintes et les conditions de signe) du problème (I) et si y est un programme réalisable quelconque du problème (II) ,

$$\boxed{by \leqslant xAy \leqslant xc}$$

Il résulte de ces inégalités (impliquées par les contraintes et les conditions de signe) et du théorème de dualité qu'un couple de programmes réalisables est un couple de programmes optimums $\bar{x}$, $\bar{y}$ si et seulement si

$$\boxed{b\bar{y} = \bar{x}c}$$

De plus (voir le premier article du présent cahier),

$$[b\bar{y} = \bar{x}c] \iff \left\{ \begin{array}{ll} \bar{x}_i \left(c_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_j\right) = 0 & \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ \left(\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i a_{ij} - b_j\right) \bar{y}_j = 0 & \text{pour } j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \right\}$$

Ce sont les *relations d'exclusion*, nécessaires et suffisantes pour qu'un couple de programmes réalisables soit un couple de programmes optimums.

On peut les exprimer, sous leur forme forte, de la façon suivante :

$$\begin{array}{lcl} \left[\exists\, \bar{x} \mid \bar{x}_i > 0\right] & \iff & \left[\forall\, \bar{y},\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{y}_j = c_i\right] \\ \left[\exists\, \bar{x} \mid \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_i a_{ij} > b_j\right] & \iff & \left[\forall\, \bar{y},\ \bar{y}_j = 0\right] \end{array}$$

Il existe *un* programme optimum $\bar{x}$ du problème (I) dans lequel une variable est strictement positive si, et seulement si, la contrainte correspondante du problème (II) est "bloquée" (ou "serrée") dans *tout* programme optimum $\bar{y}$.

Il existe *un* programme optimum $\bar{x}$ du problème (I) dans lequel une contrainte n'est pas bloquée (ou serrée) si, et seulement si, la variable correspondante du problème (II) est nulle dans *tout* programme optimum $\bar{y}$.

2.5. Interprétation concrète du programme linéaire dual.

Des considérations d'homogénéité évidentes imposent que, dans le programme dual (II) du programme de fabrication (I), les variables y_1, y_2, ..., y_n représentent des prix unitaires attachés respectivement aux produits P_1, P_2, ..., P_n demandés en quantités respectives b_1, b_2, ..., b_n par les clients qu'il s'agit de satisfaire.

Les conditions de signe du problème (II) expriment que les prix unitaires y_1 , y_2 , ... y_n sont positifs ou nuls .

Avec ces prix unitaires, le prix global de l'ensemble des produits obtenus à partir du processus F_i mis en oeuvre au niveau unité est $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j$; de sorte que les contraintes du problème (II) expriment, pour chacun des m processus de fabrication, que le prix global de l'ensemble des produits obtenus est au plus égal au coût de mise en oeuvre du processus.

Enfin la condition d'optimisation du problème (II) exprime que, parmi tous les prix unitaires $y_1, y_2, \ldots, y_n$ vérifiant les contraintes et les conditions de signe, les prix optimums $y_1, y_2, \ldots y_n$ sont ceux qui maximisent le prix total $\sum_{j=1}^{n} b_j y_j$ des produits demandés par les clients.

Pour interpréter le problème (II), on peut alors imaginer qu' *un second industriel propose au premier de lui vendre les produits qu'il doit fournir à ses clients*, soit les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des produits respectifs $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Les prix de vente unitaires respectifs $y_1, y_2, \ldots y_n$ seront astreints à être positifs ou nuls, bien entendu ; mais, d'autre part, pour rendre son offre attrayante, le second industriel précise que ces prix seront tels qu'en aucun cas le premier industriel ne sera amené à payer, pour acheter un ensemble de produits qu'il peut fabriquer simultanément, plus que le coût de leur fabrication. En revanche, parmi tous les prix satisfaisant à ces conditions, les prix de vente $y_1, y_2, \ldots, y_n$ seront choisis de manière à maximiser le prix de vente total.

Le théorème fondamental de dualité indique que, *dans ces conditions, le premier industriel paierait au second, pour l'ensemble des produits qu'il lui achèterait, un prix total égal à ce que lui aurait coûté la fabrication de ces produits, dans un programme de fabrication optimum.*

Les relations d'exclusion montrent que :

- si un processus de fabrication est effectivement mis en oeuvre dans *un* programme optimum, l'ensemble des produits obtenus à partir de ce processus est payé, dans *tout* système de prix optimum, un prix global égal au coût de leur fabrication :

- si un produit se trouve fabriqué, dans *un* programme optimum, en quantité supérieure à la demande, son prix unitaire est nul dans *tout* système de prix optimum.

(Il est d'ailleurs intuitif que ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour assurer l'égalité des deux optimums, prévue par le théorème fondamental de dualité).

Corrélativement, et de façon équivalente,

- si l'ensemble des produits obtenus à partir d'un processus de fabrication est payé, dans *un* système de prix optimum, un prix global inférieur au coût de leur fabrication, ce processus de fabrication n'est mis en oeuvre dans *aucun* programme optimum ;

- si le prix unitaire d'un produit est positif dans *un* système de prix optimum, ce produit est fabriqué, dans *tout* programme optimum, en quantité égale à la demande.

Et les réciproques de ces propositions sont vraies, d'après la forme forte des relations d'exclusion.

2.6. Coûts marginaux des produits.

Si les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$, demandées par les clients pour les produits respectifs $P_1, P_2, \ldots, P_n$, subissent de petites variations (les coûts c_i et les coefficients techniques a_{ij} restant constants), le coût minimum $\bar{x}c$ du programme (I) varie. Mais il est difficile d'étudier ses variations directement dans le problème (I), où l'ensemble C des programmes réalisables varie avec le vecteur demande b qui définit les seconds membres des contraintes.

Dans le problème (II), au contraire, les contraintes ne dépendent pas du vecteur demande b, qui définit seulement la fonction économique by, c'est-à-dire la direction de l'hyperplan qu'il faut appuyer sur le domaine polyédrique convexe fermé D défini par les contraintes, pour obtenir le ou les systèmes de prix optimums.

Dans le cas général où le problème (II) ne présente pas de dégénérescence, l'hyperplan d'appui touche le domaine D en un sommet unique qui définit le système de prix optimum cherché. Et ce système de prix $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ reste le même lorsque le vecteur demande b subit de petites variations, tant que les changements de direction correspondants de l'hyperplan d'appui ne le font pas passer d'un sommet à un autre du domaine D. (Mais, pour de plus grandes variations de b, le système de prix dépendrait du vecteur demande.)

D'autre part, d'après le théorème fondamental de dualité, le coût minimum $\bar{x}c$ du problème (I) est constamment égal au prix maximum $b\bar{y}$ du problème (II) :

$$\boxed{\min xc = \max by = b\bar{y} = b_1\bar{y}_1 + b_2\bar{y}_2 + \ldots + b_n\bar{y}_n}$$

Ainsi *les prix optimums* $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n$ *sont les taux de variation unitaires du cout du programme optimum de fabrication en fonction des quantités respectives* $b_1, b_2, \ldots, b_n$ *demandées par les clients pour les produits* $P_1, P_2, \ldots, P_n$ [à condition que les variations de ces quantités soient assez petites, et que le problème (II) ne présente pas de dégénérescence].

On dit que *les prix optimums* $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots \overline{y}_n$ *sont les coûts marginaux des produits respectifs* $P_1, P_2, \ldots P_n$. *lorsqu'ils sont demandés en quantités* $b_1, b_2, \ldots b_n$ [6, 7 et 9].

Comme il est naturel, on vérifie que, si un produit est fabriqué, dans un programme optimum, en quantité supérieure à la demande, son coût marginal est nul (voir les relations d'exclusion).

Il résulte aussi de l'étude précédente que la vente aux coûts marginaux des quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des produits respectifs $P_1, P_2, \ldots, P_n$ couvre exactement les coûts de fabrication de l'ensemble de ces produits dans un programme optimum.

2.7. Prix assurant un équilibre économique.

Si un industriel fabrique effectivement les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des produits respectifs $P_1, P_2, \ldots, P_n$, dans les conditions envisagées, en utilisant un programme optimum, *les prix optimums* $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n$, *qui sont des coûts marginaux, sont aussi les prix unitaires qui, régnant sur le marché, assureraient un équilibre économique* [7 et 9].

Si l'on suppose, en effet, que l'industriel, fabriquant les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des produits respectifs $P_1, P_2, \ldots, P_n$, puisse en acheter ou en vendre sur le marché des quantités quelconques aux prix unitaires respectifs $\overline{y}_1, \overline{y}_2, \ldots, \overline{y}_n$, il n'est pas tenté de modifier sa ligne de conduite s'il considère seulement le bilan financier de l'opération.

Car, en fabriquant à l'aide d'un programme optimum les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des produits respectifs $P_1, P_2, \ldots, P_n$, et en les vendant aux prix du marché, l'industriel réalise un bénéfice nul puisque, d'après le théorème fondamental de dualité, le prix de vente global couvre exactement les coûts de fabrication (ce que les relations d'exclusion montrent de façon plus détaillée).

Mais il lui est impossible de réaliser un bénéfice positif, quel que soit le programme de fabrication adopté, si les prix du marché sont supposés stables. Car, d'après les contraintes du problème (II) conduisant à la détermination des prix $\overline{y}_j$, le coût de la mise en oeuvre de tout processus de fabrication est au moins égal au prix de vente global, sur le marché, de l'ensemble des produits obtenus à partir de ce processus.

L'équilibre économique annoncé se trouve donc bien réalisé.

On peut ajouter que, si la fabrication des quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des produits respectifs $P_1, P_2, \ldots, P_n$ à l'aide d'un programme optimum conduit en fait l'industriel à fabriquer certains produits en excédent, les prix $\bar{y}_j$ de ces produits sont nuls, ce qui est conforme à la loi de l'offre et de la demande suivant laquelle l'excédent de l'offre sur la demande fait baisser le prix du marché.

3. CONCLUSION : COUTS MARGINAUX ET PRIX DE REVIENT

L'étude précédente a montré que, pour les modèles linéaires de programmes de fabrication, *la définition et les propriétés des coûts marginaux se présentent naturellement en application de la dualité des programmes linéaires.*

Les coûts marginaux des différents produits $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont liés aux quantités respectives $b_1, b_2, \ldots, b_n$ qu'il faut en fabriquer.

Le coût marginal $\bar{y}_j$ du produit P_j est, dans ces conditions, le taux de variation unitaire du coût du programme optimum de fabrication lorsque, toutes choses restant égales par ailleurs, la quantité demandée b_j du produit P_j subit une petite variation (les cas de dégénérescence étant supposés écartés).

Si un produit se trouve fabriqué, dans un programme optimum, en quantité supérieure à la demande, son coût marginal est nul.

La vente aux coûts marginaux $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ des quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des produits respectifs $P_1, P_2, \ldots, P_n$ couvre exactement les coûts de fabrication de l'ensemble de ces produits dans un programme optimum (d'après le théorème fondamental de dualité des programmes linéaires).

Enfin, les coûts marginaux $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ des produits respectifs $P_1, P_2, \ldots, P_n$ sont aussi les prix unitaires qui, régnant sur le marché, assureraient l'équilibre économique de la situation envisagée. En effet, s'il considère seulement le bilan financier de l'opération, l'industriel qui fabrique, à l'aide d'un programme optimum, les quantités $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des produits respectifs $P_1, P_2, \ldots, P_n$, pour les vendre aux prix du marché, n'est pas tenté de modifier sa ligne de conduite, car il lui est impossible d'améliorer ce bilan financier. D'autre part, les prix $\bar{y}_j$ des produits P_j qui se trouvent en excédent sur le marché sont nuls, ce qui est conforme à la loi de l'offre et de la demande.

Les coûts marginaux présentent donc, entre autres propriétés, celles qu'il est d'usage d'exiger des prix de revient. Mais il faut insister sur le fait qu'*il est difficile de donner un sens à la notion de prix de revient d'un produit particulier, isolé de l'ensemble des produits obtenus en même temps que lui dans une fabrication industrielle complexe*. Seul est défini le prix de revient de l'ensemble des produits fabriqués, et la répartition de ce prix entre les différents produits ne peut être faite de façon logique que si l'on se réfère aux conditions économiques particulières de la fabrication considérée. Autrement dit, *il est impossible de définir des prix de revient immuables qui puissent servir à tous les usages.*

Si les coûts marginaux ne peuvent pas non plus servir à tous les usages, ils sont du moins définis de façon précise, dans un modèle linéaire qui tient compte de certaines conditions économiques dont ils dépendent.

Il est toujours intéressant de déterminer les coûts marginaux des produits fabriqués, en même temps que les programmes de fabrication optimums, en résolvant simultanément deux problèmes de programmation linéaire en dualité. (D'ailleurs, l'application de la méthode du simplexe à l'un de ces problèmes équivaut à l'application de la méthode duale du simplexe à l'autre, de sorte que la résolution de l'un des problèmes conduit, sans calculs supplémentaires, à la résolution de l'autre [17].

Il faut encore ajouter que *la notion de coûts marginaux n'est pas liée au caractère linéaire du modèle considéré*. Mais, si leur définition reste presque aussi simple dans le cas des modèles non linéaires, leur étude est alors plus délicate. Le cas linéaire, qui vient d'être présenté, peut utilement servir d'introduction à des cas plus généraux, et par exemple aux cas importants des programmes convexes ou concaves et des programmes linéarisables (voir le troisième article du présent cahier).