

CAHIERS DU BURO

MAURICE GIRAULT

Processus ponctuels

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle.

Série Recherche, tome 11 (1967), p. 3-26

http://www.numdam.org/item?id=BURO_1967__11__3_0

© Institut Henri Poincaré — Institut de statistique de l'université de Paris, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROCESSUS PONCTUELS

par

Maurice GIRAULT

| | Pages |
|--|-------|
| I - INTRODUCTION..... | 4 |
| II - DEFINITIONS ET NOTATIONS..... | 5 |
| III - INSTRUMENTS D'ETUDE DES PROCESSUS PONC- TUELS..... | 7 |
| 1 - Transformation de Laplace..... | 7 |
| 2 - Tableau des instruments d'étude | 8 |
| 3 - Portée de ces instruments..... | 11 |
| 4 - Etude à l'ordre k au sens des moments..... | 12 |
| 5 - Méthode de définition de Ramakrishnan -ordre k - | 12 |
| IV - PROCESSUS RECURRENENTS..... | 15 |
| 1 - Définition..... | 15 |
| 2 - Processus récurrents homogènes..... | 15 |
| 2-a - Définition..... | 15 |
| 2-b - Transformation $V(U)$ | 16 |
| 2-c - Propriété d'homogénéité..... | 17 |
| 3 - Comportement limite d'un processus récurrent.. | 19 |
| V - CONFRONTATION DES MODELES RECURRENENTS AVEC DES PROCESSUS OBSERVES..... | 20 |
| 1 - Enoncé du problème..... | 20 |
| 2 - Considération a priori..... | 20 |

| | Pages |
|---|-------|
| 3 - Tests d'hypothèse poissonnienne..... | 21 |
| 4 - Test d'indépendance pour les processus récurrents | 22 |
| VI - AUTRES MODELES..... | 23 |
| 1 - Généralités..... | 23 |
| 2 - Suites Markoviennes..... | 23 |
| 3 - Processus systématique perturbé | 24 |
| 4 - Modèles à mémoire | 25 |

I - INTRODUCTION

Les processus ponctuels jouent un rôle important dans les techniques de la Recherche Opérationnelle. On les rencontre spécialement dans les *problèmes de files d'attente* :

- les arrivées ;
- les instants de prise en charge des clients par le service sont des processus ponctuels qui, généralement contribuent à définir le modèle. Dans ces études, on peut s'intéresser aux *instants de sortie* et c'est encore un processus ponctuel.

Citons comme autres exemples :

Les problèmes *de stockage* (dates des enlèvements et des approvisionnements) ;

Les problèmes *d'entretien de matériels* (les dates des réparations ou des remplacements sont des processus ponctuels).

Les modèles couramment utilisés sont très simples mais très particuliers. Ce sont :

- a) Le Processus de Poisson uniforme.
- b) Les Processus ponctuels eulériens.
- c) Les Processus récurrents.

On appelle *processus récurrent* un processus à intervalles aléatoires indépendants où tous les intervalles (sauf peut-être le premier) obéissent à une même loi. Tous les modèles cités plus haut sont des processus récurrents. Dans le cas (b) des processus eulériens, la loi commune des intervalles est une loi γ_k (en $e^{-cu} \frac{(cu)^{k-1}}{(k-1)!}$, cdu) ; enfin dans le cas (a) des processus de Poisson uniforme, les intervalles obéissent à la loi exponentielle γ_1 .

Si l'on désigne respectivement par \mathcal{P} ; \mathcal{E} et \mathcal{R} les trois classes de Processus (Poisson, Euleriens, Récurrents) on a entre ces classes les relations d'inclusion :

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{R}$$

II - DEFINITIONS ET NOTATIONS

On suppose que des événements instantanés, en nombre arbitrairement grand et appartenant tous à une même classe peuvent se produire soit en chaque instant, soit à certains moments déterminés. Une réalisation du phénomène est complètement décrite par la donnée de la suite $\theta_1 ; \theta_2 ; \dots \theta_n \dots$ des instants où l'événement se produit ; ou, ce qui revient au même, par la suite des points $P_1 ; P_2 ; \dots P_n \dots$ de l'axe des temps (naturellement P_1 a pour abscisse θ_1). Les modèles aléatoires susceptibles de représenter de tels phénomènes sont appelés des *Processus Ponctuels*.

On supposera le plus souvent que le processus est réalisé sur $t \geq 0$.

Si, sur tout intervalle de temps, la probabilité d'obtenir au moins deux événements simultanés est nulle, on dit que le processus est *simple* (dans le cas contraire, on dit qu'il est en grappes).

Soit un intervalle $[t, t + \Delta t[$ et désignons par $P(t, \Delta t)$ la probabilité d'obtenir au moins un événement dans cet intervalle.

Si $\forall t, \forall \Delta t > 0$ on a $P(t, \Delta t) > 0$ on dit que le processus est *permanent*. De plus si $P(t, \Delta t)$ tend vers 0 avec Δt pour toute valeur de t , on dit que le processus est continu en probabilité.

Enfin il peut se faire que $\frac{P(t, \Delta t)}{\Delta t}$ admette une limite lorsque $\Delta t = 0$. Soit $a(t)$ cette limite : on dit que $a(t)$ est la *densité en (t)* du processus ponctuel.

Nous nous intéresserons tout spécialement aux *processus simples, continus en probabilité* et admettant partout une densité.

En vue des applications, il serait souvent intéressant de connaître la loi de l'ensemble aléatoire $n_1 ; n_2 ; \dots n_k$, nombres de points obtenus sur k intervalles disjoints : $(t'_1 t''_1)$; $(t'_2 t''_2)$; ... $(t'_k t''_k)$; et ceci quel que soit k et quels que soient $t'_1, t''_1 \dots t'_k, t''_k$ (qu'on peut toujours supposer écrits par valeurs non décroissantes). En général, ce n'est pas ainsi qu'est défini le processus et il est souvent difficile d'obtenir ces lois de probabilité, sauf pour les petites valeurs de k ($k = 1$ et $k = 2$).

Le plus souvent, on définit le processus par les intervalles successifs ; à savoir :

- 1/ loi de $U_1 = \theta_1 = \overline{OP_1}$
- 2/ loi conditionnelle de $U_2 = \theta_2 - \theta_1 = \overline{P_1 P_2}$ connaissant u_1
- 3/ loi " de $U_3 = \theta_3 - \theta_2 = \overline{P_2 P_3}$ connaissant u_1 et u_2 etc...

D'une manière générale, on donne la loi élémentaire conditionnelle du n° intervalle $x = \theta_n - \theta_{n-1}$ connaissant les valeurs $\theta_1 \theta_2 \dots \theta_{n-1}$; notons-la $f_n^{\theta_1 \theta_2 \dots \theta_{n-1}}(x) dx$.

Il revient au même de se donner la densité conditionnelle

$$a_n(t ; \theta_1 \theta_2 \dots \theta_{n-1})$$

du processus. $a_n(t) dt$ exprime la probabilité d'obtenir le n° point sur $t, t + dt$, sachant que les points précédents ont été obtenus aux instants $\theta_1 \theta_2 \dots \theta_{n-1}$ (avec $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \dots \leq \theta_{n-1} \leq t$). $a_n(t) dt$ est donc la probabilité conditionnelle que le n° intervalle soit de longueur $t - \theta_{n-1}$ sachant qu'il est au moins de longueur $t - \theta_{n-1}$.

Si $f_n^{\theta_1 \theta_2 \dots \theta_{n-1}}(x) dx$ est la loi élémentaire conditionnelle du n° intervalle, on a entre les fonctions $a_n(t)$ et $f_n(x)$ la relation :

$$a_n(t) = \frac{f_n(t - \theta_n)}{1 - F_n(t - \theta_n)} \quad (1)$$

où $F_n(x)$ est la f. r. de x conditionnée par $\theta_1 \theta_2 \dots \theta_{n-1}$.

Réciproquement le passage de $a_n(t)$ à $f_n(x)$ se fait de la façon suivante.

Posons :

$$\int_{t-\theta_{n-1}}^{\theta_{n-1}+x} a_n(t) dt = A_n(x) \quad (2)$$

on a alors

$$F_n(x) = 1 - e^{-A_n(x)} \quad (3)$$

$a_n(t)$ est appelée *densité conditionnelle* du processus ou parfois *taux de mortalité* ou *taux d'avarie*. Cette dernière terminologie se rapporte à des problèmes d'entretien de machines.

Les modèles ainsi définis, malgré quelques hypothèses (processus simples, continus, pourvus de densité) sont beaucoup trop généraux pour être utilisables ; ils conduiraient à des problèmes d'estimations des paramètres insolubles. Les seuls modèles utilisables sont ceux qui ne dépendent que d'un très petit nombre de paramètres. Par contre, l'utilisateur a besoin de disposer d'une grande variété de ces modèles simples, chacun d'eux ayant des propriétés très caractéristiques.

Nous nous proposons de définir quelques uns de ces modèles. Au préalable nous voudrions rassembler les instruments d'étude des processus ponctuels les plus courants.

III - INSTRUMENTS D'ETUDE DES PROCESSUS PONCTUELS

1 - Nous allons définir des fonctions telles que $A(t)$ qui mesurent soit des probabilités d'événements sur $[0, t[$ soit des moments ; soit enfin des fonctions génératrices de v.a. associées à $[0, t[$. Ce seront des fonctions non négatives, parfois monotones croissantes en t , définies pour $t \geq 0$.

Si $A(t)$ est monotone croissante, bornée, on peut lui associer sa transformée unilatérale de Laplace :

$$B(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dA(t)$$

$B(s)$ est définie pour $s \geq 0$.

Si $A(t)$ est une *fonction de répartition* : $B(s)$ est la f.c. associée (au sens défini ici).

Si $A(t)$ est monotone croissante, de variation totale différentielle de 1, c'est une *fonction de distribution* et $B(s)$ dite *pseudo-fonction caractéristique* associée.

Si $A(t)$ est positive bornée, on peut lui associer

$$B_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} A(t) dt \quad \text{définie pour } s > 0$$

Exemples :

$$\text{Si } A(t) = 1 \quad \text{on a } B_1(s) = \frac{1}{s}.$$

$$A(t) = t^{k-1} \quad \text{on a } B_1(s) = \frac{\Gamma_k}{s^k} \quad k \geq 1$$

Si $A(t) = e^{at}$ on a $B_1(s) = \frac{1}{s-a}$ $s > a$.

Si $A(0) = 0$ et si $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ s > 0}} [e^{-st} A(t)] = 0$ alors on a entre $B(s)$ et $B_1(s)$ la relation :

$$B(s) = sB_1(s)$$

Les fonctions telles que $B(s)$ ou $B_1(s)$ peuvent exister dans des cas plus généraux pour certaines valeurs assez grandes de s . Dans la suite, on supposera qu'on se place dans des conditions telles que les fonctions considérées existent.

2 - Tableau des instruments d'étude

Definitions :

On désigne par

(D₁) $p_k(t) = \text{Prob. } \{k \text{ points exactement sur } [0, t]\}$

$$\text{et par } A(k, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p_k(t) dt \quad (D_{1.})$$

Relations :

$$(R_1) \quad \forall t : \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1 \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=0}^{\infty} A(k, s) = \frac{1}{s} \quad (R_{1.})$$

Loi de N(t)

Désignons par $P(n, t)$ la fonction de répartition du nombre $N(t)$ de points obtenus sur $[0, t[$ et par $W(n, s)$ la transformée de Laplace de R en tant que fonction de t (W n'est donc pas f. c. de N).

$$(D_2) \quad P(n, t) = \text{Prob. } \{N(t) > n\} \quad \text{et} \quad W(n, s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P(n, t) dt \quad (D_{2.})$$

Relations

$$(R_2) \quad P(n, t) = p_0(t) + p_1(t) + \dots + p_{n-1}(t)$$

et

$$W(n, s) = A_0(s) + A_1(s) + \dots + A_{n-1}(s) \quad (R_{2.})$$

Loi de θ_k

Soit

$F_k(t)$ la f. r. de θ_k et $\Phi_k(s)$ sa f. c.

$$(D_3) \quad F_k(t) = \text{Prob. } \{\theta_k < t\} \quad \text{et} \quad \Phi_k(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d F_k(t) \quad (D_3.)$$

d'où

$$\int e^{-st} F_k(t) dt = \frac{1}{s} \Phi_k(s)$$

Relations :

$$F_k(t) = \text{Prob. } \{N(t) > k\} = p_k(t) + p_{k+1}(t) + \dots$$

soit

$$\int e^{-st} F_k(t) dt = \int e^{-st} \sum_{n \geq k} e^{-st} p_n(t) dt$$

$$(R_3) \quad \boxed{F_k(t) + P_{(k,t)} = 1} \quad \begin{array}{l} \text{tandis} \\ \text{que} \end{array} \quad \frac{1}{s} \Phi_k(s) = A_k + A_{k+1} + \dots = \frac{1}{s} - W(k, s)$$

relation que nous écrivons finalement

$$\boxed{s W(k, s) = 1 - \Phi_k(s)} \quad (R_3.)$$

Les relations (3') (pour toutes les valeurs de k) permettent d'exprimer les fonctions A_k :

$$s W(1, s) = s A_0(s) = 1 - \Phi_1(s) \quad \text{soit} \quad s A_0(s) = 1 - \Phi_1(s)$$

$$s A_k(s) = s (W(k+1, s) - W(k, s)) = \Phi_k(s) - \Phi_{k+1}(s)$$

Finalement :

$$\forall k \geq 1 \quad \text{on a} \quad \underline{s A_k(s) = \Phi_k(s) - \Phi_{k+1}(s)} \quad (R_4.)$$

Introduisons la fonction génératrice de $N(t)$; soit $g_N^{(t)}(u)$ et sa transformée de Laplace, en tant que fonction de t

$$g_N^{(t)} p_4(u) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k p_k(t) \quad \text{et} \quad G(s, u) = \int_0^{\infty} e^{-st} g_N^{(t)}(u) dt \quad (D_4)$$

La fonction $G(s, u)$ est liée aux fonctions A par

$$G(s, u) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k A_k(s) \quad (R_5)$$

En tenant compte des relations (R_4) il vient :

$$s G(s, u) = 1 - \Phi_1 + u(\Phi_1 - \Phi_2) + \dots + u^k(\Phi_k - \Phi_{k+1}) + \dots$$

$$s G(s, u) = 1 + (u - 1) [\Phi_1(s) + u \Phi_2(s) + \dots + u^k \Phi_{k+1}(s) + \dots] \quad (R_6)$$

On déduit de G les moments factoriels de $N(t)$.

Ordre 1 : Posons

$$(D_5) \quad M_1(t) = E(N(t)) \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dM_1(t) \quad (D_5)$$

$M_1(t)$ est une fonction monotone croissante. Dans la mesure où l'intégrale (D_5) existe, on peut considérer la fonction $\mathfrak{M}_1(s)$.

Relations - $M_1(t)$ est liée à la fonction génératrice $g(u, t)$ par la relation R_7

$$(R_7) \quad M_1(t) = \left[\frac{\partial g(u, t)}{\partial u} \right]_{u=1} \quad \text{d'où} \quad \left[\frac{\partial G(s, u)}{\partial u} \right]_{u=1} = \int_0^{\infty} e^{-st} M_1(t) dt = \frac{1}{s} \mathfrak{M}_1(s)^* \quad (R_7)$$

En tenant compte de R_6 on obtient

$$s \left[\frac{\partial G(s, u)}{\partial u} \right]_{u=1} = \mathfrak{M}_1(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(s) \quad (R_8)$$

* Pour écrire les relations R_7 et R_8 , on a implicitement supposé que les fonctions $M_1(t)$ et $M_2(t)$ réalisent les deux relations :

$$M_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ s > 0}} [e^{-st} M(t)] = 0 \quad \text{cela pour } k = 1 \quad \text{et } k = 2$$

Ordre 2

Posons :

(D₆) $M_2(t) = E[N(N - 1)]$ c'est une fonction monotone croissante de t . Dans la mesure où l'intégrale (D₆) existe on peut considérer la fonction $\mathcal{M}_2(s)$:

$$\mathcal{M}_2(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dM_2(t) \quad (D_6')$$

Relations :

$$(R_9) \quad M_2(t) = \left[\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right]_{u=1} \quad \text{d'où} \quad \left[\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} \right]_{u=1} = \int_0^{\infty} e^{-st} M_2(t) dt$$

$$= \frac{1}{s} \mathcal{M}_2(s) \quad (R_9')$$

Enfin, en tenant compte de R₆, il vient

$$s \left[\frac{\partial^2 G(s, u)}{\partial u^2} \right] = \mathcal{M}_2(s) = 2 [\Phi_2(s) + 2 \Phi_3(s) + \dots + (k-1) \Phi_k(s) + \dots] \quad (R_{10}')$$

Dans le même esprit, on pourrait naturellement introduire des moments factoriels d'ordres arbitrairement élevés.

3 - Les fonctions précédentes du § III ne définissent pas complètement le processus. Elles définissent la loi de $N(t)$, nombre de points sur $[0, t[$ et des notions équivalentes ; mais elles ne définissent pas même la loi de $n(t', t'') = N(t'') - N(t')$, nombre de points sur $[t', t''[$. En effet elles ne définissent que les lois marginales du couple aléatoire $N(t'), N(t'')$ ce qui ne permet pas d'obtenir la loi de la différence $N(t'') - N(t')$. Seule l'espérance mathématique de $n(t', t'')$ est donnée par la fonction $M_1(t)$.

* Pour écrire les relations R₇ et R₉, on a implicitement supposé que les fonctions $M_1(t)$ et $M_2(t)$ réalisent les deux relations :

$$M_k(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ s > 0}} [e^{-st} M_k(t)] = 0 \quad \text{cela pour} \quad k = 1 \quad \text{et} \quad k = 2$$

On a évidemment

$$E(n) = M_1(t'') - M_1(t')$$

4 - Etude à l'ordre k

Soit (t'_1, t''_1) ; (t'_2, t''_2) ; ... (t'_k, t''_k) k intervalles disjoints et n_1, n_2, \dots, n_k les nombres de points obtenus respectivement dans ces intervalles.

Faire l'étude du processus à l'ordre k , c'est étudier les moments aux ordres (positifs) inférieurs et égaux à k des ensembles aléatoires n_1, n_2, \dots, n_k , pour toutes les valeurs des (t'_i, t''_i) donnant des intervalles disjoints. Ramakrishnan* a utilisé une méthode de définitions différentielles équivalentes que nous allons présenter maintenant.

5 - Méthode de définition de Ramakrishnan

Ramakrishnan a introduit* les fonctions

$$f_h(t_1, t_2, \dots, t_h) dt_1 dt_2 \dots dt_h = E [dN(t_1) \dots dN(t_h)]$$

où $dN(t_i)$ = nombre de points (0 ou 1) obtenus sur $(t_i, t_i + dt_i)$.

Naturellement on suppose ici que le processus est simple, continu en probabilité et que les différentielles considérées existent.

On dit que le processus ponctuel est défini à l'ordre (k) si on connaît toutes les fonctions $f_h(t_i)$ pour $h \leq k$. Nous allons voir que cette définition de l'ordre équivaut à la définition donnée en (4). Les ordres 1 et 2 étant les plus importants, nous expliciterons tout d'abord les résultats dans ces deux cas.

Ordre 1 :

$$f_1(t) dt = \text{Prob.} \{1 \text{ pt sur } (t, t + dt)\}$$

Soit $n(t', t'')$ le nombre de points obtenus sur (t', t'')

$$E(n) = \int_{t'}^{t''} f_1(t) dt$$

* A. Ramakrishnan - Voir Proc. Cambridge Phil. Soc. 46-595, 48-451 et 49-473.

Ordre 2 :

On conviendra de définir $f_2(t, t)dt^2$ comme limite pour $t' = t$ de $f_2(t, t') dt dt'$; autrement dit, on donne à $dn(t) \cdot dn(t')$ la valeur 1 si (et seulement si) un couple de *points distincts* est obtenu : l'un sur dt ; l'autre sur dt' ; et cela même si $t' = t$.

La donnée de $f_1(t)dt$ et de $f_2(t, t')dt dt'$ définit la loi du couple (i, j) :

i nombre de points (0 ou 1) obtenus sur dt
 j " " " " " sur dt'

Désignons par $P_{ij}^{(2)} = \text{Prob} \{ i \text{ points sur } t, t + dt \}$
 $\{ j \text{ points sur } t', t' + dt' \}$

$$P_{11}^{(2)} = f_2(t, t') dt dt'$$

$$P_{10}^{(2)} = f_1(t)dt - f_2(t, t') dt dt'$$

$$P_{00}^{(2)} = 1 - f_1(t) dt - f_1(t')dt' + f_2(t, t') dt dt'$$

Fonction de covariance :

Posons :

$$W(t, t') dt dt' = E [(dn_{(t)} - \overline{dn}_{(t)}) \cdot (dn_{(t')} - \overline{dn}_{(t')})]$$

$$W(t, t') dt dt' = f_2(t, t') dt dt' - f_1(t) f_1(t') dt dt'$$

Enfin exprimons les *moments du 2e ordre* du couple :

$$n_1(t'_1, t''_1) ; n_2(t'_2, t''_2)$$

associés à des intervalles disjoints.

Calculons :

$$\int_{t'_1}^{t''_1} \int_{t'_2}^{t''_2} f_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

A tout domaine élémentaire $(t_1 ; t_1 + dt_1) ; (t_2 ; t_2 + dt_2)$ est associé le nombre 1 si un couple de points distincts est obtenu. L'intégrale représente donc l'espérance mathématique du nombre de *couples* de points tels que l'un des points du couple soit sur $(t'_1 ; t''_1)$ l'autre sur $(t'_2 ; t''_2)$: elle représente donc $E(n_1, n_2)$.

D'où :

$$E(n_1, n_2) = \int_{t_1'}^{t_1''} \int_{t_2'}^{t_2''} f_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

De même :

$$\int_{t_1'}^{t_1''} \int_{t_1'}^{t_1''} f_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2$$

représente le nombre de couples de points (distincts et ordonnés) que l'on peut former à l'aide de points obtenus sur (t', t'') : c'est $E[n(n-1)]$ d'où

$$\begin{cases} E[n_1(n_1 - 1)] = \int_{t_1'}^{t_1''} \int_{t_1'}^{t_1''} f_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ E[n_2(n_2 - 1)] = \int_{t_2'}^{t_2''} \int_{t_2'}^{t_2''} f_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \end{cases}$$

On en déduit : $E(n_1^2)$ et $E(n_2^2)$.

On a par exemple :

$$E(n_1^2) = \int_{t_1'}^{t_1''} \int_{t_1'}^{t_1''} f_2(t_1, t_2) dt_1 dt_2 + \int_{t_1'}^{t_1''} f_1(t) dt$$

Généralisation :

Si l'on connaît l'ensemble des fonctions f_h pour $h \leq k$ on en déduit les moments d'ordre k de (n_1, n_2, \dots, n_k) nombres de points obtenus sur des *intervalles disjoints* $\{t_1'; t_1''\}_{i=1,2,\dots,k}$. On utilise pour cela deux relations

$$E(n_1, n_2, \dots, n_k) = \underbrace{\int \int}_{k} f_k(t_1, t_2, \dots, t_k) dt_1 dt_2 \dots dt_k$$

(t_i varie de t_1' à t_1'')

et, par exemple :

$$E[n_1(n_1 - 1)(n_1 - 2) n_2(n_2 - 1)] = \underbrace{\int \int}_{5} f_5(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) dt_1 \dots dt_5$$

où

$$\begin{array}{ll} t_1; t_2 \text{ et } t_3 & \text{varient de } t_1' \text{ à } t_1'' \\ t_4 \text{ et } t_5 & \text{" " } t_2' \text{ à } t_2'' \end{array}$$

IV - PROCESSUS RECURRENENTS

1 - On appelle processus ponctuel récurrent tout processus ponctuel à intervalles aléatoires indépendants où tous les intervalles (sauf peut-être le premier) obéissent à une même loi.

Désignons par $U_1 = \theta_1$ le premier intervalle, $F_1(u)$ sa fonction de répartition et $\varphi_1(s)$ sa fonction caractéristique

$$\varphi_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} dF_1(u)$$

U est un intervalle quelconque autre que le premier ; $F(u)$ est sa f. r. et $\varphi(s)$ sa f. c (au sens précédent) .

La f. c. de θ_k est $\varphi_1 \varphi^{k-1} = \Phi_k(s)$, d'où (d'après les relations R_4 , de III. 2)

$$\left. \begin{aligned} s A_0(s) &= 1 - \varphi_1(s) \\ s A_k(s) &= \Phi_k - \Phi_{k+1} = \varphi_1 \varphi^{k-1} (1 - \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

par suite (de R_6 .)

$$s G(s, u) = 1 - \varphi_1 + \frac{u \varphi_1 (1 - \varphi)}{1 - u \varphi} = 1 + \frac{(u - 1) \varphi_1}{1 - u \varphi} \quad (2)$$

Enfin, on déduit des relations R_7 , et R_9 ,

$$\pi_1(s) = \frac{\varphi_1(s)}{1 - \varphi(s)} \quad (3) \quad \text{et} \quad \pi_2(s) = \frac{2 \varphi \varphi_1}{(1 - \varphi)^2} \quad (4)$$

Remarque - La probabilité d'obtenir un point sur $t, t + dt$ est

$$dF_1(t) + dF_2(t) + \dots + dF_k(t) + \dots$$

d'où

$$dM_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty} dF_k(t) \quad \text{ce qui entraîne} \quad (3)$$

2 - Procéssus homogènes

2-a - *Définition* :

Supposons que la v. a. U admette un moment du premier ordre : $m = E(U)$; alors $\left(\frac{d\varphi}{ds} \right)_{s=0} = -m$.

Choisissons φ_1 (f. c. de U_1) telle que

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{m} \frac{1 - \varphi(s)}{s}$$

La fonction $\pi_1(s)$ devient alors

$$\pi_1(s) = \frac{\varphi_1}{1 - \varphi} = \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{s}$$

Elle caractérise une *distribution uniforme* de densité $\frac{1}{m}$:

On a :
$$E [dN(t)] = f_1(t) dt = \frac{1}{m} dt$$

Chaque intervalle élémentaire $(t, t+dt)$ a la probabilité $\frac{1}{m} dt$ de contenir un point.

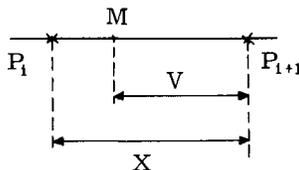
Il reste à montrer que l'opération précédente est toujours possible ; c'est-à-dire que quelle que soit la f. c. $\varphi(s)$, dérivable à l'origine, la fonction $\frac{1 - \varphi}{ms}$ est une f. c.

2-b - Transformation $V(U)$.

Nous allons justifier ce résultat en donnant une interprétation de cette transformation.

Réalisons sur $(-\infty, +\infty)$ un processus ponctuel récurrent. U désigne l'intervalle aléatoire entre deux points. Un point M est choisi uniformément sur cet axe. On se propose d'étudier la loi de l'intervalle $X = P_1 P_{1+1} = \theta_{1+1} - \theta_1$ sur lequel se trouve M ; puis la loi de $V = M P_{1+1}$ intervalle séparant M du premier point du processus au-delà de M . La loi élémentaire $dH(x)$ de X est proportionnelle à la fréquence (loi élémentaire) de U et à la mesure de U . D'où :

$$dH(x) = h \cdot x \cdot dF(x)$$



h est une constante telle que

$$\int_0^{\infty} h x dF(x) = 1 \quad \text{d'où} \quad h = \frac{1}{m}$$

D'autre part la répartition conditionnelle de M sur l'intervalle qui le contient est uniforme. V a une distribution absolument continue, sa loi élémentaire est

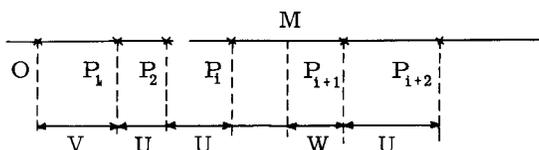
$$\begin{aligned} g(v) dv &= \int_{x=v}^{\infty} dH(x) \frac{dv}{x} \\ &= \int_{x=v}^{\infty} \frac{x}{m} dF(x) \frac{dv}{x} = \frac{1 - F(v)}{m} \cdot dv \end{aligned}$$

La f. c. associée est

$$\varphi_v(s) = \frac{1}{m} \frac{1 - \varphi(s)}{s}$$

2-c - *Propriété d'homogénéité :*

Reprenons le processus défini en 2-a ; nous avons vu que chaque intervalle $(t, t + dt)$ a la même probabilité $\frac{dt}{m}$ de contenir un point (la distribution des moments du premier ordre est uniforme). Mais il y a plus : le processus observé à partir d'un instant $t_0 > 0$ arbitraire est indépendant de t_0 .



Soit P_{1+1} le premier point observé au-delà de M (d'abscisse t_0).

Posons $W = M - P_{1+1}$. A priori la loi de W dépend de t_0 et de la loi de U ; soit $\varphi_2(s)$ sa f. c. La distribution des moments du 1er ordre sur $(t_0, +\infty)$ est, nous le savons, uniforme et de densité $1/m$. Or sa transformée unilatérale de Laplace est (d'après IV.3).

$$\mathfrak{K}_1(s) = \frac{\varphi_2(s)}{1 - \varphi} \quad \text{et doit valoir} \quad \frac{1}{ms} \quad (\text{distribution uniforme})$$

donc

$$\varphi_2(s) = \frac{1}{m} \frac{1 - \varphi}{s} = \varphi_1(s)$$

La v. a. W est indépendante de t_0 ; elle obéit à la même loi que V , premier intervalle du processus récurrent homogène.

La loi de $n(t', t'')$ nombre de points obtenus sur (t', t'') ne dépend que de $t'' - t' = h$; elle est indépendante de t' (pour h donné).

Si $g_n^h(u)$ est la f. g. de $n(t', t'')$, sa transformée de Laplace est (compte tenu de R_0 .)

$$G(s, u) = \int_{h=0}^{\infty} e^{-sh} g_n^h(u) dh = 1 + \frac{1 - \varphi(s)}{1 - u\varphi(s)} \frac{u - 1}{ms}$$

Les fonctions $\mathfrak{K}_1(s)$ et $\mathfrak{K}_2(s)$ prennent les valeurs suivantes (on remplace φ_1 par $\frac{1 - \varphi}{ms}$ dans (4)) :

$$\mathfrak{K}_1(s) = \frac{1}{ms} \quad \text{et} \quad \mathfrak{K}_2(s) = \frac{2}{ms} \frac{\varphi}{1 - \varphi}$$

Les développements au voisinage de $s = 0$ sont respectivement :

$$\mathfrak{K}_1(s) = \frac{2}{s^2 m^2} + \frac{1}{s m^2} \left(\frac{m_2}{m} - 2m \right) + \dots$$

$$\mathfrak{K}_2(s) = \frac{1}{ms} + \dots \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} m = E(U) \\ m_2 = E(U^2) \end{array}$$

Pour t très grand, les fonctions $M_1(t)$ et $M_2(t)$ ont pour développements

$$M_1 = \frac{t}{m} \quad M_2 = \frac{t^2}{m^2} + \frac{t}{m^2} \left(\frac{m_2}{m} - 2m \right)$$

or variance $(N(t)) = V(t) = M_2 + M_1 - M_1^2$; d'où

$$V(t) \simeq \frac{t}{m} \left(\frac{m_2}{m^2} - 1 \right) = \frac{t \sigma^2}{m^3}$$

si σ est l'écart-type de U .

Finalement

$$\boxed{\frac{V(h)}{h} \sim \frac{\sigma^2}{m^3}}$$

où $V(h)$ = variance du nombre de points obtenus sur un intervalle de mesure h .

3 - Comportement limite (pour $t = \infty$) d'un processus récurrent à intervalles tous parents (le premier intervalle a même loi que les suivants).

Il résulte de (IV.1) que la distribution des moments dans un tel processus admet pour pseudo fonction caractéristique :

$$\mathfrak{N}_1(s) = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}$$

Le comportement de la distribution pour $t = \infty$ est défini par celui de $\mathfrak{N}_1(s)$ au voisinage de $s = 0$.

Or $\mathfrak{N}_1(s) \sim \frac{1}{ms}$ (pour $s = 0$) ce qui caractérise une *distribution uniforme* de densité m .

Donnons quelques précisions : si

$$\mathfrak{N}_1(s) = \frac{\varphi(s)}{1 - \varphi(s)}$$

est la pseudo f.c. de la densité $a(t)$ du processus, on a :

$$a(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} \mathfrak{N}_1(s) ds$$

Si t tend vers l'infini, la densité devient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [a(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{st}}{s} \frac{s \varphi(s)}{1 - \varphi(s)} ds \right] \quad (5)$$

Or si $\frac{s \varphi(s)}{1 - \varphi(s)} = s \mathfrak{N}_1(s)$ est à variations bornées sur tout intervalle fini, c'est-à-dire si la v.a. U n'a pas une distribution de treillis, alors l'expression (5) vaut :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [a(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{s \varphi(s)}{1 - \varphi(s)} \right] = \frac{1}{m}$$

Le processus limite (pour $t = \infty$) est homogène dans le temps. Cela signifie que tout intervalle $(t, t + dt)$ a la probabilité $\frac{dt}{m}$ de contenir un point. Il résulte alors de VI. 2-a que : M étant un point arbitraire donné de l'axe des temps, l'intervalle (M, P_{i+1}) qui sépare M du premier point obtenu après M est une variable aléatoire V associée à U par la transformation 2-b.

V - CONFRONTATION DES MODELES RECURRENENTS avec des processus observés ; ou problème de l'ADEQUATION DE MODELES RECURRENENTS.

1 - Les processus récurrents sont presque exclusivement les seuls modèles ponctuels utilisés en R.O. ; c'est pourquoi ils méritent une étude critique particulière.

La confrontation d'un modèle à un phénomène observable se fait essentiellement par des tests (jugement après épreuve) mais on est guidé dans le choix du modèle ainsi que dans le choix des tests par des "considérations a priori".

2 - Considérations a priori - Il faut ici très nettement séparer le cas du processus de Poisson des autres modèles :

Si des événements instantanés (figurés par des points sur l'échelle des temps) appartiennent à une population *nombreuse* ; si ces événements sont indépendants entre eux et si de plus l'intensité du phénomène d'apparition des événements est uniforme : alors la suite des instants où les événements se produisent est un *processus de Poisson*. L'indépendance mutuelle des événements a deux conséquences importantes :

- indépendance des intervalles,
- loi exponentielle des intervalles.

Le processus est sans mémoire ; la loi des intervalles aussi. Le fait d'avoir des intervalles *indépendants* qui n'obéissent pas à la loi exponentielle est une circonstance beaucoup plus particulière. Cette circonstance peut se justifier si ces intervalles ont une réalité physique (processus de sortie d'un système, par exemple) or le plus souvent il n'en est rien : le processus n'est plus sans mémoire ; les dates des événements sont liées entre elles (et cela n'a a priori rien de surprenant) il est plus difficile d'admettre une forme particulière de liaison qui laisserait les intervalles successifs indépendants en probabilité.

3 - Tests d'hypothèse poissonnienne

Pour tester l'hypothèse qu'un processus ponctuel obéit au modèle de Poisson, on étudie généralement la distribution du nombre $N(h)$ d'événements qui se réalisent sur des intervalles disjoints de même durée h (intervalles $(0, h)$; $(h, 2h)$; ... ; $((n-1)h, nh)$ etc...).

L'hypothèse posée entraîne que N obéit à la loi de Poisson de paramètre ch , si c est la densité du processus.

Ce test (test du χ^2 d'adéquation d'un échantillon à une loi de Poisson) est très insuffisant, car l'*indépendance* des nombres d'événements obtenus sur les intervalles successifs n'est pas mise en doute : elle constitue pourtant la principale caractéristique du processus de Poisson.

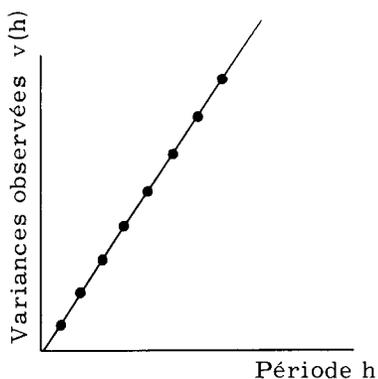
Test des variances - On peut estimer $V(h)$, variance de $N(h)$: soit $v(h)$ la valeur estimée à partir d'un échantillon. On étudie la fonction v pour différentes valeurs de h .

Dans le cas du processus de Poisson : $V(h) = ch$. Les points représentatifs de $v(h)$ doivent alors être sensiblement alignés sur une droite passant par l'origine.

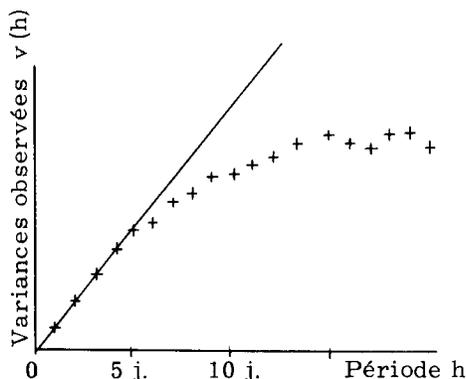
Soit n_1, n_2, \dots, n_k les effectifs obtenus dans k intervalles disjoints, chacun de mesure h .

Exemples de résultats :

Radioactivité naturelle



Arrivées de bateaux dans un port



Comparaison des fonctions $v(h)$ associées à deux réalisations observées de processus ponctuels.

On forme :

$$\tau = \frac{\sum (n_i - \bar{n})^2}{k - 1}$$

c'est l'estimation de $V(h)$.

Cette estimation réalise :

$$E(\tau) = m = c h \quad \text{var}(\tau) = \frac{2}{k - 1} m^2 + \frac{m}{k}$$

L'écart-type de $\tau(h)$ est donc :

$$\sigma_h = c h \sqrt{\frac{2}{k} \sqrt{\frac{k}{k - 1} + \frac{1}{2ch}}}$$

Coefficients de corrélation - Si le processus est de Poisson, les nombres $n_1 n_2 \dots$ considérés précédemment sont indépendants en probabilité ; le coefficient de corrélation de $(n_i n_{i+1})$ doit alors être nul. On peut estimer ce coefficient pour différentes valeurs de h .

4 - Test d'indépendance pour les processus récurrents

Un nombre k entier positif étant donné, on observe les durées successives :

$$Y_1 = \theta_k - \theta_0 \quad Y_2 = \theta_{2k} - \theta_k \quad Y_3 = \theta_{3k} - \theta_{2k} \quad \text{etc...}$$

Soit v_k l'estimation de la variance de Y . On calcule de telles estimations pour différentes valeurs de k . Si le processus est récurrent, v est proportionnel à k .

Remarque :

Si h est assez grand devant la période moyenne m , on peut appliquer ce test sous la forme indiquée en (3) ; c'est-à-dire estimer pour différentes valeurs de h la variance de $n(h)$, nombre de points obtenus sur un intervalle d'amplitude h .

Nous avons vu que

$$V(h) \simeq h \frac{\sigma^2}{m^3} \quad \left(\text{pour } \frac{h}{m} \text{ grand} \right)$$

VI - AUTRES MODELES

1 - Les modèles précédents sont tous à intervalles aléatoires indépendants ; ils réalisent en conséquence les propriétés suivantes :

Si $V(h)$ est la variance du nombre de points sur $(t, t + h)$: $V(h)$ est proportionnel à h (ou asymptotiquement proportionnel à h pour $h = \infty$).

Si $v(n)$ est la variance de la somme de n intervalles consécutifs : $v(n)$ est proportionnel à n .

Dans la pratique, ces propriétés sont rarement réalisées pour les grandes valeurs de h (ou de n) comme le montre l'un des exemples ci-dessus. Il y a donc lieu de se méfier de ces modèles pour représenter les arrivées dans un système proche de la saturation ; et à plus forte raison quand on est pratiquement à la saturation (stockage de produits avant ou après le passage en usine).

Pour cette raison en particulier, il est indispensable de pouvoir disposer de modèles relativement simples, mais très nettement différents des modèles précédents.

On peut citer trois types de modèles non récurrents (au sens très étroit donné plus haut) étudiés ces dernières années.

- a) Suites Markoviennes d'intervalles,
- b) Processus systématiques perturbés,
- c) Modèles à mémoire, localement poissonniens.

2 - Suites Markoviennes

On suppose que les intervalles successifs U_0, U_1, U_2, \dots forment une suite aléatoire de Markov homogène dans le temps. Ce modèle a été étudié par J. Th. Runnenburg (voir bibliographie).

Si ce modèle est plus général que les précédents, il est encore à dispersion croissante. On a en effet, avec les notations précédentes

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \left(\frac{V_h}{h} \right) = c \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{v_n}{n} \right) = a$$

Parmi les suites markoviennes, il faut citer les processus ponctuels multiplicatifs et les processus en cascade (voir M.S. Bartlett et D.G. Kendall) qui ont été utilisés en biologie (croissance de population) et en physique (cascades nucléaires).

3 - Processus systématique perturbé

Definitions du processus :

Soit $\{A_0 ; A_1 ; \dots ; A_n ; \dots\}$ un processus systématique.

$$A_0 = 0 \quad \overline{A_0 A_1} = \overline{A_1 A_2} = \dots = \overline{A_{n-1} A_n} = a$$

où a est une constante donnée.

On pose :

$$\overline{A_0 P_0} = U_0 \quad \overline{A_1 P_1} = U \quad \dots \quad \overline{A_n P_n} = U_n$$

où les $\{U_i\}$ sont des v. a. indépendantes parentes, par exemple positives. On désigne par $\varphi(s)$ la f. c. de U .

Le processus $\{P_0 ; P_1 ; \dots ; P_n \dots\}$ est dit "*Processus systématique perturbé*".

On notera que les points P ne se rencontrent pas nécessairement dans l'ordre de leurs arrivées.

Le processus des $\{A_i\}$ est rendu homogène si l'on choisit A_0 aléatoire tel que $\overline{OA_0}$ obéisse à la loi uniforme sur $[0, a]$. La loi uniforme est en effet obtenue à partir de la constante a par la transformation (IV-2b).

Propriétés - Le segment $\overline{OP_k} = \overline{OA_0} + k a + U_k$ a pour f. c.

$$\varphi_k(s) = \frac{1 - e^{-as}}{as} e^{-kas} \varphi(s)$$

Ces fonctions $\{\varphi_k\}$ ne jouent pas le rôle des fonctions utilisées en III-1 car P_k n'est pas nécessairement le même point. On obtient néanmoins $\mathfrak{N}_1(s)$ par la relation suivante (superposition de processus) :

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_1(s) &= \varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_k + \dots \\ &= \frac{1 - e^{-as}}{as} \frac{1}{1 - e^{-as}} \varphi(s) = \frac{\varphi(s)}{as} \end{aligned}$$

d'où $dM_1(t) = \frac{1}{a} F(t) dt$ si $F(t)$ est la f. r. de U .

Désignons par $F_k(t)$ la f. r. de $\overline{OP_k}$.

La f. g. de $N(t)$, nombre de points obtenus sur $(0, t)$ est alors :

$$g(u, t) = \prod_k [1 - F_k(t) + u F_k(t)]$$

on en déduit

$$M_2(t) = E [N(N - 1)] = \left[\frac{\sigma^2 g}{u^2} \right]_{u=1} = 2 \sum_{i < j} F_i(t) F_j(t)$$

Si $E(U)$ est grand devant a , la loi de probabilité du nombre de points sur $(t, t + h)$ est sensiblement une loi de Poisson si h est petit ; c'est sensiblement une loi de Laplace-Gauss si h est au moins de l'ordre de grandeur de $E(U)$.

4 - Modèles à mémoire

Dans l'article suivant, Claude Rebol présente un modèle à mémoire de processus ponctuel. Chaque réalisation du processus est à densité moyenne convergente ; mais la limite est aléatoire. On peut songer à utiliser un tel modèle dans des problèmes posés dans les Sciences Humaines tels que : évolutions d'opinions, de modes ; développements d'habitudes. Il peut donner l'idée de modèles plus variés.

BIBLIOGRAPHIE

- G. POLYA - Sur quelques points de la théorie des probabilités, *Ann. Inst. H. Poincaré*. 1930, p. 117.
- C. PALM - Intensitätsschwankungen im Fernsprechverkehr, Stockholm 1943.
- J.L. DOOB - Renewal theory from the point of view of the theory of probability, *Tr. Am. Math. Soc.* 63, 1948, p. 422.
- H. WOLD - Sur les processus stationnaires ponctuels, C.N.R.S. Lyon 1948.
- W. FELLER - An introduction to probability theory and its applications, Wiley, New-York 1950.
- A. RAMAKRISHNAN - 1950, Stochastic processes relating to particles distributed in a continuous infinity of states. *Proc.*

Cambridge. Phil. Soc. 46-595. Voir également *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 48-451 et 49-473.

- M.S. BARTLETT et D.G. KENDALL - On the use of the characteristic functional in the analysis of some stochastic processes occurring in physics and biology. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 47, 65-1951.
- D.G. KENDALL - Les processus de croissance en biologie, *Ann. Inst. H. Poincaré-13*, (fasc. 1), 43-1952.
- A. BLANC-LAPIERRE - Considérations sur certains processus ponctuels, Colloque Analyse Statistique, Bruxelles, 1954.
- J. Th. RUNNENBURG - On the use of Markov processes in one server waiting-time problems and renewal theory, Thesis. Poortpers. Amsterdam 1960.
- L. TAKACS - Introduction to the theory of queues (voir appendice p. 222, Recurrent processes), Oxford University Press. 1962.
- M. GIRAULT - Stockage régulateur d'un écoulement continu. *Cahier n° 4 du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle*, Paris, 1962.
- D.R. COX - Renewal theory, Methuen & Co, Londres 1962.