ANIS KUMAR MAITRA

Sur la théorie de la décision dans le cas d'un nombre fini d'états

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 9 (1966), p. 9-78

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1966__9__9_0>

PRÉFACE

On formalise, d'une façon maintenant classique, les décisions en présence d'incertitudes de la façon suivante : sont donnés un ensemble d'états, un ensemble de conséquences, et les actes sont conçus comme des applications du premier dans le second.

On sait que les recherches menées, depuis Ramsey, jusqu'à B. de Finetti et J. Von Neumann, à propos de la logique des décisions prises en présence d'incertitudes, semblent avoir trouvé leur achèvement dans la théorie classique de la Probabilité et de l'Utilité, telle que l'a formalisée L. J. Savage il y a une dizaine d'années : à partir de postulats exprimant de manière rigoureuse que la décision à prendre n'influe pas sur l'état (incertain) qui se produira, et que les préférences de l'individu qui choisit jouissent d'une cohérence interne conforme à l'intuition courante, L.J. Savage déduit que les seules structures d'ordre entre les actes, compatibles avec les postulats, sont celles que définit l'espérance mathématique d'une fonction d'utilité (au reste arbitraire) calculée à partir d'une distribution de probabilité sur les états (également arbitraire).

Pour arriver à ce résultat, il est nécessaire d'admettre, d'une part, que peuvent être ordonnés, en conformité avec les postulats, *tous* les actes, c'est-à-dire toutes les applications de l'ensemble des états dans l'ensemble des conséquences - et d'autre part, que l'ensemble des états, s'il n'est pas d'emblée donné comme un ensemble infini et continu, peut être doué ad libitum d'une telle structure ; on étend, ce faisant, le problème initial, en admettant que les postulats ne doivent pas cesser d'être satisfaits. C'est à ce prix qu'on obtient l'unicité de la probabilité, et l'unicité (à une transformation linéaire près), de l'utilité.

Il est assez naturel de se demander si cette théorie classique de la décision peut être affaiblie, de manière à se développer intégralement dans le cas d'un nombre fini d'états. On renoncerait à l'unicité des probabilités et des utilités, mais on devrait pouvoir conserver la preuve de leur existence.

Des recherches dans cette voie étaient fortement suggérées par B. de Finetti, avec la conjecture qu'une probabilité qualitative obéissant à la règle d'addivité, implique l'existence d'une probabilité numérique. On sait que cette conjecture, regardée longtemps comme un problème ouvert fut controuvée il y a peu d'années par des résultats de Pratt, Kraft et Seidenberg. Ces derniers auteurs ont montré que pour assurer l'existence d'une probabilité numérique, il fallait ajouter à la condition d'addivité simple exprimée par B. de Finetti, d'autres conditions plus restrictives.

Le travail de A. Maitra s'applique d'abord à ce problème précis : il donne, sous le nom de "condition d'addivité étendue", un énoncé quelque peu différent, et qu'on pourra juger plus naturel, des conditions visées par les auteurs mentionnés plus haut.

Dans la suite de son travail, A. Maitra donne la formulation axiomatique, analogue à celle qu'a proposée L.J. Savage, du problème de décision en face d'incertitudes portant sur un nombre fini d'états. Le postulat de L.J. Savage exigeant la continuité - et permettant d'aboutir à l'unicité de la probabilité - doit être remplacé par un postulat plus faible.

Enfin A. Maitra a examiné les conséquences de la finitude des états sur le concept d'utilité : on trouve en général une indétermination analogue à celle qui affecte la probabilité.

Chemin faisant, A. Maitra a reconnu et signalé d'intéressants et difficiles problèmes, concernant notamment la programmation bilinéaire.

Les résultats obtenus par A. Maitra sont à nos yeux fort importants : le postulat de continuité de la Théorie classique de la décision constitue une exigence très forte, et il est intéressant de montrer comment, en restant dans le cadre des ensembles finis qui peuvent décrire un problème de décision en face d'incertitudes, une certaine cohérence logique implique l'existence de probabilités et d'utilités, qui ne sont plus uniques. Les postulats convenables et les théorèmes fondamentaux ont été donnés par A. Maitra. Son travail servira de point de départ pour d'autres recherches (dont certaines sont déjà en cours) visant les conséquences pratiques pour l'analyse des décisions économiques par exemple.

Le travail de A.K. Maitra a fait l'objet d'un mémoire intitulé : "Sur la Théorie de la Décision dans le cas d'un nombre fini d'états".

Ce mémoire a été reçu comme Thèse de Doctorat de l'Université de Paris, avec la mention "Très Honorable". Le jury, constitué par les Professeurs J. Ville (Président), D. Dugué, M.

Girault, et nous-même, a beaucoup apprécié la qualité du travail d'A.K. Maitra, ainsi que la clarté de son exposé, et a souhaité, en raison de l'intérêt du problème et des résultats obtenus par A.K. Maitra, qu'une publication de son mémoire soit faite, par exemple dans les cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle, et le présent Cahier est l'aboutissement de ce vœu.

Nous espérons que beaucoup voudront bien faire l'effort nécessaire à une lecture attentive des pages qui suivent ; ils en seront récompensés. En outre si quelques-uns sont tentés par l'étude des problèmes, nombreux et variés, qui se montrent ou se cachent à chaque pas important de cette lecture, alors c'est la praxéologie qui aura quelque chance de tirer profit de leurs travaux. Il s'agit là d'une discipline aussi fondamentale et infiniment moins coûteuse que bien d'autres, et non, certes, d'une discipline contemplative.

G. MORLAT

CHAPITRE I

SUR L'EXISTENCE D'UNE MESURE SUR UN EMSEMBLE FINI COMPLÈTEMENT ORDONNÉ

1 - NOTIONS PRELIMINAIRES

Soient A et B deux ensembles quelconques. La relation d'inclusion d'un dans l'autre est représentée par $\subseteq$. Par exemple, $A \subseteq B$ signifie que A est inclus dans B, c'est-à-dire tous les éléments de A sont contenus dans B . Si chacun des deux est inclus dans l'autre, c'est-à-dire si les deux relations $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$ sont simultanément valables, nous écrirons $A = B$. D'autre part, la relation $A \subset B$ signifie strictement une inclusion : A est inclus dans B , mais B n'est pas inclus dans A .

La soustraction $B - A$ sera définie par convention si et seulement si $A \subseteq B$: si nous avons $A = B$, A et B ont les mêmes éléments ; dans ce cas, $B - A = A - B = \emptyset$ où $\emptyset$ est l'ensemble vide. Autrement, $B - A$ est l'ensemble des éléments de B, qui ne se trouvent pas dans A .

$A + B$ définira la somme de A et B , $A \cup B$ l'union de A et B , $A \cap B$ l'intersection de A et B , et ainsi l'on peut facilement voir que $A + B = A \cup B + A \cap B$. Il faut noter que dans $A + B$, un élément peut figurer plus d'une fois.

Une relation binaire entre les éléments d'un ensemble est représentée par $\leqslant\cdot$; la signification de $\leqslant\cdot$ employée dans un cas est toujours clairement définie par rapport au contexte. Par exemple, $x \leqslant\cdot y$ peut signifier "x n'est pas plus grand que y" (dans ce cas, les relations $x \leqslant\cdot y$ et $x \leqslant y$ ont le même sens), ou "x n'est pas préféré à y" ou "x n'est pas plus probable que y" ou quelqu'autre sens bien défini. Quand les deux relations $x \leqslant\cdot y$ et $y \leqslant\cdot x$ sont simultanément valables, nous écrivons $x =\cdot y$. De plus, quand $y \leqslant\cdot x$ n'est pas vraie, on peut écrire :

$$x <\cdot y \quad \text{si} \quad x \leqslant\cdot y .$$

Un ensemble S qui contient les éléments a_1, a_2, a_3, sera noté $\{a_1 , a_2 , a_3\}$; les sous-ensembles de S seront notés :

$\emptyset$, $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$, $\{a_1 , a_2\}$, $\{a_1 , a_3\}$, $\{a_2 , a_3\}$, $\{a_1 , a_2 , a_3\}$.

Soit $\leqslant\cdot$ une relation binaire par laquelle on ordonne les sous-ensembles de S (qui contient les n éléments $a_1 , a_2 , \ldots a_n$, n fini). Nous représenterons par $\mathcal{S}$ l'ensemble des sous-ensembles de S et par $A_1 , A_2 , \ldots A_{2^n}$ les éléments de $\mathcal{S}$.

DEFINITION 1. Comparabilité (C) : la relation $\leqslant\cdot$ sera dite satisfaire la condition de Comparabilité, si pour chaque paire d'éléments A_i et A_j de $\mathcal{S}$, $A_i \leqslant\cdot A_j$ ou $A_j \leqslant\cdot A_i$ (ou les deux relations sont simultanément valables).

Transitivité (T) : la relation $\leqslant\cdot$ sera dite satisfaire la condition de Transitivité, quand A_i , A_j , A_k sont trois éléments quelconques de $\mathcal{S}$, si $A_i \leqslant\cdot A_j$ et $A_j \leqslant\cdot A_k$, alors nous avons $A_i \leqslant\cdot A_k$.

DEFINITION 2. Une relation binaire notée par $\leqslant\cdot$ sera dite un ordre complet si cette relation satisfait les conditions de Comparabilité et de Transitivité.

DEFINITION 3. Additivité (A) : la relation $\leqslant\cdot$ sera dite satisfaire la condition d'Additivité si pour trois éléments quelconques A_i , A_j , A_k de $\mathcal{S}$ tels que $A_i \cap A_k = A_j \cap A_k = \emptyset$, nous avons :

$$A_i \leqslant\cdot A_j \quad \text{si et seulement si} \quad A_i \cup A_k \leqslant\cdot A_j \cup A_k .$$

2 - LE PROBLEME DE L'EXISTENCE D'UNE MESURE COMPATIBLE AVEC UN ORDRE

En donnant les valeurs non-négatives $p(a_i)$ aux $\{a_i\}$ $(i = 1 , 2 , \ldots n)$ et la valeur $p(a_{i_1}) + p(a_{i_2}) + \ldots + p(a_{i_l})$ au sous-ensemble :

$$A = \{a_{i_1} , a_{i_2} , \ldots a_{i_l}\} ,$$

on obtient un ordre complet sur les éléments de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire, les sous-ensembles de S seront ordonnés selon les valeurs données. Notons par $p(A)$ la valeur attachée à A .

DEFINITION 4. Un ordre complet donné par la relation binaire $\leqslant\cdot$ sur les sous-ensembles d'un ensemble fini est dit provenir d'une mesure, si l'on peut attacher aux éléments a_i de cet ensemble fini les valeurs non-négatives $p(a_i)$ telles que quand $A_i \leqslant\cdot A_j$ où

$$A_i = \{a_{i_1} , a_{i_2} , \ldots , a_{i_p}\} \quad \text{et} \quad A_j = \{a_{j_1} , a_{j_2} , \ldots , a_{j_q}\} ,$$

nous avons :

$p(A_i) = p(a_i) + p(a_{i_2}) + \ldots + p(a_{i_p})$

$$\leqslant p(A_j) = p(a_{j_1}) + p(a_{j_2}) + \ldots + p(a_{j_q})$$

De plus, quand $A_i \prec A_j$, $p(A_i) < p(A_j)$.

Bruno de FINETTI (1951) a émis la conjecture que chaque ordre de $\mathfrak{S}$ vérifiant les conditions (C), (T) et (A) provient d'une mesure. Il a démontré la vérité de cette conjecture pour $n \leqslant 4$. Mais KRAFT, PRATT, et SEIDENBERG (1959) ont démontré par un contre-exemple que cette hypothèse ne tient pas pour au moins un ordre quand le nombre d'éléments est 5. Dans leur article KRAFT etc. ont pu démontrer l'existence d'une mesure sur un ensemble fini vérifiant les conditions de Transitivité et d'Additivité, en ajoutant deux nouvelles conditions : Polarisabilité et P-Comparabilité. Avant de discuter ces conditions nous allons rappeler la définition suivante et établir le théorème associé que KRAFT etc. ont démontré dans leur article.

DEFINITION 5. Un ordre complètement arbitraire est dit compatible avec une valuation si, quel que soit ϕ, $\phi \precsim \phi$ ne s'obtient jamais (la condition "$\phi \prec \phi$ se produit pour quelque ϕ", peut être exprimée de la façon suivante : il existe une relation :

$$(A_{i_1} + A_{i_2} + \ldots + A_{i_p}) - (A_{j_1} + A_{j_2} + \ldots + A_{j_p}) = \emptyset$$

où A_{i_k} et A_{j_k} $(k = 1, 2, \ldots n)$ sont des éléments de $\mathfrak{S}$ avec $A_{i_k} \precsim A_{j_k}$ pour chaque k, et $A_{i_k} \prec A_{j_k}$ pour au moins un k).

THEOREME 1. Un ordre quelconque sur les éléments de $\mathfrak{S}$ entraîne l'existence d'une mesure, si et seulement si cet ordre est compatible avec une valuation.

Pour démontrer le théorème 1 on a besoin du lemme suivant :

LEMME 1.

(i) Etant donné arbitrairement un système fini d'égalités et d'inégalités $\{l_i > 0\ ,\ l'_j = 0\ ,\ l''_k \geqslant 0\}$ où l_i, l'_j, l''_k sont des formes linéaires des inconnues $a_1, a_2, \ldots a_n$, à coefficients rationnels, on a un algorithme pour décider si le système a une solution, et pour trouver la solution si elle existe.

(ii) Le système $\{l_i > 0\ ,\ l'_j = 0\ ,\ l''_k \geqslant 0\}$ aura une solution quand l'hypothèse (H) sera vraie :

Hypothèse (H) : Pour aucun système de nombres rationnels $\lambda_i \geqslant 0$, μ_j , $\nu_k \geqslant 0$, $\lambda_i > 0$ pour au moins un i , la forme linéaire

$$L = \Sigma\lambda_i l_i + \Sigma\mu_j l'_j + \Sigma\nu_k l''_k$$

n'est égale identiquement à zéro (c'est-à-dire tous les coefficients sont nuls).

Démonstration du lemme 1. Supposons que l'hypothèse H s'applique au système des inégalités et des égalités données.

S'il y a une inégalité $l''_1 \geqslant 0$, on peut représenter le système donné par la disjonction des deux systèmes suivants :

$$\{l_i > 0 \ , \ l''_1 > 0 \ , \ l'_j = 0 \ , \ l''_2 \geqslant 0 \ , \ldots\} \tag{I}$$

$$\{l_i > 0 \ , \ l''_1 = 0 \ , \ l'_j = 0 \ , \ l''_2 \geqslant 0 \ , \ldots\} \tag{II}$$

Si l'hypothèse ne s'appliquait pas au moins à l'un des deux systèmes (I) et (II), nous aurions une identité :

$$\Sigma\lambda_i l_i + \Sigma\mu_j l'_j + \Sigma\nu_k l''_k = 0$$

avec $\lambda_i \geqslant 0$, $\nu_k \geqslant 0$, $\nu_1 > 0$, et également une autre identité de la même forme avec $\lambda'_i \geqslant 0$, $\lambda'_i > 0$ pour quelques i , $\nu'_k \geqslant 0$ pour $k \geqslant 2$ et $\nu'_1 < 0$. Avec $\nu_1 = 1$, et $\nu'_1 = -1$, l'addition des deux inégalités produit une identité contraire à l'hypothèse H . Ainsi l'hypothèse H s'applique à au moins un des deux nouveaux systèmes. Comme conséquence de ce raisonnement on peut supposer que toutes les relations données sont des formes $l_i > 0$ ou $l'_j = 0$.

S'il y a une égalité $l'_j = 0$, où le coefficient de quelque a , disons a_1 , n'est pas nul, on peut utiliser cette relation pour éliminer a_1 des autres égalités et des autres inégalités. On peut facilement voir que l'hypothèse H s'applique au système obtenu lorsque a_1 est éliminé et que le nombre des inconnues est $n-1$. Comme conséquence, nous pouvons supposer qu'il n'y a que des inégalités $l_i > 0$.

Prenons un a , disons a_1 , qui figure effectivement dans le système donné, et écrivons le système sous la forme :

$$m_u - a_1 > 0 \ , \ a_1 - m'_v > 0 \ , \ m''_w > 0$$

où m_u , m'_v , m''_w sont des formes en a_2 , a_3 , ... a_n ; la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution de ce système est que le système :

$$m_u - m'_v > 0 \ , \ m''_w > 0$$

ait une solution. En effet, si $(\bar{a}_2, \bar{a}_3, \dots \bar{a}_n)$ est une solution, alors $\min m_u(\bar{a}) > \max m'_v(\bar{a})$ et en prenant $\bar{a}_1$ arbitrairement entre les valeurs $\min m_u(\bar{a})$ et $\max m'_v(\bar{a})$, on obtient une solution du système donné initialement. De plus, on peut facilement voir que l'hypothèse H s'applique au système en $a_2, a_3, \dots a_n$. Maintenant la démonstration s'achève par induction.

Démonstration du théorème 1. Le théorème est évidemment un corollaire du lemme 1 donné ci-dessus. Si, par exemple, dans une valuation, a_j prend la valeur $\bar{a}_j$, alors un ensemble A_i qui contient a_j r_j fois $(1 \leqslant j \leqslant n)$, prend la valeur $\Sigma r_j \bar{a}_j$, où les r_j sont des nombres entiers choisis arbitrairement. Soit A_k un autre ensemble qui contient a_j t_j fois $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Alors :

$$A_i \leqslant\cdot A_k \quad \text{implique} \quad \Sigma(t_j - r_j)\,\bar{a}_j \geqslant 0$$

et

$$A_i <\cdot A_k \quad \text{implique} \quad \Sigma(t_j - r_j)\,\bar{a}_j > 0 \ .$$

Quant à la soustraction $A_k - A_i$, considérons la forme linéaire $l = \Sigma(t_j - r_j)\,a_j$ (où les a_j sont inconnues). Soit $\{l_i\}$ la suite des formes linéaires qui sont obtenues comme conséquences de $A_k - A_i$ avec $A_i <\cdot A_k$, et soit $\{l'_k\}$ la suite des formes linéaires qui sont obtenues comme conséquences de $A_k - A_i$ avec $A_i \leqslant\cdot A_k$.

L'assertion de l'existence d'une mesure implique que le système $\{l_i > 0 \ , \ l'_k \geqslant 0\}$ a une solution. La condition $\Sigma A_{k_m} - \Sigma A_{i_m} = \emptyset$ entraîne que tous les coefficients de la forme linéaire $L = \Sigma l_i + \Sigma l'_k$ sont égaux à zéro. Alors la condition de compatibilité avec une valuation peut s'exprimer comme suit : pour aucun entier $\lambda_i \geqslant 0$, $\nu_k \geqslant 0$, $\lambda_i > 0$ pour au moins un i, la forme linéaire $L = \Sigma \lambda_i l_i + \Sigma \nu_k l'_k$ n'est égale à zéro (ici, si L correspond à $\Sigma A_{k_m} - \Sigma A_{i_m}$ alors λ_i donne le nombre de fois où $A_k - A_i$ se produit avec $A_i <\cdot A_k$ et ν_k donne le nombre de fois où $A_k - A_i$ se produit avec $A_i \leqslant\cdot A_k$). De plus, étant donné que les coefficients de l'expression L sont homogènes en λ_i, ν_k, l'hypothèse de compatibilité peut également s'exprimer comme suit : pour aucun rationnel $\lambda_i \geqslant 0$, $\nu_k \geqslant 0$ avec $\lambda_i > 0$ pour au moins un i, L n'est égal à zéro. Mais c'est exactement l'hypothèse H autrement exprimée dans le lemme 1, et comme conséquence le système a une solution et la valuation désirée peut être obtenue.

3 - LA CONDITION D'ADDITIVITE ETENDUE

Soient A_{i_j} $(i = 1, 2, \dots m\ ;\ j = 1, 2)$ $2m$ éléments de $\mathfrak{S}$ (l'ensemble des sous-ensembles de S) tels que :

$$A_{i_1} \leqslant A_{i_2} \qquad (i = 1, 2, \dots m)$$

avec au moins pour une des relations une inégalité stricte. Pour chaque A appartenant à $\mathfrak{S}$, si :

$$(A_{1_1} + A_{2_1} + \dots + A_{m_1}) - A \quad \text{et} \quad (A_{1_2} + A_{2_2} + \dots + A_{m_2}) - A$$

(que nous écririons $\sum\limits_{i=1}^{m} A_{i_1} - A$ et $\sum\limits_{i=1}^{m} A_{i_2} - A$ respectivement), sont deux éléments de $\mathfrak{S}$, alors nous avons :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A < \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A$$

DEFINITION 6. Un ordre complet de $\mathfrak{S}$ sera dit satisfaire la condition d'Additivité Etendue (AE) quand cet ordre vérifie la condition donnée ci-dessus, quel que soit $m \geqslant 1$.

Nous démontrons que la condition d'Additivité Etendue satisfaite par un ordre complet sur les éléments de $\mathfrak{S}$, est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une mesure en conformité avec l'ordre déjà donné. Avant cela nous donnons les deux théorèmes suivants pour indiquer les implications de la nouvelle condition.

THEOREME 2. La condition d'Additivité Etendue entraîne la condition d'Additivité.

Démonstration du théorème 2. Supposons qu'un ordre complet de $\mathfrak{S}$ satisfait la condition (AE). Soit A_i, A_j, et A_k trois éléments de $\mathfrak{S}$ tels que $A_i \cap A_k = A_j \cap A_k = \emptyset$. Il est évident que $A_i \cup A_k$ et $A_j \cup A_k$ sont des éléments de $\mathfrak{S}$.

Alors si :

$$A_i \cup A_k < A_j \cup A_k$$

nous aurons :

$$A_i \cup A_k - A_k < A_j \cup A_k - A_k$$

c'est-à-dire $A_i < A_j$ (en prenant A_k comme A et $m = 1$).

Egalement, étant donné :

$$A_i \prec\cdot A_j$$

nous aurons :

$$A_i \cup A_k \prec\cdot A_j \cup A_k$$

parce que si nous avions :

$$A_j \cup A_k \prec\cdot A_i \cup A_k$$

alors nous devrions avoir :

$$A_j \prec\cdot A_i \,.$$

L'argument donné ci-dessus est a fortiori applicable quand la relation est $\preccurlyeq\cdot$ au lieu de $\prec\cdot$.

DEFINITION 7. Un ordre complet de $\mathfrak{F}$ sera dit satisfaire la condition d'Additivité Généralisée (AG) si nous avons :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} \prec\cdot \sum_{i=1}^{m} A_{i_2}$$

où :

$$A_{i_1} \,,\; A_{i_2} \,,\; \sum_{i=1}^{m} A_{i_1} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} \qquad (i = 1 \,, 2 \,, \ldots \, m)$$

sont des éléments de $\mathfrak{F}$, $A_{i_1} \preccurlyeq\cdot A_{i_2}$ pour chaque i , et $A_{i_1} \prec\cdot A_{i_2}$ pour quelques i .

THEOREME 3. La condition d'Additivité Etendue entraîne la condition d'Additivité Généralisée.

Démonstration du théorème 3. La proposition suit si on prend $A = \emptyset$ quand la condition d'Additivité Etendue est satisfaite.

Il est évident maintenant que la condition d'Additivité Etendue est plus forte que la condition d'Additivité et que la condition d'Additivité Généralisée.

THEOREME 4. Un ordre complet de $\mathfrak{F}$ entraîne l'existence d'une mesure si et seulement si cet ordre vérifie la condition d'Additivité Etendue.

Démonstration du théorème 4. La proposition découle du théorème 1 si l'on peut démontrer que la condition d'Additivité Etendue est nécessaire et suffisante pour qu'un ordre complet de $\mathfrak{S}$ soit compatible avec une valuation.

Supposons tout d'abord qu'un ordre complet de $\mathfrak{S}$ vérifie la condition (AE). Ainsi :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A \prec \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A \tag{1}$$

où :

$$A_{i_1}\ ,\ A_{i_2}\ ,\ \sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A$$

sont des éléments de $\mathfrak{S}$, $A_{i_1} \preccurlyeq A_{i_2}$ pour chaque i, et $A_{i_1} \prec A_{i_2}$ pour quelques i.

Supposons que l'on ait :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} = \emptyset .$$

Cela veut dire que chaque a_j (a_j appartenant à S, $j = 1, 2, \ldots n$) qui se trouve dans $\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}$ se trouve aussi le même nombre de fois dans $\sum_{i=1}^{m} A_{i_2}$ et réciproquement. Il suit que chaque a_j qui se trouve dans $\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A$ se trouve aussi dans $\sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A$ et réciproquement. Autrement dit, $\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A$ et $\sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A$ désignent le même ensemble. Ainsi les deux relations :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A \preccurlyeq \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A \preccurlyeq \sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A$$

sont simultanément valables, en contradiction de (1).

Ainsi si la condition (AE) est vérifiée par un ordre complet, nous n'aurons jamais :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} = \emptyset$$

ou $A_{i_1} \preccurlyeq A_{i_2}$ pour tout i, $A_{i_1} \prec A_{i_2}$ pour quelques i. Autrement dit la condition (AE) est suffisante pour que l'ordre complet de $\mathfrak{S}$ soit compatible avec une valuation.

Ensuite supposons qu'un ordre complet de $\mathcal{S}$ est compatible avec une valuation.

Supposons que A_{i_1} et A_{i_2} sont des éléments de $\mathcal{S}$ et soit A un élément de $\mathcal{S}$ tel que $\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A$ et $\sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A$ sont aussi des éléments de $\mathcal{S}$. Etant donné $A_{i_1} \lesssim A_{i_2}$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ et $A_{i_1} < A_{i_2}$ pour au moins un i, soit si c'est possible :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A \lesssim \sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A$$

Considérons maintenant les relations $A_{i_1} \lesssim A_{i_2}$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ avec $A_{i_1} < A_{i_2}$ pour au moins un i et :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A \lesssim \sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A$$

La somme des éléments à gauche est :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} + \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A$$

et la somme des éléments à droite est :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_2} + \sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A .$$

Ces quantités ne sont pas nécessairement dans $\mathcal{S}$. Nous avons :

$$\left(\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} + \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A\right) - \left(\sum_{i=1}^{m} A_{i_2} + \sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A\right) = \phi$$

en contradiction avec l'hypothèse de compatibilité avec une valuation.

La démonstration du théorème 4 est maintenant complète en vertu du théorème 1 et de ce qui est démontré ci-dessus.

Le théorème 5 est aussi important que le théorème 4 et nous pensons qu'il faut considérer les deux théorèmes ensemble.

THEOREME 5. Supposons qu'un ordre complet de $\mathcal{S}$ vérifie la condition (AE). Etant donné $A_{i_1} \lesssim A_{i_2}$ $(i = 1, 2, \ldots m)$ et $A_{i_1} < A_{i_2}$ pour au moins un i où A_{i_1}, A_{i_2} sont des éléments de $\mathcal{S}$, si $A = \sum_{j} A_{j_3}$ (j n'est pas défini et A n'est pas nécessairement dans $\mathcal{S}$, mais les A_{j_3} sont dans $\mathcal{S}$) tel que ·

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A$$

sont des éléments de $\mathfrak{S}$, alors nous avons :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A \prec \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A$$

Démonstration du théorème 5. La démonstration de cette proposition est assez simple. Il est toujours possible de trouver A_i (A_i est dans $\mathfrak{S}$ pour tout i ; il est possible que A_i soit égal à $\emptyset$) et de diviser les m inégalités (et les égalités, s'il y en a) en p groupes tels que les deux expressions dans chacune des p paires suivantes

$$\sum_{i=1}^{i_1} A_{i_1} - A_1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{i_1} A_{i_2} - A_1 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=i_1+1}^{i_2} A_{i_1} - A_2 \quad \text{et} \quad \sum_{i=i_1+1}^{i_2} A_{i_2} - A_2 \qquad (2)$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\sum_{i=i_{p-1}+1}^{m} A_{i_1} - A_p \quad \text{et} \quad \sum_{i=i_{p-1}+1}^{m} A_{i_2} - A_p \qquad (p)$$

sont des éléments de $\mathfrak{S}$. Dans chaque cas, nous devons avoir par la condition (AE),

$$\sum_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} A_{i_1} - A_j \preceq \sum_{i=i_{j-1}+1}^{i_j} A_{i_2} - A_j \qquad j = 1, 2, \ldots p \; ; \; i_0 = 0 \, , \; i_p = m \, ,$$

où au moins une des relations est une inégalité stricte. (Evidemment, $p \leq m$ ou l'égalité se produit si $A_{i_1} \cap A_{i_2} = \emptyset$ pour tout i et si $A_j = \emptyset$ pour tout j).

Si maintenant $\sum_{j=1}^{p} A_j = A$, nous devons avoir, par la condition (AE) :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - \sum_{j=1}^{p} A_j \prec \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - \sum_{j=1}^{p} A_j$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A \prec \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A$$

Si $A_j \neq A$, nous pouvons continuer de la même façon et trouver B_j (B_j est dans $\mathcal{S}$, pour $j = 1, 2, \ldots q$ et B_j peut être égal à $\emptyset$) et diviser les p inégalités en q groupes tels que, par la condition (AE) :

$$\sum_{j=j_{r-1}+1}^{j_r} A_{j_1} - B_r \leqslant \sum_{j=j_{r-1}+1}^{j_r} A_{j_2} - B_r \qquad r = 1, 2, \ldots, q \; ; \; j_0 = 0 \; , \; j_q = p)$$

où au moins une des relations est une inégalité stricte. (Evidemment $q \leqslant p$ ou l'égalité se produit si $A_{j_1} \cap A_{j_2} = \emptyset$ et si $B_r = \emptyset$ pour tout r) .

Si maintenant $\sum_{j=1}^{p} A_j + \sum_{r=1}^{q} B_r = A$, nous devons avoir par la condition (AE) :

$$\sum_{r=1}^{q} \sum_{j=j_{r-1}+1}^{j_r} A_{j_1} - \sum_{r=1}^{q} B_r \lessdot \sum_{r=1}^{q} \sum_{j=j_{r-1}+1}^{j_r} A_{j_2} - \sum_{r=1}^{q} B_r$$

c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A \lessdot \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A$$

Si $\sum_j A_j + \sum_r B_r \neq A$ nous continuons la procédure jusqu'à ce que nous trouvions A_i , B_r , C_s , etc. tels que :

$$\sum_i A_i + \sum_r B_r + \sum_s C_s + \ldots = A$$

et la démonstration sera complète. Bien entendu, les éléments A_i , B_r , C_s , etc. sous réserve de la condition que leur somme soit égale à A , se trouveront certainement à un moment, parce que

$$\sum_{i=1}^{m} A_{i_1} - A \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m} A_{i_2} - A$$

sont des éléments de $\mathcal{S}$.

4 - LES AXIOMES DE KRAFT, PRATT ET SEIDENBERG

Dans cette partie de cet article nous discuterons les conditions de Polarisabilité (P) et de P-Comparabilité (PC) .

Soit $\mathcal{S}'$ un ensemble. Les éléments de $\mathcal{S}'$ ne seront pas définis axiomatiquement, mais $\mathcal{S}'$ sera obtenu intuitivement à partir d'un ensemble S par une méthode simple. Par raison de commodité, $\mathcal{S}'$ sera infini, mais dans chaque cas il y aura une limite supérieure du nombre d'éléments qui seront utilisés dans les calculs. En fait, on peut prendre $\mathcal{S}'$ comme l'ensemble de tous les ensembles possibles. Par conséquent, on ne pourra pas comparer tous les éléments de $\mathcal{S}'$. On supposera que les conditions (T), (A), et (AG) sont satisfaites sur $\mathcal{S}'$. De plus, on suppose les deux axiomes suivants :

Polarisabilité (P) : Pour chaque sous-ensemble A appartenant à $\mathcal{S}'$, on peut trouver deux sous-ensembles A' et A'' dans $\mathcal{S}'$ avec $A' \cap A'' = \emptyset$ tels que $A = A' \cup A''$ avec $A' \doteq A''$ (c'est-à-dire $A' \lessdot A''$ et $A'' \lessdot A'$ sont simultanément vraies).

P-Comparabilité (PC) : Si $A_1 = A'_1 \cup A''_1$ et $A_2 = A'_2 \cup A''_2$ avec $A'_1 \doteq A''_1$ et $A'_2 \doteq A''_2$ alors :

$$A_1 \lessdot A_2 \Longrightarrow A'_1 \lessdot A'_2 .$$

Ceci étant admis, KRAFT, PRATT et SEIDENBERG ont énoncé et ont démontré leur dernier théorème comme suit :

Soit S un ensemble de n éléments (mutuellement exclusifs) de $\mathcal{S}'$ et soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des 2^n sous-ensembles de S . Notons :

$$\mathcal{S} = \{A_1, A_2, \ldots \ldots, A_{2^n}\}$$

et supposons que (sans perte de généralité) :

$$\emptyset = A_1 \lessdot A_2 \lessdot A_3 \lessdot \ldots \lessdot A_{2^n} = S$$

Alors cet ordre sur les éléments de $\mathcal{S}$ est compatible avec une valuation.

Remarque : Il est évident que ces axiomes (P) et (PC) (et par conséquent, cette méthode) exigent de votre intuition des comparaisons souvent assez compliquées - les comparaisons des ensembles hypothétiques en dehors de la situation pratique. Par exemple, supposons que $A_{i_1} \lessdot A_{i_2}$ pour $i = 1, 2, \ldots m-1$. Soient A_{m_1} et A_{m_2} deux ensembles et on doit avoir une et une seule relation : (i) $A_{m_1} \lessdot A_{m_2}$ ou (ii) $A_{m_1} \doteq A_{m_2}$ ou (iii) $A_{m_2} \lessdot A_{m_1}$. Pour trouver si la relation $A_{m_1} \lessdot A_{m_2}$ sera valable pour que l'ordre entraîne l'existence d'une mesure, il faut polariser $\sum_{i=1}^{m} A_{i_1}$ et $\sum_{i=1}^{m} A_{i_2}$ pour vérifier si ces deux ensembles s'expriment comme deux sous-ensembles S_1 et S_2

de $\mathcal{S}'$, tels que chaque élément x de S_1 correspond à un et un seul élément y de S_2 (et réciproquement), où $\{x\} =\cdot \{y\}$. La vérification est faite sans imposer de relation entre A_{m_1} et A_{m_2}. Le but de ces axiomes est sûrement atteint car la condition "$\phi <\cdot \phi$ n'est jamais obtenu" est automatiquement imposée sur un ordre par votre intuition et un ordre qui n'entraînera pas des valeurs numériques est automatiquement rejeté.

D'autre part, nous supposons qu'on ne considère que l'ordre sur les éléments de $\mathcal{S}$. On n'a pas besoin d'autres ensembles en dehors de $\mathcal{S}$. Plus précisément nous supposons qu'un ordre doit être donné sur $\mathcal{S}$ sans considérer l'existence de valeurs numériques correspondantes. Quand on veut examiner l'existence d'une mesure sur S qui entraîne le même ordre sur $\mathcal{S}$ on peut adopter la condition (AE) comme un axiome qui sera une condition nécessaire et suffisante pour que cette mesure existe. Ainsi nous pensons que l'idée dans ce cas est plus générale (non-restrictive) que celle de KRAFT etc.

CHAPITRE II

THÉORIE DE LA DÉCISION ET CONCEPT DE PROBABILITÉ SUBJECTIVE

Dans le chapitre précédent on a étudié l'existence d'une mesure qui conserve un ordre complet sur les sous-ensembles d'un ensemble fini. Maintenant, nous voulons décrire comment cette étude se montre utile dans la théorie de la prise de décision aussi bien que dans les recherches sur la probabilité subjective. Avant d'entrer dans les détails nous allons considérer les questions suivantes :

(i) Que signifie la prise de décision ?

(ii) Qui prend la décision ? Quelles sont les caractéristiques de ce décideur ?

(iii) La probabilité subjective, qu'est-ce qu'elle définit ? Quelles sont ses implications ?

Le but de ce chapitre est d'essayer de répondre à ces questions, puis de montrer comment on peut déterminer les valeurs des probabilités subjectives et également comment la méthode pour déterminer ces valeurs est reliée à l'étude de l'existence d'une mesure établie par la condition d'Additivité Etendue.

La Décision :

Que ce soit au niveau d'un individu et de sa vie quotidienne, ou d'un gouvernement et d'un plan qu'il veut entreprendre pour augmenter la production d'acier, ou de l'O.N.U. et d'un projet destiné à maintenir la paix dans le monde, la personne qui décide (ou l'organisme composé de plusieurs décideurs avec le même intérêt) doit pouvoir préciser :

(i) les différents évènements extérieurs qui peuvent se produire,

(ii) les actions entre lesquelles il faut choisir, et

(iii) les conséquences de ces actions suivant l'événement qui se sera produit.

Le choix se portera sur l'action qui semble la meilleure.

Le champ des décisions peut se diviser, en général, selon que la décision est prise dans les conditions (a) de la certitude, (b) du risque, (c) de l'incertitude et (d) d'une combinaison du risque et de l'incertitude, cette dernière classe étant la région de l'inférence statistique.

Si l'événement qui se produira à l'avenir est connu à l'avance, on dit qu'on a à prendre une décision "devant la certitude". Dans ce cas, on n'aura pas de peine à déterminer l'acte ayant les meilleures conséquences dans la mesure où ces conséquences auront été soigneusement étudiées.

On prend une décision "devant le risque" s'il est connu que chaque action conduira à un ensemble de conséquences spécifiques qui suivront les événements dont les chances relatives de se produire dans l'avenir sont connues. Par exemple, presque tout le monde accepte le fait que si je lance une pièce, la chance de produire face est 1/2, étant entendu qu'il n'y a aucune raison de supposer la pièce imparfaite. Alors on prendra une décision devant le risque si l'on doit choisir entre les deux actes dont l'un conduit à une rémunération de 20 francs s'il y a face (dans un coup d'une pièce parfaite) ou rien, et l'autre à une somme fixée de 15 francs.

Quand on ne connaît pas les chances respectives des événements qui peuvent se produire à l'avenir, on prend une décision "devant l'incertitude", étant donné un ensemble de conséquences spécifiques de chaque action.

C'est une combinaison de l'incertitude et du risque qui constitue le champ des recherches de la théorie moderne de l'inférence statistique. On connaît les conséquences possibles suivant les événements qui auront lieu mais on ne connaît la conséquence exacte qu'après l'arrivée d'un des événements. Au commencement, les chances respectives des événements ne sont pas connues, mais on les détermine en réduisant, par conséquent, le problème de prendre la décision devant l'incertitude au même problème que devant le risque.

Plusieurs questions se posent ici naturellement : quelles sont les chances d'événements de se produire à l'avenir et comment se déterminent-elles ? Est-il possible de déterminer des règles qui indiqueront l'action la plus utile et la plus souhaitable ? Nous étudierons la première question un peu plus tard dans ce chapitre, et la deuxième question dans le prochain chapitre, nous bornant ici à indiquer des règles reliées au comportement du décideur : la personne ou l'organisme qui décide.

L'Homme Rationnel :

Beaucoup d'économistes et de psychologues ont essayé de rendre compte du comportement du décideur, relatif à la prise de décision. La méthode des théoriciens consiste à faire des suppositions et ensuite à établir des théorèmes qui se fondent sur ces suppositions parmi lesquelles la plus importante est que le décideur est un homme rationnel : une expression consacrée qui sera beaucoup utilisée par la suite. Par "homme rationnel" nous entendrons un homme qui possède deux caractéristiques : (i) il est complètement informé sauf sur l'événement exact qui se produira à l'avenir, et (ii) il est rationnel.

(i) L'homme rationnel est supposé connaître non seulement toutes les possibilités d'actions s'offrant à lui mais aussi les conséquences de ces actions. Il peut énumérer les différents événements qui peuvent se produire dans l'avenir sans toutefois que l'événement exact qui se produira lui soit connu.

(ii) L'homme rationnel suit strictement la logique dans ses raisonnements : il ne se contredit jamais. Ceci signifie deux choses :

a) Il peut établir un préordre entre les différents événements et également entre les actions, et

b) Ses choix indiquent qu'il vise toujours à maximiser "quelque chose".

Deux conditions sont nécessaires pour que l'homme rationnel puisse ordonner tous les événements et toutes les actions suivant un ordre non strict. Premièrement, étant donnés A et B deux événements quelconques, il peut toujours dire si A et B sont équiprobables (c'est-à-dire les chances de A et B de se produire sont égales) et sinon, lequel des deux est plus probable que l'autre (par exemple, il doit pouvoir dire que A est aussi probable ou moins probable que B etc.). Egalement, étant données deux actions $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$, l'homme rationnel peut toujours indiquer celle qu'il préfère à l'autre. (Nous verrons dans le prochain chapitre que l'homme rationnel ordonne les actions selon sa préférence pour l'une ou l'autre, et l'ordre des événements en résulte forcément). Deuxièmement, ses préférences sont transitives. S'il préfère $\mathscr{A}$ à $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}'$ à $\mathscr{A}''$, alors il préfère $\mathscr{A}$ à $\mathscr{A}''$. De même, l'indifférence entre $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}'$ et celle entre $\mathscr{A}'$ et $\mathscr{A}''$ impliquent nécessairement l'indifférence entre $\mathscr{A}$ et $\mathscr{A}''$. Il n'est pas évident que la transitivité existe toujours dans les choix humains, mais nous pensons qu'un exemple illustrera quelques faits importants. Supposons qu'un homme dit qu'il préfère la bière au thé, le thé au café, et le café à la bière. Notre première réaction est d'affirmer que ses déclarations sont contradictoires et que sans doute il s'est trompé dans au moins une de ses propositions. Mais après réflexion, nous pouvons, en fait, nous demander, s'il y a vraiment une contradiction. Prenons l'exemple suivant : un homme préfère le goût de la bière à celui du café, mais il préfère l'odeur du café à celle de la bière. Que répondra-t-il alors si on lui demande de classer par paire la bière, le café et le thé, selon sa préférence pour l'un ou l'autre ? Il se peut que ce soit "je préfère la bière au thé, le thé au café et le café à la bière", sans qu'il ait spécifié que des considérations complexes sur le goût et l'odeur entraînent ce choix. Il faut se rappeler que, dans ce cas, nous ne pourrons jamais grouper les trois comparaisons comme suit :

$$P(\text{bière}) \to P(\text{thé}) \to P(\text{café}) \to P(\text{bière})$$

(où la relation $P(\text{bière}) \to P(\text{thé})$ signifie que la préférence pour la bière est plus grande que celle pour le thé), car les différents choix n'ont pas été faits suivant les mêmes critères. C'est le nombre et la nature des critères que nous appelons les dimensions du choix. La contradiction que nous avons relevée au début n'est donc qu'apparente. Ce que nous demandons alors à l'homme rationnel, c'est de respecter la logique après avoir tenu compte des dimensions précisées du choix. Il ne doit exprimer aucune contradiction tant que les faits, les évidences et les dimensions du choix sont les mêmes.

Quant à la seconde condition de la rationalité, nous en parlerons en détail dans le quatrième et le cinquième chapitres, nous bornant ici à dire seulement que, dans la théorie du choix devant l'incertitude, l'homme rationnel maximise l'utilité probable des conséquences d'une action quand les chances relatives d'événements de se produire sont évaluées numériquement. Le caractère fondamental de la notion de maximisation est que l'homme rationnel choisit toujours la meilleure des alternatives qui s'offrent à lui, dans la mesure où il les perçoit. La notion de maximisation est mathématiquement pratique car elle permet à la théorie de spécifier un point unique ou un sous-ensemble unique de points parmi ceux entre lesquels il faut décider.

"Il est facile pour un psychologue de souligner que l'homme rationnel ne se rencontre très probablement pas chez les hommes réels. En fait, c'est si facile à souligner que les psychologues ont essayé de rejeter les théories s'appuyant sur ces hypothèses. Ce n'est pas satisfaisant. Ce qu'il y a de plus utile à faire, ce n'est pas critiquer les hypothèses d'une théorie, mais en vérifier les théorèmes. Si les théorèmes satisfont aux données expérimentales, la théorie a au moins un mérite heuristique. Naturellement un théorème banal découlant des hypothèses relatives à l'homme rationnel est que dans tous les cas spécifiques de choix, ces hypothèses sont satisfaites. Ainsi, si l'homme rationnel est un modèle de l'homme réel, l'homme réel doit toujours faire des choix transitifs. La transitivité est une hypothèse mais elle est directement vérifiable. De même, en ce qui concerne les autres hypothèses de l'homme rationnel comme modèle de l'homme réel." (M. EDWARDS). Dans le prochain chapitre nous étudierons la conduite de l'homme rationnel en suivant le cheminement de M. SAVAGE dont l'ouvrage "The Foundations of Statistics" donne la présentation la plus achevée de la théorie du comportement rationnel.

Comme nous l'avons déjà dit, l'homme rationnel qui doit prendre une décision devant l'incertitude maximise l'utilité probable des conséquences d'une action quand les chances relatives d'événements de se produire dans l'avenir sont évaluées numériquement. Pour parler précisément, il faut évaluer ces chances afin d'exprimer le procédé de faire la décision par la voie mathématique. Ces chances : nous les appelons "les probabilités" et leur justification sera bientôt évidente.

Probabilité :

Selon la définition donnée par KOLMOGOROFF et plus ou moins adoptée par tout le monde, les probabilités $P(A)$ sont des quantités numériques attachées aux sous-ensembles A d'un ensemble S et obéissant aux contraintes suivantes :

(i) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

(ii) $P(S) = 1$.

(iii) Si $A \cap B = \emptyset$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ où A et B sont des sous-ensembles de S.

L'idée générale de probabilité que les statisticiens ont adoptée pendant le demi-siècle écoulé et que la plupart d'entre eux considère encore comme raisonnable, vient de ce qu'on peut appeler la vue "fréquentiste" de probabilité. Cette notion considère la probabilité comme la répartition relative d'un événement dans un certain type de séquences d'événements. Si par exemple, un événement A d'un ensemble d'événements se produit m fois sur n alors que n'importe quel événement a eu la même chance de se produire, alors la probabilité de A est prise comme m/n. (R. von MISES a pris $P(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{m}{n}$). Les "fréquentistes" n'admettent aucune influence personnelle sur la détermination de la probabilité. C'est ce qui fait qu'on considère cette notion de probabilité comme une vue objective et par conséquent on parle de la probabilité objective. Notons ici que si l'on considère la probabilité objective, il sera impossible de trouver les probabilités de bien des événements incertains mais importants dans le domaine des sciences. Pour donner un exemple populaire (mentionné par M. SAVAGE) un "fréquentiste" peut admettre qu'il n'est pas sûr si le whisky ferait plus de mal que de bien dans un traitement de la morsure de serpent, mais il ne pourra jamais dire qu'il fait "probablement" plus de mal que de bien, malgré bien des évidences. Le "fréquentiste" ne peut jamais utiliser les données déjà obtenues pour calculer les probabilités de propositions incertaines dont l'étude n'est pas encore finie. De plus, les "fréquentistes" ne sont pas tout à fait d'accord sur tous les points et leurs vues individuelles peuvent être changées et développées. Le gouffre le plus large parmi les "fréquentistes" est celui entre l'école de FISHER et celle de NEYMAN-PEARSON.

La deuxième conception essaie de définir la probabilité d'un événement en fonction de la symétrie du contexte dans lequel cet événement se produit. Cette notion a été considérablement modifiée et appuyée par CARNAP comme philosophe et par JEFFREYS comme statisticien. D'après eux la probabilité mesure la connexité logique entre une proposition (considérée comme donnée) et une autre. Ils disent que, en ce qui concerne la signification, les deux propositions :

(i) la probabilité de A étant donné B, est 3/4, et

(ii) la proposition A est aux trois quarts impliquée par la proposition B

sont équivalentes. Il s'en suit que la probabilité de A, étant donné B, est une nécessité logique qu'on doit déduire des structures logiques des propositions A et B et ainsi on l'appelle la vue nécessaire de probabilité. Mais malgré les contributions intéressantes et le progrès important dûs à JEFFREYS dans le domaine des sciences statistiques, les statisticiens n'ont jamais eu un enthousiasme réel pour cette conception de la probabilité.

La troisième vue est la notion subjective de probabilité. Selon cette idée, la probabilité d'un événement est un indice de l'opinion d'un homme au sujet de cet événement. C'est un poids, une valeur numérique attachée à un événement par le sujet (c'est-à-dire par la personne qui décide). Ainsi on l'appelle la probabilité subjective (la probabilité personnelle etc.). En 1926 RAMSEY le philosophe et mathématicien a publié ses études sur les fondements subjectifs de la théorie des probabilités. Plus tard, M. de FINETTI a développé indépendamment la théorie. Le travail de KOOPMAN était aussi très intéressant. Apparemment les économistes n'ont pas découvert l'étude de RAMSEY tant que le livre de von NEUMANN et MORGENSTERN n'a pas attiré l'attention sur le sujet. Il faut noter que RAMSEY, de FINETTI et KOOPMAN ont développé leurs théories sans rapport avec les sciences statistiques. C'est M. GOOD qui a publié son livre en 1950, en y considérant la probabilité subjective par rapport à l'inférence statistique. Ensuite nous avons eu le livre de M. SAVAGE (1954). Son travail a été consacré à l'étude du comportement rationnel devant l'incertitude, par un système formel d'axiomes et il a appliqué la conception de la probabilité subjective aux problèmes des sciences statistiques. En 1959, MM. KRAFT, PRATT et SEIDENBERG ont publié l'article dont nous avons déjà parlé dans le premier chapitre. Les livres de M. SCHLAIFER et de MM. RAIFFA et SCHLAIFER ont suivi. Entre-temps le travail expérimental le plus large et le plus important dans tout le domaine de la décision était entrepris avec M. COOMBS et ses associés de l'Université de Michigan, Etats-Unis, aussi bien qu'avec les savants français et étrangers à Paris. Les idées de M. COOMBS sur l'utilité et les probabilités subjectives sont une conséquence de ses idées sur la mesure en psychologie en général. L'essence de son travail est un essai pour mesurer à la fois l'utilité et la probabilité subjective sur une échelle métrique ordinale. Une échelle métrique ordinale a toutes les propriétés d'une échelle ordinale, et en plus les distances entre les stimuli peuvent être ordonnées.

Nous avons défini la probabilité subjective comme une valeur numérique qui n'est rien qu'un indice de l'opinion de l'homme rationnel sur la chance d'un événement de se produire à l'avenir. Autrement dit, la probabilité subjective est un poids numérique, non-nul, attaché à un événement. La nécessité de trouver les poids numériques attachés aux événements sera évidente à partir de l'exemple suivant :

Supposons qu'un acte $\not{a}$ produise la conséquence c sur A (c'est-à-dire si l'événement A se produit) et produise la même conséquence qu'un autre acte $\not{a}'$ sur $\sim A$. D'autre part, l'acte $\not{a}'$ produit la conséquence c' sur B et produit la même conséquence que l'acte $\not{a}$ sur $\sim B$. Etant donné que le décideur préfère toujours c à c', et qu'il sait que la chance de B de se produire à l'avenir est plus grande que celle de A, il est possible que le décideur ne puisse pas toujours préférer $\not{a}$ à $\not{a}'$.

Note : Si les événements A et B ne peuvent jamais se produire simultanément, alors A et B sont "mutuellement exclusifs". Si une collection d'événements qui sont mutuellement exclusifs est telle que l'un (on ne sait pas lequel) de ces événements doit se produire certainement, alors cette collection est exhaustive, les événements étant collectivement exhaustifs. L'événement qui se produira si A ne se produit pas, sera représenté comme $\sim A$. L'événement A peut être composé par un certain nombre d'autres événements. Quand un événement n'est pas composé de plus d'un événement, on l'appellera un événement élémentaire.

Puisque la division de chaque poids par le même nombre non-nul n'altère pas l'importance relative de chaque événement, nous pouvons faire quelques conventions afin d'éviter la confusion possible.

1/ Le poids attaché à l'événement impossible est égal à zéro.

2/ La somme des poids attachés aux événements qui sont collectivement exhaustifs à 1. (Cela implique que le poids attaché à l'événement certain est égal à 1).

Il est évident maintenant que le poids attaché à n'importe quel événement sera un nombre entre 0 et 1, étant entendu qu'un nombre entre 0 et 1 mais différent de 0 et 1 impliquera que l'événement qui correspond à ce nombre est probable (ni certain ni impossible).

Il suit donc que si nous faisons aussi la restriction que le poids attaché à un événement A qui est une combinaison de plusieurs événements mutuellement exclusifs, est égal à la somme des poids attachés à ces événements constitutifs de A, alors les poids dont nous avons parlé jusqu'ici ne sont autres que des probabilités, ayant les propriétés formulées par KOLMOGOROFF.

La détermination de probabilités subjectives, d'après ceux qui soutiennent la théorie, dépend des expériences et du jugement personnel du décideur. Si un homme rationnel est absolument sûr que la répartition relative d'un événement approchera la quantité m/n dans une longue séquence d'expériences réalisées dans la même condition, alors "il" décidera que la probabilité de cet événement est égale à m/n. Nous savons que dans une série de coups d'une pièce parfaite la répartition relative de face approche $1/2$. Mais prenons le cas d'une pièce qui n'est pas symétrique. Il se peut qu'un nombre fini de coups n'indiquera jamais la probabilité de face : on est obligé d'utiliser le jugement personnel afin de déterminer la probabilité de face dans ce cas, car la pièce peut être très imparfaite et on ne pourra jamais dire que la répartition relative de face dans un nombre fini de coups sera égale (même approximativement) à sa probabilité.

Il faut noter également que cette évaluation de probabilités subjectives n'est dans aucun sens arbitraire ou bizarre. Au contraire, la valuation est toujours en accord avec des règles logiques. Donc, si deux hommes rationnels procèdent approximativement aux mêmes expériences, et si leurs jugements personnels ont plus ou moins les mêmes bases, alors ils détermineront approximativement les mêmes valeurs pour les probabilités de mêmes événements. Mais il faut se rappeler aussi que la théorie de la probabilité subjective admet que deux hommes rationnels avec des expériences différentes peuvent choisir deux valeurs numériques différentes pour représenter la même probabilité d'un événement. Ce fait est sans doute très important.

"De même, la notion de probabilité subjective présente de sérieuses difficultés logiques. L'échelle de probabilité subjective doit-elle être bornée comme nous l'avons déjà supposé, ou non ? Si non, plusieurs probabilités subjectives différentes doivent correspondre aux probabilités objectives 0 et 1 (à moins d'emploi de transformations telles que les probabilités objectives 0 et 1 correspondent à des probabilités subjectives infinies, ce qui semble difficile). La considération du théorème des probabilités totales dont il sera question plus loin a parfois conduit à penser à une échelle de probabilité subjective bornée à 0 mais non à 1 . C'est sûrement arbitraire. Le concept de certitude absolue n'est ni plus ni moins indéterminé que celui d'impossibilité absolue.

"Des problèmes logiques encore plus rigoureux sont en relation avec les théorèmes des probabilités totales. Si la probabilité objective d'un événement A est p et celle de la non-arrivée de A est q , alors $p + q = 1$. Cette règle est-elle valable pour les probabilités subjectives ? Intuitivement il semble que si nous connaissons la probabilité subjective de A , nous soyons capables de nous représenter la probabilité subjective de non-A et la seule règle raisonnable pour nous la représenter est de soustraire la probabilité subjective de A de la certitude complète. Mais l'acceptation de ce théorème des probabilités totales pour les probabilités subjectives plus l'idée de probabilité subjective signifie que l'échelle de probabilité subjective peut être identifiée avec l'échelle de probabilité objective. C'est seulement pour une échelle de probabilité subjective identique à l'échelle de probabilité objective, que les probabilités subjectives d'une collection d'événements, dont un et un seul peut se produire à l'avenir, ont pour somme 1". (M. EDWARDS).

A cet égard nous pouvons nous rappeler la réponse de M. de FINETTI à M. FRECHET. (Colloque du C.N.R.S. sur l'Econométrie) : "Dans la mesure des 3 angles d'un triangle (par exemple géodésique) on obtiendra toujours $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi + \varepsilon$ (ε = erreur de fermeture). On peut choisir entre deux attitudes : prendre la liberté de corriger α , β , γ en éliminant l'erreur ε , ou bien élargir les hypothèses de la géométrie en introduisant une structure non-euclidienne qui consentirait à conserver et à expliquer les valeurs observées (sans correction). On choisit ordinairement la première solution, et il semble bien opportun de faire ainsi.

Au même titre, si un individu attribue à 3 événements incompatibles des probabilités p_1 , p_2 et p_3 où $p_1 + p_2 + p_3 = 1 + \varepsilon$, il semble plus naturel de penser qu'il faut les corriger, en supposant que l'opinion qu'il voulait choisir était bien raisonnable (et qu'il la choisirait si on lui fait noter l'incohérence)".

Dès qu'on est d'accord sur l'idée de probabilité subjective, nous voudrons dire que la probabilité subjective se divise entre deux classes suivantes :

(i) probabilité (subjective) quantitative

(ii) probabilité (subjective) qualitative.

Jusqu'ici nous n'avons considéré que les valeurs numériques des probabilités. Si nous pouvons attribuer directement les valeurs numériques aux probabilités d'événements, alors ce seront les probabilités quantitatives.

L'idée de probabilité qualitative se trouvait principalement dans le travail de M. de FINETTI. Quelquefois il est possible de ranger les probabilités d'événements par un système d'inégalités et d'égalités linéaires, sans accorder aucune attention aux valeurs numériques. Supposons qu'il y ait trois événements A, B et C, et qu'il soit possible de dire que l'événement B est aussi ou plus probable que l'événement A, l'événement C est aussi ou plus probable que l'événement B. De même, en considérant l'événement composé $A \cup B$ où $A \cup B$ signifie "au moins un de A et B", il est possible de dire que C est aussi ou plus probable que $A \cup B$, etc. Par la notation $x \lessdot y$ qui signifiera "y est aussi ou plus probable que x", nous pouvons exprimer les relations entre les événements comme suit :

$$A \lessdot B\ ,\ B \lessdot C\ ,\ A \cup B \lessdot C \quad \text{etc.} \tag{1}$$

Nous faisons maintenant une restriction (qui est intuitivement évidente et qui ne conduit pas à une contradiction en ce qui concerne la logique du raisonnement) :

Si (A et C) est une paire d'événements mutuellement exclusifs et (B et C) est une paire d'événements mutuellement exclusifs et si B est aussi ou plus probable que A, alors l'événement $B \cup C$ sera aussi ou plus probable que l'événement $A \cup C$ (et réciproquement). (Cette condition n'est que la condition d'Additivité).

Sous cette condition il sera possible d'imposer un ordre complet (qui satisfait en plus la condition d'Additivité) sur l'ensemble d'événements (élémentaires et composés).

Il faut noter que jusqu'ici nous n'avons pas du tout considéré les valeurs numériques de ces probabilités. Mais comme nous l'avons déjà dit, dans toutes les circonstances pratiques, l'homme rationnel aura besoin de valeurs numériques des probabilités. Il faudra attacher des poids aux événements : les poids qui se fondent sur le jugement et les expériences de l'homme rationnel. Donc le problème est de trouver les valeurs numériques de probabilités d'événements A, B, C etc. telles que, par rapport aux relations (1) données plus haut, nous aurons :

$$p(A) \leqslant p(B)\ ,\ \ p(B) \leqslant p(C)\ ,\ \ p(A \cup B) \leqslant p(C) \quad \text{etc.}$$

Evidemment, l'ordre déjà imposé apporte quelques contraintes sur les valeurs numériques. De plus, nous faisons trois autres restrictions afin d'avoir la compatibilité de la probabilité qualitative avec la probabilité quantitative :

(i) La probabilité qualitative est un nombre réel dans l'intervalle fermé $(0, 1)$.

(ii) La probabilité qualitative de l'événement impossible est zéro et celle de l'événement certain est 1.

(iii) Si les événements A et B sont mutuellement exclusifs alors :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Ces trois conditions peuvent être admises sans perte de généralité.

Dès que les valeurs numériques de probabilités qualitatives sont déterminées, il n'y a aucune différence entre la probabilité qualitative et la probabilité quantitative, et nous utiliserons le mot "probabilité" pour toutes les deux.

La question d'attribuer aux probabilités qualitatives les valeurs numériques en tenant compte de l'ordre déjà existant sur l'ensemble des événements, présuppose la solution du problème suivant :

L'ordre de probabilités qualitatives, entraine-t-il toujours les valeurs numériques qui seront conformes à l'ordre déjà donné ? Autrement dit, un ordre complet sur les sous-ensembles d'un ensemble S, implique-t-il nécessairement l'existence d'une mesure ? Si non, quelles sont les conditions sous lesquelles une mesure existe sur un ensemble complètement ordonné de sous-ensembles d'un ensemble S ?

Si l'ensemble S est infini, alors, sous réserve de conditions particulières que nous voulons discuter dans le prochain chapitre, il a été démontré par M. de FINETTI et M. SAVAGE, que la mesure désirée existe. Si l'ensemble S est fini, alors un ordre complet n'implique pas nécessairement l'existence d'une mesure, ce fait ayant été démontré par MM. KRAFT, PRATT et SEIDENBERG, comme nous l'avons déjà dit dans le chapitre précédent. Nous avons démontré que la condition d'Additivité Etendue est la condition désirée sous laquelle un ordre complet de sous-ensembles d'un ensemble S implique nécessairement l'existence d'une mesure.

Il faut se rappeler que, quand M. de FINETTI et M. SAVAGE ont démontré que les valeurs numériques peuvent être attribuées aux probabilités qualitatives en tenant compte de l'ordre déjà imposé, ils ont supposé quelques hypothèses sous lesquelles les valeurs seraient uniques. Ce fait est très important, car les exemples suivants pourront éclairer une autre attitude à cet égard.

(i) Supposons qu'il y ait deux événements élémentaires $\{a_1\}$ et $\{a_2\}$ dont un doit se produire. Sans perte de généralité nous pouvons supposer que le seul ordre pour les probabilités qualitatives d'événements possibles se présente comme suit :

$$\{a_1\} \leqslant\cdot \{a_2\} \leqslant\cdot \{a_1, a_2\}$$

Si les valeurs numériques des probabilités doivent maintenir cet ordre, nous avons les inégalités suivantes :

$$p_1 = p(a_1) \geqslant 0$$

$$p_2 = p(a_2) \geqslant 0$$

et :

$$p(a_1) \leqslant p(a_2) \quad \text{c'est-à-dire} \quad p_2 - p_1 \geqslant 0$$

En se rappelant que $p_1 + p_2 = 1$ par la convention faite, nous avons

$$0 \leqslant p_1 \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} \leqslant p_2 \leqslant 1 , \quad \text{avec} \quad p_1 + p_2 = 1$$

Graphiquement, les possibilités se représentent par l'ensemble des points sur le segment linéaire BC (les points B et C inclus). Les deux coordonnées de chaque point sur BC donnent les valeurs possibles de p_1 et p_2 telles que l'ordre déjà donné est satisfait.

(ii) Supposons qu'il y ait trois événements élémentaires $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3\}$ dont un doit se produire. Sans perte de généralité nous pouvons prendre l'un des deux ordres possibles d'événements en tenant compte de la condition d'Additivité Etendue, comme les suivants :

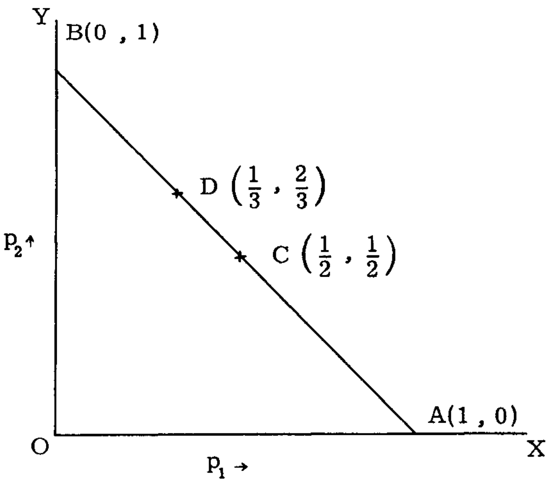

Figure 1

$$\{a_1\} \leqslant \{a_2\} \leqslant \{a_3\} \leqslant \{a_1, a_2\} \leqslant \{a_1, a_3\} \leqslant \{a_2, a_3\} \leqslant \{a_1, a_2, a_3\} \quad (1)$$

$$\{a_1\} \leqslant \{a_2\} \leqslant \{a_1, a_2\} \leqslant \{a_3\} \leqslant \{a_1, a_3\} \leqslant \{a_2, a_3\} \leqslant \{a_1, a_2, a_3\} \quad (2)$$

Afin que les valeurs numériques soient conformes avec l'ordre imposé, nous pouvons écrire les inégalités suivantes pour (1) (en écrivant $p(a_i) = p_i$, $1 \leqslant i \leqslant 3$).

$$p_2 - p_1 \geqslant 0 \ , \quad p_3 - p_2 \geqslant 0 \ , \quad p_1 + p_2 - p_3 \geqslant 0$$

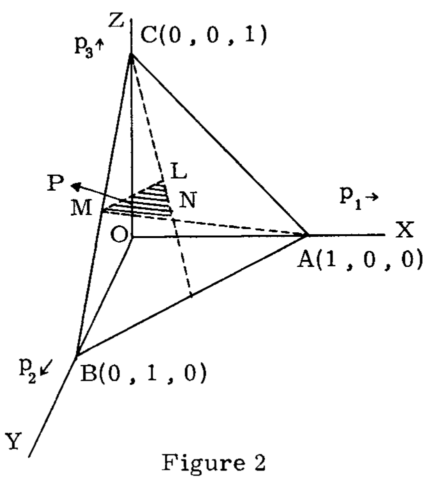

Figure 2

Il faut noter que, étant données ces trois relations, les inégalités $p_3 - p_1 \geqslant 0$, $p_3 + p_2 - p_1 \geqslant 0$ sont évidentes, et ainsi ne sont pas nécessaires pour le calcul. En se rappelant que $p_i \geqslant 0$, $\forall$ i et $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ par la convention faite nous avons :

$$p_2 - p_1 \geqslant 0 \ , \quad p_3 - p_2 \geqslant 0$$

et : $\qquad p_3 \leqslant 1/2$.

Graphiquement, considérons les axes rectangulaires des p_1 , des p_2 et des p_3 dans l'espace à trois dimensions. Les inégalités $p_2 - p_1 \geqslant 0$, $p_3 - p_2 \geqslant 0$ et $p_3 \leqslant 1/2$ définissent une région P(1) qui se trouve sur le plan $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ dans l'octant positif. Les coordonnées de chaque point sur P nous donneront les trois valeurs pour les probabilités des événements $\{a_1\}$, $\{a_2\}$ et $\{a_3\}$ et ces valeurs seront conformes à l'ordre déjà imposé.

De même dans le deuxième cas, nous avons les inégalités suivantes qui sont indépendantes :

$$p_2 - p_1 \geqslant 0 \ , \quad \text{et} \quad p_3 - p_1 - p_2 \geqslant 0$$

En se rappelant que $p_i \geqslant 0 \ \forall \ i$ et $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, nous avons $p_2 - p_1 \geqslant 0$, et $p_3 \geqslant 1/2$. Ces inégalités définissent une région P' sur le plan $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ dans l'octant positif et cette région P' (2) contient des points dont les coordonnées représentent les valeurs possibles. La représentation graphique est donnée ci-dessous.

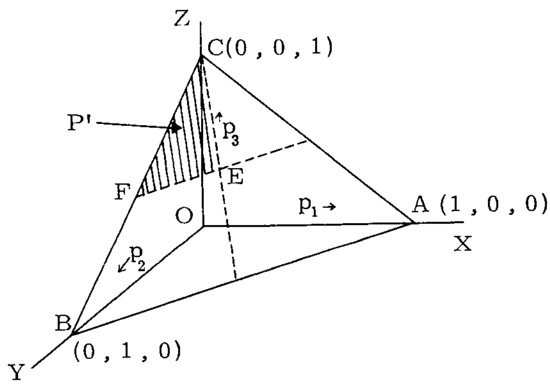

Figure 3

Ces cas de deux et trois événements peuvent être généralisés comme suit :

Si l'homme rationnel ne peut qu'ordonner les 2 événements qui peuvent se produire comme conséquences des n états de la Nature et si cet ordre satisfait la condition d'Additivité Etendue, alors

----

(1) Le triangle défini par $L\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $M\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $N\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ représente la région P (figure 2).

(2) Le triangle défini par $C(0, 0, 1)$, $F\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $E\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ représente P' (figure 3).

il existe sous les hypothèses déjà faites un ensemble convexe, fermé et borné (que nous noterons Ω) à n dimensions, contenant des points $(p_1, p_2, \dots p_n)$ sur l'hyperplan à $n-1$ dimensions $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$. Nous appellerons Ω un ensemble admissible de valeurs numériques désirées de probabilités qualitatives. A notre avis si le décideur ne peut pas spécifier d'autres contraintes sur les probabilités subjectives $p_1, p_2, \dots, p_n$ alors il doit penser que les coordonnées de n'importe quel point lui suffiront chaque fois qu'il aura besoin des valeurs numériques de probabilités subjectives. Autrement dit, il attachera à chaque élément de Ω la même importance et il procèdera aux calculs ultérieurs après avoir choisi n'importe quel point de l'ensemble admissible pour représenter les probabilités numériques par ses coordonnées.

Il ne sera pas hors du sujet de faire mention ici d'un article de M. SMITH. Dans son exposé "Consistency in statistical theory and decision" M. SMITH a traité du sujet de la probabilité subjective par une méthode très intéressante. Il a suggéré que l'intensité de foi d'un décideur peut être mise à l'épreuve en cherchant la cote qu'il accepterait pour parier sur cela. Cette hypothèse l'a conduit à une suite de probabilités subjectives numériques qui obéissent aux axiomes classiques des probabilités comme KOLMOGOROFF les a formulés. Cependant, pour de telles probabilités, il n'existe pas de valeurs précisément définies, mais on peut déterminer des intervalles dans lesquels elles se trouvent. M. SMITH, en se fondant sur ce principe, a procédé à une très bonne exposition des problèmes dans l'inférence statistique et la décision statistique.

Il nous semble raisonnable qu'une intensité réelle de foi d'un décideur doit être accompagnée d'un consentement de soutenir la foi en acceptant un pari inégal. Ce développement d'une théorie de probabilité subjective qui se base sur le pari hypothétique est différent des points de vue exposés avant M. SMITH sur les deux faits suivants :

(i) en s'occupant à la fois de la probabilité objective et de la probabilité subjective.

(ii) en permettant, en effet, à un individu le choix de ne parier à un niveau particulier ni sur A ni sur $\sim A$.

Sans pénétrer profondément dans son article, nous nous arrêterons ici en disant seulement que, dans notre cas, le décideur choisit un et un seul point dans Ω pour représenter les probabilités par ses coordonnées bien que Ω soit un intervalle à n dimensions.

A cet égard nous voulons dire une autre chose. Quand il y a un ensemble d'éléments dont il faut choisir un et un seul, alors on est toujours tenté de prendre ce qu'on peut appeler "un élément spécial", ayant certaines caractéristiques et supposé bien représenter les autres comme un sommaire d'informations qui se trouvent en général dans cet ensemble d'éléments. En effet on a vite fait de constater que les coordonnées du "centroïd" de la région correspondante à l'ensemble Ω donneront la meilleure valuation de probabilités subjectives. Mais nous ne voyons aucune raison pour laquelle l'homme rationnel doit penser à une méthode qui entraîne une discrimination artificielle entre les éléments. A notre avis, si l'ensemble Ω contient plus d'un élément, la région correspondante étant réduite à un seul point, l'homme rationnel choisira n'importe quel point afin de représenter les probabilités subjectives par ses coordonnées. Il n'y a aucune raison de préférer un point "spécial" à un autre dans la région correspondante à Ω, si l'homme rationnel ne peut donner d'autres contraintes qui lui permettront de le justifier.

Mais est-il possible pour l'homme rationnel de spécifier d'autres contraintes sur les probabilités subjectives d'événements ? Oui. Supposons qu'après qu'un ordre complet ait été établi sur les événements en ce qui concerne leurs probabilités subjectives, il soit possible pour le décideur de spécifier que les probabilités subjectives p_i, p_j et p_k se trouvent dans les intervalles :

$$\begin{aligned} p_i^* &\leqslant p_i \leqslant p_i^{**} \\ p_j^* &\leqslant p_j \leqslant p_j^{**} \\ p_k^* &\leqslant p_k \leqslant p_k^{**} \end{aligned} \tag{2}$$

où p_i^*, p_i^{**}, ... p_k^*, p_k^{**} ont été choisis par le décideur en se fondant sur le jugement personnel et les expériences antérieures. Alors nous obtiendrons un ensemble Ω^* où $\Omega^* \subset \Omega$, les coordonnées de chaque point de Ω^* étant une collection de valeurs numériques de probabilités qui satisferont l'ordre déjà existant aussi bien que les contraintes (2). Nous pouvons appeler Ω^* "ensemble réellement admissible" de valeurs numériques de probabilités.

Supposons par exemple qu'il y ait deux événements élémentaires A_1 et A_2 et nous savons déjà que par rapport à l'ordre $A_1 \leqslant\cdot A_2 \leqslant\cdot A_1 \cup A_2$ l'ensemble admissible Ω est l'ensemble de points sur le segment linéaire BC (figure 1). Mais supposons que le décideur considère un coup (avec une pièce parfaite) de pile (l'événement A') ou face (l'événement A'') et les événements composés $A_2' = A_2 A'$ et $A_2'' = A_2 A''$. Le décideur (qui est l'homme rationnel) dira :

$$A_2' =\cdot\ A_2'' .$$

(Il est évident que $A_2 = A_2' \cup A_2''$) .

Supposons que le décideur puisse également dire que $A_1 <\cdot A_2'$. Si maintenant les valeurs numériques des probabilités doivent maintenir cet ordre, nous avons les inégalités suivantes :

$$p_1 = p(A_1) \geqslant 0 \ , \quad p_2 = p(A_2) \geqslant 0 \ , \quad p(A_1) \leqslant p(A_2)$$

c'est-à-dire $p_2 - p_1 \geqslant 0$. Aussi :

$$p(A_2) = p(A_2 A') + p(A_2 A'')$$

Il suit que :

$$p(A_2 A') = p(A_2 A'') = \frac{1}{2}\ p(A_2)$$

et pour $A_1 <\cdot A_2'$, il suit que :

$$p_2 > 2p_1$$

Dans ce cas l'ensemble réellement admissible Ω^* est l'ensemble des points sur BD (figure 1).

CHAPITRE III

FORMULATION AXIOMATIQUE DU COMPORTEMENT RATIONNEL DANS LE CAS D'UN NOMBRE FINI D'ETATS

Soit S un ensemble fini. Chaque élément appartenant à S représente un état de la Nature. Supposons qu'il y ait n éléments dans S représentant n états. Nous savons qu'un seul état se produira à l'avenir. Un événement S_j qui se produira à l'avenir sera constitué par p $(0 \leqslant p \leqslant n)$ éléments de S, étant entendu qu'un seul d'entre eux aura lieu dans l'avenir, et que l'événement impossible se produira lorsque p égalera 0 (c'est-à-dire qu'aucun état ne se produit) et l'événement certain s'obtiendra lorsque p égalera n. Si maintenant nous représentons S comme :

$$S = \{ s_1 , s_2 , \ldots , s_n \}$$

un événement S_j se présente alors comme un sous-ensemble de S. Ainsi :

$$S_j = \{ s_{j_1} , s_{j_2} , \ldots , s_{j_p} \} \quad (0 \leqslant p \leqslant n)$$

Nous dirons que l'événement S_j s'est produit, si un état parmi $s_{j_1} , \ldots , s_{j_p}$ se produit, si $p > 0$. Quand $p = 0$, $S_j = \emptyset$.

Evidemment l'ensemble $\mathcal{S}$ des sous-ensembles de S contient 2^n éléments ($\emptyset$ et S inclus).

Soit $\mathcal{C}$ un ensemble fini de conséquences. Supposons qu'il y ait m éléments dans $\mathcal{C}$; nous écrirons :

$$\mathcal{C} = \{ c_1 , c_2 , \ldots , c_m \}$$

Soit $a(..)$ une correspondance qui à tout élément $s_i \in S$ (c'est-à-dire à tout état s_i de la Nature) associe une conséquence $c_j \in \mathcal{C}$. Si $a(s)$ représente la fonction ainsi définie $(s \longrightarrow a(s))$, nous écrirons $a(s) = c_i$, si la conséquence c_i est associée à l'état s. Soit $\not{a}_i$ la correspondance qui à l'état s_j de la Nature associe la conséquence c_{i_j} $(1 \leqslant j \leqslant n)$ respectivement, où

$i_1, i_2, \ldots, i_n$ sont n nombres choisis parmi les entiers de 1 à m sans aucune restriction du choix. $\mathbf{f}_i$ s'appelle un acte - un acte qui apporte la conséquence c_{i_j} si l'état s_j est obtenu. Appelons $\mathfrak{A}$ l'ensemble des actes $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2, \ldots$ Ainsi il y a m^n actes dans $\mathfrak{A}$. (Il faut distinguer très soigneusement la fonction de l'association a(s) de l'acte $\mathbf{f}$).

Expliquons maintenant la notion de la relation binaire d'un ordre complet sur chacun des ensembles $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$ et $\mathfrak{A}$. Quant à $\mathcal{S}$ la relation binaire $\leqslant\cdot$ signifie la relation "n'est pas plus probable que", c'est-à-dire $S_i \leqslant\cdot S_j$ signifie que l'événement S_i n'est pas plus probable que l'événement S_j. Nous écrirons $S_i <\cdot S_j$ si S_j est plus probable que S_i et $S_i =\cdot S_j$ si S_i et S_j sont équiprobables. Par rapport à n'importe quelle paire d'éléments de $\mathcal{C}$ ou de $\mathfrak{A}$, la relation binaire $\leqslant\cdot$ signifie la relation "n'est pas préféré à" ; par exemple, $\mathbf{f}_i \leqslant\cdot \mathbf{f}_j$ (ou $c_i \leqslant\cdot c_j$) signifie que l'acte $\mathbf{f}_i$ (ou la conséquence c_i) n'est pas préféré à l'acte $\mathbf{f}_j$ (ou la conséquence c_j). Egalement dans ce cas, $\mathbf{f}_i =\cdot \mathbf{f}_j$ signifie qu'il n'y a aucune raison pour préférer l'un à l'autre et $\mathbf{f}_i <\cdot \mathbf{f}_j$ implique que $\mathbf{f}_j$ est strictement préféré à $\mathbf{f}_i$.

Alors tout homme rationnel se trouvant devant l'incertitude en présence d'un ensemble S d'états s_i de la Nature, d'un ensemble $\mathcal{C}$ de conséquences c_j, et de l'ensemble $\mathfrak{A}$ d'actes $\mathbf{f}$ entre lesquels il doit choisir, son choix devra se porter sur un acte $\mathbf{f}_j$ tel que, quel que soit $\mathbf{f}_i$ nous ayons $\mathbf{f}_i \leqslant\cdot \mathbf{f}_j$.

Notons que cet énoncé abstrait est valable d'un point de vue théorique. Dans certains cas, des difficultés sérieuses peuvent surgir, dès le départ, de ces suppositions. On trouve à ce sujet des démonstrations remarquables dans les ouvrages de MM. MORLAT, DREZE, SUPPES, et de FINETTI, (voir la bibliographie). Nous nous bornerons pour l'instant à constater que ces suppositions conduisent à des résultats très intéressants.

La présentation la plus achevée de cette théorie de la décision est dûe, comme nous l'avons déjà dit, à M. SAVAGE. Dans son ouvrage, il a parlé d'une façon très détaillée du "comportement rationnel". Il a énoncé ses axiomes et ensuite il en a déduit des propositions concernant des critères de choix. Il est intéressant de suivre tout d'abord le cheminement de la pensée de SAVAGE. Plus tard, nous verrons les différences entre ses hypothèses et les nôtres, et aussi les modifications que nous apporterons à sa théorie et à ses axiomes de sorte que la théorie soit conforme aux hypothèses que nous avons considérées plus haut (c'est-à-dire précisément les hypothèses suivantes : S, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{A}$ sont des ensembles finis).

LES POSTULATS ET LES DEFINITIONS DE M. SAVAGE

POSTULAT 1. La relation $\leqslant\cdot$ (qui signifie "n'est pas préféré à") définit un ordre complet sur l'ensemble $\mathcal{A}$ des actes.

THEOREME 1. Il y a deux actes $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_j$ tels que :

$$\mathbf{a}_i \leqslant\cdot\ \mathbf{a}_k \leqslant\cdot\ \mathbf{a}_j \quad \forall \quad k$$

Ce théorème est évident en vertu du postulat 1 et de la définition d'un ordre complet sur un ensemble.

DEFINITION 1. $\mathbf{a}_i \leqslant\cdot\ \mathbf{a}_j$, étant donné S_i (un événement), si $\mathbf{a}'_i \leqslant\cdot\ \mathbf{a}'_j$ pour chaque $\mathbf{a}'_i$ et chaque $\mathbf{a}'_j$ qui sont égaux aux actes $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_j$ respectivement sur S_i , et qui sont confondus sur $\sim S_i$.

POSTULAT 2. La préférence conditionnelle, définie ci-dessus, est bien définie pour chaque paire d'actes et pour chaque événement.

DEFINITION 2. S_{ij} est une partition de S_i si :

$$S_{ij} \cap S_{ik} = \emptyset \qquad (j \neq k) \qquad \text{et} \qquad \bigcup_j S_{ij} = S_i$$

DEFINITION 3. Un événement S_i est nul (c'est-à-dire $S_i = \emptyset$) , si pour chaque paire $\mathbf{a}_i$ et $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_i =\cdot\ \mathbf{a}_j$.

THEOREME 2. Si S_{ij} est une partition de S_i et si $\mathbf{a}_i \leqslant\cdot\ \mathbf{a}_j$ étant donné S_{ij} pour chaque j , alors $\mathbf{a}_i \leqslant\cdot\ \mathbf{a}_j$ étant donné S_i . Si, de plus, $\mathbf{a}_i <\cdot\ \mathbf{a}_j$ étant donné S_{ij} pour au moins un j , alors $\mathbf{a}_i <\cdot\ \mathbf{a}_j$ étant donné S_i .

Ce théorème est également évident en vertu des définitions 1 et 2 et des postulats 1 et 2.

DEFINITION 4. Si $a(s) = c$ et $a'(s) = c'$ pour chaque $s \in S$, alors $c \leqslant\cdot\ c'$ si et seulement si $\mathbf{a} \leqslant\cdot\ \mathbf{a}'$.

POSTULAT 3. Si S_i est un événement non-nul et $a(s) = c$ et $a'(s) = c'$ pour chaque $s \in S_i$, alors $\mathbf{a} \leqslant\cdot\ \mathbf{a}'$ étant donné S_i , si et seulement si $c \leqslant\cdot\ c'$.

THEOREME 3. Si S_{ij} est une partition de S_i , et si (pour tout j et pour tout s) , $c_j \leqslant\cdot\ c'_j$ où $a(s) = c_j$ et $a'(s) = c'_j$ quand $s \in S_{ij}$, alors $\mathbf{a} \leqslant\cdot\ \mathbf{a}'$ étant donné S_i ; si de plus, $c_j <\cdot\ c'_j$ sur un S_{ij} non nul, alors $\mathbf{a} <\cdot\ \mathbf{a}'$ étant donné S_i .

Notons bien que nous pouvions déduire le théorème 3, étant donné les postulats 1 et 2. Le théorème 3 et le postulat 3 expriment la même idée.

DEFINITION 5. L'événement S_i n'est pas plus probable qu'un autre événement S_j, si et seulement si chaque fois que :

(i) c et c' sont deux conséquences telles que $c <\cdot c'$

(ii) $a(s) = c$ et $a(s) = c'$ pour $s \in S_i$ et pour $s \in \sim S_i$ respectivement, et

(iii) $a'(s) = c$ et $a'(s) = c'$ pour $s \in S_j$ et pour $s \in \sim S_j$ respectivement,

alors nous avons $\not{a}' \leqslant\cdot \not{a}$.

De plus, $S_i <\cdot S_j$ si et seulement si $\not{a}' <\cdot \not{a}$ avec conditions (i) - (iii).

La définition donnée ci-dessus entraîne une comparaison entre la probabilité d'un événement S_i et la probabilité d'un autre événement S_j. En utilisant la relation binaire $\leqslant\cdot$ entre deux événements S_i et S_j, nous avons déjà dit que la relation signifie que l'événement S_i n'est pas plus probable que l'événement S_j. En rappelant ce que nous avons dit de la probabilité qualitative dans le chapitre précédent, nous écrirons qu'une relation $\leqslant\cdot$ représentera la probabilité qualitative si

o(i) $\leqslant\cdot$ est un ordre complet

o(ii) $S_i \leqslant S_j$ si et seulement si $S_i \cup S_k \leqslant\cdot S_j \cup S_k$ où

$$S_i \cap S_k = S_j \cap S_k = \emptyset$$

o(iii) $\emptyset \leqslant\cdot S_i$, $\emptyset <\cdot S$.

Afin que la relation $\leqslant\cdot$ puisse représenter la probabilité qualitative, nous avons besoin des postulats suivants :

POSTULAT 4. Pour chaque paire d'événements S_i et S_j, une des trois relations $S_i < S_j$, $S_i =\cdot S_j$, $S_j <\cdot S_i$ a lieu. (Autrement dit, chaque paire d'événements est comparable).

POSTULAT 5. Il y a au moins une paire d'actes $\not{a}$, $\not{a}'$ pour lesquels la relation $\not{a} <\cdot \not{a}'$ est satisfaite.

Le postulat 5 exclut la possibilité que S soit nul, car si S était nul, pour chaque paire d'actes $\not{a}$, $\not{a}'$ nous aurions $\not{a} =\cdot a'$, et vice versa. On peut le voir aisément en considérant le postulat 2.

THEOREME 4. La relation $\leqslant\cdot$ assignée aux événements S_i implique une probabilité qualitative.

Quant à la démonstration de ce théorème, il suffit de noter que les trois conditions o(i) à o(iii) sont satisfaites ; la condition o(i) est satisfaite en vertu des postulats 1 et 4 et de la définition 5, la condition o(ii) du postulat 2 et de la définition 5, et la condition o(iii) des postulats 1 et 5 et de la définition 5.

DEFINITION 6. Une probabilité-mesure sur un ensemble S est une fonction $P(S_i)$ qui attache à chaque S_i appartenant à l'ensemble des sous-ensembles de S un nombre réel tel que :

p(i) $P(S_i) \geqslant 0 \quad \forall\ S_i$

p(ii) $P(S_i \cup S_j) = P(S_i) + P(S_j)$

si $S_i \cap S_j = \emptyset$

p(iii) $P(S) = 1$

DEFINITION 7. Si S possède une probabilité-mesure P et également une probabilité qualitative $\leqslant\cdot$ telles que, pour chaque paire de S_i, S_j, $P(S_i) \leqslant P(S_j)$ si et seulement si $S_i \leqslant\cdot S_j$, alors P sera dit être strictement conforme à la probabilité $\leqslant\cdot$. Si $S_i \leqslant\cdot S_j$ n'implique que $P(S_i) \leqslant P(S_j)$, alors P sera dit être presque conforme à $\leqslant\cdot$.

Les postulats 1 à 5 (avec les définitions données) conduisent à la probabilité qualitative, mais ils ne sont pas suffisants pour l'existence d'une mesure sur l'ensemble S . On doit admettre un autre postulat pour que S possède une probabilité-mesure P qui sera (ou bien strictement ou bien presque) conforme à la probabilité qualitative $\leqslant\cdot$. Si l'on accepte le nouveau postulat qui, sûrement, imposera une ou plusieurs restrictions sur l'ensemble S et également sur la probabilité qualitative, une correspondance sera établie entre la probabilité qualitative et la probabilité quantitative. Cette correspondance une fois établie, on peut remplacer les probabilités qualitatives par leurs valeurs numériques pour faire le calcul qui conduira à la décision.

Quand M. de FINETTI (1937) a exposé ses idées sur la probabilité qualitative, l'hypothèse qu'il a prise pour que S possède une probabilité mesure était :

L'ensemble S peut être divisé en sous-ensembles en nombre arbitrairement grand, les sous-ensembles étant équivalents entre eux.

M. de FINETTI a démontré sous cette hypothèse qu'un ordre complet sur l'ensemble des sous-ensembles de S est conforme à une mesure. Il est évident que cette hypothèse implique que le nombre d'éléments atomiques dans S est infini.

M. SAVAGE énonce son sixième postulat comme suit :

POSTULAT 6. Supposons que $a < a'$. Alors pour chaque conséquence c , il y a une partition de S , suffisamment fine, qui donne un ensemble d'événements en nombre fini tel que, si ou bien a ou bien a' est modifié afin de donner la valeur c sur un seul événement de cette partition, la préférence entre a' et a n'est pas modifiée.

Il est évident que le postulat de M. SAVAGE, comme celui de M. de FINETTI, entraîne que le nombre d'éléments atomiques de S est infini. En plus, ce postulat, comme M. SAVAGE lui-même l'avoue, est un peu plus restrictif en ce qui concerne la logique, que la supposition de M. de FINETTI.

Notre propos ici, est de remplacer le postulat 6 de M. SAVAGE ainsi que l'hypothèse de M. de FINETTI par un autre postulat de façon à rendre l'ordre complet sur les sous-ensembles de S conforme à une mesure, l'ensemble S étant fini. Rappelons-nous que la condition d'Additivité Etendue est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ordre complet soit conforme à une mesure. Donc il suffira de prendre la condition d'Additivité Etendue comme notre postulat 6* . Mais nous essaierons d'exprimer cette condition de telle façon que le postulat soit en harmonie avec les autres en ce qui concerne le style de M. SAVAGE.

*POSTULAT 6** : Supposons que nous ayons $a_i < a'_i$ étant donné :

(i) $c'_i < c_i$

(ii) $a_i(s) = c_i \quad s \in A_i \quad$ et $\quad a_i(s) = c'_i \quad s \in \sim A_i$

(iii) $a'_i(s) = c_i \quad s \in B_i \quad$ et $\quad a'_i(s) = c'_i \quad s \in \sim B_i$

$$(i = 1, 2, \ldots k)$$

Supposons également que A est un événement tel que :

$$X = \sum_{i=1}^{k} A_i - A \quad \text{et} \quad Y = \sum_{i=1}^{k} B_i - A$$

sont deux événements.

Alors si h et h' sont deux conséquences où $h' < h$ et si

$$a_1(s) = h \quad s \in X \quad \text{et} \quad a_1(s) = h' \quad s \in \sim X$$

$$a'_1(s) = h \quad s \in Y \quad \text{et} \quad a'_1(s) = h' \quad s \in \sim Y$$

nous aurons $p_1 < p'_1$.

Nous croyons qu'il est plus facile d'accepter le postulat 6* que ceux de M. de FINETTI et M. SAVAGE. Il faut remarquer ici que l'on se trouve devant une seule difficulté : les valeurs numériques des probabilités qualitatives ne seront pas déterminées uniquement. Par rapport à la probabilité qualitative de chaque événement on pourra déterminer un intervalle inclus dans l'intervalle (0 , 1) . Mais, comme nous l'avons déjà dit dans le chapitre précédent, on peut prendre n'importe quel point dans cet intervalle afin de représenter la probabilité qualitative correspondant à cet intervalle. Par conséquent nous supposerons dans ce qui suit que l'on a remplacé des probabilités qualitatives par des valeurs numériques choisies dans les intervalles.

CHAPITRE IV

CONCEPT D'UTILITÉ

Dans la Science Economique avant 1730, le critère de choix parmi plusieurs actes était fondé sur l'espérance mathématique des pertes et des gains en monnaie (où l'espérance mathématique d'une variable est la somme des produits obtenus en multipliant chaque valeur de la variable par la probabilité correspondante). On avait l'impression que ce critère de l'espérance mathématique découle à long terme de la loi des grands nombres qui assure la justification objective. C'est en 1730 qu'on a trouvé une nouvelle ligne de pensée dans l'ouvrage "Specimen Theoriae Novae de Mensura Sortis" exposé devant l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg par Daniel BERNOULLI. Il a suggéré par une approche subjective, un critère basé sur des espérances mathématiques d'utilités, l'utilité étant la mesure de satisfaction gagnée ou perdue qui ne s'exprime pas nécessairement par la somme de monnaie gagnée ou perdue. D'après lui, la symétrie des gains et des pertes en monnaie n'est pas conforme à la symétrie des utilités (ou les satisfactions absolues, comme les appelle M.M. ALLAIS). Daniel BERNOULLI a illustré ses idées par beaucoup de contre-exemples dont nous allons citer les deux suivants :

Supposons qu'un pauvre possède un billet de loterie avec une chance sur deux de gagner vingt mille ducats et une chance sur deux de ne rien gagner. L'espérance mathématique de son gain est de dix mille ducats. Cependant, il ne semblerait pas un fou en vendant son billet pour mille ducats.

Le deuxième exemple est déjà très connu : le paradoxe de Saint-Pétersbourg. Supposons que le joueur gagne 2^n francs si on trouve face pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ coup de pile ou face dans une série de coups. Alors l'espérance mathématique de son gain se calcule comme suit :

$$2 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{4} + 8 \times \frac{1}{8} + \dots \quad = 1 + 1 + 1 + \dots$$

Il semble que le joueur accepterait le pari à n'importe quelle condition, car l'espérance mathématique de son gain est une somme infinie de monnaie.

A partir de tels exemples Daniel BERNOULLI a exposé une idée fondée sur la loi de l'utilité décroissante. Il est allé un peu plus avant en suggérant qu'on peut prendre le logarithme de la somme en monnaie pour indiquer la valeur numérique de l'utilité. Il est évident que des utilités représentées par des logarithmes des sommes en monnaie obéissent à la loi de l'utilité décroissante, mais comme Gabriel CRAMER l'a démontré dans une lettre à BERNOULLI, les logarithmes peuvent créer de sérieuses difficultés, car si les logarithmes sont utilisés, le paradoxe de Saint-Pétersburg peut se modifier de sorte qu'ils conduisent à une contradiction du raisonnement. Donc, malheureusement, du point de vue classique, les utilités ne peuvent pas se représenter avec les quantités précisées, car si U est une fonction d'utilité particulière, et $F(U)$ est n'importe quelle fonction monotone, croissante et arbitraire de U, alors $F(U)$ également représentera l'utilité, en satisfaisant tout ce qui est exigé de U. Ainsi, malgré le fait qu'après l'exposé de la théorie de BERNOULLI, les économistes du 18ème et du 19ème siècles commencèrent à parler de l'utilité de conséquences en dehors de l'utilité de monnaie, on admettait en général d'après PARETO que la notion de l'utilité ne pouvait pas être utile du point de vue pratique, car l'utilité ne pouvait pas se déterminer sauf à une transformation monotone près. On a supposé dès lors que l'utilité est un nombre réel attaché à la conséquence c tel que :

$$U(c) \leqslant U(c') \quad \text{si et seulement si} \quad c \leqslant c' . \tag{u1}$$

La notion de l'utilité, comme BERNOULLI l'a conçue, a été rénovée par RAMSEY (1926 et 1928) et un peu plus tard par von NEUMANN et MORGENSTERN. Bref, dans leur travail, l'existence d'une fonction qui dirige le choix d'un acte en rendant maximum la satisfaction obtenue, peut être établie du point de vue mathématique. Sous certaines hypothèses, von NEUMANN et MORGENSTERN ont démontré qu'il existe une utilité classique (c'est-à-dire au sens de BERNOULLI) satisfaisant la condition (u1) donnée plus haut, et en même temps vérifiant la condition :

$$U(p_1\, \mathbf{f}_1 ,\ p_2\, \mathbf{f}_2) = p_1\, U(\mathbf{f}_1) + p_2\, U(\mathbf{f}_2) \tag{u2}$$

où $p_1 + p_2 = 1$, et d'après nos notations $(p_1\, \mathbf{f}_1 ,\ p_2\, \mathbf{f}_2)$ signifie un acte qui produit la conséquence de l'acte $\mathbf{f}_1$ sur l'événement S_1 dont la probabilité est p_1, et produit la même conséquence que l'acte $\mathbf{f}_2$ en dehors de S_1. De plus, la notion d'utilité avancée par von NEUMANN et MORGENSTERN entraîne le fait que chaque utilité est une fonction linéaire et croissante de chaque autre.

Dans son ouvrage M. SAVAGE a suivi la ligne de pensée et la méthode de démonstration de von NEUMANN et MORGENSTERN pour s'étendre sur la détermination de la fonction d'utilité uniquement. Après avoir établi l'existence d'une telle fonction d'utilité parmi d'autres choses intéressantes, il a pris le 7ème postulat comme suit :

POSTULAT 7. Si $\not{a} \leq\cdot (\cdot\geq)$ a'(s) , étant donné B , pour chaque $s \in B$, alors $\not{a} \leq\cdot (\cdot\geq) \not{a}'$, étant donné B . Bien entendu que M. SAVAGE a évité le postulat suivant :

Si $U(\not{a})$ et $U(\not{a}')$ tous les deux existent, alors $\not{a} \leq\cdot \not{a}'$ si et seulement si $U(\not{a}) \leq\cdot U(\not{a}')$, où $U(\not{a})$ est l'espérance mathématique d'utilités attachées aux conséquences de l'acte $\not{a}$. Plus clairement, si S_i est une partition de S et si l'acte $\not{a}$ attache la conséquence c_i à l'événement $S_i (1 \leq i \leq k)$, alors :

$$U(\not{a}) = \sum_{i=1}^{k} p_i \, U(c_i)$$

où p_i est la probabilité de S_i et $U(c_i)$ est l'utilité de c_i étant une valeur numérique attachée à $c_i (1 \leq i \leq k)$. Ce postulat que M. Jacob MARSCHAK a appelé la Règle de Daniel BERNOULLI, exige d'après M. SAVAGE, plus d'esprit mathématique que de cohérence intuitive parmi les décisions ; c'est la raison d'éviter la forme de ce postulat).

Von NEUMANN et MORGENSTERN, BLACKWELL et GIRSCHIK, SAVAGE, LUCE et RAIFFA et beaucoup d'autres auteurs ont considéré les postulats pour démontrer l'existence unique d'une fonction d'utilité obéissant aux conditions (u1) et (u2) . Mais le point de départ est toujours le même, étant la correspondance entre une probabilité variable ρ et un système d'entités. Il s'agit d'une correspondance biunivoque et monotone entre l'intervalle $0 \leq \rho \leq 1$ et $u_0 \leq\cdot w \leq\cdot v_0$ où u_0 , v_0 sont deux entités prédéterminées. Cette correspondance a été établie par une proposition prise comme un axiome dans les travaux de von NEUMANN et MORGENSTERN et de BLACKWELL et GIRSCHIK. M. SAVAGE, d'autre part, a démontré la proposition comme un théorème découlant de ses postulats 1 à 6 : nous l'appellerons proposition 1.

Si $\not{a}_1 <\cdot \not{a}_2$ et $\not{a}_1 \leq\cdot \not{a} \leq\cdot \not{a}_2$ alors il y a une et seulement une valeur de $\rho (0 \leq \rho \leq 1)$ telle que (c1) $(\rho \not{a}_1 , (1 - \rho) \not{a}_2) = \not{a}$. Tous les auteurs montrent que la correspondance établie par cette proposition conduit à introduire des fonctions d'utilité déterminées, et que les choix sont dirigés par les espérances mathématiques de ces utilités.

Prenons la question de l'existence d'une fonction d'utilité quand il y a n états de la Nature, m conséquences et m^n actes. Peut-on trouver une fonction unique en représentant l'utilité dans ce cas ? Notons tout d'abord que l'unicité de la fonction d'utilité dépend entièrement de la proposition 1 dont la démonstration est basée sur l'hypothèse que l'ensemble S peut être l'objet d'une partition entre des sous-ensembles arbitrairement petits (ce qui implique nécessairement que l'ensemble S est infini) ou sur une variante de cette hypothèse. M. SUPPES, d'autre part, a supposé que l'ensemble S soit arbitraire, mais l'ensemble d'actes soit infini. Il est donc évident que pour démontrer l'existence d'une fonction unique d'utilité on a besoin de la proposition 1 ou bien comme un postulat (axiome) ou bien comme un théorème. Dans notre cas où l'ensemble S est fini, il faut donc formuler un autre postulat, outre les postulats 1 à 5 et 6* afin de trouver et établir une fonction unique d'utilité. L'un consiste à supposer le postulat suivant :

Soient :

$$\not{a}_1 \leqslant\cdot \not{a}_i \leqslant\cdot \not{a}_2 \qquad \forall \quad i$$

les utilités de m conséquences sont telles qu'il existe une partition de S_i de l'ensemble S , qui entraîne toujours une probabilité unique ρ_i telle que :

$$(\rho_i \ \not{a}_1 \ , \ (1 - \rho_i) \ \not{a}_2) =\cdot \ a_i \qquad \forall \quad i \qquad\qquad (c2)$$

(La différence entre la condition (c1) et la condition (c2) est évidente !).

ρ_i étant unique, la correspondance une à une peut s'établir entre ρ_i et $\not{a}_i$, en démontrant enfin l'existence d'une fonction discrète d'utilité, qui satisfera les conditions (u1) et (u2) et qui dirigera le critère du choix, en suivant exactement la même méthode adoptée par von NEUMANN et MORGENSTERN afin d'établir l'existence de la fonction continue d'utilité. Il faut noter aussi que les utilités déterminées par cette fonction discrète sont uniques.

Il faut toutefois avouer que le postulat que nous venons de formuler est sans doute très fort en ce qui concerne des restrictions sur l'ensemble S d'états de la Nature et également sur l'ensemble $\mathcal{C}$ de conséquences. En règle générale, nous ne voulons pas imposer des conditions tellement fortes sur S et sur $\mathcal{C}$. Nous allons ainsi traiter le cas plus général, en abandonnant le postulat : de manière précise, on admettra donc qu'il n'est pas nécessairement exact qu'on pourra toujours trouver un ρ_i unique tel que la condition (c2) est satisfaite.

Nous pouvons conclure de tout ce que nous avons dit à propos de l'existence unique d'une fonction d'utilité que, dans le cas envisagé ici, on ne pourra plus représenter l'utilité par un nombre réel et unique à défaut d'un autre postulat en plus des postulats 1 à 5 et 6^*, car l'unicité de l'utilité entraîne l'unicité de ρ satisfaisant la condition (c2). Notre but est donc de formuler d'autres postulats nécessaires en plus des postulats 1 à 5 et 6^* afin de représenter des utilités par des quantités réelles qui ne sont pas nécessairement uniques.

Il ne sera pas hors du sujet de discuter ici un autre point de vue possible. Nous voulons parler de celui de M. HAUSNER qui a considéré un cas particulier où la condition (c1) ne peut être admise. Prenons l'exemple suivant :

Supposons qu'il y ait trois conséquences seulement : la mort (A), le gain de 100 francs (B) et le gain de 200 frs (C).

Nous avons $A \lessdot B \lessdot C$, mais en ce qui concerne la logique du raisonnement, on ne pourra pas déterminer une valeur numérique ρ telle que la relation :

$$(\rho\, A\,,\ (1-\rho)\ C) \doteq B \quad \text{où} \quad 0 < \rho < 1$$

ait lieu. Dans son exposé, M. HAUSNER a considéré les cas de ce type. Il a évité les conditions (c1) et (c2) et ensuite il a représenté sous certaines hypothèses l'utilité non pas par un seul nombre réel, mais par un point dans l'espace à plusieurs dimensions (c'est-à-dire, par un vecteur réel). Cependant, nous ne voulons pas du tout pénétrer profondément dans la théorie de M. HAUSNER et nous nous arrêterons ici en disant qu'il nous semble possible de rencontrer les personnes auxquelles :

$$(\rho\, A\,,\ (1-\rho)\ C) \doteq B \quad \text{où} \quad 0 < \rho < 1$$

où ρ est arbitrairement petit et la préférence pour C est beaucoup plus forte que celle pour B.

On peut bien voir la différence entre le cas étudié ici et celui de M. HAUSNER. Pour éviter la confusion, nous dirons plus nettement qu'on suppose dans celui qui suit, qu'il n'y ait pas des actes tels que n'importe quelle punition sera préférée à eux et également qu'il n'y ait pas des actes qui seraient préférés à n'importe quelle récompense. Dans le chapitre suivant nous construirons des postulats qui apporteront sûrement quelques contraintes sur l'ordre imposé sur l'ensemble de conséquences mais qui nous permettrons d'attribuer les valeurs numériques aux utilités des actes, sous réserve de l'hypothèse que le décideur maximise l'espérance mathématique d'utilité des conséquences d'un acte.

Avant de conclure ce chapitre, nous allons présenter une autre attitude - celle de M. MORLAT qui a bien voulu me conseiller à chaque étape de cette étude. Le problème se pose de la manière suivante :

Il y a l'ensemble S de n états de la Nature, l'ensemble $\mathcal{C}$ de m conséquences et par conséquent, l'ensemble $\mathcal{A}$ de m^n actes. Supposons que l'homme rationnel ait imposé un ordre complet sur l'ensemble $\mathcal{S}$ des sous-ensembles de S aussi bien qu'un ordre complet sur l'ensemble $\mathcal{A}$ d'actes. Nous avons déjà vu que si l'ordre complet sur $\mathcal{S}$ satisfait en plus la condition d'Additivité Etendue (AE), alors cet ordre entraîne l'existence d'une mesure non-unique sur $\mathcal{S}$ et que les valeurs numériques de probabilités subjectives se trouvent dans un ensemble convexe P déterminé par la condition (AE) dans l'espace à n dimensions. (Nous avons dit également que l'on peut réduire cet ensemble convexe même à un seul point en tenant compte des autres informations et des autres données ayant rapport à l'ordre déjà imposé). D'autre part, sous réserve de l'hypothèse qu'on préfère un acte pour lequel l'espérance mathématique d'utilité des conséquences attachées par cet acte aux états est maximisée, l'ordre complet sur l'ensemble $\mathcal{A}$ d'actes nous donne des inégalités comme les suivantes :

$$\sum_{i=1}^{l} p_i \; U(c_i) \geqslant \sum_{j=1}^{k} p_j \; U(c_j')$$

où $0 \leqslant p_i \leqslant 1$, $0 \leqslant p_j \leqslant 1$, $\sum_{i=1}^{l} p_i = \sum_{j=1}^{k} p_j = 1$

et $U(c_i)$ est l'utilité de la conséquence c_i ; ces inégalités enfin s'écrivent, ayant été simplifiées, sous la forme :

$$\sum_{\omega=1}^{\gamma} \lambda_\omega \; p_{i\omega} \; U(c_{j\omega}) \geqslant 0 \qquad \text{(L)}$$

où $\lambda_\omega = -1$, 1 ou 0

$$\sum_{\omega=1}^{\gamma} \lambda_\omega \; p_{i\omega} = 0 \qquad 0 \leqslant p_{i\omega} \leqslant 1$$

le nombre de $p_{i\omega}$ étant n et le nombre de $U(c_{j\omega})$ étant m .

Intuitivement, il semble qu'il existe un ensemble $\mathcal{U}$ (pas nécessairement convexe) dans l'espace à $m + n$ dimensions, les $p_{i\omega}$ venant de l'ensemble convexe P et les éléments de $\mathcal{U}$ satisfaisant la suite des inégalités (L). En fait, les inégalités (L) sont des formes bilinéaires à $m + n$ inconnues sous certaines contraintes impliquées par l'ordre complet sur $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{A}$ et $\mathcal{U}$.

Bien que cette notion de l'existence de $\mathcal{U}$ soit vraisemblable intuitivement, on manque malheureusement pour le moment de méthodes mathématiques pour trouver un tel ensemble $\mathcal{U}$. Il est donc évident que la démonstration de l'existence de $\mathcal{U}$ conduira d'un côté à un exposé de l'existence d'utilité sans unicité, et s'étendra de l'autre à un développement du sujet "La programmation bilinéaire". Il faut citer ici la suggestion de M. VILLE à ce propos. Il a suggéré qu'on peut ajouter des inconnues α_i qui seront non-négatives dans les équations suivantes :

$$\sum_{\omega=1}^{\gamma} \lambda_\omega \; p_{i\omega} \; U\,(C_{j\omega}) - \alpha_k = 0$$

et trouver l'existence de la solution (probablement non-unique) pour les U inconnus dans ces équations. Force nous est de différer pour le moment la recherche d'une solution à ce problème, mais nous espérons avoir l'occasion d'y revenir dans une étude ultérieure.

CHAPITRE V

SUR L'EXISTENCE D'UNE FONCTION D'UTILITÉ DANS LE CAS D'UN NOMBRE FINI D'ÉTATS

Tout d'abord nous allons introduire quelques définitions et également quelques nouvelles notations que nous utiliserons à partir d'ici dans la recherche d'une fonction d'utilité.

Si un acte $\not{a}$ associe à l'état s_j de la Nature la conséquence c_{i_j} $(1 \leqslant j \leqslant n)$ respectivement, où $i_1, i_2, \dots, i_n$ sont n nombres choisis parmi les entiers de 1 à m sans aucune restriction de choix, alors cet acte $\not{a}$ se représentera comme $\not{a} = (p_1 c_{i_1}, p_2 c_{i_2}, \dots, p_n c_{i_n})$ où $p(s_j) = p_j\,(1 \leqslant j \leqslant n)$. Nous appellerons c_{i_j} la jème coordonnée de $\not{a}$.

Si un acte $\not{a}$ associe à l'événement S_1 la conséquence c et associe à $\sim S_1$ la conséquence c' , alors cet acte $\not{a}$ se représentera comme $(p_1\, c\ ,\ (1 - p_1)\, c')$ où $p(S_1) = p_1$.

Un acte qui associe la même conséquence c_i à chaque état s_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ s'appellera un acte constant et se représentera comme (c_i) . Par conséquent, si $\not{a}$ et $\not{a}'$ sont deux actes constants avec les conséquences c et c' respectivement, alors l'acte $(p_1\ c\ ,\ (1 - p_1)\ c')$ peut se représenter comme $(p_1\, \not{a}\ ,\ (1 - p_1)\, \not{a}')$.

Pour faciliter le langage, nous appellerons ici "acte mixte" un acte qui n'est pas constant.

Après avoir donné ces définitions et ces notations, nous nous proposons d'étudier les théorèmes démontrés ci-dessous à l'aide des postulats 1 à 5 et de théorèmes déjà établis plus haut dans le chapitre III.

THEOREME 1. Soient $\not{a}$ et $\not{a}'$ deux actes constants où $\not{a} <\cdot \not{a}'$, Alors nous aurons :

$$\not{a} <\cdot (p\, \not{a}\ ,\ (1 - p)\, \not{a}') <\cdot \not{a}' \qquad \text{pour} \qquad 0 < p < 1$$

Démonstration. Soit S_1 l'événement dont la probabilité est p . Donc la probabilité de $\sim S_1$ est égale à $1 - p$.

L'acte $(p \not{a}\,,\ (1-p)\not{a}')$ est définitivement préféré à l'acte $\not{a}$ sur $\sim S_i$; d'autre part, aucun d'entre eux n'est préféré à l'autre sur S_i . Ainsi, d'après le théorème 2 (chapitre III) nous avons :

$$\not{a} \lessdot (p \not{a}\,,\ (1-p)\not{a}')$$

D'autre part, l'acte $\not{a}'$ est définitivement préféré à l'acte $(p \not{a}\,,\ (1-p)\not{a}')$ sur S_i tandis que, sur $\sim S_i$, aucun d'eux n'est préféré à l'autre. Ainsi nous avons :

$$(p \not{a}\,,\ (1-p)\not{a}') \lessdot \not{a}'$$

Une généralisation du théorème s'exprime dans le théorème 2 dont on a omis la démonstration qui est évidente d'après le théorème 2 et le théorème 3 (chapitre III).

THEOREME 2. Soient $\not{a}_{i_1}, \ldots \not{a}_{i_n}$ et $\not{a}_{j_1} \ldots \not{a}_{j_n}$ des actes constants. Supposons qu'il y ait deux actes mixtes

$$\not{a}_i = (p_1 \not{a}_{i_1}, \ldots p_n \not{a}_{i_n}) \qquad \forall i : p_i > 0$$

$$\not{a}_j = (p_1 \not{a}_{j_1}, \ldots p_n \not{a}_{j_n}) \qquad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Alors :

$$\not{a}_i \,\underline{\lessdot}\, \not{a}_j \quad \text{si} \quad \not{a}_{i_k} \,\underline{\lessdot}\, \not{a}_{j_k} \ (1 \leqslant k \leqslant n)$$

De plus, nous aurons $\not{a}_i \lessdot \not{a}_j$ si $\not{a}_{i_k} \lessdot \not{a}_{j_k}$ pour au moins un k .

Nous allons étudier maintenant une proposition qui est importante, car elle établit une correspondance en quelque sorte entre les actes mixtes et les probabilités. En effet, le théorème exprime que l'ordre de deux actes mixtes de la forme $(p \not{a}\,,\ (1-p)\not{a}')$ s'établit par rapport à la valeur de $1-p$.

THEOREME 3. Soient $\not{a}$ et $\not{a}'$ deux actes constants où $\not{a} \lessdot \not{a}'$. Alors nous avons :

$$(p_1 \not{a}\,,\ (1-p_1)\not{a}') \lessdot (p_2 \not{a}\,,\ (1-p_2)\not{a}')$$

si et seulement si :

$$0 \leqslant 1-p_1 < 1-p_2 \leqslant 1$$

Démonstration. Soit S_1 l'événement dont la probabilité est p_1. Alors l'acte $(p_1 \not{a}, (1-p_1) \not{a}')$ et l'acte $\not{a}$ sont équivalents sur S_1 où tous les deux ont la même conséquence ; également, l'acte $(p_1 \not{a}, (1-p_1) \not{a}')$ et l'acte $\not{a}'$ sont équivalents en dehors de S_1, en ce qui concerne l'autre conséquence.

Soit S_2 l'événement dont la probabilité est p_2. Alors l'acte $(p_2 \not{a}, (1-p_2) \not{a}')$ et l'acte $\not{a}$ auront la même conséquence sur S_2 tandis que l'acte $(p \not{a}, (1-p) \not{a}')$ et l'acte $\not{a}$ produiront la même conséquence sur $\sim S_2$. Autrement dit, $(p_2 \not{a}, (1-p_2) \not{a}')$ et $\not{a}$ seront équivalents sur S_2 et $(p_2 \not{a}, (1-p_2) \not{a}')$ et $\not{a}'$ seront équivalents sur $\sim S_2$.

En rappelant maintenant la définition 5 donnée dans le chapitre III, et que par hypothèse $\not{a} <\cdot \not{a}'$, nous avons :

$$(p_1 \not{a}, (1-p_1) \not{a}') <\cdot (p_2 \not{a}, (1-p_2) \not{a}')$$

si et seulement si la probabilité de S_1 est plus grande que la probabilité de S_2 : c'est-à-dire que $p_2 < p_1$ ou $1-p_1 < 1-p_2$.

Le théorème suivant établit une propriété de la fonction d'utilité si cette fonction existe.

THEOREME 4. Si U est une utilité et ρ, σ sont des nombres réels avec $\rho > 0$, alors $U' = \rho U + \sigma$ représente également une utilité.

Démonstration. Puisque $U(\not{a})$ et $U(\not{a}')$ sont les nombres réels et nous avons :

$$U(\not{a}) \leqslant U(\not{a}') \quad \text{pour} \quad \not{a} \leqslant\cdot \not{a}'$$

alors :

$$\rho \; U(\not{a}) + \sigma \leqslant \rho \; U(\not{a}') + \sigma$$

c'est-à-dire :

$$U'(\not{a}) \leqslant U'(\not{a}') \; .$$

Donc U' est aussi une utilité.

COROLLAIRE. Supposons qu'il existe une utilité et que $\not{a} <\cdot \not{a}'$, $\not{a}$ et $\not{a}'$ étant deux actes constants. Alors si $U(\not{a})$ et $U(\not{a}')$ sont deux nombres réels quelconques avec $U(\not{a}) < U(\not{a}')$, il existe une fonction U d'utilité qui entraîne les deux valeurs $U(\not{a})$ et $U(\not{a}')$.

Ce corollaire est évident d'après le théorème.

Il faut bien noter qu'une proposition dont la démonstration se trouve dans l'ouvrage de M. SAVAGE, ne peut pas tenir dans le cas étudié ici, car nous avons évité la condition qu'il existe une valeur unique de p telle que :

$$(p\ \not a\ ,\ (1-p)\ \not a')\ =\cdot\ \not a''$$

pour :

$$0 \leqslant p \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \not a \leqslant \not a'' \leqslant \not a'$$

Cette proposition est liée au théorème 4 et exprime qu'il existe des nombres ρ et σ avec $\rho > 0$, tels que $U' = \rho U + \sigma$ où U et U' sont des utilités. Considérée conjointement avec le théorème 8, elle entraîne que chaque utilité est une fonction linéaire de chaque autre.

Nous définissons l'addition $(+)$ et l'équivalence $(\sim)$ à l'égard des actes comme :

$\not a_i + \not a_j \sim \not a'_i + \not a'_j$ ($\not a_i$ plus $\not a_j$ est équivalent à $\not a'_i$ plus $\not a'_j$) si, étant donné une conséquence c_i qui se trouve être la jème coordonnée de r actes $(r = 0,\ 1,\ 2)$ parmi $\not a_i$ et $\not a_j$, c_i se trouve être la jème coordonnée de r et seulement r actes parmi $\not a'_i$ et $\not a'_j$.

Cette notion peut être généralisée dans le cas de p actes et nous écrirons :

$$\sum_{i=1}^{p} \not a_{i1} \sim \sum_{i=1}^{p} \not a_{i2}$$

si la conséquence c_i qui se trouve comme la jème coordonnée de r $(0 \leqslant r \leqslant p)$ actes parmi $\not a_{11}, \not a_{21}, \ldots \not a_{p1}$ figure aussi le même nombre (r) de fois comme la jème coordonnée parmi $\not a_{12}, \not a_{22}, \ldots \not a_{p2}$.

Il suit aussi qu'étant donné $\not a$, $\not a \sim \not a$.

Avec ces notations la définition de la compatibilité avec une valuation (donnée dans le chapitre I) se modifie comme suit :

Un ordre complet sera dit compatible avec une valuation si et seulement si, l'on n'aura jamais :

$$\sum_{i=1}^{p} \not a_{i1} \sim \sum_{i=1}^{p} \not a_{i2}\ ,$$

étant donné $\not a_{i1} \leqslant \not a_{i2}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ au moins une des relations étant une inégalité stricte.

Nous définissons une opération ternaire $(+,-)$ comme suit : Etant donnés trois éléments $\not{a}_i$, $\not{a}_j$ et $\not{a}_k$ dans $\mathfrak{A}$, $\not{a}_i + \not{a}_j - \not{a}_k$ sera défini si pour $1 \leqslant j \leqslant n$ la jème coordonnée de $\not{a}_k$ se trouve être la jème coordonnée de au moins un de $\not{a}_i$ et $\not{a}_j$. Dans ce cas $\not{a}_i + \not{a}_j - \not{a}_k$ se représentera comme un acte dans $\mathfrak{A}$. Trois cas peuvent se produire à l'égard de chaque coordonnée :

(i) et (ii) Si la jème coordonnée de $\not{a}_k$ est la même que la jème coordonnée de $\not{a}_i$ ($\not{a}_j$) tout en étant différente de la jème coordonnée de $\not{a}_j$ ($\not{a}_i$), alors on définira la jème coordonnée de $\not{a}_i + \not{a}_j - \not{a}_k$ comme étant celle de $\not{a}_j$ ($\not{a}_i$).

(iii) Si la jème coordonnée de $\not{a}_k$ est la même que les jèmes coordonnées de $\not{a}_i$ et de $\not{a}_j$ (qui sont donc identiques), alors on définira la jème coordonnée de $\not{a}_i + \not{a}_j - \not{a}_k$ comme étant celle de $\not{a}_k$.

THEOREME 5. Etant donné deux actes $\not{a}_i$ et $\not{a}_j$, on peut trouver un acte $\not{a}_k$ tel que $\not{a}_i + \not{a}_j - \not{a}_k$ est un acte.

Démonstration du théorème 5. Choisissez la jème coordonnée de $\not{a}_k$ comme la jème coordonnée de $\not{a}_i$ ou $\not{a}_j$. Le théorème suit de la définition de $\not{a}_i + \not{a}_j - \not{a}_k$.

Cor. 1. Etant donné $\not{a}_i$ et $\not{a}_j$ distincts, on peut trouver plusieurs $\not{a}_k$ tels que $\not{a}_i + \not{a}_j - \not{a}_k$ sera un acte.

Ce théorème peut être généralisé dans le théorème 6 qui suit et qui se démontre facilement.

THEOREME 6. Etant donné $\not{a}_i$, $1 \leqslant i \leqslant p$, on peut trouver

$$\not{a}'_i\,,\quad 1 \leqslant i \leqslant p-1$$

tels que :

$$\not{a}_1 + \not{a}_2 - \not{a}'_1 + \not{a}_3 - \not{a}'_2 + \dots + \not{a}_p - \not{a}'_{p-1}$$

soit un acte. (On écrira cet acte comme :

$$\sum_{i=1}^{p} \not{a}_i - \sum_{i=1}^{p-1} \not{a}'_i\,,$$

les ordres de sommes étant importants).

D'après la notion de l'Additivité nous définissons celle de V-additivité.

Un ordre complet sur $\mathfrak{A}$ sera dit satisfaire la condition de V-Additivité si, étant donné $\not{a}_i \leqslant \not{a}_j$ et $\not{a}_i \leqslant \not{a}'_j$ (avec au moins une des inégalités stricte), et si $\not{a}_k$ est un acte tel que :

$$\not{a}_i + \not{a}'_i - \not{a}_k \quad \text{et} \quad \not{a}_j + \not{a}'_j - \not{a}_k$$

sont définis, alors :

$$\not{a}_i + \not{a}'_i - \not{a}_k \lessdot \not{a}_j + \not{a}'_j - \not{a}_k .$$

Soit v une valuation telle que si :

$$\not{a} = (p_1\, c_i\,,\ p_2\, c_i\,,\ \ldots .\ p_n\, c_i)\,,$$

nous avons $v(\not{a}) = v_i$ et si :

$$\not{a} = (p_1\, c_{i_1}\,,\ p_2\, c_{i_2}\,,\ \ldots .\ p_n\, c_{i_n})$$

alors :

$$v(\not{a}) = p_1\, v_{i_1} + p_2\, v_{i_2} + \ldots . + p_n\, v_{i_n}$$

où v_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont n valeurs numériques. Nous supposons que $0 \leqslant v_i \leqslant 1$, sans perte de généralité.

En donnant ces valeurs on obtient un ordre complet sur les éléments de $\mathfrak{A}$ (c'est-à-dire les actes dans $\mathfrak{A}$ seront ordonnés selon les valeurs données).

Comme défini dans le chapitre 1, un ordre complet imposé par la relation binaire $\lessdot$ sur les éléments de $\mathfrak{A}$ est dit provenir d'une mesure si l'on peut attacher aux actes constants $\not{a}_i$ de $\mathfrak{A}$ les valeurs v_i telles que quand

$$\not{a} = (p_1\, c_{i_1}\,,\ p_2\, c_{i_2}\,, \ldots\ p_n\, c_{i_n}) \lessdot \not{a}' = (p_1\, c_{j_1}\,,\ p_2\, c_{j_2}\,, \ldots\ p_n\, c_{j_n})$$

nous aurons :

$$v(\not{a}) = p_1\, v_{i_1} + p_2\, v_{i_2} + \ldots + p_n\, v_{i_n} \leqslant v(\not{a}') = p_1\, v_{j_1} + p_2\, v_{j_2} + \ldots + p_n\, v_{j_n}.$$

De plus, quand $\not{a} \lessdot \not{a}'$, $v(\not{a}) < v(\not{a}')$.

Notre propos ici est de trouver la condition entraînée par l'ordre imposé sur $\mathfrak{A}$ qui sera compatible avec une valuation.

D'après l'idée déjà exposée dans le chapitre 1, nous savons que l'ordre imposé sur les actes dans $\mathfrak{A}$, donne une série d'inégalités (et d'égalités) avec les inconnues v_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$. La solution numérique (pas nécessairement unique) existe si et seulement si cet ordre est compatible avec une valuation.

D'après la condition d'Additivité Etendue, nous construisons la condition de V-Additivité Etendue (VAE) comme suit :

Donnons $\not{a}_{i_1} \lessdot \not{a}_{i_2} (1 \leqslant i \leqslant p)$ au moins une des relations étant une inégalité stricte.

Si l'on peut trouver des $\not{a}_{i_3}(1 \leqslant i \leqslant p-1)$ tels que :

$$\not{a}_1 = \sum_{i=1}^{p} \not{a}_{i_1} - \sum_{i=1}^{p-1} \not{a}_{i_3} \quad \text{et} \quad \not{a}_2 = \sum_{i=1}^{p} \not{a}_{i_2} - \sum_{i=1}^{p-1} \not{a}_{i_3}$$

sont deux actes dans $\mathfrak{A}$, alors nous aurons pour chaque valeur admissible de p ,

$$\not{a}_1 \lessdot \not{a}_2 \,.$$

Tout à l'heure nous démontrerons que la condition de la V-Additivité Etendue est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ordre soit compatible avec une valuation c'est-à-dire l'ordre provienne d'une mesure. Mais avant de démontrer cela, nous allons citer un contre-exemple, montrant que la condition de V-Additivité ne suffit pas pour qu'une telle valuation existe. Nous avons considéré le même exemple que KRAFT, PRATT et SEIDENBERG ont cité dans leur article.

Soient $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ et $\mathcal{C} = \{c_1, c_2\}$. Il y a 2^5 actes dans $\mathfrak{A}$. Nous supposons que l'ensemble $\mathfrak{S}$ des sous-ensembles de S est ordonné par un ordre simple qui satisfait la condition d'Additivité. De ce qui est déjà démontré, il suit qu'on peut déterminer une région admissible Ω dans l'espace à 5 dimensions, dans laquelle n'importe quel point $(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ donne les valeurs numériques de probabilités de $\{s_i\}$ $1 \leqslant i \leqslant 5$. On choisit un point et ensuite on représente la probabilité $\{s_i\}$ par p_i $(1 \leqslant i \leqslant 5)$. Pour la commodité d'écriture, nous allons abandonner p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 et écrirons, par exemple, $(c_1, c_2, c_1, c_1, c_2)$ au lieu de $(p_1 c_1, p_2c_2, p_3c_1, p_4c_1, p_5c_2)$.

L'ordre complet est le suivant

$(c_1, c_1, c_1, c_1, c_1) \lessdot (c_2, c_1, c_1, c_1, c_1) \lessdot (c_1, c_2, c_1, c_1, c_1)$
$(c_1, c_1, c_2, c_1, c_1) \lessdot (c_2, c_2, c_1, c_1, c_1) \lessdot (c_2, c_1, c_2, c_1, c_1)$
$(c_1, c_1, c_1, c_2, c_1) \lessdot (c_2, c_1, c_1, c_2, c_1) \lessdot (c_1, c_2, c_2, c_1, c_1)$
$(c_1, c_1, c_1, c_1, c_2) \lessdot (c_2, c_2, c_2, c_1, c_1) \lessdot (c_1, c_2, c_1, c_2, c_1)$
$(c_1, c_1, c_2, c_2, c_1) \lessdot (c_2, c_1, c_1, c_1, c_2) \lessdot (c_2, c_2, c_1, c_2, c_1)$
$(c_1, c_2, c_1, c_1, c_2) \lessdot (c_2, c_1, c_2, c_2, c_1) \lessdot (c_1, c_1, c_2, c_1, c_2)$
$(c_1, c_2, c_2, c_2, c_1) \lessdot (c_2, c_2, c_1, c_1, c_2) \lessdot (c_2, c_1, c_2, c_1, c_2)$
$(c_1, c_1, c_1, c_2, c_2) \lessdot (c_2, c_2, c_2, c_2, c_1) \lessdot (c_2, c_1, c_1, c_2, c_2)$
$(c_1, c_2, c_2, c_1, c_2) \lessdot (c_2, c_2, c_2, c_1, c_2) \lessdot (c_1, c_2, c_1, c_2, c_2)$
$(c_1, c_1, c_2, c_2, c_2) \lessdot (c_2, c_2, c_1, c_2, c_2) \lessdot (c_2, c_1, c_2, c_2, c_2)$
$(c_1, c_2, c_2, c_2, c_2) \lessdot (c_2, c_2, c_2, c_2, c_2)$

En choisissant les actes de cet ensemble de 32 actes, l'on peut vérifier la condition de la V-Additivité. Mais choisissez maintenant :

$$\not{a}_1 = (c_2\ ,\ c_1\ ,\ c_2\ ,\ c_1\ ,\ c_1)\ ,\ \not{a}_2 = (c_1\ ,\ c_1\ ,\ c_1\ ,\ c_2\ ,\ c_1)\ ,$$

$$\not{a}_3 = (c_2\ ,\ c_1\ ,\ c_1\ ,\ c_2\ ,\ c_1)\ ,\ \not{a}_4 = (c_1\ ,\ c_2\ ,\ c_2\ ,\ c_1\ ,\ c_1)\ ,$$

$$\not{a}_5 = (c_1\ ,\ c_1\ ,\ c_2\ ,\ c_2\ ,\ c_1)\ ,\ \not{a}_6 = (c_2\ ,\ c_1\ ,\ c_1\ ,\ c_1\ ,\ c_2)\ ,$$

On peut voir que $\not{a}_1 < \not{a}_2$, $\not{a}_3 < \not{a}_4$ et $\not{a}_5 \lessdot \not{a}_6$ avec

$$\not{a}_1 + \not{a}_3 + \not{a}_5 \sim \not{a}_2 + \not{a}_4 + \not{a}_6$$

Alors cet ordre n'est pas compatible avec une valuation et comme conséquence, il ne provient pas d'une mesure.

Prenons maintenant la condition de la V-Additivité Etendue.

THEOREME 7. Un ordre complet sur $\mathfrak{A}$ provient d'une mesure si et seulement si cet ordre vérifie la condition de la V-Additivité Etendue.

Démonstration du théorème 7. La proposition découle du théorème 1 (chapitre 1) si l'on peut démontrer que la condition de V-Additivité Etendue est nécessaire et suffisante pour qu'un ordre complet sur $\mathfrak{A}$ soit compatible avec une valuation.

Supposons d'abord qu'un ordre complet sur $\mathfrak{A}$ est compatible avec une valuation. Soient $\not{a}_{i_1} \lessdot \not{a}_{i_2}$ $(1 \leqslant i \leqslant p)$ avec au moins une des relations strictement une inégalité. Alors nous n'aurons jamais

$$\sum_{i=1}^{p} \not{a}_{i_1} \sim \sum_{i=1}^{p} \not{a}_{i_2}$$

Soient $\not{a}_{i_3}$ $(1 \leqslant i \leqslant p-1)$ $p-1$ actes tels que :

$$\sum_{i=1}^{p} \not{a}_{i_1} - \sum_{i=1}^{p-1} \not{a}_{i_3} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} \not{a}_{i_2} - \sum_{i=1}^{p-1} \not{a}_{i_3}$$

sont deux actes.

Supposons s'il soit possible que :

$$\sum_{i=1}^{p} \not{a}_{i_2} - \sum_{i=1}^{p-1} \not{a}_{i_3} \lessdot \sum_{i=1}^{p} \not{a}_{i_1} - \sum_{i=1}^{p-1} \not{a}_{i_3}$$

Considérons maintenant les relations $\not{a}_{i_1} \leqslant \not{a}_{i_2} (1 \leqslant i \leqslant p)$ et :

$$\sum_{i=1}^{p} \not{a}_{i_2} - \sum_{i=1}^{p-1} \not{a}_{i_3} < \sum_{i=1}^{p} \not{a}_{i_1} - \sum_{i=1}^{p-1} \not{a}_{i_3}$$

Il est évident que

$$\sum_{i=1}^{p} \not a_{i_1} + \sum_{i=1}^{p} \not a_{i_2} - \sum_{i=1}^{p-1} \not a_{i_3} \sim \sum_{i=1}^{p} \not a_{i_2} + \sum_{i=1}^{p} \not a_{i_1} - \sum_{i=1}^{p-1} \not a_{i_3} ,$$

en contradiction avec l'hypothèse de la compatibilité avec une valuation.

Ensuite supposons qu'un ordre complet sur $\mathcal{a}$ vérifie la condition de la V-Additivité Etendue. Ainsi nous avons

$$\sum_{i=1}^{p} \not a_{i_1} - \sum_{i=1}^{p-1} \not a_{i_3} < \sum_{i=1}^{p} \not a_{i_2} - \sum_{i=1}^{p-1} \not a_{i_3}$$

étant donné $\not a_{i_1} \leqslant \not a_{i_2}$ avec au moins une des relations strictement une inégalité et $\not a_{i_3}$ étant $p - 1$ actes quelconques tels que

$$\sum_{i=1}^{p} \not a_{i_1} - \sum_{i=1}^{p-1} \not a_{i_3} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} \not a_{i_2} - \sum_{i=1}^{p-1} \not a_{i_3}$$

soient deux actes.

Il est évident que si chaque c_i qui se trouve comme la jème coordonnée de r actes de $\not a_{1_1}, \not a_{2_1}, \dots \not a_{p_n}$, se trouvait aussi comme la jème coordonnée du même nombre (r) des actes $\not a_{1_2}, \not a_{2_2}, \dots \not a_{p_2}$, alors pour chaque j , la jème coordonnée de

$$\sum_{i=1}^{p} \not a_{i_1} - \sum_{i=1}^{p-1} \not a_{i_3}$$

n'est que celle de :

$$\sum_{i=1}^{p} \not a_{i_2} - \sum_{i=1}^{p-1} \not a_{i_3} .$$

Mais dans ce cas, on aura

$$\sum_{i=1}^{p} \not a_{i_1} - \sum_{i=1}^{p-1} \not a_{i_3} \sim \sum_{i=1}^{p} \not a_{i_2} - \sum_{i=1}^{p} \not a_{i_3}$$

en contradiction avec l'hypothèse.

Il en découle que si la condition (V-AE) est vérifiée, nous n'aurons jamais :

$$\sum_{i=1}^{p} \not a_{i_1} \sim \sum_{i=1}^{p} \not a_{i_3}$$

avec $\not{a}_{i_1} \leqslant \not{a}_{i_2}$ $1 \leqslant i \leqslant p$ où au moins une des inégalités est stricte et la démonstration du théorème est complète.

Maintenant nous allons définir l'utilité d'un acte $\not{a}$.

DEFINITION 1. L'utilité U d'un acte $\not{a}$ est l'espérance mathématique des utilités d'actes constants que cet acte $\not{a}$ associe aux états de la Nature comme conséquences.

En notations mathématiques :

$$U\ [\not{a}] = \sum_{i=1}^{n} p_i\ U(c_j)$$

où $\not{a} = (p_1 c_{j_1}, p_2 c_{j_2}, \dots, p_n c_{j_n})$ et $U(c_{j_i})$ est l'utilité de l'acte constant qui à tous les états associe la conséquence c_{j_i} mesurée numériquement par v_{j_i}.

De ce qui est dit et qui est démontré ci-dessus, le théorème qui suit est évident.

THEOREME 8. Soient $\not{a}$ et $\not{a}'$ deux actes quelconques. Si $U\ [\not{a}]$ signifie l'espérance mathématique des utilités attachées aux conséquences de l'acte $\not{a}$, alors

$$U\ [\not{a}] < U\ [\not{a}'] \quad \text{si et seulement si} \quad \not{a} \lessdot \not{a}'$$

Quant à la définition d'utilité nous voulons attirer l'attention sur les faits suivants :

1/ Nous voyons que si la probabilité mesure est continue, pour n'importe quel acte constant $\not{a}$, il sera possible de trouver un ρ tel que, étant donné $\not{a}_0$ et $\not{a}_1$, nous aurons :

$$(\rho\ \not{a}_0\ ,\ (1-\rho)\ \not{a}_1) =\cdot\ \not{a}$$

où $\not{a}_0 \leqslant \not{a} \leqslant \not{a}_1$ et $0 \leqslant \rho \leqslant 1$. Dans ce cas, alors il est évident que le problème se réduira à celui traité par von NEUMANN et MORGENSTERN et la fonction d'utilité ne sera qu'une seule et même fonction qu'ils ont considérée afin de démontrer l'existence d'utilité.

2/ MM. DAVIDSON et SUPPES ont considéré l'existence de l'utilité. Ils ont suivi la pensée et la méthode de RAMSEY et ont pris une série de nouveaux axiomes (plusieurs d'entre eux sont différents de ceux que nous avons considérés plus haut). Dans leur cas, le nombre d'états de la Nature peut être arbitraire tandis que le champ de décisions est infini. Mais, parmi leurs axiomes, ils ont également supposé une hypothèse. On peut l'exprimer comme suit :

Les utilités de conséquences se disposent à des intervalles réguliers sur l'échelle d'utilité. (Autrement dit, la différence entre les utilités est constante pour n'importe quelle paire de conséquences successives mises en ordre selon la préférence de l'une sur l'autre). Tout au début de leur article ils admettent pourtant qu'une telle hypothèse est bien loin de traduire la réalité et nous pensons qu'on ne peut admettre même approximativement de le faire dans la plupart des cas.

3/ De notre côté nous savons que si la condition (V-AE) est vérifiée par un ordre complet sur $\mathcal{A}$, il existe des valeurs numériques v_i qu'on peut attacher aux conséquences c_i pour dénoter l'utilité de c_i . Mais nous devons remarquer aussi que ces valeurs numériques v_i ne sont pas uniquement déterminées. En fait pour chaque point $(p_1, p_2, \ldots p_n)$ dans la région admissible Ω pour représenter les probabilités $p\{s_i\}$ $1 \leqslant i \leqslant n$, nous aurons une région $\mathcal{U}$ (dans l'espace à m dimensions) dans laquelle chaque point $(v_1, v_2, \ldots v_m)$ représentera une collection de valeurs numériques pour représenter les utilités $U(c_j)$. Comme dans le cas des probabilités, nous voulons ajouter également ici qu'il n'y a aucune raison de préférer un point "spécial" à un autre dans la région correspondant à $\mathcal{U}$, si l'homme rationnel ne peut donner d'autres contraintes qui lui permettent de le justifier.

Le 7ème postulat énoncé par M. SAVAGE est comme suit :

POSTULAT 7. Si $\not{a} \leqslant a'(s)$ étant donné S_i , pour chaque $s \in S_i$, alors $\not{a} \leqslant \not{a}'$ étant donné S_i .

Il nous semble raisonnable maintenant de garder le postulat 7 de M. SAVAGE, en supposant d'abord les postulats 1 à 5 et 6*. De tout ce qui est dit ci-dessus, il suit que l'homme rationnel dont le comportement est en conformité avec les postulats 1 à 5, 6* et 7 maximise l'espérance mathématique d'utilités de conséquences dans le cas où l'ensemble d'états et l'ensemble de conséquences sont finis.

Avant de terminer ce chapitre nous devons dire qu'il est très facile de construire des exemples de comportement qui violent les axiomes de von NEUMANN et MORGENSTERN. Egalement, M. ALLAIS a pensé qu'il n'était pas suffisant de considérer l'espérance mathématique d'utilités pour prédire les décisions devant l'incertitude et le risque ; il faut aussi tenir compte de la variance et peut être de moments plus élevés de la distribution de l'utilité. Il y a des cas où cet argument paraît convainquant. Vous préféreriez sûrement la certitude de gagner un million de francs qu'une chance sur deux de gagner soit quatre millions de francs soit rien du tout. M. EDWARDS dit que cette préférence paraît être due au fait que l'espérance mathématique du pari 50 pour 100 est moindre que l'utilité d'un million de francs, bien que ce soit possible. Une explication plus simple est que les variances de ces deux propositions sont différentes. Une preuve de ce fait est que si l'on savait qu'on doit choisir 20 fois de suite, alors on prendrait probablement chaque fois le pari 50 - 50. M. ALLAIS a construit plusieurs exemples de ce type. Cependant, en citant les mots de M. EDWARDS, nous devons dire que l'introduction de la variance et de moments d'ordre supérieur de la distribution d'utilités semble rendre totalement insoluble le problème de l'application expérimentale de la théorie.

BIBLIOGRAPHIE

(1) ALLAIS M. - "Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : critique des postulats et axiomes de l'école américaine", Econometrica, 21, 1953.

(2) ALLAIS M. et G. MORLAT - "Sur la théorie des choix aléatoires", Revue d'Economie Politique, 1957.

(3) ARROW K. J. - Social Choice and Individual Values. Wiley, 1951.

(4) ARROW K. J. - "Alternative approaches to the theory of choice in risktaking situations", Econometrica, 19, 1951.

(5) BARBUT M. - "Ensembles ordonnés", Revue Française de Recherche Opérationnelle. 20, 5ème année.

(6) BAUMOL W. J. - "The Neumann-Morgenstern utility index - an ordinalist view", Journal of Political Economy, 59, 1951.

(7) BERNOULLI D. - "Exposition of a new theory on the measurement of risk", (Traduction de "Specimen theoriae novae de mensura sortis" par Louise SOMMER) Econometrica, 22, 1954.

(8) BLACKWELL D. et M. A. GIRSCHIK - The Theory of Games and Statistical Decisions. Wiley., New York, 1954.

(9) BOREL E. · Valeur pratique et philosophie des probabilités. Gauthiers-Villars, Paris, 1939.

(10) CARNAP R. - Logical Foundations of Probability (2ème ed.). University of Chicago Press, Chicago, (1962).

(11) COOMBS C. H. et D. BEARDSLEE - "On decision making under uncertainty"(*).

(*) voir THRALL R. M. etc. Decision Processes.

(12) DAVIDSON D. et P. SUPPES - Decision Making : An Experimental Approach. Stanford, 1957.

(13) DEBREU G. - La Théorie de la valeur : Thèse pour le Grade de Docteur es-Sciences à la Faculté des Sciences, Paris.

(14) de FINETTI B. - "La prévision : ses lois logiques, ses sources subjectives", Annales de l'Institut Henri Poincaré, 7, 1937 .

(15) de FINETTI B. - La 'logica del plausible' secondo la concezione di Polya", Atti della XLII Riunione Societa Italiena per il Progresso della Scienza, 1949.

(16) de FINETTI B. - "Recent suggestions for the reconciliations of theories of probability", Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950.

(17) de FINETTI B. - "Rôle de la théorie des jeux dans l'économie et rôle des probabilités personnelles dans la théorie des jeux" , Colloque du C.N.R.S. sur l'Econométrie, Paris, 1961.

(18) DREZE J. - "Fondements logiques de la probabilité subjective et de l'utilité", Colloque du C.N.R.S. sur la Décision, Paris , 1961.

(19) DUGUE D. - Ensembles mesurables et probabilisables, Dunod , Paris, 1958.

(20) EDWARDS W. - "The theory of decision-making", Psychological Bulletin, 5, 1954, (traduit par M. le Colonel CHANDESSAIS).

(21) ESTES W.K. - "Individual behavior in uncertain situations"(*).

(22) FENCHEL W. - Convex Cones, Sets and Functions. Princeton, 1953.

(23) FISHER R.A. - Statistical Mehtods for Research Workers. Oliver and Boyd, 1925.

(24) FISHER R.A. - Statistical Methods and Scientific Inference. Oliver and Boyd, 1956.

(25) FRIEDMAN M. et L.J. SAVAGE - "The utility analysis of choices involving risk", Journal of Political Economy, 56, 1948.

(26) FRIEDMAN M. - "The expected utility hypothesis and the measurability of utility", Journal of Political Economy, 60, 1952 .

(27) GOOD I.J. - Probability and the Weighing of Evidence, Charles Griffin, London, 1950.

(*) Note de la page précédente.

(28) GUILBAUD G. Th. - "Sur une difficulté de la théorie du risque", Colloque du C.N.R.S. sur l'Econométrie, Paris, 1953.

(29) GUILBAUD G. Th. - "Faut-il jouer au plus fin ? Colloque sur la Décision, Paris, 1961.

(30) GIRAULT M. - "Probabilité et Décision" C. N. R. S., Colloque sur la Décision, 1961.

(31) HARSANYI J. - "Cardinal welfare, Individualistic ethics and interpersonal comparisons of utility", Journal of Political Economy, 63, 1955.

(32) HAUSNER M. - "Multidimensional utilities"(*).

(33) HILDRETH C. - "Alternative conditions for social orderings", Econometrica, 21, 1953.

(34) HOGBEN L. - Statistical Theory : The Relationship of Probability and Error. Allen and Unwin, 1957.

(35) JEFFREYS H. - Theory of probability, Oxford, 1948.

(36) KEMENY J.G. - "Fair bets and inductive inference", Journal of Symbolic Logic. 20, 1955.

(37) KOLMOGOROFF A.N. - Foundations of the Theory of Probability. Chelsea Pub., Co., N. Y., 1956.

(38) KOOPMAN B.O. - "The Axions and Algebra of Intuitive Probability", Annals of Mathematics, Ser. 2, 41, 1940.

(39) KOOPMAN B.O. - "The Bases of Probability", Bulletin of the American Mathematical Society, 46, 1940.

(40) KOOPMAN B.O. - "Intuitive Probabilities and Sequences", Annals of Mathematics, Ser. 2, 42, 1941.

(41) KRAFT C., J.W. PRATT et A. SEIDENBERG - "Intuitive Probability on Finite Sets", Annals of Mathematical Statistics, 30, 1959.

(42) KUHN H.W. et A.W. TUCKER - Contributions to the theory of games, Vol. I et II, Princeton.

(43) KUHN H.W. et A.W. TUCKER - Linear Inequalities and Related Systems, Princeton, 1956.

(44) KYBURG Jr., H.E. - Probability and the Logic of Rational Belief, Wesleyan University Press, 1961.

(*) Voir note de la page 73

(45) KYBURG Jr., H.E. et E. NAGEL - Induction ; some current issues (ed.) Wesleyan University Press. 1963.

(46) LINDLEY D.V. - "Statistical Inference" Journal of the Royal Statistical Society Ser. B 15 (1953).

(47) LEHMAN R.S. - "On confirmation and rational betting", Journal of Symbolic Logic, 20, 1955.

(48) LUCE R.D. - Individual Choice Behavior, Wiley, N.Y., 1959.

(49) LUCE R.D. et H. RAIFFA - Games amd Decisions, Wiley, N. Y., 1959.

(50) MARKOWITZ H. - "The utility of wealth", Journal of Political Economy, 60, 1952.

(51) MARSCHAK J. - "Rational behavior, uncertain prospects, and measurable utility", Econometrica, 18, 1950.

(52) MASSE P. - "Sur une généralisation de la méthode du pari d'Emile Borel", Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences (247) 1959.

(53) MASSE P. et G. MORLAT - "Sur le classement économique des perspectives aléatoires", Colloque du C.N.R.S. sur l'Econométrie, 1953.

(54) MILNOR J. - "Games against Nature". (*)

(55) MORLAT G. - La discussion sur la communication de M. SAVAGE dans le Colloque du C.N.R.S. sur l'Econométrie, 1953.

(56) MORLAT G. - "Sur quelques points de la théorie des tests", Publications de l'I.S.U.P., 8, 1959.

(57) MORLAT G. - "Le choix d'une décision et le choix d'un critère", Colloques du C.N.R.S. sur la Décision, 1961.

(58) MOSTELLER F.C. et P. NOGEE - "An experimental measurement of utility", Journal of Political Economy, 59, 1951.

(59) MOURIER E. - "Tests de choix entre diverses lois de probabilité".

(60) NAGEL E., P. SUPPES et A. TARSKI - Logic, Methodology and Philosophy of Science. Stanford, 1962.

(61) NEYMAN J. - First course on Probability and Statistics. 1950.

(62) NUNKE R.J. et L.J. SAVAGE - "On the set of values of a no-

---

(*) Note de la page 73

natomic, finitely additive, finite measure", Proceeding of the American Mathematical Society, 3, 1952.

(63) POLYA G. - "Preliminary remarks on a logic of plausible inference", Dialectica, 3, 1949.

(64) PRATT J.W. - "Qualitative Probabilities on Finite Sets" Statistical Research Centre, University of Chicago.

(65) RAIFFA H. et R. SCHLAIFER - Applied Statistical Decision Theory, Harvard, 1961.

(66) RAMSEY F.P. - "Truth and probability" et "Further considerations" dans "The Fondations of Mathematics and Other Logical Essays". Kegan Paul, 1931.

(67) SAMUELSON P.A. - "Probability, utility and the independence axioms", Econometrica, 20, 1952.

(68) SAMUELSON P.A. - "Utilité, préférence et probabilité", Colloque du C.N.R.S. sur l'Econométrie, 1953.

(69) SAVAGE L.J. - "The theory of statistical decision", Journal of the American Statistical Association, 46, 1951.

(70) SAVAGE L.J. - The Foundations of Statistics, Wiley, 1954.

(71) SAVAGE L.J. - "The foundations of statistics reconsidered", Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1961.

(72) SCHLAIFER R. - Probability and Statistics for Business Decisions, McGraw-Hill, 1959.

(73) SCOTT D. et P. SUPPES - "Foundational aspects of theories of measurement", Journal of Symbolic Logic, 23, 1958.

(74) SMITH C.A.B. - "Consistency in statistical theory and decision", Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 23, 1961.

(75) SOBCZYK A. et P.C. HAMMER - "The ranges of additive set function", Duke Mathematical Journal, 11, 1944.

(76) SUPPES P. et M. WINET - "An axiomatization of utility based on the notion of utility differences", Management Sciences, 1, 1955.

(77) SUPPES P. et M. WINET - "The role of subjective probability and utility in decision making", Technical Report n° 3, Stanford University, 1955.

(78) THRALL R.M., C.H. COOMBS et R.L. DAVIS - Decision Processes, Wiley, N.Y., 1954.

(79) VAN DANTZIG D. - "Carnap's foundation of probability theory" Synthese, 8, 1951.

(80) VAN DANTZIG D. - "Utilité d'une distribution de probabilité ou distribution des utilités". Colloque du C.N.R.S. sur l'Econométrie, 1953.

(81) VAN DANTZIG D. - Statistical Priesthood (Savage on Personal Probability) Statistica Neerlandica 2, 1957.

(82) VAN DANTZIG D. - "Sur quelques questions de la théorie mathématique du choix pondéré", Colloque du C. N. R. S. sur la Décision, 1961.

(83) VILLE J.A. - "Sur l'estimation des éléments de certaines décisions", Colloque du C.N.R.S. sur la Décision, 1961.

(84) VON MISES R. - Probability, Statistics and Truths. Macmillan N. Y., 1957.

(85) VON NEUMANN J. et O. MORGENSTERN - Theory of Games and Economic Behavior. 3ème ed. Princeton, 1953.

(86) WALD A. - Statistical Decision Functions. Wiley 1947.

(87) WOLD H. - "Ordinal preferences or cardinal utility", Econometrica, 20, 1952.