CAHIERS DU BURO

GERMAIN KREWERAS

Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 6 (1965), p. 9-107

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1965__6__9_0>

AVANT-PROPOS

L'idée initiale du présent travail provient d'un type de problèmes qui se rencontre assez fréquemment en économie et dans la théorie de la décision.

Un ensemble fini E (de situations économiques, de candidats à un examen, de villes, etc.) peut être apprécié selon plusieurs critères, et l'absence d'opposition entre ces critères définit sur E une relation qui est un *ordre partiel*. Or il appartient souvent à *l'autorité* (planificatrice, universitaire, implantatrice, etc.) de fixer sur E un ordre *total* qui soit compatible avec cet ordre partiel. D'où la question concrète de savoir de combien de manières cela est possible : la réponse permet, si l'on veut, de donner un sens à la notion de "degré d'intervention" de l'autorité concernée par la fixation de l'ordre total.

En langage mathématique, une forme stylisée de la question est la suivante : étant donné le produit cartésien de n ensembles finis totalement ordonnés, de cardinaux $p_1, \dots, p_n$, sur les $(p_1 \dots p_n)!$ ordres totaux possibles combien sont-ils compatibles avec l'ordre partiel "naturel" ?

Ayant rapidement soupçonné le problème de soulever, lorsqu'on le pose dans sa généralité, des difficultés sérieuses, nous avons d'abord limité notre intérêt au cas particulier où $n = 2$. Ce cas, qui fait l'objet de nos chapitres 1 et 2, est commun à notre problème et à un problème plus général, rencontré et résolu par A. Young [13] à propos de l'étude de la réduction du groupe symétrique S_n : celui du dénombrement des "tableaux standard" de *forme* donnée, chaque "forme" étant caractérisée par une *partition* de l'entier m. Il nous est apparu que ce problème trouvait dans la structure de *treillis* (distributif) de l'ensemble **T** des partitions d'entiers une formulation et des méthodes de résolution assez naturelles ; en outre le treillis **T** s'introduit en quelque sorte "de lui-même" lorsque l'on étudie la fonction de deux suites d'entiers que nous nommons "antifactorielle". Nous avons pu, par cette démarche, non seulement retrouver les résultats de Young, mais les étendre sur un point important (introduisant simultanément les partitions de deux entiers m' et m), et les situer dans un ensemble de propriétés dont quelques-unes s'appliquent en statistique non-paramétrique (construction de lois de distribution finies régissant les comparaisons d'échantillons).

Le chapitre 1 a donc un caractère introductif. On y établit, par des procédés élémentaires, les propriétés d'une classe de déterminants qui jouent un rôle d'outil de démonstration privilégié pour les propriétés présentées ultérieurement.

On part de l'idée triviale que $\overline{z\,!}$ (antifactorielle de z) est une manière commode d'écrire $(z\,!)^{-1}$ et qu'il est naturel d'étendre l'écriture $\overline{z\,!}$ à $z \in \mathbf{Z}$, ensemble des entiers rationnels, par la convention $z < 0 \Longrightarrow \overline{z\,!} = 0$. (La propriété de la fonction Γ d'une variable complexe de n'avoir pas de zéros est une justification supplémentaire, non mentionnée dans le texte).

On étend ensuite la signification du symbole "antifactorielle" à $\overline{Y, Y'\,!}$, où Y et Y' appartiennent tous deux à $\mathbf{Y}$, ensemble des suites illimitées d'entiers de $\mathbf{Z}$ dont un nombre fini seulement sont non nuls :

$$Y = (y_1\ y_2 \ldots\ y_i \ldots)$$

$$Y' = (y'_1\ y'_2 \ldots\ y'_j \ldots).$$

Formant le tableau, illimité en ligne i et colonne j, des nombres $\overline{y_i - y'_j - i + j\,!}$, on montre que la restriction de ce tableau carré aux n premières lignes et colonnes engendre un déterminant dont la valeur se stabilise pour n assez grand : c'est cette valeur qui définit $\overline{Y, Y'\,!}$

Un Y de $\mathbf{Y}$ pour lequel les entiers $y_i - i$ sont tous distincts est appelé *régulier*. Pour que $\overline{Y, Y'\,!} \neq 0$ il est nécessaire (mais non suffisant) que le niveau (somme des termes non nuls) de Y' soit au moins égal à 0 et au plus au niveau de Y, et que Y et Y' soient tous deux réguliers.

Une relation "antécédent-conséquent" est en outre définie

a) dans $\mathbf{Y}$, par le fait que deux suites ne diffèrent que par ur terme, et pour ce terme par une unité.

b) dans la partie *régulière* $\mathbf{Y}_R$ de $\mathbf{Y}$, par restriction à $\mathbf{Y}_R$.

On établit ensuite deux relations fondamentales entre les quatre sommes d'antifactorielles que l'on obtient à partir de $\overline{Y, Y'}\,!$ si l'on remplace Y ou Y', supposés dans $\mathbf{Y}_R$, par leurs antécédents ou conséquents dans $\mathbf{Y}_R$.

On montre enfin que l'existence de chaînes finies d'antécédents ou conséquents "partitionne" $\mathbf{Y}_R$ en une infinité de treillis distributifs tous isomorphes à un même treillis **T** (treillis de Young), dont l'élément général est une suite non-croissante d'entiers non-négatifs (suite de Young).

Le chapitre 2 étudie quelques propriétés du treillis **T**.

Dans les paragraphes 2.1. et 2.2. de ce chapitre, on commence par définir entre deux partitions des entiers respectifs m et m' (c'est-à-dire entre deux éléments Y et Y' de **T**) la notion de *puissance* : c'est le nombre f(Y, Y') de "suites principales" (au sens de la théorie des treillis) allant de Y' à Y. On montre, grâce aux résultats du chapitre 1,

a) que $f(Y, Y') = (m - m')\,!\ \overline{Y, Y'}\,!$

b) que la somme des puissances de conséquents de Y par rapport à Y', moins la somme des puissances de Y par rapport aux antécédents de Y', donne $m - m' + 1$ fois la puissance de Y par rapport à Y'.

On en déduit un résultat relatif à la somme des carrés des f(Y, Y') pour m et m' donnés, lequel est une extension d'un résultat de Young (qui correspond au cas $m' = 0$).

On introduit ensuite la figure cartésienne d'une suite de Young, comme partie finie Y de l'ensemble $\mathbf{N}^2$ des couples d'entiers naturels telle que $[(x, y) \in Y,\ x' \leqslant x \text{ et } y' \leqslant y] \Longrightarrow (x', y') \in Y$, et l'on rappelle comment la "grille" correspondante peut être utilisée pour un calcul monôme de $f(Y) = f(Y, 0)$ (théorème des "équerres" de Frame-Robinson-Thrall, 1954), sans pouvoir apparemment s'étendre d'une manière simple à celui de f(Y, Y').

Dans les paragraphes 2.3. et 2.4., on définit entre Y et Y' la *richesse* w(Y, Y'), comme cardinal du sous-treillis complet de **T** qui a pour élément minimal Y' et pour élément maximal Y, et *l'enrichissement* comme l'accroissement de richesse par passage soit de Y à un conséquent, soit de Y' à un antécédent.

On donne deux procédés de calcul de $w(Y, Y')$, l'un à l'aide d'un algorithme très rapide utilisant la différence des figures cartésiennes comme grille de calcul, l'autre à l'aide d'un déterminant dont certaines propriétés formelles rappellent celles des déterminants qui définissent $\overline{Y, Y'}$!

A l'aide de ces propriétés on établit notamment le résultat suivant : la somme des enrichissements par passage aux conséquents de Y, moins la somme des enrichissements pas passage aux antécédents de Y', redonne la richesse entre Y et Y'.

Au paragraphe 2.5. ce résultat est généralisé pour le cas de $w_r(Y, Y')$, nombre de suites de r termes, croissantes au sens large, comprises au sens large entre Y' et Y ; le déterminant correspondant se trouve être un moyen d'approche de certains des problèmes abordés au chapitre 3.

Enfin le paragraphe 2.6. indique la traduction de quelques-uns des résultats du chap. 2 dans le langage commode des problèmes dits "de scrutin" : probabilité pour que le dépouillement d'un vote dont le résultat global est connu présente telle ou telle particularité.

Le chapitre 3 fait le point de nos tentatives d'exploration du domaine tridimensionnel. Un solide normal S étant une partie finie de $\mathbf{N}^3$ telle que $[(x, y, z) \in S, x' \leqslant x, y' \leqslant y, z' \leqslant z] \Longrightarrow (x', y', z') \in S$, les solides normaux s'ordonnent en un treillis distributif $\mathbf{T}_3$ dans lequel se définissent tout naturellement, comme dans $\mathbf{T}$ $(= \mathbf{T}_2)$, une puissance et une richesse.

Le paragraphe 3.1. pose les définitions générales à partir des idées du paragraphe 2.5, et étudie, du point de vue de la richesse, le cas simple où S est un parallélépipède : sa richesse (par rapport au solide "vide") s'exprime alors par un monôme qui laisse soupçonner une parenté entre les problèmes de richesse dans $\mathbf{T}_3$ et ceux de puissance dans $\mathbf{T}_2$.

Au paragraphe 3.2, on aborde le problème de la puissance dans $\mathbf{T}_3$, mais dans le cas d'un sous-treillis très particulier de $\mathbf{T}_3$, celui des "encoignures" : on convient de donner ce nom à un solide normal E "engendré" dans $\mathbf{N}^3$ par $(1, 1, c)$, $(2, 1, a)$ et $(1, 2, b)$ $(c \geqslant a$ et $c \geqslant b)$. En appelant $f(a, b; c)$ la puissance correspondante, on indique une méthode de calcul de $f(a, b; c)$ comme somme des produits des nombres trinomiaux $\binom{a+b+c}{a-h \quad b-k \quad c+h+k}$

par des coefficients monômes $\varphi(h, k)$; on établit l'expression générale de $\varphi(h, k)$, et l'on indique sur un exemple numérique simple une manière possible d'organiser le calcul.

Dans le cas particulier où $a \leqslant b = c$, $f(a, b; b)$ possède une expression monôme au calcul de laquelle est consacré le paragraphe 3.3 ; bien que relativement laborieux, ce calcul conduit à un résultat final susceptible d'une interprétation algorithmique dans le solide correspondant, laquelle n'est pas sans analogie avec le théorème des "équerres".

Toutefois l'examen de quelques cas très simples, effectué au paragraphe final 3.4, ne semble pas laisser grand espoir à la découverte d'algorithmes monômes simples pour les "puissances" de classes plus étendues de solides normaux.

Qu'il me soit permis, en terminant cette présentation, de rappeler de façon bien imparfaite les multiples motifs de reconnaissance que j'ai acquis, à l'occasion de ce travail, à l'égard de Monsieur le Professeur D. DUGUE. Non seulement il a accepté la tâche de diriger et de superviser mes recherches, et en fin de compte de présider le jury auquel cette thèse est soumise, mais il m'a, à de nombreuses reprises, aidé directement par des conversations dont chacune a complété ma documentation, enrichi mes associations d'idées ou raffermi ma volonté de poursuivre. C'est à lui, en outre, que je dois les facilités matérielles sans lesquelles ce travail n'aurait sans doute jamais vu le jour.

Tous mes remerciements vont également à Messieurs les Professeurs PISOT et VILLE, qui ont bien voulu participer au jury et me poser un second sujet, et dont les encouragements et les conseils m'ont été constamment précieux.

1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DES ANTIFACTORIELLES

1.1. ANTIFACTORIELLES -

1.1.1. Définition de $\mathbf{Y}$.

$\mathbf{Z}$ désignant l'anneau des entiers rationnels, appelons $\mathbf{Y}$ le $\mathbf{Z}$-module libre engendré par une base dénombrable $\{1_1, 1_2, \ldots, 1_n, \ldots\}$, ou, si l'on préfère, l'ensemble des suites illimitées d'entiers rationnels dans lesquelles il n'y a qu'un nombre fini d'entiers non nuls.

Si $Y \in \mathbf{Y}$, Y est une application de l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels dans $\mathbf{Z}$ $(\mathbf{Y} \subset \mathbf{Z}^{\mathbf{N}})$. Si Y_n est la restriction de Y à $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a $Y_n \in \mathbf{Z}^{\mathbf{n}}$; en particulier si $n = 1$, $Y_1 \in \mathbf{Z}$.

Nous allons définir ci-après une application particulière de $\mathbf{Y}^2$ dans le corps $\mathbf{Q}$ des rationnels, et cela en plusieurs étapes.

1.1.2. Application auxiliaire de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Q}$, notée $\rceil$ (antifactorielle numérique).

Pour tout $z \in \mathbf{Z}$, nous désignerons par $\overline{z\,}\rceil$ le nombre 0 si $z < 0$ et le nombre $(z\,!)^{-1}$ si $z \geqslant 0$. Il est clair que, pour tout z de $\mathbf{Z}$, on a

$$\overline{z-1\,}\rceil = z \, . \, \overline{z\,}\rceil \ ; \qquad (1)$$

cette formule, jointe à $\overline{0\,}\rceil = 1$, suffirait du reste à définir $\overline{z\,}\rceil$ pour tout z.

1.1.3. Application de $\mathbf{N}^2$ dans $\mathbf{Z}$, notée $\mathbf{a}$.

Etant donné dans $\mathbf{Y}^2$ un couple quelconque (Y, Y'), nous poserons

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$$

$$Y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_n, \ldots)$$

et nous définirons une application a : $\mathbf{N}^2 \longrightarrow \mathbf{Z}$ $(a \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}^2})$ par

$$a(i, j) = y_i - y'_j - i + j = (y_i - i) - (y'_j - j). \tag{2}$$

Montrons, ce qui nous sera nécessaire par la suite, que a possède la propriété suivante : il existe un entier naturel β tel que, pour tout $i > \beta$, on ait

$$a(i, j) < 0 \qquad \text{si } j = 1, 2, \ldots, i-1$$

et $$a(i, i) = 0$$

En effet, par définition de $\mathbf{Y}$, il existe un entier α, tel que $n > \alpha \Longrightarrow y_n = y'_n = 0$. Nous appellerons "ordre suffisant" pour (Y, Y') un tel entier. Si l'on pose

$$m_n = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} (j - y'_j)$$

on a évidemment, pour tout $n \geqslant \alpha + 1$,

$$m_n = \max [m_\alpha, \max_{\alpha+1 \leqslant j \leqslant n} (j - 0)] = \max (m_\alpha, n).$$

Il suffit donc de prendre à la fois $n \geqslant \alpha + 1$ et $n \geqslant m_\alpha$ pour avoir $m_n = n$.

Appelons β le plus grand des deux entiers $\alpha + 1$ et m_α et assurons-nous qu'il satisfait aux conditions imposées. Pour cela fixons-nous un $i > \beta$ et cherchons le maximum de $a(i, j)$ pour $j = 1, 2, \ldots, i-1$.

On a

$$a(i, j) = -i + (j - y'_j) \text{ (puisque } i > \beta > \alpha \Longrightarrow y_i = 0)$$

d'où

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant i-1} a(i, j) = -i + \max_{1 \leqslant j \leqslant i-1} (j - y'_j) = -i + m_{i-1}$$

Puisque $i > \beta$, on a $i-1 \geqslant \beta$, c'est-à-dire à la fois $i-1 \geqslant \alpha + 1$ et $i-1 \geqslant m_\alpha$ (par définition de β) ; donc $m_{i-1} = i-1$ et

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant i-1} a(i, j) = -i + (i-1) = -1.$$

$a(i, j)$ est donc bien négatif pour $j = 1, 2, \dots, i-1$; de plus on a $a(i, i) = 0$, puisque $y'_i = 0$ par suite de $i > \beta > \alpha$. L'existence de l'entier β possédant les propriétés annoncées est donc établie.

La propriété établie peut encore s'énoncer comme suit : le tableau, illimité vers le bas et vers la droite, des entiers $a(i, j)$ (ligne i, colonne j) possède une ligne β au-dessous de laquelle toutes les lignes ont leurs termes négatifs jusqu'à la diagonale, où elles ont un terme nul.

1.1.4. Application de N dans Q notée δ.

On a vu que $\mathbf{N}^2 \xrightarrow{a} \mathbf{Z} \xrightarrow{\rceil} \mathbf{Q}$

Le produit de composition $\rceil \circ a$, qui applique $\mathbf{N}^2$ dans $\mathbf{Q}$, définit un tableau illimité M de termes $\overline{a(i, j)}\rceil$

Si l'on considère la restriction de $\rceil \circ a$ au carré cartésien fini $\{1, 2, \dots, n\}^2$, on obtient une matrice carrée M_n à termes dans $\mathbf{Q}$, dont on peut calculer le déterminant δ_n. A partir de a on peut ainsi calculer une suite de nombres rationnels $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \dots$, qui applique $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Q}$.

Il résulte de la propriété établie pour a que, pour $n > \beta$, tous les δ_n sont égaux. Il suffit, pour le voir, d'établir que $n > \beta \Longrightarrow \delta_n = \delta_{n-1}$. Or dans M_n les éléments de la n-ième (dernière) ligne sont $\overline{a(n, j)}\rceil$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, donc tous nuls sauf le dernier qui est égal à 1 (puisque $n > \beta$ entraîne que les $a(n, j)$ correspondants sont tous négatifs sauf le dernier $a(n, n)$ qui est nul). L'égalité $\delta_n = \delta_{n-1}$ résulte alors immédiatement du calcul du déterminant δ_n de M_n par "développement suivant la dernière ligne".

Puisque $\delta_\beta = \delta_{\beta+1} = \dots = \delta_n = \dots$, on peut appeler d la valeur commune de tous ces nombres ; d est si l'on veut le déterminant de la matrice infinie M.

1.1.5. Application de $\mathbf{Y}^2$ dans Q.

Les opérations qui précèdent permettent le calcul du nombre rationnel d toutes les fois que l'on s'est donné $(Y, Y') \in \mathbf{Y}^2$; elles définissent donc une application de $\mathbf{Y}^2$ dans $\mathbf{Q}$. Nous noterons à nouveau cette application à l'aide du signe $\rceil$, et écrirons

$$d = \overline{Y, Y'}\rceil$$

Nous dirons que cette application définit l'antifactorielle de Y par rapport à Y'.

1.2. DEFINITIONS COMPLEMENTAIRES -

1.2.1. Niveau.

Nous désignerons par la notation abrégée $\overline{Y!}$ l'antifactorielle de Y ($\in \mathbf{Y}$) par rapport à $0 = (0, 0, \ldots)$, et l'appellerons simplement l'antifactorielle de Y.

Nous aurons également besoin par la suite, de considérer la somme $\sum_{n \in \mathbf{N}} y_n$, dont la signification est évidente puisque les y_n ne peuvent être non nuls qu'en nombre fini. Nous l'appellerons le *niveau* de Y et la noterons $|Y|$ (bien qu'elle puisse avoir n'importe quel signe).

Le niveau définit évidemment un homomorphisme de $\mathbf{Y}$ dans $\mathbf{Z}$; notamment $|Y - Y'| = |Y| - |Y'|$. Nous utiliserons pour cet entier la dénomination de "niveau relatif" ou de "niveau de Y par rapport à Y'", par opposition au niveau "absolu" de Y ou de Y'.

1.2.2. Régularité.

Nous dirons qu'un Y de $\mathbf{Y}$ est *régulier* si la suite illimitée

$$y_1 - 1,\ y_2 - 2, \ldots,\ y_n - n, \ldots$$

a tous ses termes distincts (ou *in*jecte $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$).

Nous désignerons cette suite par $Y - N$, le signe $-$ étant relatif à la structure de groupe abélien de $\mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$; N est l'injection identique de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$, et n'appartient pas à $\mathbf{Y}$.

Pour tout Y non régulier, il existe deux entiers naturels distincts, n_1 et n_2, tels que $y_{n_1} - n_1 = y_{n_2} - n_2$; on dira alors que Y est *singulier entre n_1 et n_2*.

On appellera généralement $\mathbf{Y}_R$ la partie régulière de $\mathbf{Y}$.

Notons que seuls les Y de niveau non-négatif peuvent être réguliers.

En effet soit α un "ordre suffisant" pour Y (entier tel que $n > \alpha \Longrightarrow y_n = 0$). Si Y est régulier, on a

$$y_i + \alpha - i \geqslant 0 \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, \alpha ;$$

car si l'on avait $y_k + \alpha - k < 0$ pour un k tel que $1 \leqslant k \leqslant \alpha$, on en déduirait

$$y_k - k = -l \qquad \text{avec } l > \alpha,$$

et Y serait singulier entre $k(\leqslant \alpha)$ et $l(> \alpha)$.

Les α entiers $y_i + \alpha - i$ sont donc non-négatifs. Ils sont en outre tous distincts, car si l'on avait

$$y_i + \alpha - i = y_j + \alpha - j \qquad \text{avec } i \neq j,$$

Y serait singulier entre i et j.

Or une somme de α entiers non-négatifs deux à deux distincts est au moins égale à $0 + 1 + 2 + \ldots + (\alpha - 1) = \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2}$.

Donc

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant \alpha} (y_i + \alpha - i) \geqslant \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2}$$

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant \alpha} y_i + \sum_{0 \leqslant \alpha - i \leqslant \alpha - 1} (\alpha - i) \geqslant \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{1 \leqslant i \leqslant \alpha} y_i \geqslant 0.$$

1.2.3. "Image" et "perturbation" associées à un Y régulier.

Si l'on se donne un Y régulier, l'ensemble des $y_n - n$ est l'image de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$ par l'application $Y - N$; nous l'appellerons plus brièvement *l'image associée à Y* et la désignerons par la notation H_Y ou plus brièvement H. H est une partie de $\mathbf{Z}$, qui se compose de β entiers distincts supérieurs ou égaux à $-\beta$ et de tous les entiers inférieurs à $-\beta$; nous désignerons par $\mathbf{H}$ l'ensemble des parties de $\mathbf{Z}$ pouvant être ainsi définies.

H étant borné supérieurement, ses éléments peuvent être énumérés dans l'ordre décroissant ; comme $H = \{y_n - n \mid n \in \mathbf{N}\}$, on peut ainsi construire une suite d'entiers naturels $p_1\ p_2 \ldots\ p_n \ldots$ définie par

$$y_{p_n} - p_n = \max(y_i - i \mid i \in \mathbf{N} - \{p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}).$$

Il est clair que dans la suite illimitée $(p_1, p_2, \dots p_n, \dots)$ ou P

1/ figurent tous les entiers naturels.

2/ aucun entier naturel ne figure plus d'une fois.

3/ $n > \beta \Longrightarrow p_n = n$.

P est donc une permutation de $\mathbf{N}$ qui laisse fixes tous les n supérieurs à β, ou perturbation. Nous l'appellerons *perturbation associée à Y*, et la noterons P_Y ou plus brièvement P ; l'ensemble de toutes les perturbations de N sera désigné par $\mathbf{P}$.

Si l'on se donne arbitrairement un élément H de $\mathbf{H}$ et un élément P de $\mathbf{P}$, on voit aisément qu'il existe un Y régulier et un seul dont ils sont respectivement l'image et la perturbation associées : $\mathbf{Y}_R$ pourra ainsi être assimilé au produit cartésien $\mathbf{H} \times \mathbf{P}$.

1.2.4. Conséquents et antécédents de Y.

Etant donné $Y \in \mathbf{Y}$, nous noterons $\uparrow$ et $\downarrow$, et nous appellerons ensemble des *conséquents* et ensemble des *antécédents* de Y, les parties de $\mathbf{Y}$ définies respectivement par

$$\uparrow_Y = \{Y + 1_n \mid n \in \mathbf{N}\} \qquad \text{et} \qquad \downarrow_Y = \{Y - 1_n \mid n \in \mathbf{N}\}$$

Il est aisé de voir que, quel que soit $Y \in \mathbf{Y}$, les deux ensembles

$$\uparrow_Y \cap \mathbf{Y}_R \qquad \text{et} \qquad \downarrow_Y \cap \mathbf{Y}_R$$

sont finis.

En effet nous savons qu'il existe un entier naturel α tel que $i > \alpha \Longrightarrow y_i = 0$; d'autre part

$$Y + 1_n = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n + 1, y_{n+1}, \dots) ;$$

si l'on prend alors $n > \alpha + 1$ $(n - 1 > \alpha)$, on a

$$Y + 1_n = (y_1, \dots, \underline{0}, \underline{1}, 0, \dots) ;$$

les termes soulignés montrent que $Y + 1_n$ est singulier entre $n - 1$ et n.

De même

$$Y - 1_n = (y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n - 1, y_{n+1}, \ldots),$$

et en prenant $n > \alpha$, on a

$$Y - 1_n = (y_n, \ldots, y_{n-1}, \underline{-1}, \underline{0}, \ldots) ;$$

les termes soulignés montrent que $Y - 1_n$ est singulier entre n et $n + 1$.

Il n'y a donc bien dans chacun des ensembles $\uparrow_Y$ et $\downarrow_Y$ qu'un nombre fini d'éléments réguliers.

En particulier si $Y = 0$, $\uparrow_0$ n'est autre que la base de $\mathbf{Y}$; seul l'élément 1_1 y est régulier. Par contre $\downarrow_0 \cap \mathbf{Y}_R = \emptyset$ puisque -1_n est singulier entre n et $n + 1$.

1.3. PROPRIETES DE $\overline{Y,\ Y'\,!}$ -

1.3.1. Nullité pour Y ou Y' singulier.

Si Y est singulier entre i_1 et i_2, le terme général $a(i, j) = (y_i - i) - (y'_j - j)$ de la matrice infinie M satisfait à $a(i_1, j) = a(i_2, j)$ quel que soit j ; M a donc ses lignes i_1 et i_2 identiques.

Si Y' est singulier entre j_1 et j_2, ce sont de même les colonnes j_1 et j_2 de M qui sont identiques.

Dans les deux cas le déterminant d'ordre n servant au calcul de $\overline{Y,\ Y'\,!}$ est nul pour n assez grand, donc $\overline{Y,\ Y'\,!} = 0$.

Notons en particulier que, tous les Y de niveau négatif étant singuliers, l'antifactorielle de Y par rapport à Y' ne peut être différente de 0 que si Y et Y' sont tous deux de niveau absolu non-négatif.

1.3.2. Nullité pour $|Y| < |Y'|$.

Soit $J = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$ une permutation quelconque des nombres $1, 2, \ldots, n$. On a, comme conséquence de la définition des $a(i, j)$,

$$a(1,\ j_1) + a(2,\ j_2) + \ldots + a(n,\ j_n) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - i - y'_{j_i} + j_i)$$

$$= |Y| - |Y'| \ ; \tag{3}$$

cette dernière expression est valable pourvu que n ait été pris assez grand (puisque $\sum i$ et $\sum j_i$, tous deux égaux à $n(n + 1)/2$, ont une différence nulle). Si l'on suppose $|Y| < |Y'|$, on voit ainsi que les $a(i,\ j_i)$ ont une somme négative ; il en résulte que l'un d'eux au moins est négatif, c'est-à-dire que l'un au moins des nombres $\overline{a(i,\ j_i)\,!}$ est nul.

Or le développement du déterminant $\delta_n(Y,\ Y')$ est une somme alternée de n ! termes tels que t_J, dont chacun est défini par

$$t_J = \overline{a(1,\ j_1)\,!} \,.\, \overline{a(2,\ j_2)\,!} \ \ldots\ \overline{a(n,\ j_n)\,!} \tag{4}$$

On vient de montrer que, quel que soit J, l'un au moins des facteurs dont le produit définit t_J est nul ; donc $\delta_n(Y,\ Y') = 0$ et $\overline{Y,\ Y'\,!} = 0$.

1.3.3. Si $|Y| = |Y'| \geqslant 0$, $\overline{Y, Y'\,!}$ est égal à -1, 0 ou 1.

Le résultat (3) demeure valable, mais permet seulement de conclure que la somme des $a(i,\ j_i)$ est nulle, ce qui entraîne soit que l'un d'eux au moins est négatif, soit qu'ils sont tous nuls. Dans le premier cas $t_J = 0$, dans le second $t_J = 1$ (t_J étant toujours défini par (4)).

Mais ce second cas ($t_J = 1$), s'il se produit pour une permutation J des entiers $(1,\ 2, \ldots,\ n)$, ne peut se produire pour aucune autre permutation $K = (k_1,\ k_2, \ldots,\ k_n)$ des mêmes entiers, à moins que Y' ne soit singulier. En effet $t_J = 1$ équivaut à

$$y_i - i = y'_{j_i} - j_i \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n) \tag{5}$$

et $t_K = 1$ à

$$y_i - i = y'_{k_i} - k_i \qquad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

Si $K \neq J$, il existe un i tel que $k_i \neq j_i$ et Y' est singulier entre k_i et j_i comme on le voit par comparaison des deux seconds membres ci-dessus. Mais alors on sait que $\overline{Y,\ Y'\,!} = 0$ et le calcul de t_J est sans objet. Si par contre Y' est régulier,

t_J est le seul terme non nul du développement, et $\overline{Y, Y'}\,! = 1$ ou -1, suivant la parité de la permutation J.

La propriété annoncée est donc établie. On peut la préciser en remarquant, comme conséquence des égalités (5), que si Y et Y' sont réguliers, alors $Y - N$ et $Y' - N$, en tant qu'applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$, ont même image ; les images H_Y et $H_{Y'}$ associées à Y et Y' *doivent* donc être les mêmes pour que $\overline{Y, Y'}\,! = 0$. Il est d'ailleurs aisé de voir que si Y et Y' sont réguliers et que $H_Y = H_{Y'}$, cela *suffit* pour qu'il existe une permutation J donnant les égalités (5).

En particulier si $Y' = Y$, avec Y régulier, on a $\overline{Y, Y}\,! = 1$, car on voit immédiatement que $t_J = 1$ quand J est la permutation identique, c'est-à-dire quand il s'agit du terme diagonal du déterminant.

1.3.4. Au signe prés, $\overline{Y,Y'}\,!$ ne dépend que des images H_Y et $H_{Y'}$.

L'image associée à Y a été définie par $H_Y = \{ y_i - i \mid i \in \mathbf{N} \}$. Or la ligne i du tableau M a pour élément général $\overline{(y_i - i) - (y'_j - j)}\,!$ Si l'on change Y sans changer H_Y, c'est-à-dire en ne changeant que la perturbation associée, il y a simplement perturbation (finie) de l'ordre des lignes de M, ce qui ne peut changer que le signe de $\overline{Y, Y'}\,!$

Même résultat pour les colonnes si l'on change Y' sans changer $H_{Y'}$. La proposition est donc établie.

1.4. SOMMES D'ANTIFACTORIELLES -

1.4.1. Remarque formelle.

Dans le déterminant $\delta_n(Y, Y')$ du tableau M_n, posons $\overline{y_i - y'_j + j - i}\,! = \lambda_{ij}$ et appelons C_{ij} le cofacteur correspondant. On a :

$$\delta_n(Y, Y') = \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ (\text{quel que soit } i)}} \lambda_{ij}\, C_{ij} = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ (\text{quel que soit } j)}} \lambda_{ij}\, C_{ij}$$

Si l'on désigne par h un entier quelconque de $\mathbf{Z}$, il est clair que le remplacement de Y par $Y - h . 1_i$ ne change que la i-me ligne de δ_n, et que le remplacement de Y' par $Y' + h . 1_j$

ne change que la j-me colonne de δ_n ; l'un ou l'autre changement (envisagés séparément) ont pour effet de remplacer λ_{ij} par $\mu_{ij} = \overline{y_i - y'_j + j - i - h}\rceil$. Il est alors aisé de voir que

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_n(Y - h \cdot 1_i,\ Y') = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \delta_n(Y,\ Y' + h \cdot 1_j), \tag{6}$$

puisque les deux membres résultent de deux manières de calculer la somme des n^2 termes $\mu_{ij} C_{ij}$.

Comme on l'a vu, ce n'est qu'une fois Y et Y' fixés que l'on peut choisir n assez grand pour être assuré que $\delta_n(Y, Y') = \overline{Y, Y'}\rceil$. Mais si n a été choisi à partir de Y et Y', rien ne garantit que le même n convienne encore à partir de $Y - h \cdot 1_i$ et Y' ou à partir de Y et $Y' + h \cdot 1_j$; il ne serait donc pas légitime en général de remplacer sans précautions dans (6) les symboles δ_n par des symboles $\overline{}\rceil$, même si n a été choisi assez grand.

Pour voir ce qu'il en est nous serons amenés à distinguer deux cas : celui où $h = 1$ (diminution du niveau relatif) et celui où $h = -1$ (augmentation du niveau relatif).

1.4.2. Cas de singularite totale.

Il résulte de 1.1.3. et 1.1.4. que, pour Y et Y' donnés, on a $\delta_n(Y, Y') = \overline{Y, Y'}\rceil$ pourvu que $n \geqslant \beta = \max(\alpha + 1,\ m_\alpha)$; α désignait l'ordre suffisant pour (Y, Y') et m_α était défini par

$$m_\alpha = \max(1 - y'_1,\ 2 - y'_2, \ldots,\ \alpha - y'_\alpha)$$

Montrons que si parmi les α entiers de la parenthèse ci-dessus il en existe un qui dépasse $\alpha + 1$, Y' est singulier ainsi que tous ses antécédents et conséquents.

Supposons en effet que, pour un certain k $(1 \leqslant k \leqslant \alpha)$, on ait

$$k - y'_k > \alpha + 1\ ;$$

on a alors $y'_k = k - l < k - \alpha - 1$, avec $l > \alpha + 1$; d'où $y'_l = 0$, et Y' est singulier entre $k (\leqslant \alpha)$ et $l (> \alpha + 1)$. Pour tout i différent de k et de l, $Y' + 1_i$ et $Y' - 1_i$ sont évidemment toujours singuliers entre k et l ; enfin il est aisé de s'assurer que

$Y' + 1_k$ est singulier entre k et $l - 1$

$Y' - 1_k$ " " " k et $l + 1$

$Y' + 1_l$ est singulier entre $l - 1$ et l

$Y' - 1_l$ " " " l et $l + 1$

En dehors de ce cas, que nous nommerons de "singularité totale", m_α ne peut donc pas dépasser $\alpha + 1$, et l'on a

$$\beta = \max(\alpha + 1, \ m_\alpha) = \alpha + 1.$$

1.4.3. Diminution du niveau relatif.

Soient Y et Y' donnés, et soit α l'ordre suffisant qui leur correspond. Supposant que l'on ne soit pas dans le cas de singularité totale, on est assuré que $n \geqslant \alpha + 1$ entraîne

$$\delta_n(Y, \ Y') = \overline{Y, \ Y' \,|} \tag{7}$$

Prenons $n = \alpha + 1$, et considérons $Y - 1_1, Y - 1_2, \ldots, Y - 1_{n-1}$; il est clair que chacun des ces $n - 1$ (= α) éléments de **Y** a également toutes ses composantes nulles au-delà de la α-ième ; on est donc assuré que $\delta_n(Y - 1_i, \ Y') = \overline{Y - 1_i, \ Y' \,|}$ pour $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. On a en outre

$$\delta_n(Y - 1_n, \ Y') = \overline{Y - 1_n, \ Y' \,|}$$

En effet ces deux expressions sont nulles : la première parce qu'il s'agit d'un déterminant dont la dernière ligne est formée des antifactorielles des entiers

$$- y'_1 - n \qquad - y'_2 + 1 - n \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ - 1,$$

qui sont tous négatifs (parce que l'on a exclu la singularité totale) ; la seconde parce que $Y - 1_n$ est singulier entre n et $n + 1$.

Finalement on a donc

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \delta_n(Y - 1_i, \ Y') = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \overline{Y - 1_i, \ Y' \,|} \tag{8}$$

Or on a vu que le développement de $\delta_n(Y, \ Y')$ est une somme alternée de $n\,!$ produits du type

$$t_J \ (Y, \ Y') = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \overline{y_i - y'_{j_i} + j_i - i \,|}\,, \tag{9}$$

$J = (j_1, j_2, \dots, j_n)$ étant une permutation de $(1, 2, \dots, n)$. Si l'on se donne k $(1 \leqslant k \leqslant n)$, et que l'on veuille calculer $t_J(Y-1_k, Y')$, seul le k-ième facteur du produit (9) est modifié, par diminution d'une unité de l'entier $y_k - y'_{j_k} + j_k - k$ placé sous le signe $\rceil$; cette diminution, en vertu de la formule (1), a pour effet de multiplier ce k-ième facteur par $y_k - y'_{j_k} + j_k - k$; les $n - 1$ autres facteurs restant inchangés, on a

$$t_J(Y - 1_k, Y') = (y_k - y'_{j_k} + j_k - k)\, t_J(Y, Y'). \tag{10}$$

Si, J étant fixé, on somme les égalités (10) écrites pour $k = 1, 2, \dots, n$, les coefficients de $t_J(Y, Y')$ (qui est en facteur dans tous les seconds membres) ont pour somme $|Y| - |Y'|$, puisque n a été choisi assez grand pour cela, et que la somme des $j_k - k$ est nulle. On a donc :

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} t_J(Y - 1_k, Y') = |Y - Y'|\, t_J(Y, Y'). \tag{11}$$

Il suffit alors de faire la somme alternée des $n\,!$ égalités (11) écrites pour tous les J possibles, pour voir que

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \delta_n(Y - 1_k, Y') = |Y - Y'|\, \delta_n(Y, Y') ; \tag{12}$$

c'est-à-dire, en raison de (7) et (8),

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \overline{Y - 1_i,\ Y' \rceil} = |Y - Y'|\ \overline{Y,\ Y' \rceil} \tag{13}$$

Enfin, au premier membre de (13), rien n'empêche d'étendre à $\mathbf{N}$ tout entier la sommation par rapport à i, car pour toute valeur de i supérieure à n, $Y - 1_i$ est singulier (entre i et i + 1) et l'antifactorielle correspondante est nulle. Donc

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} \overline{Y - 1_i,\ Y' \rceil} = |Y - Y'|\ \overline{Y,\ Y' \rceil} \tag{14}$$

Cherchons d'autre part à exprimer $\sum_{j \in \mathbf{N}} \overline{Y,\ Y' + 1_j \rceil}$

Si j dépasse $n (= \alpha + 1)$, $Y' + 1_j$ est singulier entre $j - 1$ et j. Il suffit donc de sommer pour $j = 1, 2, \dots, n - 1, n$. La singularité totale étant exclue pour Y', il est aisé de vérifier qu'elle l'est *a fortiori* pour $Y' + 1_1$, $Y' + 1_2, \dots,$ $Y' + 1_{n-1}$ $(= Y' + 1_\alpha)$, et il suffit alors de déterminants d'ordre n pour calculer les $n - 1$

premières antifactorielles. Par contre pour $(Y,\ Y' + 1_n)$ l'ordre suffisant est augmenté d'une unité, et il faut en principe calculer δ_{n+1} pour obtenir l'antifactorielle.

Mais en fait, pour $\delta_{n+1}(Y,\ Y' + 1_n)$ comme pour $\delta_{n+1}(Y,\ Y')$, les éléments de la $(n + 1)$-me ligne sont $0\ 0\ 0 \ldots 0\ 1$, d'où

$$\delta_{n+1}(Y,\ Y' + 1_n) = \delta_n(Y,\ Y' + 1_n).$$

La somme cherchée est donc finalement égale à

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \delta_n(Y,\ Y' + 1_j),$$

expression qui, en vertu de la formule générale (6), appliquée pour $h = 1$, est égale au premier membre de (12). On a donc en fin de compte

$$\sum_{j \in \mathbf{N}} \overline{Y,\ Y' + 1_j}\,! = |Y - Y'|\ \overline{Y,\ Y'}\,! \tag{15}$$

Les résultats (14) et (15) peuvent s'énoncer ensemble, en introduisant pour leurs premiers membres des notations abrégées dont la justification est claire :

$$\overline{\downarrow_Y,\ Y'}\,! = \overline{Y,\ \uparrow_{Y'}}\,! = |Y - Y'|\ \overline{Y,\ Y'}\,! \tag{16}$$

Etabli sous réserve que Y' n'est pas dans le cas de singularité totale, le résultat demeure vrai si cette réserve tombe, mais devient trivial puisque les trois expressions (16) sont alors nulles.

Dans le cas particulier où $Y' = 0$, on obtient

$$\overline{\downarrow_Y}\,! = \overline{Y,\ 1_1}\,! = |Y|\ \overline{Y}\,! \tag{16'}$$

1.4.4. Augmentation du niveau relatif.

Comme précédemment, appelons α un ordre suffisant pour $(Y,\ Y')$ et prenons $n = \alpha + 1$ (en excluant le cas de singularité totale). On peut se borner à écrire

$$\overline{\uparrow_Y,\ Y'}\,! = \overline{Y + 1_1,\ Y'}\,! + \ldots + \overline{Y + 1_\alpha,\ Y'}\,! + \overline{Y + 1_n,\ Y'}\,! + \overline{Y + 1_{n+1},\ Y'}\,!$$

puisque les termes suivants, et même déjà le dernier écrit, sont nuls du fait de la singularité du premier élément du couple.

Pour les n premières antifactorielles, il suffit de les calculer à l'aide des δ_{n+1} correspondants (il suffirait même des δ_n si l'on ne considérait que les α premières) ; quant à la dernière, qui est nulle, on peut la remplacer par $\delta_{n+1}(Y + 1_{n+1},\ Y')$, qui est nul aussi du fait qu'il a, comme il est aisé de s'en assurer, ses deux dernières lignes identiques.

On a donc

$$\overline{\uparrow_Y,\ Y'\,!} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \delta_{n+1}(Y + 1_i,\ Y') \ ;$$

En vertu de l'égalité (6), appliquée en remplaçant n par n + 1 et h par − 1, on sait ensuite que

$$\begin{aligned} \overline{\uparrow_Y,\ Y'\,!} &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant n+1} \delta_{n+1}(Y,\ Y' - 1_j) \\ &= \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \delta_{n+1}(Y,\ Y' - 1_j) + \delta_{n+1}(Y,\ Y' - 1_{n+1}) \end{aligned}$$

Pour les termes groupés sous le signe $\sum$, les δ_{n+1} suffisent pour produire les antifactorielles correspondantes (il suffirait même des δ_n si l'on ne voulait que les n − 1 premières). Quant à $\delta_{n+1}(Y,\ Y' - 1_{n+1})$, on l'obtient à partir de $\delta_{n+1}(Y,\ Y')$ en *augmentant* d'une unité tous les entiers placés sous le signe dans la dernière *colonne* : ceci a pour effet de remplacer le dernier élément $\overline{0}\,!$ par $\overline{1}\,!$, ce qui le laisse égal à 1 et conserve numériquement la dernière ligne $0\ 0\ 0 \ldots 0\ 1$. D'où

$$\delta_{n+1}(Y,\ Y' - 1_{n+1}) = \delta_n(Y,\ Y') = \overline{Y,\ Y'\,!}$$

On voit ainsi que

$$\overline{\uparrow_Y,\ Y'\,!} = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \overline{Y,\ Y' - 1_j\,!} + \overline{Y,\ Y'\,!} \ ;$$

et comme, pour $j > n$, $Y' - 1_j$ est singulier (entre $j - 1$ et j), on obtient le résultat final

$$\overline{\uparrow_Y,\ Y'\,!} - \overline{Y,\ \downarrow_{Y'}\,!} = \overline{Y,\ Y'\,!} \qquad (17)$$

Comme le résultat (16), il a été établi sous réserve que Y' ne soit pas dans le cas de singularité totale, mais il est trivialement valable si cette réserve tombe.

Dans le cas particulier où $Y' = 0$, compte tenu du fait que tous les antécédents de 0 sont singuliers, on obtient

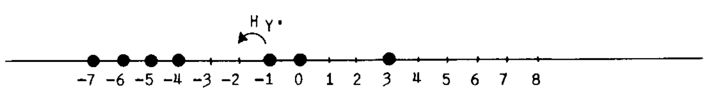
$$\overline{\uparrow_Y !} = \overline{Y !} \tag{17'}$$

1.5. INTRODUCTION DU TREILLIS DE YOUNG -

1.5.1. Composantes connexes de $\mathbf{Y}_R$.

Si Y et $Y' = Y - 1_n$ sont tous deux réguliers, ils ont même perturbation associée.

En effet les applications $Y - N$ et $Y - 1_n - N$ sont alors toutes deux injectives. Dans ces deux applications respectives tout entier naturel autre que n a dans $\mathbf{Z}$ la même image, et n a des images qui diffèrent d'une unité. En termes intuitifs l'image $H_{Y'}$ associée à $Y - 1_n$ se déduit de l'image H_Y associée à Y en en repoussant un entier et un seul d'un cran vers la gauche, ce qui suppose bien entendu que la place à gauche de cet élément soit disponible (cf. figure 1 ci-dessus, que l'on peut se représenter comme un boulier).



{points renforcés} = H_Y

Fig. 1.

Dans ces conditions il est clair que l'énumération par ordre décroissant (cf. 1.2.3.) conduit, pour les deux images H_Y et $H_{Y'}$, à la même suite $p_1\, p_2 \ldots\, p_n \ldots$; Y et $Y - 1_n$ ont donc même perturbation associée, sous la seule condition qu'ils appartiennent tous deux à la partie régulière $\mathbf{Y}_R$ de $\mathbf{Y}$. En d'autres termes l'ensemble de tous les Y réguliers "enchaînés" avec un Y_0 régulier donné (au sens de l'existence d'une chaîne d'antécédents ou de conséquents tous réguliers entre Y_0 et Y) est tout entier inclus dans la "fibre" de $\mathbf{Y}_R$ qui comprend Y_0, c'est-à-dire dans l'ensemble des Y réguliers de même perturbation associée que Y_0. Il sera établi au § suivant que l'inclusion inverse est vraie également, d'où il résultera que les partitions de $\mathbf{Y}_R$ en fibres ou en composantes connexes coïncident.

1.5.2. Ordre partiel sur H.

Un élément H de **H** est, on l'a vu, une partie de **Z** formée de β entiers distincts supérieurs ou égaux à $-\beta$ (partie finie) et de tous les entiers inférieurs à $-\beta$ (partie infinie) ; appelons hauteur de H le plus petit entier β permettant une telle définition de H.

Soient H et H' dans **H**, tous deux de hauteur $\leqslant$ n. Leurs parties finies peuvent s'énumérer dans l'ordre décroissant :

$$H \ : h_1 > h_2 > \ldots > h_n$$

$$H' \ : h'_1 > h'_2 > \ldots > h'_n$$

Si pour $i = 1, 2, \ldots, n$ on a $h_i \geqslant h'_i$, on dira que H majore H'. Ceci définit évidemment dans **H** une relation réflexive, transitive et antisymétrique, c'est-à-dire un ordre (partiel).

Si H majore H', on peut passer de H' à H par un nombre fini d'opérations dont chacune consiste à déplacer un entier et un seul d'un cran vers la droite (sur un emplacement disponible). Pour le voir il suffit par exemple de passez par les intermédiaires

$$H_1 \ : h_1 > h'_2 > h'_3 > \ldots > h'_{n-1} > h'_n$$

$$H_2 \ : h_1 > h_2 > h'_3 > \ldots > h'_{n-1} > h'_n$$

$$H_{n-1} : h_1 > h_2 > h_3 > \ldots > h_{n-1} > h'_n$$

Cela entraîne que si Y et Y' appartiennent à une même fibre de $\mathbf{Y}_R$ et que H_Y majore $H_{Y'}$, alors on peut passer de Y' à Y par une chaîne de conséquents réguliers.

Si Y et Y' sont donnés arbitrairement dans une même fibre de $\mathbf{Y}_R$, il suffit par exemple de considérer dans la même fibre l'élément Y_0 (unique et de niveau 0), dont l'image associée H est l'ensemble des entiers négatifs, pour voir que H_Y et $H_{Y'}$ majorent tous deux H_{Y_0}, et pour en conclure que Y et Y' sont enchaînés au sens du § 1.5.1. Chaque composante connexe de $\mathbf{Y}_R$ coïncide bien, finalement, avec une fibre de $\mathbf{Y}_R$.

1.5.3. Isomorphisme des fibres.

En considérant $\mathbf{Y}_R$ comme le produit cartésien $\mathbf{H} \times \mathbf{P}$, on peut noter tout élément régulier du module libre **Y** par $Y = (H, P)$. Si l'on désigne par I la "perturbation identique", élément neutre du groupe **P** des perturbations, on peut à tout (H, P) faire correspondre sa projection (H, I).

Soit $Y_1 = (H , P_1)$ $Y_2 = (H , P_2)$

$Y'_1 = (H', P_1)$ $Y'_2 = (H', P_2)$

S'il existe un entier naturel λ tel que $Y_1 - Y'_1 = 1_\lambda$, et si $\lambda = P_1(\rho)$ (ce qui définit sans ambiguïté l'entier naturel ρ puisque la perturbation P_1 est une bijection de **N** dans **N**), alors l'image H' se déduit de H en repoussant d'un cran vers la gauche le ρ-ième (dans l'ordre décroissant) des entiers qu'elle comprend. En posant $P_2(\rho) = \mu$, on voit aisément que dans ces conditions $Y_2 - Y'_2 = 1_\mu$.

Du point de vue de la relation antécédent-conséquent, deux fibres quelconques de $\mathbf{Y}_R$ sont donc isomorphes entre elles, et par conséquent isomorphes à la fibre qui correspond à la perturbation identique ; cette fibre priviligiée sera tout naturellement notée **H**. La relation $Y - Y' = 1_\rho$ correspondra, dans cette fibre, au fait que $h_\rho - h'_\rho = 1$, avec $h_i = h'_i$ pour tout $i \neq \rho$; h_i n'est d'ailleurs rien d'autre, dans cette fibre, que la différence $y_i - i$ rencontrée tout au long des calculs d'antifactorielles.

1.5.4. Suites de Young.

Le propre de la fibre **H** étant que $h_i = y_i - i$, le fait que la suite des h_i soit décroissante équivaut au fait que la suite des y_i soit non-croissante. **H** est une partie spéciale du module libre **Y** : celle pour laquelle les composantes de Y forment une suite illimitée non-croissante dont seuls un nombre fini de termes sont non nuls.

Pour la brièveté, et pour rappeler le rôle joué par Alfred Young dans l'étude de plusieurs des propriétés qui vont être exposées plus loin, nous appellerons de telles suites des *suites de Young*. Pour les spécifier numériquement on n'écrira les termes nuls que dans la mesure utile, c'est-à-dire qu'en général on ne les écrira pas du tout. Ainsi une même suite de Young Y sera indifféremment désignée par la notation

$$(7\ 5\ 5\ 2\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0)$$

ou par la notation

$$(7\ 5\ 5\ 2\ 1\ 1\ 1),$$

ou encore par la notation condensée ($75^2\ 21^3$). L'image H_Y associée à cette suite particulière est

$$\{6,\ 3,\ 2,\ -2,\ -4,\ -5,\ -6,\ -8,\ -9,\ -10, \ldots\}$$

Pour la suite "nulle" $Y = 0$, l'image associée est

$$\{-1,\ -2,\ -3, \ldots\}$$

La relation d'ordre partiel définie plus haut dans **H** par le mot "majore" se transpose immédiatement dans le langage des suites de Young : une suite de Young en majore une autre si elle lui est, terme à terme, supérieure ou égale. Ainsi la suite ($75^2\ 21^3$) majore par exemple la suite ($5^3\ 1$).

1.5.5. Treillis de Young.

De $y_i \geqslant y_{i+1}$ et $y'_i \geqslant y'_{i+1}$, on déduit immédiatement

$$\max\,(y_i,\ y'_i) \geqslant \max\,(y_{i+1},\ y'_{i+1})$$

et

$$\min\,(y_i,\ y'_i) \geqslant \min\,(y_{i+1},\ y'_{i+1})$$

Il en résulte que la relation "majore" définit sur l'ensemble des suites de Young une structure de treillis (d'ailleurs distributif) : de deux suites de Young données Y et Y' on peut toujours définir deux nouvelles suites $Y \vee Y'$ et $Y \wedge Y'$, respectivement par le maximum terme à terme et par le minimum terme à terme. Nous appellerons ce treillis le *treillis de Young* et le désignerons par **T** (il est entendu que ses éléments sont ceux de **H**).

La plupart des propriétés étudiées dans ce chapitre et dans les suivants peuvent être envisagées comme des propriétés du treillis de Young ou comme des extensions de ces propriétés.

Par référence à la figure 2, qui représente le "graphe de couverture" du treillis **T** jusqu'à son niveau 6 inclus avec une partie du niveau 7, nous parlerons le plus souvent des suites de Young comme des "sommets" de **T**.

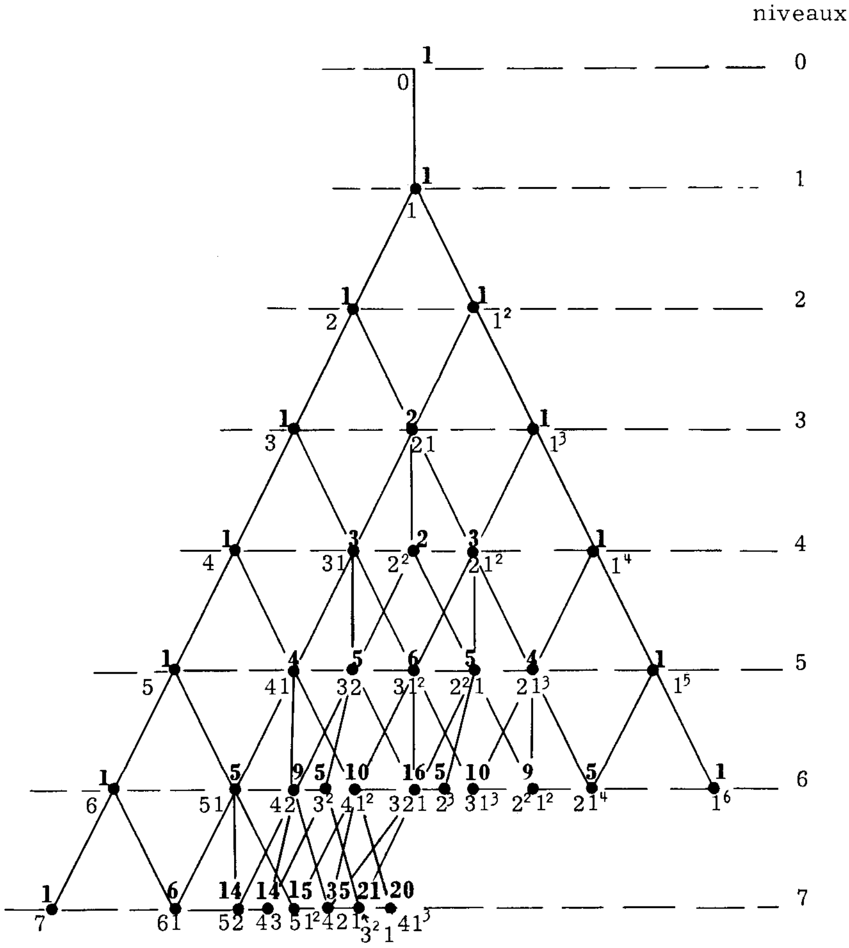


Fig. 2.

2. ÉTUDE DU TREILLIS DES PARTITIONS D'ENTIERS
(treillis de Young)

2.1. SUITES PRINCIPALES ET PUISSANCES -

2.1.1. Nombre de sommets par niveau.

Le nombre r_m de sommets de niveau m de **T** est le nombre de suites non-croissantes d'entiers non-négatifs de somme m, ou *nombre de partitions de l'entier positif m* (pour $m = 0$ on a $r_m = r_0 = 1$).

Le comptage des partitions des entiers se relie à une quantité considérable de travaux mathématiques de tout style. Contentons-nous de rappeler le résultat à peu près évident ci-après, connu depuis Euler, à savoir que r_m a pour fonction génératrice (c'est-à-dire est le coefficient de t^m dans le développement de)

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)^{-1}$$

La suite des r_m, qui commence par

$m =$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
$r_m =$	1	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42 ...

a été abondamment étudiée, notamment quant à son comportement asymptotique, par exemple par G. H. Hardy et S. Ramanujan [8], et tabulée par H. Gupta [7].

2.1.2. Nombre d'arêtes entre deux niveaux consécutifs.

Etant donné une suite de Young quelconque Y, nous appellerons *degré* de Y le nombre de valeurs non-nulles distinctes prises par les termes $y_1\ y_2 \ldots$ de Y. Par exemple la suite $75^2\ 21^3$ a pour degré 4.

Toute suite de Young Y de degré d possède d antécédentes et d + 1 conséquentes dans **T** : toutes les antécédentes de Y dans s'obtiennent en effet en diminuant d'une unité un terme positif qui est le *dernier* à prendre sa valeur, et toutes les conséquentes de Y dans **T** s'obtiennent en augmentant d'une unité un terme positif *ou nul* qui est le *premier* à prendre sa valeur (fig. 3. ci-dessous) :

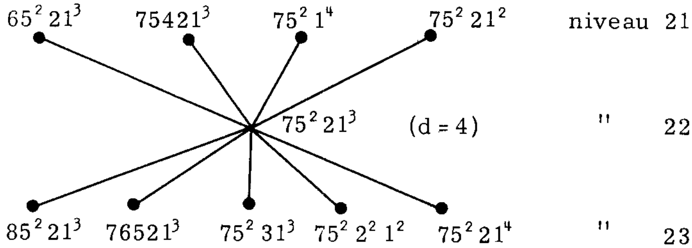


Fig. 3.

Il en résulte que le nombre R_m d'arêtes entre les niveaux m et m + 1 dépasse le nombre R_{m-1} d'arêtes entre les niveaux m − 1 et m d'autant d'unités qu'il y a de sommets au niveau m : $R_m - R_{m-1} = r_m$, d'où (puisque $R_o = 1 = r_o$)

$$R_m = r_o + r_1 + \ldots + r_m$$

2.1.3. Nombre de chemins entre deux sommets.

Nous appellerons chemin de Y' à Y (dans **T**) toute suite finie de sommets

$$Y^o (= Y'),\ Y^1,\ \ldots,\ Y^n (= Y)$$

telle que Y^i soit conséquent de Y^{i-1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$. D'une manière générale nous appellerons *puissance de Y par rapport à Y'* et nous noterons f(Y, Y') le nombre de ces chemins. Bien entendu on a f(Y, Y') = 0 s'il n'existe aucun chemin de Y' à Y, et f(Y', Y') = 1 (chemin unique, de "longueur" nulle, de Y' à Y').

En outre on a, pourvu que $|Y| > |Y'|$,

$$f(Y, Y') = \sum_{\substack{Z \text{ antécédent} \\ \text{de } Y}} f(Z, Y') = \sum_{\substack{Z' \text{ conséquent} \\ \text{de } Y'}} f(Y, Z') \qquad (18)$$

Ces propriétés définissent complètement la puissance de tout sommet Y de **T** par rapport à un sommet donné Y'.

On peut alors démontrer facilement le

Théorème : Y et Y' étant deux suites de Young telles que $|Y| \geqslant |Y'|$, la puissance de Y par rapport à Y' est égale à $|Y - Y'|\,!$ multiplié par l'antifactorielle de Y par rapport à Y'.

Remontons, pour le voir, à la formule (14) du § 1.4.3 :

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} \overline{Y - 1_i,\ Y'\,!} = |Y - Y'|\ \overline{Y,\ Y'\,!} \tag{19}$$

Si l'on pose, chaque fois que $|Y - Y'| \geqslant 0$,

$$|Y - Y'|\,!\ \overline{Y,\ Y'\,!} = \varphi(Y,\ Y'), \tag{20}$$

on obtient, en multipliant les deux membres par $|Y - Y' - 1|\,!$ sous condition que $|Y - Y'| \geqslant 1$

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} \varphi(Y - 1_i,\ Y') = \varphi(Y,\ Y'). \tag{21}$$

Mais chaque fois que $Y - 1_i$ n'est pas un élément régulier de $\mathbf{Y}$ au sens du §1.2.2, $\overline{Y - 1_i,\ Y'\,!}$ s'annule, donc aussi $\varphi(Y - 1_i, Y')$ par suite de sa définition (20). Finalement (21) peut alors s'écrire

$$\varphi(Y,\ Y') = \sum_{\substack{Z \text{ antécédent} \\ \text{de } Y}} \varphi(Z,\ Y'), \tag{22}$$

la sommation étant étendue aux antécédents de Y dans $\mathbf{T}$.

Or on a $\varphi(Y',\ Y') = 1$, et en outre $\varphi(Y,\ Y') = 0$ dans tout autre cas où $|Y'| = |Y|$, en raison de la définition (20) et des propriétés établies au § 1.3.3 ; car Y et Y', étant dans $\mathbf{H}$, ont même perturbation associée, et ne peuvent avoir également même image associée que si $Y = Y'$.

On voit ainsi, en rapprochant les formules (18) et (22) et les remarques qui les accompagnent, que pour tout couple (Y, Y') tel que $|Y| \geqslant |Y'|$ on a bien

$$f(Y,\ Y') = \varphi(Y,\ Y'),$$

ce qui démontre le théorème.

2.1.4. Passage aux conséquents de Y ou aux antécédents de Y'.

Soit, dans **T**, deux sommets Y et Y', de niveaux respectifs m et m' $(m \geqslant m')$. Si l'on remonte à la formule (17) du §1.4.4, on peut en multiplier les deux membres par $(m - m' + 1)$! et restreindre les sommations aux conséquents de Y et aux antécédents de Y' qui sont dans **T** (les autres, n'étant pas réguliers, annulent les antifactorielles correspondantes). On trouve ainsi la relation

$$\sum_{\substack{Z \text{ conséquent} \\ \text{de } Y}} f(Z, Y') - \sum_{\substack{Z' \text{ antécédent} \\ \text{de } Y'}} f(Y, Z') = (m - m' + 1)\, f(Y,Y') \quad (23)$$

Deux cas particuliers de cette relation sont intéressants :

a) celui où $Y = Y'$, où la formule (23) exprime le fait remarqué antérieurement, à savoir que le nombre d'antécédents de chaque sommet dépasse d'une unité son nombre d'antécédents.

b) celui où $Y' = 0$. On posera alors $f(Y, 0) = f(Y)$, que l'on appellera, sans plus, *la puissance de Y*. La formule (23) devient alors

$$\sum_{\substack{Z \text{ conséquent} \\ \text{de } Y}} f(Z) = (m + 1)\, f(Y) \ :$$

les conséquents d'un sommet de niveau m ont des puissances dont la somme est $m + 1$ fois celle du point considéré.

2.1.5. Cycles entre deux niveaux.

Nous appellerons ci-après *cycle entre Y' et Y* toute suite formée d'un nombre impair de sommets commençant et finissant par Y', dont la partie gauche (lue de gauche à droite) et la partie droite lue de droite à gauche sont des chemins de Y' à Y ; ce qui exige évidemment que le "terme médian" de la suite soit Y.

Il est clair que le nombre de cycles entre Y' et Y est $[f(Y, Y')]^2$. Etant donné Y' et Y, de niveaux respectifs m' et m, nous considèrerons (figure 4 ci-dessous)

a) tous les cycles entre Y' et un conséquent de Y, dont le nombre sera noté a.

b) tous les cycles entre un antécédent de Y' et Y, dont le nombre sera noté b.

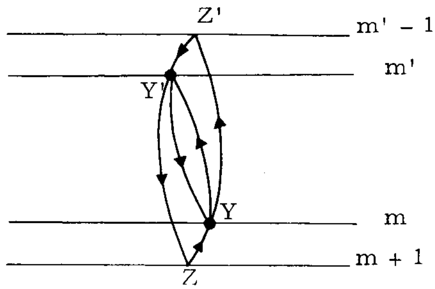


Fig. 4.

On a dans ces conditions

$$a = f(Y, Y') \times \sum_{\substack{Z \text{ conséquent} \\ \text{de } Y}} f(Z, Y')$$

$$b = f(Y, Y') \times \sum_{\substack{Z' \text{ antécédent} \\ \text{de } Y'}} f(Y, Z')$$

Retranchant membre à membre, il vient, compte tenu de (23) :

$$a - b = (m - m' + 1) \, [f(Y, Y')]^2 \qquad (24)$$

a et b dépendent bien entendu tous deux du choix particulier que l'on a fait d'un Y' et d'un Y.

Mais il est aisé de voir que si l'on choisit de toutes les manières possibles Y' et Y en laissant fixes leurs niveaux respectifs m' et m, la somme des a (resp. des b) correspondants n'est autre que le nombre total des cycles entre un sommet de niveau m' et un sommet de niveau $m + 1$ (resp. entre un sommet de niveau $m' - 1$ et un sommet de niveau m).

Il en résulte que si l'on note $\gamma(m, m')$ le nombre total de cycles entre les niveaux m' et m, on a, par sommation de (24),

$$\gamma(m + 1, m') - \gamma(m, m' - 1) = (m - m' + 1) \, \gamma(m, m'). \qquad (25)$$

Cette formule vaut en particulier dans le cas où $m' = m$, qui fait retrouver le résultat $R_m - R_{m-1} = r_m$ établi au § 2.1.2.

Elle vaut en outre si l'on fait $m' = 0$, sous une forme d'ailleurs simplifiée puisque le second terme disparaît ; en posant $\gamma(m, 0) = \gamma(m)$, on a

$$\gamma(m+1) = (m+1)\ \gamma(m),$$

d'où, puisque

$$\gamma(1) = 1,$$

$$\gamma(m) = m\ !$$

$\gamma(m)$, nombre de cycles entre les niveaux 0 et m, est la somme des carrés des puissances des sommets de niveau m. On a donc ainsi

$$\sum_{|Y|=m} [f(Y)]^2 = m\ !$$

Ce dernier résultat a été établi par A. Young ([12] et [13]) à l'occasion de ses premières études sur le groupe symétrique. C. Schensted [11] en a établi une extension intéressante dans une direction sensiblement différente de celle du présent travail.

2.1.6. Expression de $\gamma(m,m')$ à l'aide des r_i.

On a déjà remarqué plus haut que $\gamma(m, m') = r_{m'}$ et que

$$\gamma(m'+1, m') = r_0 + r_1 + \dots + r_{m'}. \tag{26}$$

Montrons que pour tout $m > m' + 1$ on a :

$$\gamma(m, m') = (m, m')\ !\ (r_0\ C^{m'}_{m-1} + r_1\ C^{m'-1}_{m-2} + \dots + r_{m'}\ C^{0}_{m-m'-1}) \tag{27}$$

Vraie pour $m - m' = 1$ en raison de (26), cette formule peut s'établir par récurrence sur la différence $m - m'$.

Si l'on pose pour simplifier $\gamma(m, m')/(m-m')\ ! = c(m, m')$, la formule (25) prend en effet la forme

$$c(m+1, m') - c(m, m'-1) = c(m, m'),$$

d'où il résulte, par sommation à différence $m - m'$ constante,

$$c(m+1, m') = c(m, m') + c(m-1, m'-1) + \dots + c(m-m', 0). \tag{28}$$

Si l'on suppose, par hypothèse de récurrence, que

$$c(m, m') = r_0 C_{m-1}^{m'} + r_1 C_{m-2}^{m'-1} + \ldots + r_{m'} C_{m-m'-1}^{0}, \tag{29}$$

et que des expressions analogues sont vraies pour $c(m-1, m'-1)$, $c(m-2, m'-2)$, etc., il suffit de calculer le second membre de (28) en tenant compte de (29) et des relations bien connues entre coefficients binomiaux pour voir que

$$c(m+1, m') = r_0 C_m^{m'} + r_1 C_{m-1}^{m'-1} + \ldots + r_{m'} C_{m-m'}^{0}.$$

La formule (27) est ainsi établie.

2.1.7. Somme des puissances des sommets de niveau donné.

Pour un niveau donné m, la somme des puissances des sommets n'a pas une expression aussi simple que la somme de leurs carrés, mais se laisse cependant traiter sans trop de difficulté.

Pour faire le calcul, on peut considérer en chaque sommet Y non seulement sa puissance $f(Y)$, mais le produit $f(Y)\,d(Y)$ de sa puissance par son degré (ou nombre d'antécédents), et poser

$$u_m = \sum_{|Y|=m} f(Y) \qquad v_m = \sum_{|Y|=m} f(Y)\,d(Y)$$

Chaque sommet ayant une puissance égale à la somme des puissances de ses antécédents, dans la somme des puissances au niveau m la puissance de chaque sommet Y de niveau $m-1$ est comptée autant de fois que ce sommet possède de conséquents, c'est-à-dire $1+d(Y)$ fois d'où

$$u_m = \sum_{|Y|=m-1} [1 + d(Y)]\; f(Y)$$

et par conséquent

$$u_m = u_{m-1} + v_{m-1}. \tag{30}$$

Mais d'autre part il résulte de ce qu'on a vu au § 2.1.4 que les conséquents d'un sommet Y de niveau $m-1$ ont des puissances dont la somme est m fois celle de Y ; en sommant cette propriété pour tous les sommets de niveau $m-1$, on fait apparaître chaque sommet Z de niveau m autant de fois qu'il a d'antécédents, c'est-à-dire $d(Z)$ fois ; d'où

$$\sum_{|Z|=m} d(Z)\, f(Z) = m\, u_{m-1}$$

ou

$$v_m = m\, u_{m-1} \tag{31}$$

De (30) et (31) se déduit immédiatement la récurrence du second ordre

$$u_m = u_{m-1} + (m-1)\, u_{m-2}.$$

Numériquement on a

$m =$	1	2	3	4	5	6	7	8....
$u_m =$	1	2	4	10	26	76	232	764....

Cette suite u_m possède plusieurs propriétés intéressantes ; elle donne notamment le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal m en classes dont aucune n'est de cardinal supérieur à 2.

Elle a notamment été étudiée de manière approfondie par Chowla, Herstein et Moore [3].

2.2. EXPRESSIONS MONOMES DE f(Y) -

2.2.1. Formule de Young.

Etant donné la suite de Young $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$ dans laquelle on suppose nuls tous les termes d'indice $> n$, on a vu que $\overline{Y}\,!$ se calcule à l'aide du déterminant d'ordre n dont la i-ième ligne $(i = 1, 2, \dots, n)$ est

$$\overline{y_i - i + 1}\,! \quad \overline{y_i - i + 2}\,! \quad \dots \quad \overline{y_i - i + n}\,!$$

Si l'on pose $y_i - i + n = t_i$, et que dans toute la i-ième ligne on mette $\overline{t_i}\,!$ en facteur, il reste de cette ligne

$$(t_i)_{n-1}\, (t_i)_{n-2} \;\dots\; 1, \tag{32}$$

l'écriture $(t)_k$ ayant la signification habituelle du polynôme factoriel $t(t-1)\dots(t-k+1)$ avec $(t)_1 = t$ et $(t)_0 = 1$.

Le déterminant formé par les n lignes telles que (32), pour $i = 1, 2, \dots, n$, est manifestement un déterminant de Vandermonde ; on a par conséquent

$$\overline{Y}! = \overline{t_1}!\ \overline{t_2}! \dots \overline{t_n}! \prod_{1 \leq i < k \leq n} (t_i - t_k) \tag{33}$$

A partir de la formule (33), il suffit de remplacer t_i par $y_i - i + n$, $|Y|$ par $y_1 + y_2 + \dots + y_n$, et $f(Y)$ par $|Y|\,!\ \overline{Y}!$ pour obtenir

$$f(Y) = \frac{(y_1 + y_2 + \dots + y_n)\,!}{(y_1 + n - 1)\,!\ (y_2 + n - 2)\,!\ \dots\ y_n\,!} \times \prod_{1 \leq i < k \leq n} (y_i - i - y_k + k) \tag{34}$$

Etablie par Young [13], cette formule possède notamment les deux propriétés suivantes :

a) le nombre de facteurs explicités est le même en numérateur et en dénominateur (il est égal à la somme des y_i augmentée de $n(n-1)/2$).

b) Si l'on fait $y_n = 0$, les $n - 1$ facteurs sous le signe Π qui correspondent à $k = n$ se simplifient avec les facteurs les plus élevés des $n - 1$ premières factorielles du dénominateur ; ce qui permet de vérifier que le second membre de la formule de Young est indépendant de la valeur de n choisie pour le calculer, pourvu que celle-ci soit au moins égale au nombre de termes non nuls de Y.

2.2.2. Profils et dualité.

A toute suite de Young $Y = (y_1\ y_2\ \dots\ y_n)$ il est commode de faire correspondre une figure simple dans le quadrant positif d'un plan quadrillé en "cases" par les droites d'abscisses et d'ordonnées entières : il s'agira de l'ensemble de cases obtenu en comptant vers le haut, à partir de l'axe des abscisses, y_1 cases de l'abscisse $(0, 1)$, y_2 cases de l'abscisse $(1, 2), \dots, y_n$ cases de l'abscisse $(n - 1, n)$. La figure 5 ci-contre correspond à $Y = (64^2\ 21)$.

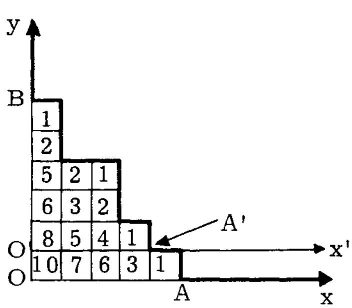


Fig. 5.

Notons, pour y refaire allusion plus loin, que la donnée d'un Y équivaut à la donnée d'un profil (ou chemin) BA, joignant un point B de Oy à un point A de Ox, à l'aide de pas unitaires ouest-est et nord-sud, le profil étant si l'on veut complété par les demi-axes By et Ax.

Notons aussi que sur cette représentation de Y plusieurs des fonctions de Y introduites précédemment prennent des significations simples :

niveau $m(Y)$: nombre total de cases entre xOy et le profil ou $|Y|$

degré $d(Y)$: nombre de cases dont les frontières nord et est appartiennent toutes deux au profil

puissance $f(Y)$: nombre de manières de numéroter les m cases de 1 à m en respectant la double condition que dans toute ligne lue de gauche à droite et dans toute colonne *lue de bas en haut* les numéros apparaissent dans un ordre croissant.

Remarquons enfin que l'échange des rôles de Ox et Oy fait correspondre à toute suite de Young Y une suite duale X, que l'on peut aussi définir par

$$x_j = \max (i \mid y_i \geqslant j) \text{ pour } j = 1, 2, \dots, y_1$$

$$x_j = 0 \qquad\qquad \text{pour } j > y_1$$

Niveau, degré et puissance sont de toute évidence respectivement égaux pour une suite et sa duale.

2.2.3. Equerres.

Y étant donné, à chacune des $m(Y)$ cases correspond un sous-ensemble de cases appelé son *équerre* et formé

a) de la case considérée elle-même.

b) de toutes celles de même abscisse situées entre elle et le profil (s'il en existe).

c) de toutes celles de même ordonnée situées entre elle et le profil (s'il en existe).

Si la case considérée est désignée par (i, j), coordonnées de son "coin nord-est", son équerre est formée d'un nombre de cases égal à

$$e_{ij} = 1 + (y_i - j) + (x_j - i)$$
$$= y_i - i + x_j - j + 1 \ ;$$

e_{ij} est la *longueur d'équerre* de la case (i, j).

Dans la figure 5 on a inscrit dans chaque case sa longueur d'équerre.

Notons en particulier les longueurs d'équerre $e_{11}, e_{21}, \ldots, e_{n1}$ des cases d'ordonnée 1 ("appuyées" sur l'axe Ox) : si y_n est le dernier des y non nuls, ce qui équivaut à $x_1 = n$, on a

$$e_{i1} = y_i - i + n$$

ou

$$e_{i1} = t_i \text{ (conformément à l'écriture du § 2.2.1).} \qquad (35)$$

2.2.4. Théorème de Frame-Robinson-Thrall.

Frame, Robinson et Thrall [6] ont établi un résultat qui, avec nos notations, s'énonce comme suit : $\overline{Y}\rceil$ est l'inverse du produit de toutes les longueurs d'équerres de la figure qui correspond à Y.

Montrons-le par récurrence sur le premier terme y_1 de Y.

Si $y_1 = 1$, on a $Y = (1^n)$, $|Y| = n$ et $f(Y) = n\,!\ \overline{Y}\rceil = 1$ (puisqu'il n'y a, entre 0 et Y, qu'un seul chemin $0, 1, 1^2, \ldots, 1^n$) ; donc $\overline{Y}\rceil = 1/n\,!$. Or les longueurs d'équerre des n cases, lues de gauche à droite, sont $n, n-1, \ldots, 1$; leur produit est n ! La proposition est donc vérifiée pour $y_1 = 1$.

Supposons-la établie pour les valeurs $1, 2, \ldots, y_1 - 1$ du premier terme de Y, et donnons-nous $Y = (y_1\, y_2 \ldots y_n)$, avec $y_n \neq 0$. Introduisons la suite de Young $Y' = (y_1 - 1, y_2 - 1, \ldots, y_n - 1)$. La figure représentant Y peut être réutilisée pour représenter Y', il suffit de prendre un nouvel axe O'x' décalé d'une unité vers le haut à partir de Ox : le profil BA' (cf. fig. 5) est la partie du profil BA située au-dessus de O'x'. Les cases comprises entre Ox et O'x' ont disparu et les cases restantes ont leurs longueurs d'équerre inchangées.

Mais la formule (33) peut s'écrire, compte tenu de la signification des antifactorielles numériques :

$$\overline{Y}\rceil ! = \frac{\overline{t_1 - 1}\rceil !\ \overline{t_2 - 1}\rceil ! \ \dots \ \overline{t_n - 1}\rceil !}{t_1 \times t_2 \times \dots \times t_n} \prod_{1 \leqslant i < k \leqslant n} [(t_i - 1) - (t_k - 1)]$$

Sous cette forme, l'ensemble de ce qui est écrit en numérateur n'est autre que $\overline{Y'}\rceil !$ (puisqu'à la diminution d'une unité de tous les y correspond la diminution d'une unité de tous les t) ; on a donc, compte tenu de (35),

$$\overline{Y}\rceil ! = \frac{\overline{Y'}\rceil !}{e_{11}\ e_{21}\ \dots\ e_{n1}}$$

La proposition est, par suite de l'hypothèse de récurrence, établie pour Y', et les cases de Y sont toutes celles de Y' plus les n cases dont les longueurs d'équerres figurent en dénominateur. La proposition est donc vraie pour Y, ce qui achève de l'établir par récurrence.

Exemple numérique : pour $Y = (64^2\ 21)$, $|Y| = 17$; la puissance de Y est le quotient de 17 ! par le produit des entiers inscrits dans les cases de la figure 5, ce qui donne

$$f(Y) = 7 \times 11 \times 13 \times 16 \times 17 = 272.272$$

2.2.5. Cas particulier du degre 1.

Que l'on parte de la formule de Young ou du théorème de Thrall-Robinson-Frame, il est intéressant de considérer le cas où Y est de degré 1, ce qui équivaut à $Y = (q^p)$: les cases sont simplement disposées en un rectangle de $p \times q$ cases (la duale de Y serait p^q).

L'expression (34), par exemple, s'écrit alors

$$f(Y) = \frac{(pq)\,!}{(p+q-1)\,!\ (p+q-2)\,! \dots\ q\,!}\ 1\,!\ 2\,! \dots (p-1)\,!$$

(les $p - 1$ factorielles écrites à droite de la fraction s'obtiennent en fixant $i = 1, 2, \dots, p - 1$).

Une forme d'aspect plus symétrique s'obtient en posant pour abréger, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$1\,!\ 2\,! \dots (n-1)\,! = n\,!\,! \qquad (\text{"bifactorielle"}) ;$$

on a alors :

$$f(p^q) = f(q^p) = \frac{(pq)!\ p!!\ q!!}{(p+q)!!} \tag{36}$$

Cette formule n'a pas d'autre intérêt que d'apporter une réponse condensée et mnémotechnique à la question suivante, qui surgit dans un grand nombre d'applications (notamment économiques) : étant donné deux ensembles finis P et Q complètement ordonnés, combien existe-t-il, sur le produit cartésien $P \times Q$, d'ordres complets compatibles avec l'ordre partiel de "dominance" ?

Il est assez remarquable que, malgré la simplicité de la question et de la réponse, il ne paraisse pas aisé d'établir celle-ci sans faire d'une manière ou d'une autre un détour par l'étude des suites de Young plus générales.

2.2.6. Remarques sur les possibilités d'extension à f(Y, Y').

2.2.6.1. On a vu aux §§ précédents que $f(Y)$ est toujours un diviseur de $|Y|!$ On pourrait donc songer à conjecturer que la puissance relative $f(Y, Y')$, lorsqu'elle n'est pas nulle, divise $|Y - Y'|!$ Des contre-exemples très simples permettent de voir qu'il n'en est rien : ainsi pour $Y = (42^2)$ et $Y' = (1^2)$ on vérifie aisément (soit par comptage direct, soit en utilisant le calcul du déterminant $\delta_3(Y, Y')$) que $f(Y, Y') = 26$, valeur contenant un facteur 13 qui n'apparaît pas dans $|Y - Y'|! = 6!$

Il ne semble donc pas y avoir d'expression monôme simple pour $f(Y, Y')$ quand Y' est quelconque.

Remarquons cependant que si Y et Y' sont de niveaux respectifs m et m' $(m > m')$, $f(Y, Y')$ peut toujours être considéré comme la somme (alternée) des nombres multinomiaux

$$\binom{m - m'}{a(1, j_1)\ a(2, j_2) \dots a(n, j_n)} ;$$

cela résulte des notations et du mode de dévoloppement de $\overline{Y, Y'}!$ qui ont été introduits au § 1.1., et suppose que l'on convienne de considérer comme nul tout nombre multinomial dont l'écriture comporte au moins un entier négatif dans la ligne inférieure.

2.2.6.2. La méthode des équerres constitue une manière élégante d'utiliser la figure représentant Y comme "grille de calcul" en vue de f(Y). Dans le cas où Y majore Y', le profil relatif à Y' est tout entier au-dessous et à gauche (au sens large) du profil relatif à Y ; il serait intéressant de pouvoir utiliser l'ensemble des cases comprises entre les deux profils comme grille de calcul en vue de f(Y, Y'). Nous développerons un principe analogue dans la section suivante pour le calcul non pas de f(Y, Y'), mais d'une autre fonction de Y et Y'.

2. 3. SOMMETS DE **T** INTERMEDIAIRES ENTRE DEUX SOMMETS DONNES -

2.3.1. Extension à $\mathbf{Z}^2$ des nombres binomiaux.

Dans leurs utilisations les plus communes, les nombres binomiaux s'écrivent soit C_n^p (notation à deux indices), soit $\binom{n}{p}$ (notation parenthèse), soit encore $\binom{n}{p\ \ n-p}$ (notation particularisant celle des nombres multinomiaux), et sont considérés comme définis seulement lorsque les entiers n et p satisfont à $0 \leqslant p \leqslant n$.

Il sera commode, non seulement pour la présente section mais également pour les sections ultérieures de définir $\binom{n}{p}$ et C_n^p pour $(n, p) \in \mathbf{Z}^2$, et cela avec deux significations distinctes.

2.3.1.1. *Notation parenthèse.*

Nous considérons $\binom{n}{p}$ comme défini non seulement dans $\mathbf{Z}^2$ mais même dans $\mathbf{Q} \times \mathbf{Z}$, par

$$\binom{n}{p} = (n)_p \ \overline{p}\rceil \qquad (37)$$

Pour $p \geqslant 0$, $(n)_p$ est le polynôme factoriel de la variable (rationnelle ou entière) n,

$$(n)_p = n(n-1) \ldots (n-p+1), \text{ avec } (n)_p = n \text{ et } (n)_0 = 1.$$

Dans le cas où l'entier p est négatif, il suffit de considérer la définition (37) comme applicable sans qu'il soit besoin de préciser la signification de $(n)_p$, ce qui revient à considérer que

$$\binom{n}{-1} = \binom{n}{-2} = \dots\dots = 0$$

pour tout $n \in \mathbf{Q}$ et notamment pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

Il revient au même, comme il est aisé de s'en assurer, de définir $\binom{n}{p}$ dans $\mathbf{Z}^2$ par la double récurrence

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

accompagnée des conditions $\binom{n}{0} = 1$ pour tout n et $\binom{0}{p} = 0$ pour tout $p > 0$.

2.3.1.2. *Notation C à deux indices.*

Une fois $\binom{n}{p}$ défini dans $\mathbf{Z}^2$, nous définirons C_n^p, également dans $\mathbf{Z}^2$, par

$$C_n^p = \binom{n}{n-p},$$

ce qui revient à définir C_n^p par la double récurrence

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

accompagnée des conditions $C_n^n = 1$ pour tout n et $C_o^p = 0$ pour tout $p < 0$.

Il va de soi qu'avec ces conventions d'écriture, il n'est plus vrai en général que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ et $C_n^p = C_n^{n-p}$, mais seulement que $C_n^p = \binom{n}{n-p}$ et $\binom{n}{p} = C_n^{n-p}$.

Notons aussi les deux développements binomiaux distincts de $(1+t)^n$, $(n \in \mathbf{Z})$, valables le premier pour $|t| < 1$, le second pour $|t| > 1$:

$$(1+t)^n = \sum_{p \in \mathbf{Z}} \binom{n}{p} t^p$$

$$(1+t)^n = \sum_{p \in \mathbf{Z}} C_n^p t^p$$

Ces deux développements ne coïncident que si l'entier n est non-négatif, auquel cas ils sont finis et valables quel que soit $|t|$.

2.3.2. Suites de Young comprises entre deux suites données.

Etant donné deux suites de Young $Y = (y_1\ y_2 \ldots\ y_n)$ et $Y' = (y'_1\ y'_2 \ldots\ y'_n)$ telles que Y majore Y' ($y_i \geqslant y'_i$ pour $i = 1, 2, \ldots$), il importe dans beaucoup de problèmes, notamment statistiques, d'étudier l'ensemble des suites de Young Z qui sont à la fois majorées par Y et majorantes de Y'. Dans le treillis de Young il leur correspond *l'intervalle* [Y', Y], ensemble des sommets où passent les chemins de Y' à Y (sommets Y' et Y compris). Nous désignerons par w(Y, Y') le cardinal de cet ensemble, et l'appellerons par convention *richesse de Y par rapport à Y'*, ou plus simplement, si Y' = 0, *richesse de Y*. La figure 12, plus loin hors-texte, donne les richesses des sommets de **T** jusqu'au niveau 6 inclus.

Si l'on se représente dans un même système d'axes, les profils yBAx et yB'A'x correspondant à Y et Y', profils dont le second est, au sens large, au sud-ouest du premier, il s'agit de compter les profils compris, toujours au sens large, entre ces deux-là. La figure 6 ci-contre représente $Y = (64^3\ 3)$ et $Y' = (642^2\ 1)$. Mais il est clair que seuls importent les parties $\beta\alpha$ des deux profils comprises entre le point β où (parcourus de nord-ouest en sud-est) ils cessent de coïncider et le point α où ils coïncident à nouveau définitivement.

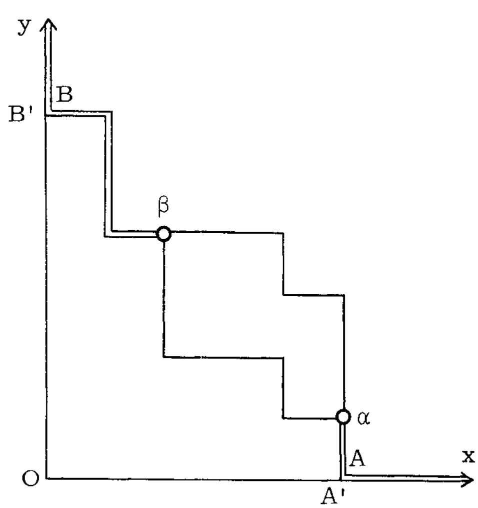


Fig. 6.

Dans l'exemple figuré, on a ainsi $w[(64^3 3), (642^2 1)] = w[(3^2 2), (1^2)]$. D'une manière générale il suffira de savoir calculer $w(Y, Y')$ dans le cas où l'on a $y_1 > y'_1$, $y_n > 0$, $y'_n = 0$, cas auquel il est toujours possible de se ramener par une translation convenable des axes.

2.3.3. Connexité.

Sur la figure du § précédent, l'ensemble des cases comprises entre les deux profils est *connexe* (ou d'un seul tenant) au sens suivant : si l'on qualifie d'adjacentes deux cases ayant un côté commun, il est possible de joindre l'une quelconque à toute autre par une chaîne de cases dont chacune est adjacente à la précédente.

Cette particularité de la figure ne se produit pas nécessairement : elle disparaîtrait si les parties $\beta\alpha$ des deux profils avaient d'autres points communs que β et α. Mais s'il en était ainsi, la figure à considérer se décomposerait en plusieurs parties dont chacune serait connexe et contiendrait un morceau de chacun des profils intermédiaires. Il suffit donc de savoir compter $w(Y, Y')$ dans le cas connexe, et de faire éventuellement le produit $w_1 w_2 \ldots w_k$ des résultats obtenus pour chacune des k composantes connexes.

La condition de connexité adjoint aux conditions $y_1 > y'_1$, $y_n > 0$, $y'_n = 0$, mentionnées au § précédent, les conditions $y_{i+1} > y'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$.

Notons ici que les mêmes considérations de profil et de connexité auraient pu être introduites, si cela avait été utile, pour le calcul non seulement de la richesse $w(Y, Y')$ mais aussi de la puissance $f(Y, Y')$. S'il y a k composantes connexes, formées respectivement de $m_1, m_2, \ldots, m_k$ cases, et que l'on sache calculer les puissances relatives $f_1, f_2, \ldots f_k$ pour chacune des k figures correspondantes, il faut en fin de compte non pas simplement faire le produit $f_1 f_2 \ldots f_k$, mais encore le multiplier par le nombre multinomial $\begin{pmatrix} m_1 + m_2 + \ldots + m_k \\ m_1 \quad m_2 \quad \ldots \quad m_k \end{pmatrix}$: ce dernier est en effet le nombre de manières dont on peut, pour chacune des $f_1 f_2 \ldots f_k$ associations d'ordres acceptables sur les cases des composantes connexes, l'assembler en un ordre unique sur la totalité des $m_1 + m_2 + \ldots + m_k$ cases.

2.3.4. Algorithme de calcul.

Une méthode de calcul simple de $w(Y, Y')$, dans le cas connexe, est mise en oeuvre ci-dessous sur l'exemple $Y = (75^3\, 2^2)$, $Y' = (431^2)$, et peut être suivie sur la figure 7. Elle consiste, après

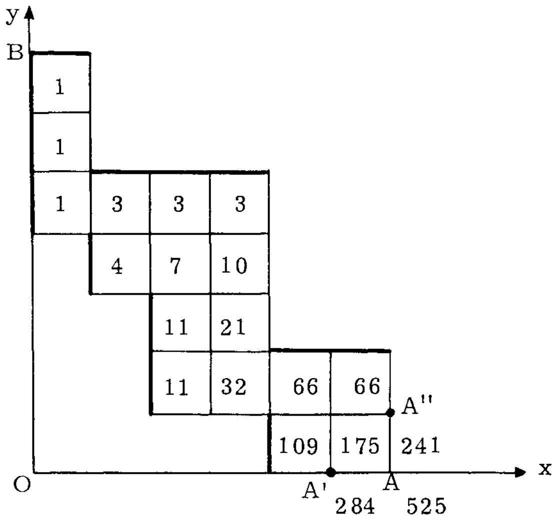


Fig. 7.

avoir inscrit 1 dans la case située à l'extrême nord-ouest dont un coin s'appelle B (*case de tête*) à remplir de proche en proche toutes les cases à l'aide des deux règles symbolisées ci-dessous (fig. 8) :

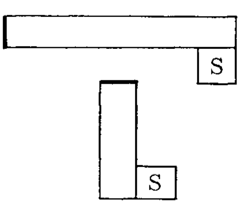


Fig. 8.

(inscrire dans chaque case la somme de ce qui a été inscrit dans toute la ligne qui la surmonte, de gauche à droite jusqu'à son abscisse incluse, ou de ce qui a été inscrit dans toute la colonnette qui l'avoisine à gauche, de haut en bas jusqu'à son ordonnée incluse).

Il est manifeste que cette règle possède les propriétés suivantes :

2.3.4.1. tout le long d'un même segment frontière ouest ou d'un même segment frontière nord (en gras sur le dessin) figure toujours un même nombre.

2.3.4.2. dans chacune des cases ayant à la fois une adjacente nord et une adjacente ouest figure la somme des nombres inscrits dans ces deux dernières.

Une fois ainsi remplies toutes les cases de la figure 7 (ce qui va extrêmement vite) jusqu'à la dernière dont le coin sud-est s'appelle A, la somme de tout ce qui figure dans la ligne la plus basse (ici 284) plus la somme de tout ce qui figure dans la colonne la plus à droite (ici 241) donne $w(Y, Y')$: ici $w(Y, Y') = 525$.

2.3.5. Justification.

La règle de calcul exposée ci-dessus se justifie par le fait qu'à chacune des suites de Young Z comptées correspond un chemin et un seul joignant B à A, au sens du § 2.2.2., et ne sortant pas de l'aire limitée par les deux profils donnés.

Or ces chemins sont de deux sortes : ceux qui se terminent par un pas ouest-est, c'est-à-dire passent en A', et ceux qui se terminent par un pas nord-sud, c'est-à-dire passent en A''.

Les uns et les autres correspondent à des problèmes de même nature, mais avec modification de la figure : pour les premiers on fait abstraction de la colonnette la plus à droite, pour les seconds de la couche la plus basse. (Leurs nombres respectifs sont ici, si la règle est valable, 284 et 241).

En raison de la propriété 2.3.4.2., la règle même de comptage consiste à écrire de proche en proche les nombres correspondant à des ensembles de cases que l'on complète progressivement vers le sud-est jusqu'à former l'ensemble voulu. S'il arrivait, ce qui n'est pas le cas sur la figure 7, que le point A' (resp. A'') soit sur un segment frontière ouest (resp. nord), c'est en outre la propriété 2.3.4.1. qui interviendrait pour justifier le procédé de comptage adopté.

La justification complète du procédé résulte donc, finalement, de son caractère trivial dans les cas limites où la figure se réduit à une ligne ou à une colonne de cases : toutes celles-ci sont alors garnies de 1, le procédé donne un w égal au nombre de cases augmenté d'une unité, ce qui dans ce cas est évidemment le nombre de profils cherché.

Remarque : Rien n'empêcherait, s'il en résultait un avantage, d'étendre le procédé au cas non connexe. Appelons en effet B_i et A_i les coins nord-ouest et sud-est de la i-ième composante connexe (le numéro i correspondant à l'ordre d'énumération vers le sud-est). Il suffirait alors, une fois épuisée la i-ième composante, d'inscrire la somme $S' + S''$ (fig. 9) non pas immédiatement au sud-est de A_i, mais dans la case de tête de la composante suivante (ce qui d'ailleurs reviendrait au même dans le cas particulier où B_{i+1} coïncide avec A_i). Tous les nombres à inscrire dans les cases de la $(i + 1)$-ième composante connexe seraient alors $S' + S''$ fois plus

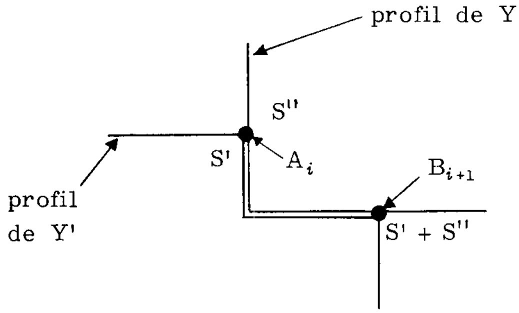


Fig. 9.

grands que si cette composante était la première ; donc si l'on avait déjà $S' + S'' = w_1\ w_2 \ldots\ w_i$, l'épuisement de la composante suivante donnerait $w_1\ w_2 \ldots\ w_i\ w_{i+1}$.

2.3.6. Equation fonctionnelle.

La richesse relative $w(Y, Y')$ peut évidemment se calculer en fonction des termes $y_1, y_2 \ldots$ et $y'_1, y'_2 \ldots$ des suites de Young Y et Y'. Il suffit bien entendu de conduire le calcul en se bornant aux α premiers termes de chacune des deux suites, α étant le plus grand indice pour lequel $y_\alpha > y'_\alpha$ (on a toujours $y_i \geqslant y'_i$) ; nous supposerons en outre que $y'_\alpha = 0$ (à quoi l'on pourrait toujours se ramener, si y'_α n'était pas nul, en retranchant cet y'_α des 2α termes pris en compte). On ne conserve ainsi, des conditions mentionnées au § 2. 3. 3., que les conditions $y'_\alpha = 0$ et $y_\alpha > 0$ (qui, notons-le, ne suffisent pas à garantir la connexité).

Cela dit on peut introduire les nouvelles suites de Young Y_o, Y_{oo}, Y'_{oo} définies comme suit :

$Y_o = (y_1, y_2 \ldots y_{\alpha-1})$ (suppression du dernier terme de la suite définissant Y).

$Y_{oo} = (y_1 - 1, y_2 - 1, \ldots, y_\alpha - 1)$ (diminution d'une unité de tous les termes de la suite définissant Y).

Y'_{oo} : obtenu par diminution d'une unité de tous les termes *non nuls* (c'est-à-dire positifs) de la suite définissant Y'.

Dans ces conditions, l'algorithme de calcul s'écrit

$$w(Y,\ Y') = w(Y_o,\ Y'_o) + w(Y_{oo},\ Y'_{oo})\ ; \qquad (38)$$

l'argument $Y'_o = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_{a-1})$ n'est qu'une autre écriture pour Y' puisque $y'_a = 0$.

2.3.7. Expression sous forme de déterminant.

2.3.7.1. Considérons deux suites de Young quelconques Y et Y' telles que tous leurs termes au-delà du p-ième soient nuls et que tous leurs termes soient $\leqslant q$ (nous dirons dans ce cas qu'elles appartiennent au type $[p,\ q]$), et telles qu'en outre Y majore Y' :

$$Y = (y_1, y_2, \ldots, y_p) \qquad y_i \geqslant y_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p-1)$$

$$Y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_p) \qquad y'_j \geqslant y'_{j+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p-1)$$

$$q \geqslant y_k \geqslant y'_k \geqslant 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

et formons le déterminant Δ, d'ordre p, qui a pour élément général (ligne i, colonne j) le nombre binomial $C^{i-j+1}_{y_i - y'_j + 1}$, défini conformément au § 2.3.1.

Nous allons montrer que *ce déterminant Δ est précisément égal à la richesse $w(Y, Y')$* de Y par rapport à Y' ; nous raisonnerons pour cela par double récurrence sur p et q (ou, si l'on veut, par récurrence simple sur la somme $p + q$). Notons que p et q dont des entiers non-négatifs, que le type $[p,\ 0] = [0,\ q] = [0,\ 0]$ n'est pas vide (il contient la suite de Young $Y = 0$ et elle seule), et que si $p' \geqslant p$ et $q' \geqslant q$, le type $[p,\ q]$ est inclus dans le type $[p',\ q']$.

Notons aussi que si Y et Y' appartiennent au type $[p,\ q]$, toute suite Z intermédiaire appartient au même type.

2.3.7.2. Le résultat annoncé, qui n'a de sens que si $p \geqslant 1$, est pratiquement évident dans les deux cas suivants :

a) type $[p,\ 0]$ $(p = 1, 2, \ldots)$.

Δ est en effet alors un déterminant d'ordre p et d'élément général C^{i-j+1}_1, puisqu'on vient de voir que dans ce cas $Y = Y' = 0$, d'où $y_i = y'_j = 0$. Ce Δ a donc des éléments égaux à 1 dans sa diagonale $(j = i)$ et dans sa surdiagonale $(j = i+1)$ et à 0 partout ailleurs, d'où $\Delta = 1$; et bien évidemment seul $Z = 0$ est intermédiaire entre $Y = 0$ et $Y' = 0$, d'où $w(Y,\ Y') = 1 = \Delta$.

b) type $[1, q]$ (q quelconque).

On a alors $\Delta = y_1 - y'_1 + 1$; toute suite de Young de ce type est définie par un seul entier z, et si l'on veut que $y'_1 \leqslant z \leqslant y_1$, le nombre $w(Y, Y')$ de possibilités est bien égal à $y_1 - y'_1 + 1$ c'est-à-dire à Δ.

Prenons alors, dans le type $[p, q]$, deux suites de Young quelconques Y et Y' telles que Y majore Y', et supposons la proposition établie pour tous les couples de suites des types $[p-1, q]$ et $[p, q-1]$. On se trouve nécessairement dans l'un des trois cas suivantes : (1) $y_p = y'_p = 0$ (2) $y'_p > 0$ (3) $y_p > 0$ $y'_p = 0$, qui vont être analysés à tour de rôle.

2.3.7.3. *1er cas* : Si $y_p = y'_p = 0$, Y et Y' appartiennent tous deux à la partie $[p-1, q]$ du type $[p, q]$. Le déterminant d'ordre $p-1$ correspondant, soit Δ_o, résulte de Δ par suppression de la dernière ligne et de la dernière colonne. Or la dernière (p-ième) ligne est

$$C^{p}_{-y'_1+1}\ C^{p-1}_{-y'_2+1}\ \ldots\ldots\ C^{2}_{-y'_{p-1}+1}\ C^1_1\ ;$$

l'avant-dernier élément est nul puisque l'indice du bas $-y'_{p-1}+1$ est inférieur à l'indice du haut 2 (du fait que $y'_{p-1} > -1$), et ses précédesseurs le sont à plus forte raison. La dernière ligne est donc

$$0 \quad 0 \ldots\ldots 0 \quad 1,$$

d'où $\Delta = \Delta_o$. Puisque $w(Y, Y') = \Delta_o$ par hypothèse de récurrence, on a bien $w(Y, Y') = \Delta$.

2ème cas : Si $y'_p > 0$, on définit Y_{oo} et Y'_{oo} en diminuant d'une unité tous les termes respectifs de Y et Y'. De toute évidence $w(Y_{oo}, Y'_{oo}) = w(Y, Y')$. Quant au nouveau déterminant Δ_{oo} calculé à partir de Y_{oo} et Y'_{oo}, il est égal à Δ puisque les p^2 différences $y_i - y'_j$, demeurent inchangées. Mais Y_{oo} et Y'_{oo} appartiennent au type $[p, q-1]$, par définition des types. Donc $w(Y_{oo}, Y'_{oo}) = \Delta_{oo}$, d'où $w(Y, Y') = \Delta$.

3eme cas : Soit $y_p > y'_p = 0$. On a défini plus haut, *pour ce cas*, les suites Y_o, Y'_o, Y_{oo}, Y'_{oo} qui appartiennent respectivement aux types $[p-1, q]$ et $[p, q-1]$, et pour lesquelles vaut la relation (38). Il suffira donc ici de montrer que l'on a, entre les déterminants correspondants, la relation $\Delta = \Delta_o + \Delta_{oo}$.

Remarquons d'abord, pour cela, que la dernière (p-ième) colonne de Δ peut se décomposer comme ci-dessous :

$$\begin{array}{ll} C^{2-p}_{y_1+1} & +\ 0 \\ C^{3-p}_{y_2+1} & +\ 0 \\ \dots\dots\dots & \dots \\ C^{o}_{y_{p-1}+1} & +\ 0 \\ (C^{1}_{y_p+1} - C^{o}_{y_p+1}) & +\ 1. \end{array}$$

Δ est donc la somme de deux déterminants, dont le second (comme on le voit, en le développant suivant sa dernière colonne) est précisément égal à Δ_o. Quant au premier, $\Delta - \Delta_o$, qui ne diffère de Δ que par l'addition de $- C^{o}_{y_p+1}$ $(= -1)$ à son élément du coin sud-est, on distinguera, pour le calculer, entre deux sortes de termes de la suite Y' : les h premiers, qui sont non-nuls $(0 \leqslant h \leqslant p-1)$, et les k derniers qui sont nuls $(0 < k = p - h)$. On opèrera ensuite sur les k dernières colonnes la transformation, sans influence sur la valeur de $\Delta - \Delta_o$, consistant à remplacer chacune d'elles par la somme alternée de la colonne elle-même et de toutes celles qui la suivent dans le déterminant $\Delta - \Delta_o$; ceci a pour effet de remplacer $C^{i-j+1}_{y_i+1}$, si $i < p$, par la somme alternée

$$C^{i-j+1}_{y_i+1} - C^{i-j}_{y_i+1} + \dots + (-1)^{p-j}\, C^{i-p+1}_{y_i+1} \tag{39}$$

et si $i = p$, par la somme alternée

$$C^{p-j+1}_{y_p+1} - C^{p-j}_{y_p+1} + \dots + (-1)^{p-j+1}\, C^{o}_{y_p+1}. \tag{40}$$

Il est aisé de s'assurer, par exemple en multipliant l'une par l'autre les fonctions génératrices $(1+t)^{y_i+1}$ et $(1+t)^{-1}$, que les expressions (39) et (40) sont respectivement égales à $C^{i-j+1}_{y_i}$ et $C^{p-j+1}_{y_p}$. Quant aux h premières colonnes de $\Delta - \Delta_o$, qui correspondent aux composantes non-nulles de Y', on les traitera, toujours sans changer la valeur de $\Delta - \Delta_o$, en diminuant d'une unité tous les termes des différences $y_i - y'_j$ qui y apparaissent. On a finalement diminué d'une unité tous les termes de Y, ce qui fait passer à Y_{oo}, et tous les termes non nuls de Y', ce qui fait passer à Y'_{oo} ; $\Delta - \Delta_o$ est donc bien égal à Δ_{oo}.

2.3.8. Extension au cas où Y ne majore pas Y'.

La démonstration qui précède établit finalement que le déterminant Δ calculé à partir de deux suites de Young Y et Y' a pour valeur le nombre $w(Y, Y')$ de suites de Young Z intermédiaires entre Y' et Y, du moins dans tous les cas où Y majore Y', c'est-à-dire où au moins une telle suite Z existe.

Il est assez aisé de s'assurer que le résultat s'étend au cas où, Y et Y' étant toujours des suites de Young, Y ne majore plus Y'. La richesse de Y par rapport à Y' est dans ce cas nulle par définition : $w(Y, Y') = 0$. Il reste donc à s'assurer que Δ est alors nul également.

Or l'hypothèse que Y ne domine pas Y' se traduit par l'existence d'au moins un indice h $(1 \leqslant h \leqslant p)$ tel que $y_h < y'_h$. Considérons alors un couple d'indices (i, j) telle que $i \geqslant h$ et $j \leqslant h$: puisque Y et Y' sont des suites non-croissantes on a $y_i \leqslant y_h$ et $y'_j \geqslant y'_h$, d'où

$$y_i - y'_j + 1 \leqslant y_h - y'_h + 1 \leqslant 0$$

et en même temps $i - j + 1 \geqslant 1$, donc en fin de compte $C^{i-j+1}_{y_i - y'_j + 1} = 0$. Les éléments nuls en question, au nombre de $(p - h + 1) \times h$ sont disposés comme l'indique la figure 10. Mais on ne peut dans ces conditions trouver p éléments, sans qu'il y en ait deux dans une même ligne ou colonne, et dont aucun ne soit un des zéros indiqués : car au plus $h - 1$ tels éléments peuvent exister dans l'ensemble des $h - 1$ premières lignes, et au plus $p - h$ dans l'ensemble des $p - h$ dernières colonnes. De ce fait chacun des $p!$ termes du développement de Δ a un facteur nul, d'où $\Delta = 0$.

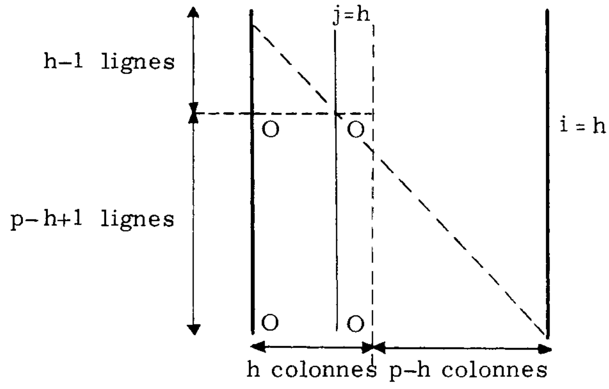


Fig. 10.

Remarque : le raisonnement ci-dessus relatif au développement de Δ, revient à utiliser un théorème bien connu de Dénes König sur les correspondances entre deux ensembles finis ; voir par exemple [9].

2.4. PROPRIETES ADDITIVES DES RICHESSES -

2.4.1. Diminution du niveau relatif.

2.4.1.1. Etant donné un sommet Y quelconque de **T**, il va être commode d'adopter les conventions de langage ci-après : nous appellerons simplexe conséquent (resp. simplexe antécédent) de Y l'ensemble S^* (resp. S_*) des sommets de **T** compris entre Y et le supremum Y^* de ses conséquents (resp. l'infimum Y_* de ses antécédents). S^* et S_* sont bien, comme il est facile de s'en rendre compte, des sous-treillis de **T** isomorphes à des treillis simpliciaux (définis respectivement à partir de l'ensemble des conséquents ou des antécédents de Y).

Nous allons établir une propriété des sommes *alternées* des nombres que l'on obtient en partant de $w(Y, Y')$ et en remplaçant soit Y par les sommets de son simplexe antécédent, soit Y' par les sommets de son simplexe conséquent : la propriété s'exprimera par

$$\sum_{Z \in S_*(Y)} (-1)^{|Y-Z|} w(Z, Y') = \sum_{Z' \in S^*(Y')} (-1)^{|Z'-Y'|} w(Y, Z') = 1 \quad (41)$$

et sera, dans une certaine mesure, l'analogue de la propriété qu'exprime la formule (18) du §2.1.3.

2.4.1.2. Utilisons le déterminant Δ d'ordre n, introduit précédemment, qui a pour valeur $w(Y, Y')$, et appelons Δ_i (resp. Δ^j) le déterminant qui s'en déduit en diminuant y_i (resp. en augmentant y'_j) d'une unité. Δ_i (resp. Δ^j) ne diffère de Δ que par sa i-ième ligne (resp. j-ième colonne) ; on peut grâce à cela calculer la différence $\Delta - \Delta_i$ directement comme un déterminant : celui-ci aura pour élément général de sa i-ième ligne non plus $C_{y_i-y'_j+1}^{i-j+1}$ comme Δ, mais la différence $C_{y_i-y'_j+1}^{i-j+1} - C_{y_i-y'_j}^{i-j+1} = C_{y_i-y'_j}^{i-j}$. Ce même nombre sera l'élément général de la j-ième colonne d'un déterminant égal à $\Delta - \Delta^j$, dont les autres colonnes reproduisent celles de Δ.

On voit ainsi que le fait de baisser d'une unité, dans le déterminant Δ, *les deux indices* (du haut et du bas) de chacun des nombres binomiaux de la i-ième ligne (resp. j-ième colonne) fait passer de Δ à $\Delta - \Delta_i$ (resp. $\Delta - \Delta^j$). Une fois l'opération faite pour une ligne i, on peut la renouveler sur une ligne $k (k \neq i)$, ce qui fera passer de $\Delta - \Delta_i$ à $(\Delta - \Delta_i) - (\Delta_k - \Delta_{ik}) = \Delta - \Delta_i - \Delta_k + \Delta_{ik}$, Δ_{ik} désignant bien entendu le déterminant qui se déduit de Δ lorsqu'on remplace Y par $Y - 1_i - 1_k$ (notation du module libre introduit au § 1.1.). On peut répéter n fois l'opération, ce qui donnera en fin de compte un déterminant D égal à

$$\Delta - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \Delta_i + \sum_{1 \leqslant i < k \leqslant n} \Delta_{ik} - \ldots + (-1)^n \Delta_{12\ldots n} \; ; \tag{42}$$

Quant au terme général de D, ce sera $C^{i-j}_{y_i - y'_j}$ quels que soient i et j. Cela permet de voir que ce même déterminant D s'obtiendrait aussi bien par le calcul de

$$\Delta - \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \Delta^j + \sum_{1 \leqslant j < l \leqslant n} \Delta^{jl} - \ldots + (-1)^n \Delta^{12\ldots n}. \tag{43}$$

Quant à la valeur de ce déterminant D, il est aisé de constater qu'elle est égale à 1 : en effet tous ses éléments diagonaux sont égaux à 1, et au nord-est de la diagonale tous les éléments sont nuls puisque l'on y a $i - j < 0$ et $y_i - y'_j \geqslant 0$, ce qui suffit à annuler $C^{i-j}_{y_i - y'_j}$.

Il est donc établi que les expressions (42) et (43) sont toutes deux égales à 1.

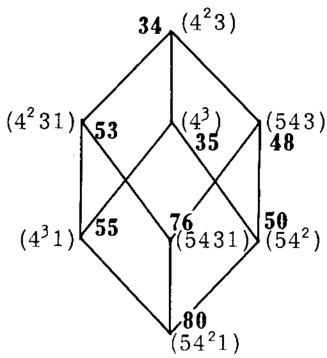
Ce résultat ne coïncide avec la proposition (41) annoncée que si tous les $Y - 1_i$ et tous les $Y' + 1_j$ appartiennent à **T**, ce qui n'est pas nécessairement le cas pour un Y et un Y' donnés.

2.4.1.3. Pour lever la restriction, raisonnons sur les $Y - 1_i$ et supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que $y_n > 0$. Alors dire que $Y - 1_i$ n'est pas dans **T** équivaut à dire que $y_i = y_{i+1}$. S'il en est ainsi il est aisé de voir que $\Delta_i = \Delta_{i,i+1}$. En effet, si on les définit par leurs éléments, ces deux déterminants ne diffèrent que par leur ligne $i + 1$, qui a comme élément général $C^{i-j+2}_{y_i - y'_j + 1}$ pour Δ_i, et $C^{i-j+2}_{y_i - y'_j}$ pour $\Delta_{i,i+1}$. Mais dans ce dernier, la ligne i a pour élément général $C^{i-j+1}_{y_i - y'_j}$ qui, si on l'ajoute à l'élément général de $\Delta_{i,i+1}$, donne précisément l'élément général de Δ_i. On établit bien ainsi que si $Y - 1_i \notin \mathbf{T}$, alors $\Delta_{i,i+1} = \Delta_i$; d'où bien entendu toutes les égalités du type $\Delta_{i,i+1,k\ldots} = \Delta_{i,k\ldots}$. Il en résulte finalement, par réduction de proche en proche, que l'expression (42) est égale au premier membre de (41).

La méthode est analogue pour réduire l'expression (43) au deuxième membre (membre intermédiaire) de (41) : on établit que, si $Y' + 1_j \notin \mathbf{T}$, alors on a $\Delta^{j-1,j} = \Delta^j$ et toutes les égalités du type $\Delta^{j-1,j,l\dots} = \Delta^{j,l\dots}$. Finalement la propriété (41) est ainsi complètement établie.

La vérification est triviale dans le cas particulier où $Y = Y'$, puisque $S_*(Y)$ et $S^*(Y)$ se réduisent alors à Y, ce qui réduit chacune des deux sommes de (41) à un seul terme, égal à $w(Y, Y) = 1$.

Par contre elle n'est nullement triviale dans le cas où l'on prend $Y' = 0$: vérifiable aisément sur la figure générale 12, elle est illustrée en outre sur le fragment de **T** représenté par la figure 11 ci-dessous :



− 34
+136
−181
+ 80
1

Fig. 11.

2.4.2. Augmentation du niveau relatif.

La propriété ci-après est rendue plus facile à énoncer par l'introduction du mot "enrichissement", par lequel nous désignerons comme il est naturel, la quantité dont augmente la richesse $w(Y, Y')$ si l'on remplace soit Y par un conséquent de Y (enrichissement par le haut), soit Y' par un antécédent de Y' (enrichissement par le bas).

Cela dit nous établirons que *la somme des enrichissements par le haut moins la somme des enrichissements par le bas est égale à la richesse initiale* ; ou encore, que

$$\sum_{\substack{Z \text{ conséquent} \\ \text{de } Y}} [w(Z, Y') - w(Y, Y')] - \sum_{\substack{Z' \text{ antécédent} \\ \text{de } Y'}} [w(Y, Z') - w(Y, Y')] = w(Y, Y') \qquad (44)$$

propriété analogue à celle exprimée par la formule (23) du §2.1.4. Nous utiliserons à nouveau pour cela l'expression de $w(Y, Y')$ à l'aide du déterminant Δ introduit précédemment, que nous prendrons d'ordre n assez élevé pour que $y_n = y'_n = 0$.

Appelons $\Delta_{(i)}$ et $\Delta^{(j)}$ les déterminants respectifs calculés non plus à partir de Y et Y', mais le premier à partir de $Y + 1_i$ et Y', le second à partir de Y et $Y' - 1_j$ (les notations sont toujours celles du module libre du §1.1.). $\Delta_{(i)}$ ne diffère de Δ que par sa i-ième ligne, dont le j-ième terme est $C^{i-j+1}_{y_i-y'_j+2}$ au lieu de $C^{i-j+1}_{y_i-y'_j+1}$. $\Delta_{(i)} - \Delta$ peut donc se calculer par substitution de la différence de ces deux termes (qui est égale à $C^{i-j}_{y_i-y'_j+1}$) au terme correspondant de Δ, et cela dans toute la i-ième ligne. De même $\Delta^{(j)} - \Delta$ peut se calculer en faisant *la même* substitution, mais dans toute la j-ième colonne ; d'où finalement, par addition des développements, comme il a été fait au §2.4.1.

$$\sum_{i=1}^{n} (\Delta_{(i)} - \Delta) = \sum_{j=1}^{n} (\Delta^{(j)} - \Delta) \tag{45}$$

Notons maintenant que $Y + 1_i$ n'appartient pas nécessairement à **T** : pour qu'il n'y appartienne pas, puisque $Y \in \mathbf{T}$, il faut et il suffit que $y_i = y_{i-1}$. Mais alors la ligne i de $\Delta_{(i)} - \Delta$ est, comme on le constate immédiatement, identique à la ligne $i - 1$ de Δ (et de $\Delta_{(i)} - \Delta$), d'où $\Delta_{(i)} - \Delta = 0$. De ce fait il revient au même, au premier membre de (45), de sommer pour les n valeurs de i ou seulement pour celles qui font que $Y + 1_i \in \mathbf{T}$.

La situation est légèrement différente au second membre de (45), car il n'est plus tout à fait équivalent de dire que $Y' - 1_j$ n'appartient pas à **T** ou de dire que $y'_j = y'_{j+1}$, affirmation qui n'aurait pas de sens du point de vue du calcul des déterminants si l'on considérait le cas $j = n$. D'ailleurs $Y' - 1_n$ n'est précisément pas dans **T** puisque l'on a supposé $y'_n = 0$. Mais l'équivalence subsiste si l'on se borne à considérer les valeurs $1, 2, \ldots, n-1$ de j. Le second membre de (45) peut donc s'écrire

$$\Delta^{(n)} - \Delta + \sum_{Y'-1_j \in \mathbf{T}} (\Delta^{(j)} - \Delta) \tag{46}$$

Quant à $\Delta^{(n)} - \Delta$, dont les $n - 1$ premières colonnes reproduisent celles de Δ, il a pour n-ième colonne $C^{i-n}_{y_i-y'_n+1} = C^{i-n}_{y_i+1}$; cela donne, puisque $y_i \geqslant 0$, des termes tous nuls sauf le dernier $(i = n)$ égal à $C^{0}_{y_n+1} = C^{0}_{1} = 1$, d'où $\Delta^{(n)} - \Delta = \Delta$. Finalement (45) s'exprime par

$$\sum_{Y+1_i\in T}(\Delta_{(i)}-\Delta)=\Delta+\sum_{Y'-1_j\in T}(\Delta^{(j)}-\Delta)$$

ce qui établit la proposition annoncée.

Un énoncé, évidemment équivalent, de cette proposition s'obtient en introduisant les *degrés* de Y et Y' (au sens du § 2.1.2.) :

$$\sum_{\substack{Z \text{ conséquent} \\ \text{de } Y}} w(Z, Y') - \sum_{\substack{Z' \text{ antécédent} \\ \text{de } Y'}} w(Y, Z') = w(Y, Y')\,[d(Y) - d(Y')+2]$$

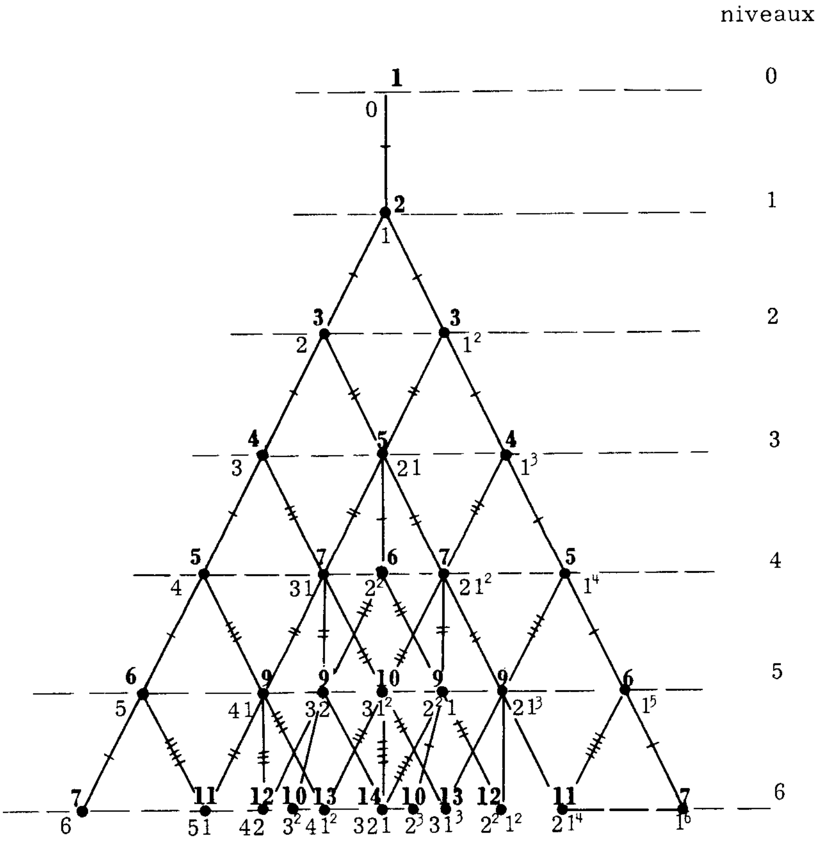


Fig. 12.

A noter, comme toujours, deux cas particuliers : celui où $Y = Y'$, pour lequel $w(Y, Y) = 1$ (et qui permet la vérification $2(d+1) - 2.d = 1.2$), et celui, plus intéressant, où $Y' = 0$: la figure 12 donne, pour chaque sommet Y de **T**, le $w(Y)$ correspondant, chaque arête de **T** (sauf quelques-unes en bas pour la clarté du dessin) y est barrée d'un nombre de traits égal à l'*enrichissement* correspondant, et l'on vérifie aisément qu'en chaque sommet se trouve inscrit le nombre total de traits barrant les arêtes qui en émanent.

2.5. CHAINES DANS LES SOUS-TREILLIS COMPLETS DE T -

2.5.1. Définition récurrente de $w_r(Y,Y')$.

Avec Y et Y' donnés de manière que Y majore Y', ce que nous noterons $Y > Y'$ (la relation d'ordre, bien que notée >, est réflexive), on a précédemment compté les Z tels que $Y > Z > Y'$. Mais il est assez naturel de compter également les "r-chaînes" du sous-treillis complet défini par Y et Y', c'est-à-dire les suites $Z^1 \ldots Z^r$ telles que

$$Y > Z^1 > Z^2 \quad \ldots > Z^r > Y'$$

Nous appellerons $w_r(Y, Y')$ le nombre de r-chaînes distinctes. Bien entendu $w_1(Y, Y') = w(Y, Y')$, et l'on peut ajouter la convention $w_0(Y, Y') = 1$; cette dernière convention ne s'étendrait pas au cas où Y ne majorerait pas Y', cas dans lequel tous les w_r seraient à considérer comme nuls.

Une conséquence immédiate de la définition de $w_r(Y, Y')$ est la double équation fonctionnelle

$$w_r(Y, Y') = \sum_{Y>Z>Y'} w_{r-1}(Z, Y') = \sum_{Y>Z'>Y'} w_{r-1}(Y, Z'), \tag{47}$$

en interprétant le Z de la première de ces sommes comme ayant la signification de Z^1, et de Z' de la seconde comme ayant la signification de Z^r ; on peut d'ailleurs, si l'on veut, sommer en faisant varier Z (ou de même Z') sur la totalité de **T**, puisqu'en dehors des Z (ou Z') compris entre Y et Y' au sens de la relation > on n'obtient que des termes nuls.

2.5.2. Diminution du niveau relatif.

Une autre équation fonctionnelle, plus maniable que (47), peut s'établir à l'aide de la méthode dite parfois "d'inclusion et exclusion". Pour l'obtenir on considère plus particulièrement, parmi les r-chaînes $Z^1 \dots Z^r$ comprises entre Y et Y', celles dont le Z^1 (et par conséquent toute la r-chaîne) est majoré par un $Z_{(i)}$ appartenant au simplexe antécédent de Y (au sens du § 2.4.1.).

Dans ces conditions il suffit d'exprimer de deux manières le nombre de r-chaînes $Z^1 \dots Z^r$ pour lesquelles $Z^1 = Y$. D'une part ce nombre est évidemment $w_{r-1}(Y, Y')$. D'autre part il peut se calculer en retranchant du nombre total $w_r(Y, Y')$ de r-chaînes, la somme des nombres de r-chaînes $w_r(Z_{(i)}, Y')$ majorées par un antécédent (immédiat) $Z_{(i)}$ de Y ; mais il faut alors rajouter la somme des nombres de r-chaînes majorées par deux antécédents $Z_{(i)}$ et $Z_{(k)}$ de Y, c'est-à-dire $w_r(Z_{(i)} \wedge Z_{(k)}, Y')$; et ainsi de suite, en ajoutant et retranchant alternativement jusqu'à épuisement du simplexe antécédent S_* de Y. On obtient ainsi finalement :

$$w_{r-1}(Y, Y') = \sum_{Z \in S_*(Y)} (-1)^{|Y-Z|} \, w_r(Z, Y') \tag{48}$$

La même méthode, appliquée au simplexe conséquent S^* de Y', permet d'établir que

$$w_{r-1}(Y, Y') = \sum_{Z' \in S^*(Y')} (-1)^{|Z'-Y'|} \, w_r(Y, Z') \tag{49}$$

Les deux relations (48) et (49) généralisent la relation (41) établie au § 2.4.1., qui représente le cas particulier où $r = 1$.

Remarque : la méthode ci-dessus aurait pu être utilisée, de préférence à celle du § 2.4.1, pour établir directement la relation (41) à partir de la définition de la richesse relative $w(Y, Y')$. En fait, au moment d'établir (41), on disposait déjà d'un mode de calcul de $w(Y, Y')$, sous forme de déterminant, lequel présentait l'avantage de pouvoir servir aussi bien à l'établissement de la formule (41) relative à la diminution du niveau relatif, qu'à celui de la formule (44), relative à son augmentation.

Ici, par contre, nous nous servirons précisément de (48) ou (49) pour établir que $w_r(Y, Y')$ peut s'exprimer sous forme d'un certain déterminant, et cela faute de disposer d'un algorithme progressif aussi simple que celui du § 2.3.4 pour justifier une telle expression. Ce n'est qu'ensuite que nous nous servirons du déterminant en question pour établir la relation qui concerne l'augmentation du niveau relatif.

2.5.3. Expression sous forme de déterminant.

L'élément général du déterminant qui permettait le calcul de $w(Y, Y')$ était $C^{i-j+1}_{y_i-y_j+1}$. Nous allons établir que $w_r(Y, Y')$ n'est autre que la valeur du déterminant d'élément général $C^{i-j+r}_{y_i-y_j+r}$, déterminant que l'on peut désigner par $\Delta(Y, Y', r)$.

La démonstration se fera par récurrence sur r ; on vient de faire remarquer, puisque $w(Y, Y') = w_1(Y, Y')$, que la proposition est déjà établie pour $r = 1$.

Nous établirons ensuite que

$$\Delta(Y, Y', r-1) = \sum_{Z \in S_*(Y)} (-1)^{|Y-Z|} \Delta(Z, Y', r) \tag{50}$$

En rapprochant (48) et (50), il apparaîtra que $w_r(Y, Y')$ et $\Delta(Y, Y', r)$ satisfont à une même équation fonctionnelle. S'il est établi que $w_{r-1}(Y, Y') = \Delta(Y, Y', r-1)$, la formule (50) permettra le calcul de $\Delta(Y, Y', r)$ à l'aide de déterminants $\Delta(Z, Y', r)$ pour lesquels on aura toujours $|Z| < |Y|$. A la récurrence par rapport à r se superpose ainsi une récurrence par rapport à $|Y|$; mais il est aisé de s'assurer que de toute façon on a $w_r(0, Y') = \Delta(0, Y', r)$ (les deux membres sont égaux à 1 pour $Y' = 0$ et sont nuls pour tout autre Y' de $\mathbf{T}$). Finalement il ne reste, pour justifier l'emploi général du déterminant $\Delta(Y, Y', r)$, qu'à établir (50).

Or le raisonnement nécessaire pour cela reproduit pratiquement mot pour mot celui qui a été fait au § 2.4.1., à cela près qu'il faut maintenant entendre par Δ le déterminant $\Delta(Y, Y', r)$ et de même par Δ_i le déterminant $\Delta(Y - 1_i, Y', r)$. La différence $\Delta - \Delta_i$ sera cette fois un déterminant qui dans sa i-ième ligne aura pour j-ième élément $C^{i-j+r-1}_{y_i-y_j+r-1}$ et dont les $n-1$ autres lignes seront les mêmes que celles de Δ. Si l'on répète l'opération pour toutes les lignes, le déterminant D obtenu, qui cette fois n'est autre que $\Delta(Y, Y', r-1)$, a exactement l'expression (42). Quant au raisonnement par réduction de proche en proche, qui a permis d'établir que pour calculer l'expression (42) il suffisait de se borner aux "bons" indices (c'est-à-dire à ceux qui ne font pas sortir de $\mathbf{T}$), il demeure encore vrai à condition d'augmenter de $r-1$ le haut et le bas de chacun des nombres binomiaux qui y interviennent.

Le nombre de r-chaînes comprises entre Y et Y' est bien, finalement, exprimé par un déterminant d'ordre n suffisamment grand et d'élément général $C^{i-j+r}_{y_i-y_j+r}$.

2.5.4. Augmentation du niveau relatif.

Il s'agit cette fois d'établir une relation qui sera une extension de (44), avec cette nouveauté qu'au second membre apparaîtra non plus $w_r(Y, Y')$ mais $rw_r(Y, Y')$:

$$\sum_{\substack{Z \text{ conséquent} \\ \text{de } Y}} [w_r(Z, Y') - w_r(Y, Y')] - \sum_{\substack{Z' \text{ antécédent} \\ \text{de } Y'}} [w_r(Y, Z') - w_r(Y, Y')]$$

$$= rw_r(Y, Y') \qquad (51)$$

A nouveau la démonstration sera calquée sur celle relative au cas $r = 1$, faite au § 2.4.2, aux mêmes changements près que précédemment, et cela jusque et y compris la mise en évidence de l'expression (46). La seule nouveauté concerne $\Delta^{(n)} - \Delta$, dont la n-ième colonne a pour élément général $C_{y_i+r}^{i-n+r-1}$ et pour dernier élément $C_r^{r-1} = r$, les $n - 1$ premières colonnes étant les mêmes que celles de Δ. Or Δ a dans sa dernière ligne des éléments égaux à $C_{-y_j'+r}^{n-j+r}$ ou encore à $\binom{-y_j'+r}{-(n-j)-y_j'}$, donc égaux à 0 pour $j = 1, 2, \ldots, n-1$ (puisque $-(n-j) - y_j' \leqslant -(n-j) < 0$) et à 1 pour $j = n$. Finalement, si on compare leurs développements par rapport à cette dernière ligne, on voit que Δ et $\Delta^{(n)} - \Delta$ ne diffèrent que par le facteur sud-est, qui est égal à 1 pour l'un et à r pour l'autre ; donc $\Delta^{(n)} - \Delta = r\Delta$, ce qui achève de démontrer la formule (51).

2.6. APPLICATIONS DES RESULTATS PRECEDENTS -

2.6.1. Le problème du scrutin de Bertrand.

Parmi les propriétés, classiques ou nouvelles, établies précédemment, la plupart peuvent être formulées en termes évoquant le célèbre "problème du scrutin" de Joseph Bertrand [2] : sachant que dans un scrutin deux candidats A et B ont recueilli respectivement α et β voix, avec quelle probabilité le candidat A se trouvera-t-il plus favorisé que le candidat B à chaque instant du dépouillement?

Le résultat le plus simple et le plus généralement connu, dû à Désiré André [1], est relatif au cas où la condition "plus favorisé" est interprétée au sens de l'inégalité stricte, y compris dans les données $(\alpha > \beta)$: la probabilité cherchée est alors égale à $(\alpha - \beta)/(\alpha + \beta)$.

La condition imposée exprime qu'à chacun des $a + b$ instants du dépouillement, instant final compris, on doit avoir $x > y \geqslant 0$, en désignant par x et y le nombre de voix comptées à cet instant pour les deux candidats ; ou encore, que la suite $(x-1, y)$ soit une *suite de Young* réduite à deux termes non nuls.

Le nombre de dépouillements satisfaisant à cette condition n'est autre que la *puissance* f (au sens du § 2.1.4) de la suite finale $(\alpha - 1, \beta)$; son calcul est immédiat, par exemple par la formule (35) du § 2.2.1, avec $n = 2$, $y_1 = \alpha - 1$ et $y_2 = \beta$. On trouve ainsi

$$f(\alpha - 1, \beta) = \frac{(\alpha + \beta - 1)!\ (\alpha - \beta)}{\alpha!\ \beta!}$$

ce qui, divisé par le nombre total $\frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\ \beta!}$ des dépouillements possibles, donne bien l'expression de Désiré André.

Mais les propriétés du treillis de Young fournissent une autre interprétation du même problème. Il résulte en effet de la figure 13 ci-contre que chacun des $\binom{\alpha+\beta}{\alpha\ \beta}$ dépouillements possibles peut être représenté d'une manière et d'une seule par un chemin ON formé de α segments ouest-est et de β segments sud-nord. Ceux de ces chemins qui satisfont à la condition imposée sont caractérisés par le fait qu'ils sont entièrement situés à l'est (au sens large) de l'escalier ON figuré en pointillé. Il suffit alors de regarder la figure selon les axes N_0X et N_0Y pour voir que ces chemins sont les profils (au sens du § 2.2.2) correspondant à toutes les suites de Young majorées par la suite

$$(\alpha - 2,\ \alpha - 3, \ldots,\ \alpha - \beta - 1)\ ; \qquad (52)$$

leur nombre est donc égal à ce que nous avons appelé la *richesse* de cette dernière suite (§ 2.3.2).

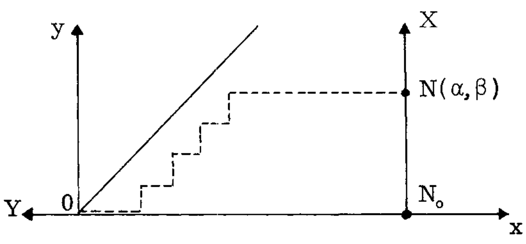


Fig. 13.

2.6.2. Problèmes du scrutin plus généraux.

2.6.2.1. *Puissance.*

La notion générale de puissance d'une suite de Young par rapport à une autre peut recevoir, en termes de scrutin, la signification suivante. S'il y a n candidats numérotés de 1 à n, et que l'on sache qu'ils ont recueilli des nombres de voix respectifs définis par une suite de Young $Y = (y_1\ y_2 \dots\ y_n)$; si l'on sait en outre qu'à un certain instant du dépouillement les nombres respectifs de voix *déjà comptées* sont également définis par une suite de Young $Y' = (y'_1\ y'_2 \dots y'_n)$; quelle est la probabilité pour que, *pendant tout le reste du dépouillement*, les nombres z_i de voix comptabilisés satisfassent toujours à

$$z_1 \geqslant z_2 \geqslant \dots \geqslant z_n \ ? \tag{53}$$

La réponse à cette question est fournie par la fraction qui a pour numérateur la puissance relative f(Y, Y') (cf. § 2.1.3) et pour dénominateur le nombre multinomial

$$\begin{pmatrix} y_1 - y'_1 + y_2 - y'_2 + \dots + y_n - y'_n \\ y_1 - y'_1 \quad y_2 - y'_2 \quad \dots \quad y_n - y'_n \end{pmatrix}$$

2.6.2.2. *Richesse.*

La richesse relative w(Y, Y'), elle, est susceptible de deux interprétations. La première se rattache au problème qui vient d'être défini : w(Y, Y') est alors le nombre de situations intermédiaires Z a priori concevables entre l'instant initial où l'on observe Y' et l'instant final où l'on observe Y, et qui satisfont aux inégalités (53). Quant à l'autre interprétation de w(Y, Y'), elle peut se rattacher à un problème de scrutin qui se pose pour *deux* candidats A et B, ayant recueilli respectivement α et β voix. Il suffit pour cela de définir une relation d'ordre partiel sur l'ensemble $\mathcal{D}$ des $\binom{\alpha+\beta}{\alpha \quad \beta}$ dépouillements possibles : pour D et D' appartenant à $\mathcal{D}$, on dira que D est *plus favorable à B* que D' si, quel que soit h $(0 \leqslant h \leqslant \alpha+\beta)$, les nombres v_h et v'_h de voix enregistrées en faveur de B, après comptage de h suffrages dans les dépouillements respectifs D et D', satisfont à $v_h \geqslant v'_h$.

Dans ces conditions D et D' peuvent être considérés comme définissant les profils de deux suites de Young respectives Y et Y' (qui appartiennent, si l'on utilise une dénomination introduite au § 2.3.7, au *type* $[\beta, \alpha]$) ; w(Y, Y') désigne alors le nombre de dépouillements qui, pour le candidat B, sont à la fois plus favorables que D' et moins favorables que D.

L'intérêt de cette interprétation consiste en ce que, dans certains cas, les "dépouillements de référence" D et D' sont définis de manière à permettre une caractérisation aisée de Y et Y'. Ainsi par exemple dans le problème de Bertrand (§2.6.1) on a :

D (pointillé de la figure 13) : 1/ deux voix pour A.

2/ alternance BABA... jusqu'à épuisement des voix de B.

3/ (éventuellement) toutes les voix restantes de A.

D' (chemin ON_0N) : 1/ toutes les voix de A.

2/ toutes les voix de B.

On a alors Y par l'expression (52) et $Y' = 0$.

2.6.3. Applications statistiques.

L'étude des couples d'échantillons tirés d'une même loi de probabilité continue non spécifiée, et la théorie des tests non-paramétriques qui en résulte, nécessitent fréquemment des calculs de nombres de chemins compris, au sens du §2.6.2.2. ci-dessus, entre deux chemins donnés D et D'.

Tel est, notamment, le cas pour le test de Kolmogorov-Smirnov. Pour deux échantillons de même effectif n, le problème peut se ramener pour l'essentiel au problème de dépouillement suivant : parmi les $\binom{2n}{n\ \ n}$ chemins allant du point O (0, 0) au point N (n, n) dans le plan des (x, y), combien y en a-t-il qui sont compris tout entiers dans la partie du carré de diagonale ON qui est définie par $|y - x| \leqslant k$?

La méthode précédemment exposée indique que la réponse est donnée par $w(Y, Y')$, avec

$Y = (n, n, \dots, n, n-1, \dots k)$ [k premiers termes égaux à n]

$Y' = (n-k, n-k-1, \dots 1, 0, \dots 0)$ [k derniers termes nuls].

Rien n'empêche d'exprimer $w(Y, Y')$ par le déterminant (d'ordre n) défini au §2.3.7. ; mais étant donné la nature particulière des suites Y et Y' cette expression serait d'un intérêt limité parce que trop compliquée. On sait qu'en réalité dans ce cas $w(Y, Y')$ peut s'exprimer, avec nos notations, par

$$\sum_{z \in Z} (-1)^z \, C_{2n}^{n+z(k+1)} \; ; \tag{54}$$

cette expression peut s'établir par la méthode dite "des images de Lord Kelvin", comme l'a fait Drion [4].

L'expression (54) est beaucoup plus simple que le déterminant qui donne $w(Y, Y')$; en l'égalant à ce déterminant on obtient tout au plus une curiosité de calcul (qui cependant serait sans doute difficile à établir autrement).

Remarque : Si les résultats démontrés au § 2.3 apportent au problème du comptage des chemins compris entre D et D' donnés une solution générale, cette solution ne fournit pas pour autant l'expression la plus simple lorsque D et D' sont eux-mêmes définis d'une manière simple (comme c'est le cas dans un grand nombre de problèmes particuliers (cf. par ex. [4]). Toutefois les essais numériques permis par l'algorithme du § 2.3.4 sont très rapides, ce qui fait de cet algorithme un instrument de recherche pouvant servir à accélérer la formulation (ou le rejet !) de conjectures nouvelles. Il convient de noter que l'idée de cet algorithme, du moins dans le cas $Y' = 0$, paraît avoir été "frôlée" par P. Dufresne [5].

3. UNE VOIE D'EXTENSION TRIDIMENSIONNELLE

3.1. GENERALITES SUR LES EXTENSIONS DE **T** -

3.1.1. Solides normaux.

Etant donné dans le treillis de Young **T** une r-chaîne telle que

$$Z^1 > \dots > Z^r$$

on peut toujours, du moins théoriquement, représenter les profils correspondants sur une même figure à deux coordonnées x et y, comme on l'a fait sur la figure 14 avec

$$Z^1 = (54^2 2) \quad Z^2 = (4^2 31) \quad Z^3 = (42^2) \quad Z^4 = (2^2 1) \ ;$$

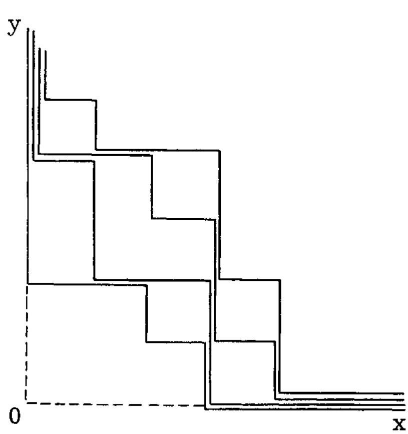


Fig. 14.

on peut même s'arranger, si r n'est pas trop grand, pour que le dessin permette de discerner entre les profils sur les segments où ils doivent coïncider.

Une telle figure suggère de considérer ces profils comme des "courbes de niveau" relatives à une représentation spatiale, avec une troisième coordonnée z. La figure 15 représente la même chaîne que la figure 14, à l'aide de quatre niveaux superposés de cubes ; sa projection sur le plan des xy redonne la figure 14.

Il est clair que le même empilement de cubes est susceptible , si l'on permute des six manières possibles les rôles des coordonnées x, y, z, de six interprétations en termes de r-chaînes de sommets de **T**, interprétations en général toutes distinctes ; nous nous en tiendrons exclusivement, dans ce qui suit, à l'interprétation initiale.

Nous appellerons *solide normal* S tout ensemble fini de cubes de l'espace des xyz possédant les propriétés de la figure 15, qui peuvent se formuler de la manière suivante : tout cube étant désigné par un triplet (x, y, z) de $\mathbf{N}^3$, le fait que $(x, y, z) \in S$ et que l'on ait terme à terme $(x', y', z') \leqslant (x, y, z)$ entraîne que $(x', y', z') \in S$. Tout solide normal S peut évidemment être représenté par une r-chaîne de **T**, $Z^1 \ldots Z^z \ldots Z^r$ qu'il est commode de considérer comme prolongée indéfiniment par $Z^{r+1} = Z^{r+2} = \ldots = 0$; le x-ième terme de la z-ième suite de Young Z^z peut être défini par

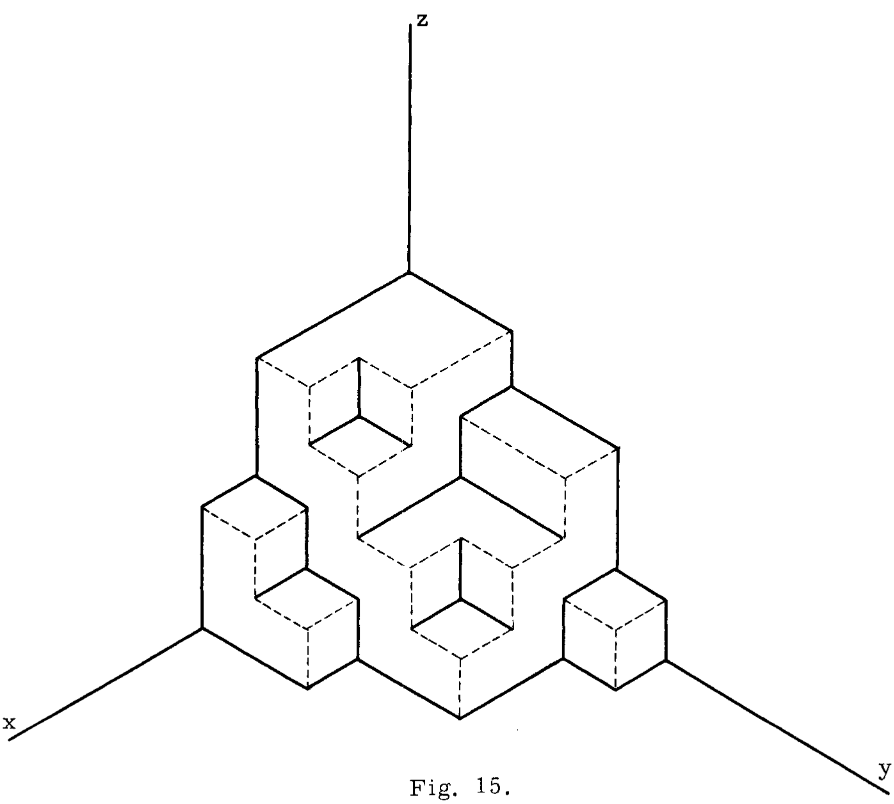


Fig. 15.

$$y_x^z = \max\{y \mid (x, y, z) \in S\}$$

le maximum devant être pris égal à 0 chaque fois que x et z sont tels qu'aucun (x, y, z) n'appartienne à S.

L'ensemble des solides normaux, ordonné par inclusion, est un treillis distributif $\mathbf{T}_3$ qui généralise à trois dimensions le treillis de Young (lequel aurait pu être appelé $\mathbf{T}_2$) ; l'élément minimal de $\mathbf{T}_3$ est le "solide vide" $0 = (0, 0, \ldots)$.

Les solides normaux ont été étudiés d'assez près par MacMahon, avec un symbolisme et des préoccupations sensiblement différents de ceux du présent travail, dans le second volume (sections IX et X) de son traité [10] : il s'est spécialement attaché au dénombrement des solides normaux répondant à des conditions imposées, relatives notamment au nombre total de cubes ("niveau" dans $\mathbf{T}_3$) et à l'existence de symétries.

3.1.2. Le treillis $\mathbf{T}_n$.

Rien n'empêche, à partir des chaînes descendantes illimitées de $\mathbf{T}_3$ qui n'ont qu'un nombre fini d'éléments distincts de 0, de définir un treillis $\mathbf{T}_4$; et ainsi de suite jusqu'à $\mathbf{T}_n$ quel que soit l'entier positif n. $\mathbf{T}_2$ (ou $\mathbf{T}$) résulte lui-même de ce procédé de construction en partant de $\mathbf{T}_1$ défini comme ensemble ordonné des entiers non-négatifs. On a d'ailleurs évidemment

$$\mathbf{T}_1 \subset \mathbf{T}_2 \subset \mathbf{T}_3 \subset \ldots \subset \mathbf{T}_n \subset \ldots$$

En ce qui concerne les différentes caractéristiques numériques, notamment la puissance relative ou absolue et la richesse relative ou absolue, les définitions introduites pour $\mathbf{T}_2$ se transposent aisément à ces treillis ; il en est de même du degré, défini comme nombre d'antécédents immédiats.

Mais dès le stade de $\mathbf{T}_3$ les propriétés des treillis $\mathbf{T}_n$, (comme l'illustrera toute la fin de ce chapitre), sont beaucoup plus cachées que celles de $\mathbf{T}_2$.

3.1.3. Richesse (absolue) des éléments de degré 1 dans $\mathbf{T}_3$.

Le fait de savoir, dans $\mathbf{T}$, calculer $w_r(Y, Y')$ permet d'énumérer les solides normaux de "hauteur" donnée, dont le "soubassement" et la "plateforme culminante" ont des formes données.

Prenons en particulier $Y = (q^p)$ et $Y' = 0$, et interprétons $w_r(Y, Y') = w_r(Y) = w_r(q^p)$. Toute r-chaîne $Z^1 \ldots Z^r$ comprise entre (q^p) et 0 sera représentée, d'une manière et d'une seule, par un empilement de couches de cubes dont aucune, en projection sur le plan des xy, ne déborde du rectangle de dimensions $p \times q$; (les projections des couches successives seront d'ailleurs incluses chacune dans la précédente, et il y aura en tout r couches dont éventuellement les dernières seront vides (soit au maximum r couches non vides).

$w_r(q^p)$ est donc finalement égal au nombre de solides normaux distincts inclus dans un parallélépipède de "dimensions" p. q. r ; celui-ci est lui-même le solide normal, de degré 1, "engendré" par le cube unique (p, q, r), et a comme tel, dans $\mathbf{T}_3$, une richesse absolue laquelle est précisément égale à $w_r(q^p)$.

Quant à $w_r(q^p)$, il résulte des propriétés de $w_r(Y, Y')$ qu'on peut l'exprimer par un déterminant Δ, qui a ici pour élément C_{q+r}^{i-j+r} dans la ligne i et la colonne j $(i, j = 1, 2 \ldots, p)$.

Il est intéressant de donner de Δ une expression qui soit, comme il se doit, symétrique en p, q et r.

Pour cela on peut par exemple, sans changer la valeur de Δ, remplacer chacune de ses lignes par la "somme binomiale" de cette ligne et de toutes les suivantes, c'est-à-dire remplacer C_{q+r}^{i-j+r} par

$$C_{p-i}^{o}\ C_{q+r}^{i-j+r} + C_{p-i}^{1}\ C_{q+r}^{i-j+r+1} + \ldots + C_{p-i}^{p-i}\ C_{q+r}^{p-j+r} \ ;$$

en vertu des propriétés élémentaires des nombres binomiaux, ceci est encore égal à $C_{p+q+r-i}^{p+r-j}$, qui peut s'écrire sous la forme

$$C_{p+q+r-i}^{p+r-j} = \frac{(p+q+r-i)\,!}{(p+r-j)\,!}\ \overline{q+j-i\,!}$$

Ainsi $(p+q+r-i)\,!$ est en facteur dans toute la ligne i, et le dénominateur $(p+r-j)\,!$ est présent dans toute la colonne j. Si l'on met tout cela en facteur pour $i = 1, 2, \ldots, p$ et pour $j = 1, 2, \ldots, p$, il ne reste dans le déterminant comme élément général, que $\overline{q-i+j\,!}$; or un tel déterminant, toujours d'ordre p, n'est autre que celui qui définit $\overline{Y\,!}$ pour $Y = (q^p)$, et qui, on l'a vu au § 2.2.5, s'exprime à l'aide des bifactorielles de p, q et p + q. Finalement on a ici

$$\Delta = \frac{(q+r)\,!\ (q+r+1)\,!\ \ldots\ (q+r+p-1)\,!}{r\,!\ (r+1)\,!\ \ldots\ldots\ (r+p-1)\,!} \times \frac{p\,!!\ q\,!!}{(p+q)\,!!}$$

ou encore, en multipliant haut et bas d'une part par $r\,!!$ et d'autre part par $(q+r)\,!!$,

$$\Delta = \frac{(p+q+r)\,!!\;\; p\,!!\;\; q\,!!\;\; r\,!!}{(p+q)\,!!\;\; (p+r)\,!!\;\; (q+r)\,!!} \tag{55}$$

Si r (par exemple) est égal à 1, ceci se réduit naturellement à $\dfrac{(p+q)\,!}{p\,!\;\;q\,!}$. Le cas le plus simple par ailleurs est celui où $p=q=r=2$, où l'on calcule facilement que $\Delta = 20$; l'énumération des vingt solides correspondants, plein et vide compris, se fait aisément dans ce cas.

La formule (55) ci-dessus peut aussi se déduire de certains des résultats mentionnés par Mac-Mahon [10].

3.2. PUISSANCE D'UNE CLASSE PARTICULIERE DE SOLIDES NORMAUX -

3.2.1. "Encoignures".

La puissance (absolue) d'un solide normal, considéré comme un point S du treillis $\mathbf{T}_3$, peut se concevoir comme le nombre de suites distinctes permettant d'aller de O à S en cheminant d'antécédent en conséquent dans $\mathbf{T}_3$; ou, si l'on veut, comme le nombre de manières de numéroter de 1 à n les n cubes qui composent S de telle sorte que les numéros dans chaque alignement parallèle à l'un des axes, lus dans le sens de cet axe, apparaissent dans l'ordre croissant.

Nous considèrerons dans ce qui suit une classe tout à fait particulière de solides normaux, que l'on pourrait nommer "encoignures" en raison de leur forme (représentée par la figure 16). Une "encoignure" est, si l'on veut, un solide normal défini par une chaîne $Z^1\, Z^2 \dots$ de sommets de $\mathbf{T}_2$ telle que $(21) > Z^1 > Z^2 > \dots$

Il est clair que l'on peut définir une "encoignure" par trois entiers non-négatifs $(a\,,\,b\,;c)$ dont les deux premiers représentent les hauteurs des "ailes" et le troisième celui du "pilier" : dans le cas de la figure 16 on a $(a\,,\,b\,;c) = (4\,,\,3\,;6)$.

Ni l'une ni l'autre ailes ne doivent être plus hautes que le pilier, mais aucune condition n'est imposée quant à la comparaison des hauteurs des ailes ; ce qui se traduit par *l'ordre partiel* $(a \leqslant c, b \leqslant c)$.

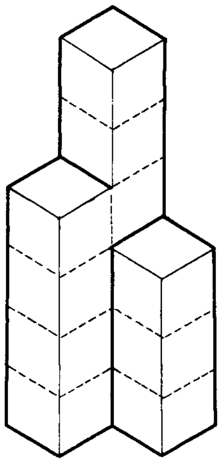


Fig. 16.

Si l'on considère le treillis $\mathbf{Z}^3$ défini par l'ordre partiel naturel, et dans $\mathbf{Z}^3$ la partie **E** formée des points (a, b, c) tels que $0 \leqslant a \leqslant c$ et $0 \leqslant b \leqslant c$, chaque point de **E** représente une encoignure ; **E** est un sous-treillis de $\mathbf{Z}^3$.

3.2.2. Puissance dans E.

Les puissances des éléments de **E** peuvent se calculer de proche en proche, à partir de la remarque triviale que tout élément a pour puissance la somme des puissances de ses antécédents, sauf l'élément $0 = (0, 0; 0)$ dont la puissance est 1.

$$f(E) = \sum_{X \text{ antéc. de } E} f(X) \; ; \; f(0) = 1 \qquad (56)$$

Conformément à la disposition usuelle de $\mathbf{Z}^3$, il est commode de se représenter comme *points-frontières latéraux* les points de **E** tels que $\min(a, b) = 0$ et comme *points-frontières inférieurs* les points de **E** tels que $\max(a, b) = c$.

La puissance d'un point E de **E** peut être regardée comme le nombre de chemins (composés de pas unitaires dans les directions (Ox, Oy, Oz)) par lesquels on peut joindre O à E *sans sortir de* **E**. Cette remarque entraîne que si par exemple $E = (0, b; c)$ (point-frontière latéral), un chemin OE sera tout entier dans le plan $x = 0$. La puissance de E n'est autre, alors, que celle de la suite de Young à deux termes (c, b) ; d'où l'on déduit, en utilisant par exemple le théorème du § 2.1.3 :

$$f(0, b; c) = \binom{c + b}{b} - \binom{c + b}{b - 1} \qquad (57)$$

et de même

$$f(a, 0; c) = \binom{c + a}{a} - \binom{c + a}{a - 1} \qquad (57')$$

Ces formules valent même si a ou b s'annulent, en vertu des conventions d'écriture du § 2.3.1.

3.2.3. Deux lemmes.

Lemme A.

Si l'on fixe les valeurs, non-négatives, de a et de b, la fonction $(a, b ; c)$, définie pour $c \geqslant \max(a, b)$, prend les mêmes valeurs qu'un certain polynôme $P_{a,b}(z)$, de degré $a + b$ par rapport à la variable $z \in \mathbf{Z}$, pour $z = c \geqslant \max(a, b)$.

1/ La proposition est triviale si $a = b = 0$. En effet le point $(0, 0, c)$ $(c > 0)$ de E a pour seul antécédent le point $(0, 0, c-1)$, d'où, par application de (56),

$$f(0, 0 ; c) = f(0, 0 ; c-1) = \ldots = f(0, 0 ; 0) = 1.$$

Le polynôme $P_{0,0}(z)$ existe donc et est identique à la constante 1.

2/ Si une seule des valeurs de a et b est nulle, par exemple $a = 0$ et $b \geqslant 1$, il résulte immédiatement de (57) que

$$P_{0,b}(z) = \binom{z+b}{b} - \binom{z+b}{b-1} \; ; \tag{58}$$

on a de même

$$P_{a,0}(z) = \binom{z+a}{a} - \binom{z+a}{a-1} \, . \tag{58'}$$

3/ Si a et b sont tous deux $\geqslant 1$, le point (a, b, c) de $\mathbf{E}$ a au moins deux antécédents, $(a-1, b, c)$ et $(a, b-1, c)$; si $c = \max(a, b)$ (cas de la frontière inférieure), ce sont ses seuls antécédents, et si $c > \max(a, b)$ il a pour troisième antécédent $(a, b, c-1)$.

Supposons par exemple que $a \leqslant b < z$. On peut alors appliquer la relation (56) au point (a, b, z) ce qui donne

$$f(a, b ; z) = f(a-1, b ; z) + f(a, b-1 ; z) + f(a, b ; z-1)$$

ou

$$f(a, b ; z) - f(a, b ; z-1) = f(a-1, b ; z) + f(a, b-1 ; z) \tag{59}$$

Le lemme annoncé peut alors s'établir par récurrence sur la somme $a + b$. L'hypothèse de récurrence permet en effet d'écrire (59) sous la forme

$$f(a, b ; z) - f(a, b ; z-1) = P_{a-1,b}(z) + P_{a,b-1}(z)$$

pour tout $z > b$. Les deux polynômes du second membre sont de degré $a + b - 1$ en z, et leur somme également puisque $P_{a-1,b}(z)$ et $P_{a,b-1}(z)$ sont manifestement tous deux croissants en z pour z assez grand.

Les valeurs numériques de $f(a, b; z)$, pour $z \geqslant b$, ont donc leurs différences égales aux valeurs d'un polynôme de degré $a + b - 1$ en z, et sont donc elles-mêmes les valeurs d'un polynôme $P_{a,b}(z)$ de degré $a + b$ en z.

Lemme B.

Le polynôme $P_{a,b}(z)$ $(a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ a + b \geqslant 1,\ z \in \mathbf{Z})$ s'annule pour $z = \max(a, b) - 1$.

Pour les polynômes $P_{0,b}(z)$ et $P_{a,0}(z)$, définis par (58) et (58'), cela se vérifie immédiatement. Supposons alors que $0 < a \leqslant b$, d'où $\max(a, b) = b > 0$.

Il résulte de la relation (59) et du lemme A que, pour tout $z \in \mathbf{Z}$,

$$P_{a,b}(z - 1) = P_{a,b}(z) - P_{a-1,b}(z) - P_{a,b-1}(z) ; \tag{60}$$

en particulier pour $z = b$ on a

$$P_{a,b}(b - 1) = P_{a,b}(b) - P_{a-1,b}(b) - P_{a,b-1}(b).$$

Les trois termes du second membre ci-dessus sont respectivement égaux, en vertu du lemme A, à $f(a, b; b)$, $f(a - 1, b; b)$ et $f(a, b - 1; b)$; et l'application de la relation (56) au point (a, b, b), point-frontière inférieur de **E**, montre que $f(a, b; b) - f(a - 1, b; b) - f(a, b - 1; b) = 0$. On a donc bien $P_{a,b}(b - 1) = 0$.

3.2.4. Introduction de la fonction $\varphi(a,b)$.

Il est évident que la relation (60), écrite sous la forme

$$P_{a,b}(z) - P_{a,b}(z - 1) = P_{a-1,b}(z) + P_{a,b-1}(z), \quad \begin{pmatrix} a \geqslant 1 \\ b \geqslant 1 \end{pmatrix} \tag{61}$$

et accompagnée de la condition que $P_{a,b}(z)$ s'annule pour $z = \max(a, b) - 1$, permet théoriquement de déterminer de proche en proche tous les polynômes $P_{a,b}(z)$.

Mais il n'est pas moins évident que pour définir ces mêmes polynômes, on pourrait aussi bien, si cela se révélait pratique, adjoindre à la relation (61) non pas les valeurs spécifiées (ici nulles) de $P_{a,b}(z)$ pour $z = \max(a, b) - 1$, mais les valeurs spécifiées pour quelque autre z.

Il sera effectivement, en l'occurrence, commode de spécifier les valeurs de $P_{a,b}(z)$ pour $z = -a-b$, et nous poserons, pour abréger l'écriture :

$$P_{a,b}(-a-b) = \varphi(a, b). \tag{62}$$

Nous conviendrons en outre, pour pouvoir notamment étendre la validité de la relation (61), que le polynôme $P_{a,b}(z)$ existe pour tout $(a, b) \in \mathbf{Z}^2$, mais est identiquement nul chaque fois que l'on n'a pas $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$.

En retranchant membre à membre deux relations du type (61) écrites pour deux z consécutifs, on voit que

$$P_{a,b}(z) - 2P_{a,b}(z-1) + P_{a,b}(z-2) = P_{a-2,b}(z) + 2P_{a-1,b-1}(z) + P_{a,b-2}(z) \ ;$$

puis, de même, de proche en proche, il est aisé d'établir que pour n'importe quel n positif on a

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} P_{a,b}(z-j) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_{a-n+j,\,b-j}(z). \tag{63}$$

Appliquons cette formule (63) pour $z = n - a - b$. Le premier membre est alors la différence n-ième, pour $\zeta = -a-b$, du polynôme $P_{a,b}(\zeta)$, que l'on peut noter $[\Delta^n P_{a,b}(\zeta)]_{\zeta=-a-b}$. Quant au second membre, il est composé de termes dont chacun a pour argument $n-a-b$, c'est-à-dire $-(a-n+j)-(b-j)$, "anti-somme" des indices du polynôme correspondant ; ce second membre peut donc être récrit en utilisant la notation abrégée définie par (62). On a ainsi

$$[\Delta^n P_{a,b}(z)]_{z=-a-b} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varphi(a-n+j,\ b-j), \tag{64}$$

et cela pour tout n positif, même si n dépasse a ou b ou les deux, ce qui ne fait qu'introduire des termes nuls, et même aussi pour $n = 0$ si l'on convient que $\Delta^0 P(z) = P(z)$.

Or tout polynôme $P(z)$ d'une variable $z \in \mathbf{Z}$ s'exprime aisément à l'aide des valeurs que prennent, pour une même valeur z_0 de sa variable, ses différences n-ièmes successives $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ (identité de Gregory) :

$$P(z) = \sum_{n\geqslant 0} [\Delta^n P(z)]_{z=z_0} \binom{z - z_0}{n}$$

En appliquant cette formule au polynôme $P_{a,b}(z)$, avec $z_0 = -a-b$, et en tenant compte de (64), on obtient

$$P_{a,b}(z) = \sum_{n\geqslant 0} \left[\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \varphi(a - n + j,\ b - j) \right] \binom{z + a + b}{n}$$

3.2.5. Ecriture trinomiale.

Une écriture plus simple de l'expression ci-dessus s'obtient en posant $i = n - j\ (\geqslant 0)$, d'où $n = i + j$ et

$$P_{a,b}(z) = \sum_{\substack{i\geqslant 0\\ j\geqslant 0}} \varphi(a - i,\ b - j) \binom{i+j}{i\quad j} \binom{z + a + b}{i + j}. \tag{65}$$

Bien entendu, en vertu de la convention adoptée plus haut, le facteur $\varphi(a - i,\ b - j)$ est nul chaque fois que l'on a $i \geqslant a$ et ou $j \geqslant b$; la somme ci-dessus se compose donc, si $a \geqslant 0$ et $b \geqslant 0$, d'au plus $(a + 1)(b + 1)$ termes à coefficient non nul.

Dans la mesure où la fonction φ sera numériquement connue pour tout couple de valeurs non-négatives de ses arguments, la formule (65), compte tenu du lemme A, va fournir une expression de $f(a, b; c)$, puissance du point (a, b, c) de **E**, comme combinaison linéaire de coefficients *trinomiaux*.

En effet, chaque fois que $z + a + b \geqslant 0$, ce qui est le cas si $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $z \geqslant \max(a, b)$, le produit

$$\binom{i+j}{i\quad j} \binom{z + a + b}{i + j}$$

est égal au coefficient trinomial

$$\binom{a + b + z}{i\quad j\quad z + a - i + b - j}.$$

Si donc, dans la formule (65), on remplace z par c $(\geqslant \max(a, b))$, et qu'en même temps on pose $a - i = h$ et $b - j = k$, on obtient

$$f(a, b; c) = \sum_{h,k} \varphi(h, k) \binom{a + b + c}{a - h\quad b - k\quad c + h + k} \tag{66}$$

La sommation du second membre ne peut concerner, on l'a vu, des termes non nuls que pour $0 \leqslant h \leqslant a$ et $0 \leqslant k \leqslant b$. On peut, si l'on veut, la considérer comme étendue à tous les couples (h, k) de $\mathbf{Z}^2$, puisque si h ou k est négatif le facteur $\varphi(h, k)$ devient nul, et que si h dépasse a ou si k dépasse b c'est le coefficient trinomial qui devient nul.

3.2.6. Expression monôme de $\varphi(h,k)$; principe de la démonstration.

Pour que la formule (66) résolve complètement le problème posé, il reste à donner une définition numérique maniable de la fonction $\varphi(h, k)$, dont nous savons seulement, pour l'instant, qu'elle est la valeur prise pour $z = -h-k$ par le polynôme $P_{h,k}(z)$. Seul nous intéressera, bien entendu, le cas où $h \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$.

On a vu que $P_{o,o}(z) = 1$, et il résulte des formules (58) et (58') que $P_{o,1}(z) = P_{1,o}(z) = z$. On a donc $\varphi(0, 0) = 1$ et $\varphi(0, 1) = \varphi(1,0) = -1$.

D'autre part, si par exemple $h = 0$ et $k \geqslant 2$, il résulte de la formule (58) que

$$\varphi(0, k) = P_{o,k}(-k) = \binom{0}{k} - \binom{0}{k-1} = 0 \ ;$$

de même, si $h \geqslant 2$ et $k = 0$, $\varphi(h, 0) = 0$.

Reste le cas général où $h \geqslant 1$ et $k \geqslant 1$. Nous allons montrer, par un procédé indirect, que dans ce cas $\varphi(h, k)$ a pour expression

$$\varphi(h, k) = \frac{2(-1)^{h+k}\,(h+k-1)!\,(2h+2k-3)!}{h!\,k!\,(2h-1)!\,(2k-1)!} \ . \qquad (67)$$

Notons d'ailleurs que cette expression couvre, si l'on veut, tous les cas où $h + k \geqslant 2$, à condition d'admettre que la présence, au dénominateur, d'une factorielle d'entier négatif, laisse un sens à la fraction mais la rend nulle ; avec quelques précautions supplémentaires sur lesquelles il est inutile d'insister, on pourrait même lui faire couvrir tous les cas où $h + k \geqslant 0$.

A titre d'illustration, le tableau ci-après donne les valeurs numériques de $\varphi(h, k)$ pour $0 \leqslant h \leqslant 5$ et $0 \leqslant k \leqslant 5$:

	k = 0	1	2	3	4	5
h = 0	1	-1	0	0	0	0
1	-1	2	-2	2	-2	2
2	0	-2	10	-28	60	-110
3	0	2	-28	168	-660	2002
4	0	-2	60	-660	4290	-20020
5	0	2	-110	2002	-20020	136136

La méthode de démonstration consistera à se servir de l'expression (67) pour la construction d'une famille de polynômes $P'_{a,b}(z)$, à l'aide d'une formule dont le second membre sera le même que celui de la formule (65). Il suffira ensuite, pour prouver que ces polynômes ne sont autres que les $P_{a,b}(z)$ dont on a établi l'existence, de vérifier

(i) que $P'_{o,o}(z) = 1$.

(ii) que $P'_{a,b}(z) - P'_{a,b}(z-1) = P'_{a-1,b}(z) + P'_{a,b-1}(z)$.

(iii) que $P'_{a,b}(z)$ s'annule pour $z = \max(a,b) - 1$.

La validité de (67) en sera une conséquence immédiate.

3.2.7. Propriétés (i) et (ii).

La propriété (i) se vérifie immédiatement sur le second membre de (65), que nous récrivons ci-dessous :

$$\sum_{\substack{i \geqslant 0 \\ j \geqslant 0}} \varphi(a-i,\ b-j) \binom{i+j}{i \quad j} \binom{z+a+b}{i+j} = P'_{a,b}(z) \tag{68}$$

En effet si $a = b = 0$, le seul $\varphi(-i, -j)$ non certainement nul a priori s'obtient pour $i = j = 0$; or on a $\varphi(0, 0) = 1$. Pour le même couple $i = j = 0$, le coefficient binomial $\binom{i+j}{i \quad j}$ se réduit lui aussi à 1. Enfin le polynôme $\binom{z+a+b}{i+j}$ se réduit à $\binom{z}{0}$ qui est identiquement égal à 1. On a donc bien $P'_{o,o}(z) = 1 = P_{o,o}(z)$.

La propriété (ii) se vérifie grâce aux relations bien connues entre nombres binomiaux

$$\binom{z+a+b}{i+j} - \binom{z-1+a+b}{i+j} = \binom{z-1+a+b}{i+j-1} \quad (= 0 \text{ si } i = j = 0)$$

et

$$\binom{i+j}{i \quad j} = \binom{i+j-1}{i-j \quad j} + \binom{i+j-1}{i \quad j-1} \quad \text{(valable pourvu que } i+j \geqslant 1\text{)},$$

qui permettent de décomposer la différence $P'_{a,b}(z) - P'_{a,b}(z-1)$ en deux sommes

$$\sum_{\substack{i\geqslant 0 \\ j\geqslant 0 \\ i+j\geqslant 1}} \varphi(a-1-i+1,\ b-j) \binom{i+j-1}{i-1 \quad j} \binom{z+a-1+b}{i+j-1}$$

et

$$\sum_{\substack{i\geqslant 0 \\ j\geqslant 0 \\ i+j\geqslant 1}} \varphi(a-i,\ b-1-j+1) \binom{i+j-1}{i \quad j-1} \binom{z+a+b-1}{i+j-1}$$

Dans la première de ces sommes il suffit de sommer pour $i \geqslant 1$ puisque $i = 0$ annule le facteur $\binom{i+j-1}{i-1 \quad j}$; on y reconnaît alors, en posant $i-1 = i'$, le polynôme $P'_{a-1,b}(z)$. De même la seconde somme est égale à $P'_{a,b-1}(z)$.

La vérification la moins immédiate sera celle de la propriété (iii), annulation de $P'_{a,b}(z)$ pour $z = \max(a,b) - 1$.

Pour la faire nous aurons besoin d'un lemme purement formel, qui fait l'objet du § suivant.

3.2.8. Lemme.

α et β étant deux entiers positifs $(\alpha < \beta)$, la fraction rationnelle

$$R(t) = \frac{(2t-1)\ (2t-2)\dots(2t-2\alpha)}{(t+1)\ (t+2)\dots(t+\beta)} \tag{69}$$

a sa différence β-ième nulle pour $t = \alpha$.

En effet $R(t)$ peut s'écrire sous la forme dite "décomposée en éléments simples",

$$R(t) = E(t) + \frac{A_1}{t+1} + \dots + \frac{A_\gamma}{t+\gamma} + \dots + \frac{A_\beta}{t+\beta}\ ; \tag{70}$$

$E(t)$ est un polynôme, identiquement nul si $2\alpha < \beta$, de degré $2\alpha - \beta$ si $2\alpha \geqslant \beta$. Dans les deux cas la différence β-ième de ce polynôme est un polynôme identiquement nul car l'ordre β de la différence dépasse son degré ($\beta > 2\alpha - \beta$ puisque l'on a supposé $\alpha < \beta$).

La différence β-ième de $R(t)$, est donc la somme des différences β-ièmes de $\frac{A_\gamma}{t+\gamma}$ ($\gamma = 1, 2, \ldots, \beta$).

Or, si n est un entier positif, il est aisé d'établir que la différence β-ième, pour $\theta = 0$, de la fraction rationnelle $\frac{1}{\theta + n}$ est égale à

$$\frac{(-1)^\beta \beta\,!\,(n-1)\,!}{(\beta+n)\,!}$$

(Nous ne détaillons pas ici la démonstration, qui peut se faire simplement par récurrence sur β).

D'autre part la différence β-ième, pour $t = \alpha$, de $\frac{1}{t+\gamma}$ n'est autre que la différence β-ième, pour $\theta = 0$, de $\frac{1}{\theta + \alpha + \gamma}$; elle est donc égale, comme on vient de le voir, à

$$\frac{(-1)^\beta \beta\,!\,(\alpha+\gamma-1)\,!}{(\beta+\alpha+\gamma)\,!}.$$

La différence β-ième, pour $t = \alpha$, de $R(t)$ est donc égale à

$$[\Delta^\beta R(t)]_{t=\alpha} = \sum_{\gamma=1}^{\beta} A_\gamma \frac{(-1)^\beta \beta\,!\,(\alpha+\gamma-1)\,!}{(\alpha+\beta+\gamma)\,!}, \tag{71}$$

quantité que nous désignerons en abrégé par D et dont il s'agit de montrer qu'elle est nulle.

Le coefficient A_γ peut s'expliciter, comme d'ordinaire, en multipliant les deux membres de (70) par $t + \gamma$, puis en donnant à t la valeur $-\gamma$; on trouve ainsi, compte tenu de (69) :

$$A_\gamma = \frac{(-2\gamma-1)\,(-2\gamma-2)\ldots(-2\gamma-2\alpha)}{(-\gamma+1)\,(-\gamma+2)\ldots(-2)\,(-1)1.2\ldots(-\gamma+\beta)} = \frac{(2\gamma+1)\,(2\gamma+2)\ldots(2\gamma+2\alpha)}{(-1)^{\gamma-1}\,(\gamma-1)\,!\,(\beta-\gamma)!},$$

ou encore, en multipliant haut et bas par γ et en isolant le facteur $\gamma + \alpha$ du numérateur,

$$A_\gamma = (\gamma+\alpha)\,\frac{2\gamma(2\gamma+1)\ldots(2\gamma+2\alpha-1)}{(-1)^{\gamma-1}\,\gamma\,!\;(\beta-\gamma)\,!}\,.$$

Reportant cette expression de A_γ dans l'expression de D donnée par (71), on trouve, après les groupements convenables de facteurs :

$$D = \sum_{\gamma=1}^{\beta} (-1)^{\beta-\gamma+1}\,\frac{\beta\,!}{\gamma\,!\;(\beta-\gamma)\,!}\;\underline{\frac{(\alpha+\gamma)\,!}{(\alpha+\beta+\gamma)\,!}\;2\gamma\,(2\gamma+1)\ldots(2\gamma+2\alpha-1)}$$

Mais la partie soulignée de l'expression ci-dessus n'est autre que $R(\alpha+\gamma)$ (cf. (69)). On a donc, en écrivant la somme ci-dessus dans l'ordre décroissant des γ :

$$D = -\binom{\beta}{0} R(\alpha+\beta) + \binom{\beta}{1} R(\alpha+\beta-1) - \ldots + (-1)^{\beta}\binom{\beta}{\beta-1} R(\alpha+1)$$
$$+ (-1)^{\beta+1}\binom{\beta}{\beta} R(\alpha) \qquad (72)$$

(le dernier terme écrit, nul puisque $R(\alpha) = 0$, n'ayant été ajouté que pour la forme). On voit ainsi que le second membre de (72) n'est autre que $-D$, par suite de la définition même de D comme différence β-ième, pour $t = \alpha$, de $R(t)$.

On a donc finalement établi que $D = -D$; donc $D = 0$, ce qui achève de démontrer le lemme. (Notons que la condition $\beta > \alpha$ est essentielle ; le lemme serait faux si elle n'était pas réalisée).

3.2.9. Propriété (iii).

On peut maintenant vérifier que les polynômes $P'_{a,b}(z)$ définis par (68) possèdent la propriété (iii) annoncée, c'est-à-dire s'annulent pour $z = \max(a, b) - 1$ (sauf $P'_{o,o}$ naturellement).

La vérification est immédiate si par exemple $a = 0$, car on vérifie alors aisément que la formule (68) redonne simplement le polynôme $P_{o,b}(z)$ défini par la formule (58) du § 3. 2. 3.

Nous supposerons dorénavant $1 \leqslant a \leqslant b$; il s'agira donc d'établir que $P'_{a,b}(b-1) = 0$. Nous montrerons pour cela que si l'on remplace z par $b-1$ dans l'expression (68), chacune des sommes partielles obtenues en fixant le premier argument de φ et en ne faisant varier que le second devient nulle.

En utilisant le changement de variables déjà introduit, $a - i = h$ et $b - j = k$, la formule (68) donne

$$P'_{a,b}(b-1) = \sum_{h,k} \varphi(h,k) \frac{(a+2b-1)\,!}{(a-h)\,!\;(b-k)\,!\;(b+h+k-1)\,!}, \tag{73}$$

la sommation s'étendant, si l'on veut, à tous les couples (h, k) tels que $h \geqslant 0$ et $k \geqslant 0$, et $\varphi(h, k)$ étant défini par l'expression (67) ou le tableau qui l'illustre. Il suffit en fait de se limiter à $h \leqslant a$, le cas où $h > a$ ne fournissant de toute façon que des termes tous nuls.

3.2.9.1. Si l'on fixe à h la valeur 0, deux seulement des φ sont non nuls : $\varphi(0, 0) = 1$ et $\varphi(0, 1) = -1$. La somme partielle correspondante, S_o, se réduit à

$$S_o = \frac{(a+2b-1)\,!}{a\,!\;b\,!\;(b-1)\,!} - \frac{(a+2b-1)\,!}{a\,!\;(b-1)\,!\;b\,!} = 0$$

3.2.9.2. Si l'on fixe à h la valeur 1, et que l'on veuille calculer la somme partielle correspondante S_1, on a vu que $\varphi(1, 0) = -1$, mais que $\varphi(1, k) = 2(-1)^{k+1}$ pour tout $k \geqslant 1$. On a donc

$$S_1 = -\frac{(a+2b-1)\,!}{(a-1)\,!\;b\,!\;b\,!} + 2\sum_{k\geqslant 1}^{+\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{(a+2b-1)\,!}{(a-1)\,!\;(b-k)\,!\;(b+k)\,!}$$

Mais l'expression à sommer est paire par rapport à k (c'est-à-dire ne change pas si l'on change k en $-k$) ; d'où, si l'on veut,

$$S_1 = \frac{(a+2b-1)\,!}{(a-1)\,!\;(2b)\,!} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}\,(2b)\,!}{(b-k)\,!\;(b+k)\,!}$$

Sous le signe $\sum$ on reconnaît ainsi les termes, avec alternance des signes, d'une ligne du triangle de Pascal ; donc en fin de compte $S_1 = 0$.

3.2.9.3. Fixons maintenant à h une valeur quelconque telle que $2 \leqslant h \leqslant a$, et calculons S_h, somme partielle de l'expression (73), en utilisant pour φ l'expression (67). Il vient alors

$$S_h = \sum_k \frac{2(-1)^{h+k}\,(h+k-1)!\,(2h+2k-3)!}{h!\,k!\,(2h-1)!\,(2k-1)!} \times \frac{(a+2b-1)!}{(a-h)!\,(b-k)!\,(b+h+k-1)!}$$

$$= \frac{2(-1)^{h+b}\,(a+2b-1)!}{h!\,(2h-1)!\,(a-h)!\,b!} \sum_{k=0}^{b} \frac{(-1)^{b-k}\,b!}{k!\,(b-k)!} \times \frac{(h+k-1)!\,(2h+2k-3)!}{(2k-1)!\,(b+h+k-1)!} \tag{74}$$

Or la partie soulignée peut s'écrire

$$\frac{2k(2k+1)\ldots(2h+2k-3)}{(h+k)(h+k+1)\ldots(h+k+b-1)}$$

ou encore, en posant $h-1=\alpha$ et $h-1+k=t=\alpha+k$ et en écrivant dans l'ordre inverse les facteurs du numérateur,

$$\frac{(2t-1)\ldots(2t-2\alpha)}{(t+1)(t+2)\ldots(t+b)};$$

sous cette forme on reconnaît, au changement près de β en b, la fraction rationnelle $R(t)$ définie dans le lemme 3.2.8.

Abstraction faite du facteur constant que l'on a sorti du signe Σ dans la ligne (74), la somme S_h fait donc intervenir

$$D = \sum_{k=0}^{b} (-1)^{b-k} \binom{b}{b-k} R(\alpha+k),$$

qui n'est autre que la différence b-ième, pour $t=\alpha$, de $R(t)$.

Pour que le lemme s'applique, il importe de s'assurer que α et b sont bien des entiers positifs satisfaisant à $\alpha < b$. Or α est bien positif puisque $\alpha = h-1$ et que l'on a pris $h \geqslant 2$; d'autre part h a été pris au plus égal à a, donc $\alpha = h-1 < a$, et comme on a supposé $a \leqslant b$, on a bien $\alpha < b$.

Le lemme 3.2.8. s'applique donc, et permet d'affirmer que $D=0$, donc $S_h = 0$.

Les sommes partielles S_h étant en fin de compte toutes nulles, le calcul fait à partir de la formule (73) établit bien que $P'_{a,b}(b-1)=0$.

Les propriétés (i) (ii) et (iii) des polynômes $P'_{a,b}(z)$ étant ainsi vérifiées, il en résulte, comme on l'a fait remarquer à la fin du § 3.2.6, que ces polynômes sont bien identiques aux polynômes $P_{a,b}(z)$ introduits au § 3.2.3.

Il s'ensuit finalement que la formule (66), qui avait été établie en définissant $\varphi(h,k)$ par $P_{h,k}(-h-k)$, est encore vraie si l'on définit $\varphi(h,k)$ à l'aide de la formule (67), complétée par

$$\varphi(0,0)=1, \quad \varphi(1,0)=\varphi(0,1)=-1.$$

3.2.10. Illustration numérique.

Soit à calculer la puissance $f(4, 3; 6)$. La formule (66) donne, si l'on dispose les termes comme dans le tableau de la fonction φ :

$$
\begin{aligned}
f(4, 3; 6) = {} & \begin{pmatrix} & 13 & \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & 13 & \\ 4 & 2 & 7 \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} & 13 & \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} & 13 & \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} & 13 & \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} & 13 & \\ 3 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\
& - 2 \begin{pmatrix} & 13 & \\ 2 & 2 & 9 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} & 13 & \\ 2 & 1 & 10 \end{pmatrix} - 28 \begin{pmatrix} & 13 & \\ 2 & 0 & 11 \end{pmatrix} \\
& + 2 \begin{pmatrix} & 13 & \\ 1 & 2 & 10 \end{pmatrix} - 28 \begin{pmatrix} & 13 & \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} + 168 \begin{pmatrix} & 13 & \\ 1 & 0 & 12 \end{pmatrix} \\
& - 2 \begin{pmatrix} & 13 & \\ 0 & 2 & 11 \end{pmatrix} + 60 \begin{pmatrix} & 13 & \\ 0 & 1 & 12 \end{pmatrix} - 660 \begin{pmatrix} & 13 & \\ 0 & 0 & 13 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Pour le calcul à la main dans les cas simples il est commode de grouper les termes en diagonales ascendantes à partir du dernier, en se servant à titre auxiliaire d'un fragment du triangle de Pascal disposé d'une manière convenable, ici

35	15		
20	10	4	1
	6	3	1
	3	2	1
	1	1	1,

ainsi que de la ligne 13 de ce triangle,

1 13 78 286 715 1287 1716 1716...

On a alors

$$
\begin{aligned}
f(4, 3; 6) = {} & -660 + \binom{13}{1}(168 + 60) - \binom{13}{2}(28 + 2 \times 28 + 2) \\
& + \binom{13}{3}(2 + 3 \times 10 + 3 \times 2) - \binom{13}{4}(4 \times 2 + 6 \times 2) \\
& + \binom{13}{5}(10 \times 2) - \binom{13}{6}(15 + 20) + \binom{13}{7} 35
\end{aligned}
$$

$= -660+13\times 228-78\times 86+286\times 38-715\times 20+1287\times 20-1716\times 35+1716\times 35$

$= 17.904$

Ce nombre permet notamment de calculer la probabilité p pour que, dans un scrutin où trois candidats A, B et C ont obtenu respectivement 4, 3 et 6 voix, le candidat C demeure constamment en tête (éventuellement ex-aequo) pendant tout le dépouillement : il suffit de le diviser par le nombre de tous les dépouillements possibles, lequel est $\binom{13}{4\ \ 3\ \ 6} = 60.060$, ce qui donne $p = 0,298$ environ.

3.3. EXPRESSION MONOME DE $f(a, b ; b)$ -

3.3.1. Objet du calcul.

Nous nous réfèrerons à la formule (66) comme donnant l'expression "développée" de $f(a, b ; c)$, laquelle demeure bien entendu valable pour $c = b$ ($\geqslant a$) c'est-à-dire sur les points-frontières inférieurs de **E**. Nous établirons toutefois pour ce dernier cas une expression particulièrement remarquable de $f(a, b ; b)$ sous forme monôme ; nous verrons d'ailleurs au § 3.4.1 qu'il n'y a pas d'expression analogue pour $c > b$.

Nous opèrerons pour cela comme précédemment par sommation du second membre de (66), d'abord par rapport à k en fixant h, puis par rapport à h.

Nous écrirons donc

$$f(a, b ; b) = \sum_h \left(\frac{(a+2b)\,!}{(a-h)\,!} \sum_k \frac{\varphi(h, k)}{(b-k)\,!\ (b+h+k)\,!} \right) \tag{75}$$

$$= \sum_h \left[\frac{(a+2b)\,!}{(a-h)\,!\ (2b+h)\,!} \sum_k \binom{2b+h}{b-k\ \ b+h+k} \varphi(h, k) \right]$$

Le point d'aboutissement du calcul sera la formule (85) du § 3.3.10.

3.3.2. Les polynômes $A_h(z)$ $(h \geqslant 2)$.

Pour la conduite du calcul il sera commode d'adopter un certain nombre de conventions d'écriture abréviatives.

Ainsi nous introduirons, pour $h \geqslant 2$, le polynôme en z

$$A_h(z) = \frac{1}{h\,!\;(2h-1)\,!}\;(2z-3)_{2h-2}\,.\,(z-1)_{h-1}$$

de degré $3h-3$ en z ; on a alors

$$\varphi(h,k) = 2(-1)^{h+k}\,A_h(k+h)$$

et

$$f(a,b;b) = \sum_h \left[\frac{2(-1)^h\,(a+2b)\,!}{(a-h)\,!\,(2b+h)\,!}\;\underline{\sum_k\,(-1)^k\,C_{2b+h}^{b-k}\,A_h(k+h)}\right] \quad (76)$$

Nous nous attacherons particulièrement au calcul de l'expression soulignée ci-dessus, en posant

$$T_{b,h} = \sum_k\,(-1)^k\,C_{2b+h}^{b-k}\,A_h(k+h)$$

ou

$$(-1)^b\,T_{b,h} = C_{2b+h}^{0}\,A_h(b+h) - C_{2b+h}^{1}\,A_h(b+h-1) + \ldots + (-1)^{b-1}\,C_{2b+h}^{b-1}\,A_h(h+1)$$

(puisque $A_h(h) = 0$) ;

il sera commode d'introduire la fonction génératrice $\Psi_h(t)$ de la suite $A_h(h+1)$, $A_h(h+2), \ldots,$ soit

$$\Psi_h(t) = A_h(h+1) + A_h(h+2)t + \ldots + A_h(h+b)t^{b-1} + \ldots$$

$(-1)^b\,T_{b,h}$ apparaît alors comme le coefficient de t^{b-1} dans le produit $(1-t)^{2b+h}\,\Psi_h(t)$.

3.3.3. Les polynômes $P_h(t)$ $(h \geqslant 2)$.

$A_h(z)$ étant un polynôme de degré $3h-3$ en z, la différence $(3h-2)$-ième (par rapport à z) de $A_h(z)$ est nulle. Il en résulte que si l'on développe par rapport à t la fonction

$$(1-t)^{3h-2}\,\Psi_h(t) = P_h(t),$$

tous les termes dont l'exposant en t est $\geqslant 3h-2$ sont nuls ; $P_h(t)$ est donc un polynôme de degré $\leqslant 3h-3$.

Mais en fait il résulte de la définition de $A_h(z)$ que

$$A_h(1) = A_h(2) = \ldots = A_h(h) = 0\ ;$$

on peut donc considérer $t^h\,\Psi_h(t)$ comme la fonction génératrice de la suite

$$A_h(1),\ A_h(2),\ \ldots,\ A_h(h),\ A_h(h+1),\ldots$$

$(1-t)^{3h-2}\,t^h\,\Psi_h(t)$ est ainsi également, pour la même raison, un polynôme de degré $\leqslant 3h-3$, et $P_h(t)$ est un polynôme dont le degré ne dépasse pas $2h-3$.

Nous poserons

$$P_h(t) = a_0^{(h)} + a_1^{(h)}\,t + \ldots + a_{2h-3}^{(h)}\,.\,t^{2h-3}.$$

Le tableau ci-après donne les valeurs numériques des coefficients $a_n^{(h)}$ pour $2 \leqslant h \leqslant 5$ et $0 \leqslant n \leqslant 2h-3$.

	n = 0	1	2	3	4	5	6	7
h = 2	1	1						
3	1	7	7	1				
4	1	20	75	75	20	1		
5	1	42	364	1001	1001	364	42	1

3.3.4. Lois de récurrence

De la définition de $A_h(z)$ résulte, comme il est aisé de le vérifier, la relation suivante entre $A_h(h+n+1)$, $A_h(h+n)$ et $A_{h-1}(h+n)$, relation dont les coefficients sont linéaires en n :

$$h(2h-3-2n)A_h(h+n+1) + h(2n+4h-3)A_h(h+n) - (2h-3)(2n+h)A_{h-1}(h+n) = 0\ .$$

On en déduit, compte tenu de

$$\Psi_h'(t) = \sum_{h\geqslant 0} nA_h(h+n+1)t^{n-1},$$

la relation suivante entre $\Psi_h\ \Psi_h'\ \Psi_{h-1}\ \Psi_{h-1}'$:

$$h\{[2h-3+(4h-1)t]\,\Psi_h(t) - 2t(1-t)\,\Psi_h'(t)\} = (2h-3)\{h\Psi_{h-1}(t) + 2t\Psi_{h-1}'(t)\}$$

A son tour celle-ci peut être traduite en $P_h\,P_h'\,P_{h-1}\,P_{h-1}'$ grâce au fait que $\Psi_h(t) = (1-t)^{-3h+2}\,.\,P_h(t)$; on trouve ainsi

$$h(2h-3)\,P_h(t) - 2ht\,P'_h(t) = (2h-3)\,(1-t)\,\{[h+5(h-2)t]\,P_{h-1}(t) + 2t(1-t)\,P'_{h-1}(t)\}.$$

Enfin cette dernière relation donne, par identification des termes en t^n :

$$h(2h-3-2n)a_n^{(h)} = (2h-3)\,[(2n+h)a_n^{(h-1)} + 2(2h-3-2n)a_{n-1}^{(h-1)} - (5h-6-2n)a_{n-2}^{(h-1)}].$$

Le tableau du § 3. 3. 3. peut donc être formé de proche en proche, le calcul de chaque terme exigeant la connaissance de celui qui le surmonte et des deux prédécesseurs de celui-ci. De plus la symétrie de chaque ligne par rapport à son milieu s'établit immédiatement par récurrence grâce à cette relation : elle s'exprime, pour la ligne h, par $a_n^{(h)} = a_{2h-3-n}^{(h)}$.

3.3.5. Changement de variable $\theta=t(1+t)^{-2}$

La forme symétrique des lignes $a_n^{(h)}$ invite à considérer chacune d'elles comme une combinaison linéaire de lignes impaires du triangle de Pascal :

$$\begin{array}{llllllll} & (a_0^{(h)} & a_1^{(h)} & a_2^{(h)} & \ldots\ldots & a_{2h-5}^{(h)} & a_{2h-4}^{(h)} & a_{2h-3}^{(h)}\;) \\ = \beta_{h-2}^{0} & (C_{2h-3}^{0} & C_{2h-3}^{1} & C_{2h-3}^{2} & \ldots\ldots & C_{2h-3}^{2h-5} & C_{2h-3}^{2h-4} & C_{2h-3}^{2h-3}) \\ + \beta_{h-2}^{1} & (0 & C_{2h-5}^{0} & C_{2h-5}^{1} & \ldots\ldots & C_{2h-5}^{2h-6} & C_{2h-5}^{2h-5} & 0 \quad) \\ + \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ + \beta_{h-2}^{h-2} & (0 & 0 & 0\ldots C_1^0 & C_1^1\ldots 0 & & 0 & 0 \quad). \end{array} \qquad (77)$$

Posant $h - 2 = i$ ($\geqslant 0$ puisque $h \geqslant 2$), on voit ainsi que

$$P_{i+2}(t) = \beta_i^0\,(1+t)^{2i+1} + \beta_i^1\,t(1+t)^{2i-1} + \ldots + \beta_i^i\,t^i\,(1+t).$$

Si l'on introduit la nouvelle variable

$$\theta = t(1+t)^{-2}, \text{ on a } P_{i+2}(t) = (1+t)^{2i+1}\,Q_i(\theta), \text{ avec}$$

$$Q_i(\theta) = \beta_i^0 + \beta_i^1\,\theta + \ldots + \beta_i^j\,\theta^j + \ldots + \beta_i^i\,\theta^i.$$

Voici le triangle numérique des β_i^j pour $0 \leqslant i \leqslant 5$:

β_i^j	j = 0	1	2	3	4	5
i = 0	1					
1	1	4				
2	1	15	20			
3	1	35	168	112		
4	1	66	714	1680	672	
5	1	110	2178	11352	15840	4224

Grâce au fait que $\theta = t(1+t)^{-2}$ et $d\theta/dt = (1-t)\,(1+t)^{-3}$, la relation établie entre $P_h(t)$, $P'_h(t)$, $P_{h-1}(t)$, $P'_{h-1}(t)$ peut se traduire en une relation entre $Q_i(\theta)$, $Q'_i(\theta)$, $Q_{i-1}(\theta)$, $Q'_{i-1}(\theta)$ (on pose toujours $i = h-2 \geqslant 0$) :

$$(i+2)\,[(2i+1)\,Q_i(\theta) - 2\theta\, Q'_i(\theta)]$$

$$= (2i+1)\,\{[(i+2) + 4(2i-1)\theta]\,Q_{i-1}(\theta) + 2\theta(1-4\theta)\,Q'_{i-1}(\theta)\}.$$

Et finalement l'identification des termes en θ^j donne entre les coefficients β la relation suivante, dans laquelle n'interviennent plus que β_i^j β_{i-1}^{j-1} β_{i-1}^j :

$$(i+2)\,(2i-2j+1)\beta_i^j = (2i+1)\,[4(2i-2j+1)\beta_{i-1}^{j-1} + (i+2j+2)\beta_{i-1}^j]\,. \quad (78)$$

3.3.6. Décomposition de $T_{b,h}$.

L'objet du calcul, défini à la fin du § 3.3.2, est d'exprimer le coefficient $(-1)^b\,T_{b,h}$ du terme en t^{b-1} dans le produit $(1-t)^{2b+h}\,\Psi_h(t)$. Mais

$$(1-t)^{2b+h}\,\Psi_h(t) = (1-t)^{3h-2}\,\Psi_h(t) \times (1-t)^{2b-2h+2}$$

$$= P_h(t)\,.\,(1-t)^{2b-2h+2}$$

(Notons que l'on a nécessairement $2b-2h+2 > 0$ puisque $h \leqslant a \leqslant b$). On a donc

$$(-1)^b\,T_{b,h} = C^o_{2b-2h+2}\,a^{(h)}_{b-1} - C^1_{2b-2h+2}\,a^{(h)}_{b-2} + \ldots + (-1)^{b-1}\,C^{b-1}_{2b-2h+2}\,a^{(h)}_o$$

ou encore :

$$- T_{b,h} = C^{b-1}_{2b-2h+2}\ a^{(h)}_o - C^{b-2}_{2b-2h+2}\ a^{(h)}_1 + \dots$$

$$- T_{b,h} = \sum_n (-1)^n\ C^{b-1-n}_{2b-2h+2}\ a^{(h)}_n . \qquad (79)$$

La sommation peut être considérée étendue à tous les $n \in \mathbf{Z}$, si l'on considère le coefficient binomial comme nul chaque fois que l'on n'a pas $0 \leqslant n \leqslant b-1$, et $a^{(h)}_n$ comme nul chaque fois que l'on n'a pas $0 \leqslant n \leqslant 2h-3$.

Le calcul se conduit en tenant compte de la décomposition des $a^{(h)}_n$ indiquée par (77) : $- T_{b,h}$ apparaîtra ainsi comme une combinaison linéaire des coefficients $\beta^o_{h-2}\ \beta^1_{h-2} \dots \beta^{h-2}_{h-2}$.

La première ligne du second membre de (77) donne ainsi, avec le facteur β^o_{h-2},

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n\ C^{b-1-n}_{2b-2h+2}\ C^n_{2h-3},$$

quantité que nous appellerons en abrégé $\rho(b, h)$.

La ligne j donne de même, avec le facteur β^j_{h-1}

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n\ C^{b-1-n}_{2b-2h+2}\ C^{n-j}_{2h-2j-3}\ ;$$

il suffit de changer en $n + j$ l'indice de sommation pour voir que ceci n'est autre chose que $(-1)^j \cdot \rho(b-j,\ h-j)$.

Finalement il apparaît ainsi que (79) peut s'écrire

$$- T_{b,h} = \beta^o_{h-2}\ \rho(b, h) - \beta^1_{h-2}\ \rho(b-1, h-1) + \dots + (-1)^h\ \beta^{h-2}_{h-2}\ \rho(b-h+2, 2). \quad (80)$$

3.3.7. Expression de $\rho(b,h)$.

On a défini $\rho(b, h)$ par

$$\rho(b, h) = C^o_{2h-3} \cdot C^{b-1}_{2b-2h+3} - C^1_{2h-3} \cdot C^{b-2}_{2b-2h+2} + \dots ,$$

ce qui peut s'écrire différemment, après introduction explicite des factorielles qui figurent dans chaque terme :

$$\rho(b, h) = \frac{(2b-2h+2)\,!\ (2h-3)\,!}{(b-1)\,!\ b\,!}\ [C^o_{b-1}\ C^{2h-3}_b - C^1_{b-1} . C^{2h-4}_b + \dots] .$$

Quant à l'expression entre crochets, elle est égale au coefficient de t^{2h-3} dans le développement du produit $(1-t)^{b-1}(1+t)^b$; mais

$$(1-t)^{b-1}\,.\,(1+t)^b = (1-t^2)^{b-1}\,.\,(1+t),$$

et pour le second membre le coefficient de t^{2h-3} est $(-1)^{h-2}\,C_{b-1}^{h-2}$. On a donc finalement

$$\rho(b\,,h) = (-1)^{h-2}\frac{(2b-2h+2)\,!}{(b-h+1)\,!}\cdot\frac{(2h-3)\,!}{(h-2)\,!\;b\,!}$$

En reportant dans (80), la première des deux fractions ci-dessus se met en facteur dans tous les termes, et l'on a

$$T_{b,h} = (-1)^{h-1}\frac{(2b-2h+2)!}{(b-h+1)!}\left[\frac{(2h-3)_{h-1}\,\beta^{o}_{h-2}}{b\,!}+\frac{(2h-5)_{h-2}\,\beta^{1}_{h-2}}{(b-1)!}+\ldots+\frac{(1)_1\,\beta^{h-2}_{h-2}}{(b-h+2)!}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{h-1}\,(2b-2h+2)!}{(b-h+1)!\;b!}\sum_{j=0}^{h-2}\left[(2h-3-2j)_{h-1-j}\,(b)_j\times\beta^{j}_{h-2}\right]$$

Dans chacun des termes de la somme ci-dessus on peut remplacer b par une variable z. La somme est alors la valeur prise pour $z = b$, par le polynôme (nous remplaçons comme d'habitude $h-2$ par i) :

$$\sum_j \beta^j_i\,(2i-2j+1)_{i-j+1}\,(z)_j\,.$$

3.3.8. Expression monôme de $T_{b,h}$.

Le calcul du polynôme en z ci-dessus pour les premières valeurs de i permet d'inférer qu'il est proportionnel à $(2z+i+2)_i$, et plus précisément que

$$\frac{(2i+2)\,!}{(i+1)\,!\;(i+2)\,!}\;(2z+i+2)_i = \sum_j \beta^j_i\,(2i-2j+1)_{i-j+1}\,(z)_j \qquad (81)$$

Pour l'établir il suffit d'opérer par récurrence sur i, c'est-à-dire de partir de la formule (81) supposée vraie pour $i-1$:

$$\frac{(2i)\,!}{i\,!\;(i+1)\,!}\;(2z+i+1)_{i-1} = \sum_j \beta^j_{i-1}\,(2i-2j-1)_{i-j}\,(z)_j\,,$$

dont le second membre peut aussi s'écrire en remplaçant l'indice (muet) j par $j-1$ sous le signe $\sum$:

$$\sum_j \beta_{i-1}^{j-1} (2i - 2j + 1)_{i-j+1} (z)_{j-1} .$$

On peut alors multiplier à gauche et à droite par

$$\frac{(2i+1)(2i+2)}{(i+1)(i+2)} (2z + i + 2) = \frac{2(2i+1)}{i+2} [2(z - j + 1) + i + 2j],$$

ce qui donne à gauche le premier membre de (81), et à droite

$$\frac{2(2i+1)}{i+2} \sum_j \{\beta_{i-1}^{j-1} (2i - 2j + 1)_{i-j+1} [2(z)_j + (i + 2j) (z)_{j-1}]\} ;$$

ou encore, en décomposant cette somme en deux et en augmentant d'une unité le j muet de la seconde partie :

$$\frac{2(2i+1)}{i+2} \sum_j [2\beta_{i-1}^{j-1} (2i-2j+1)_{i-j+1} + \beta_{i-1}^{j} (2i-2j-1)_{i-j} (i+2j+2)] (z)_j \quad (82)$$

Or l'expression entre crochets ci-dessus possède en facteur $(2i - 2j - 1)_{i-j-1} (i - j)$ comme il est aisé de le vérifier, le reste étant égal à

$$4(2i - 2j + 1) \beta_{i-1}^{j-1} + (i + 2j + 2) \beta_{i-1}^{j} ;$$

mais ceci, *en vertu de la récurrence établie entre les* β, est égal à

$$\frac{i+2}{2i+1} (2i - 2j + 1) \beta_i^j .$$

Finalement on voit que l'expression (82) est égale à

$$\sum_j \beta_i^j (2i - 2j + 1)_{i-j+1} (z)_j,$$

ce qu'il s'agissait précisément d'établir.

La formule (81), maintenant établie, et utilisée en revenant à la notation $h = i + 2$, permet de donner l'expression monôme définitive de $T_{b,h}$:

$$T_{b,h} = \frac{(-1)^{h-1} (2b - 2h + 2)!}{(b - h + 1)!\, b!} \cdot \frac{(2h-2)!}{(h-1)!\, h!} \cdot (2b + h)_{h-2}$$

$$= \frac{(-1)^{h-1} (2b - 2h + 2)!}{h!\, (b - h + 1)!} \cdot \frac{(2h-2)!}{(h-1)!} \cdot \frac{(2b+h)!}{b!\, (2b+2)!}$$

3.3.9. Cas où $h = 0$ et $h = 1$.

L'expression $T_{b,h}$ a été introduite au §3.3.3 pour servir au calcul de $f(a, b; b)$ par la formule (76), que l'on peut écrire

$$f(a, b; b) = \sum_h \frac{2(-1)^h (a+2b)!}{(a-h)!(2b+h)!} T_{b,h} \tag{83}$$

La sommation doit s'étendre à $h = 0, 1, \ldots, a$, alors que $T_{b,h}$ n'a été défini que pour $h \geqslant 2$. Pour régler les cas $h = 0$ et $h = 1$, il faut remonter à la formule (75) afin de donner un sens à $T_{b,h}$.

Le calcul pour $h = 0$ est immédiat et conduit à poser par convention

$$T_{b,o} = \frac{(2b-1)!}{(b-1)!\,(b+1)!} .$$

Quant au cas où $h = 1$, il oblige à calculer

$$-C_{2b+1}^{b+1} + 2C_{2b+1}^{b+2} - 2C_{2b+1}^{b+3} + \ldots,$$

ce qui, on le voit immédiatement, est égal à $-\dfrac{(2b)!}{b!\,(b+1)!}$.

On est ainsi amené à poser

$$T_{b,1} = \frac{(2b-1)!}{(b-1)!\,(b+1)!}$$

même valeur que $T_{b,o}$, ce qui importe peu, mais surtout valeur conforme à l'expression générale de $T_{b,h}$ établie précédemment pour $h = 2$.

Il sera finalement commode d'introduire la suite $u_o\, u_1\, u_2 \ldots u_n \ldots$ définie par $u_o = -\frac{1}{2}$ et $u_n = (2n-2)_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$, ce qui permet d'écrire à partir de (83), et compte tenu de ce qu'est $T_{b,h}$:

$$f(a, b; b) = -\frac{2(a+2b)!}{a!\,b!\,(2b+2)!} [C_a^o\, u_o\, u_{b+2} + C_a^1\, u_1\, u_{b+1} + \ldots + C_a^a\, u_a\, u_{b-a+2}]. \tag{84}$$

3.3.10. Monôme définitif.

Il suffit de faire subir une dernière transformation à l'expression entre crochets ci-dessus. On peut pour cela remarquer, ce qui est aisé à établir, que la suite $u_o\ u_1 \ldots\ u_n \ldots$ a pour fonction génératrice de Blissard

$$g(t) = -\frac{1}{2}(1-4t)^{\frac{1}{2}} = u_o + u_1 \frac{t}{1\,!} + \ldots + u_n \frac{t^n}{n\,!} + \ldots$$

L'expression entre crochets n'est autre, alors, que le coefficient de $\frac{t^a}{a\,!}$ dans le développement du produit de $g(t)$ par sa $(b-a+2)$-ième dérivée $g^{(b-a+2)}(t)$.

Or la dérivée $(n+1)$-ième de $g(t)$ est donnée par

$$g^{(n+1)}(t) = (2n)_n\,(1-4t)^{-\frac{1}{2}-n}$$

d'où

$$g(t)\ g^{(n+1)}(t) = -\frac{1}{2}(1-4t)^{-n}$$

Dans le développement de cette dernière expression, le coefficient de $\frac{t^a}{a\,!}$ est

$$-\frac{1}{2}(-n)_a\,(-4)^a = -2^{2a-1}(n-1+a)_a\ ;$$

d'où, en remplaçant n par $b-a+1$,

$$-2^{2a-1}(b)_a = -2^{2a-1}\frac{b\,!}{(b-a)\,!}$$

C'est donc cela la valeur du crochet de (84) ; ce qui conduit à l'expression définitive

$$f(a\,,b\,;b) = 2^{2a} \times \frac{(a+2b)\,!}{a\,!\ (2b+2)\,!} \times \frac{(2b-2a+2)\,!}{(b-a)\,!\ (b-a+1)\,!} \qquad (85)$$

Bien entendu pour $a = 0$ on retrouve ainsi l'expression connue

$$f(0\,,b\,;b) = \frac{(2b)\,!}{b\,!\ (b+1)\,!}\ .$$

L'autre cas extrême, plus intéressant, est celui où $b = a$; on a alors

$$f(a\,,\,a\,;a) = \frac{2^{2a}\,(3a)\,!}{(a+1)\,!\;(2a+1)\,!} \tag{86}$$

d'où numériquement

a =	0	1	2	3	4	5	6	7...
f(a, a;a) =	1	2	16	192	2.816	46.592	835.584	15.876.096...

Notons, comme une curiosité (facile à établir), que ces nombres redonnent les sommes des lignes successives des coefficients $a_n^{(h)}$ (tableau du § 3.3.3.).

3.3.11. Interprétation algorithmique.

Dans le langage figuré introduit au § 3.1, E = (a, b ; b) représente une forme particulière d'encoignure, pour laquelle une aile (ou peut-être les deux) est aussi haute que le pilier.

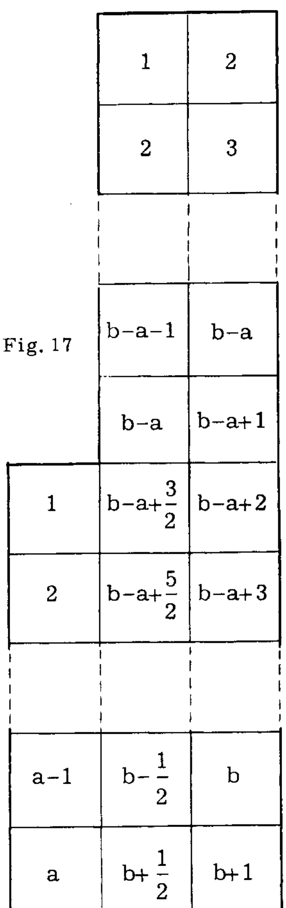


Fig. 17

Or il est aisé de vérifier que la formule (85) peut, au prix d'un simple changement d'écriture, se mettre sous la forme

$$f(a, b;b) = \frac{(a+2b)\,!}{a\,!\;.\;\left(b+\frac{1}{2}\right)_a\;(b-a)\,!\;.\;(b+1)_b} \tag{87}$$

Sous cette forme il apparaît que la puissance de l'encoignure E = (a, b ; b) s'obtient en divisant la factorielle de a + 2b (nombre de cubes du solide normal particulier E) par un produit de a + 2b facteurs qui peuvent être "affectés", d'une manière plus ou moins naturelle, à ces cubes. Cette affectation est symbolisée sur la figure 17, qui représente l'encoignure (a , b ; b) en quelque sorte "dépliée" suivant son pilier ; les facteurs correspondant à l'aile gauche, au pilier et à l'aile droite sont séparés par des points au dénominateur de la formule (87).

L'analogie de ce résultat avec le théorème de Frame-Robinson-Thrall (§ 2.2.4) est frappante. Toutefois parmi les généralisations naturelles de la notion d'*équerre* (§ 2.2.3) qui permettraient une formulation simple de ce résultat, aucune ne semble appropriée à l'étude de solides normaux plus généraux.

3.4. REMARQUES SUR LE DOMAINE D'APPLICATION DES EXPRESSIONS MONOMES -

3.4.1. Encoignures quelconques.

Les puissances des encoignures correspondant aux points (a, b ; c) autres que les points-frontières de **E** ne se laissent pas calculer à l'aide d'expressions monômes simples dont (85) et (86) seraient des classes particulières. Il suffit pour s'en convaincre de vérifier que f(2, 2 ; 4) = 174 : ce nombre présente, malgré la simplicité et la symétrie de l'encoignure (2, 2 ; 4), un facteur premier 29 qui ne résulte manifestement pas d'un développement monôme.

3.4.2. Encoignures généralisées.

Nous entendons par là des solides normaux entièrement formés de cubes qui touchent soit le plan xOz soit le plan yOz (dans la disposition de la figure 15). La figure 18 en montre un de sept cubes, dont la puissance peut se calculer par énumération directe et se trouve être égale au nombre premier 61 ; pour celui de la figure 19, dont les douze cubes ont cependant une disposition particulièrement simple, la puissance est égale à 5471, nombre également premier.

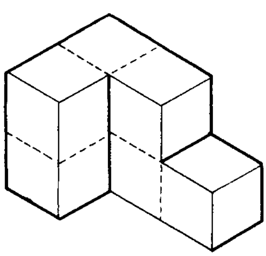


Fig. 18.

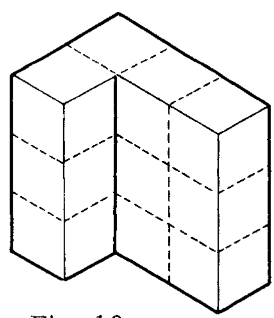


Fig. 19.

Ces constatations ne laissent pas grand espoir à la recherche de formules monômes.

3.4.3. Parallélépipèdes.

Les parallélépipèdes $p \times q \times r$ (solides normaux de degré 1) ont été envisagés au § 3.1.3. du point de vue de leur *richesse*, qui avait précisément une expression monôme (formule (55)). En ce qui concerne leur *puissance*, il paraît n'en être pas de même. Pour le cube $2 \times 2 \times 2$, une énumération rapide donne une puissance égale à 48, ce qui pourrait encore laisser croire à une expression monôme générale. Mais pour le parallélépipède $2 \times 2 \times 3$, le plus simple après le cube en question, on peut également sans trop de peine faire un calcul direct de la puissance, et l'on trouve 2452 : il apparaît dans ce résultat un facteur premier 613 qui ne provient évidemment d'aucune expression monôme simple.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. ANDRE - *Solution directe du problème résolu par M. BERTRAND,* C.R. Acad. Sci., Paris, vol. 105 (1887), pp. 436-437.

[2] J. BERTRAND - *Solution d'un problème,* C.R. Acad. Sci., Paris, vol. 105 (1887) p. 369.

[3] S. CHOWLA, I.N. HERSTEIN and K. MOORE - *On recursions connected with symmetric groups,* Canadian Journal of Math., vol. 3 (1951), pp. 328-334.

[4] E.F. DRION - *Some distribution-free tests for the difference between two empirical cumulative distribution functions,* Annals of Math. Statistics, vol. 23 (1952), pp. 563-574.

[5] P. DUFRESNE - *Problèmes de dépouillements,* Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris, vol 5, fasc. 2 (1956), pp. 75-89.

[6] J.S. FRAME, G. de B. ROBINSON, R.M. THRALL - *The hook graphs of the symmetric groups,*Canadian Journal of Math., vol. 6 (1954), pp. 316-323.

[7] H. GUPTA - *Tables of Partitions,* Madras (1939).

[8] G.H. HARDY - *Trois problèmes célèbres de la théorie des nombres* (trad. A. SALLIN), P.U.F. Paris (1931).

[9] D. KÖNIG - *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen,* Leipzig (1936) ; réimpr. Chelsea, New-York (1950).

[10] P.A. MAC-MAHON - *Combinatory Analysis,* Cambridge (1915-1916); réimpr. Chelsea, New-York (1960).

[11] C. SCHENSTED - *Longest increasing and decreasing subsequences ,* Canadian Journal of Math., vol. 13 (1961), pp. 179-191.

[12] A. YOUNG - *On quantitative substitutional analysis,* Proc. London Math. Soc., vol. 34 (1902), pp. 361-397.

[13] A. YOUNG - *On quantitative substitutional analysis,* Proc. London Math. Soc., (2), vol. 28 (1927), pp. 255-292.

INDEX TERMINOLOGIQUE

renvoyant à la définition de chaque terme mentionné