

CAHIERS DU BURO

A. TORTRAT

Processus à accroissements indépendants

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle.
Série Recherche, tome 5 (1964), p. 17-33

http://www.numdam.org/item?id=BURO_1964__5__17_0

© Institut Henri Poincaré — Institut de statistique de l'université de Paris, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDÉPENDANTS *

par

A. TORTRAT

1/ INTRODUCTION

Commençons par un exemple très simple :

1 - PROCESSUS DE MORT.

Un individu I observé à partir du temps 0 meurt à l'instant t aléatoire. On suppose que ce temps t est une réalisation d'une variable aléatoire (v. a.) T de loi définie par

$$\text{Prob. } \{T < t\} = P(t).$$

La probabilité d'être en vie à l'instant t (ou t-0 si l'on veut être plus précis) est $Q(t) = 1 - P(t)$. La probabilité conditionnelle, I étant en vie au temps t, que I le soit encore au temps t + t' est $Q(t + t')/Q(t)$.

Posons $Q(t) = e^{-p(t)}$; p(t) est une fonction ≥ 0 , croissant (au sens large) avec t, nulle en t = 0 et à cela près arbitraire. On a

$$Q(t + t')/Q(t) = e^{-\Delta p} \quad \Delta p = p(t + t') - p(t).$$

Si Δp croît avec t, pour tout t' fixe, c'est que la fonction p(t) est "convexe" (l'ensemble des points du plan y x t, avec (t \geq 0) y \geq p(t) est un ensemble convexe, par exemple $\frac{dp(t)}{dt}$ existe et croît avec t). On peut dire que l'individu vieillit (V sur la figure) lorsque t \uparrow car

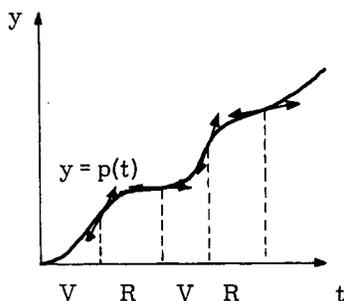
* L'exposé précédent, de M. Girault, recoupe et complète celui-ci en ce qui concerne I et II, et pourra, de préférence être lu avant.

$$p(t + t') - p(t) > p(t') - p(0) = p(t') ,$$

au contraire il rajeunit (R) durant tout intervalle de temps pour lequel la courbe représentative de $y = p(t)$ est concave. Il ne vieillit pas (sous-entendu ne rajeunit pas non plus) si $\frac{dp(t)}{dt} = \text{cste}$ ou $p = \frac{t}{A}$,

$$P(t) = 1 - e^{-t/A} ;$$

A est la période ou temps pour lequel la probabilité de mort est $1 - 1/e$.



Si nous considérons une population de N individus, par exemple N atomes radioactifs supposés indépendants les uns des autres, le processus de mort (ou désintégration) est défini aussi simplement : le nombre $K(t)$ d'atomes désintégrés au temps t est une v. a. de moyenne $N P(t)$, et à partir de l'instant t_0 tout se passe comme si on recommençait une expérience nouvelle avec $N(t) = N - K(t)$ atomes, neufs, puisque ceux qui sont encore en vie n'ont pas vieilli (hypothèse vérifiée on le sait avec une grande précision).

La loi de $K(t)$ est celle d'une épreuve de Bernoulli (de probabilité $P(t)$, N fois répétée) soit

$$P_r \{K(t) = k\} = \binom{N}{k} p^k (1 - p)^{N-k}, \quad \text{avec } p = P(t).$$

L'expérience, à partir d'un instant t dépend du passé uniquement par le nombre $N(t)$ d'atomes restant en vie à l'instant t , et ne dépend pas de la façon (c'est-à-dire des temps $t_1, \dots, t_{K(t)}$ auxquels ...) dont ces atomes se sont désintégrés. C'est dire qu'on a là un processus de Markoff : la loi des événements postérieurs à $t (> t)$ ne dépend du passé que par le présent $K(t)$.

2 - PROCESSUS DE MORT RENOUVELE

Soit

$$P(t) = e^{-\frac{t}{\lambda}} \quad (1)$$

Supposons qu'à l'instant t_1 où meurt I_1 , nous le remplaçons par I_2 de même loi (1) ; on peut considérer I_2 comme "neuf" (peu importe vu la loi de non vieillissement choisie) ; il suffit de savoir qu'au temps t_1 existe I_2 dont le futur ne dépend pas du passé (en fait, savoir si c'est I_2 ou I_1). Nous recommençons au temps aléatoire t_2 où meurt I_2, \dots, I_k meurt au temps t_k réalisation de la v. a. $T_k = \sum_1^k U_i$, avec $U_1 = T_1$, les U_i étant des v. a. indépendantes et de même loi $P\{U < t\} = P(t)$. En effet la loi de U_k ne dépend pas d'un conditionnement par t_1, \dots, t_{k-1} (avec $u_i = t_i - t_{i-1}$). On a

$$P_r \{U_k < u \mid U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}\} = e^{-\frac{u}{\lambda}} = P_r \{U < u\}.$$

Nous associons au processus ainsi défini par ces U_k (aussi bien les T_k) la fonction aléatoire $K(t)$ égale au nombre d'événements E (la mort d'un I) réalisés en des instants $\leq t$ (pour chaque t donné), soit $\{K(t) = k\} \iff t_k \leq t < t_{k+1}$ où t_k est le temps du dernier E réalisé avant t .

$K(t)$ est une fonction aléatoire, c'est-à-dire que pour chaque t c'est une v. a. définie sur un même espace des épreuves (pratiquement la suite u_1, \dots, u_k, \dots).

$K(t)$ est un nombre entier qui \uparrow (au sens large) avec t et possède les propriétés suivantes :

A - Il est à accroissements indépendants, c'est-à-dire que les divers événements $\{K(t') - K(t) = l\}$, (t, t' donnés, l variant) conditionnés par $K(t_1), \dots, K(t_n)$ ($t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t$), ont des probabilités qui ne dépendent pas de ces nombres $K(t_i)$, donc en fait ne dépendent ni de $K(t)$, ni des instants $t_1, \dots, t_{K(t)}$ auxquels

ces E antérieurs à t se sont réalisés ; (noter que

$$K(0) = 0, K(t_1) = K(t_1) - K(0),$$

et que se donner les $K(t_i) - K(t_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$, équivaut à se donner les $K(t_i)$. On montre en effet et cela paraît évident, que puisque quel que soit $K(t) = k$, et le nombre t_k correspondant, la loi de $T_{k+1} - t$, ici conditionnée par $T_{k+1} - t > 0$, ne dépend ni de k ni des t_i ($i < k$), la loi de $T_{k+1} - t$ est celle de T_1 et de même celle de $T' - t$, T' étant l'instant du premier E postérieur à t :

$$P_r \{T' < t + u\} = e^{-\lambda u}$$

De même la loi de tous les $T_k > t$, donc d'un ou plusieurs accroissements disjoints et postérieurs à t de $K(t)$, en particulier celle de $K(t') - K(t)$, ne dépend pas de connaissances antérieures (\leq) à t.

B - Cette loi des $T_{k+1} - t$, $T_{k+2} - t$, ... ($K = K(t)$) est la même que celle des T_k à partir du temps 0, U_1 étant remplacé par $T_{k+1} - t$, et U_i par U_{k+i} . Il revient au même de dire que la loi du processus $K(t') - K(t)$ (t fixé) est celle de $K(t' - t)$, on dit que le processus est homogène dans le temps*.

C - Il importe enfin de préciser que la probabilité est nulle que deux E se produisent en même temps, car dans l'espace des v.a. $T_1, \dots, T_{k+1}, \dots$ l'évènement $T_k = T_{k+1}$ (par exemple) a une probabilité nulle, donc aussi ce même évènement pour k quelconque.

Remarques.

1/ La nature de E n'intervient pas, ce peut par exemple être l'arrivée d'une personne à un guichet ou d'un bateau dans un port (étude de files d'attente).

2/ Réunir N processus identiques à celui-ci et indépendants, n'altérera aucune des propriétés A, B, C (et $K(t)$ entier), et aura pour seul effet de multiplier les moyennes, telle $\overline{K(t)}$ par N.

* Ou "uniforme", cf. l'exposé "Le processus ponctuel de Poisson".

3 - PROCESSUS DE MARKOFF DISCRETS DANS LE TEMPS ET L'ESPACE

Un système possède un nombre fini ou dénombrable d'états numérotés $1, 2, \dots, i, \dots$ et aux instants $1, 2, \dots, n, \dots$, évolue aléatoirement suivant la loi de transition stationnaire dans le temps :

$$P_{ij} = P_r \{X_{n+1} = j \mid X_n = i\}.$$

X_n désigne l'état occupé à l'instant n . Les transitions aux divers instants sont supposées indépendantes : la loi de $X_{n+1} \dots$, lorsque X_1, \dots, X_n sont connus ne dépend donc que de X_n , ceci définit la propriété de Markoff. Supposons que p_{ij} ne dépende que de $j - i$, alors le processus devient à accroissements indépendants (on le dit aussi homogène dans l'espace) : tout processus à accroissements indépendants est un cas particulier de processus de Markoff, le futur ne dépend que du présent et en dépend additivement : $j = i + (j - i)$. Si le nombre des états égale a fini, l'addition des i se fait modulo a (on prend le reste de la division par a). L'exemple le plus simple est celui de la "marche au hasard" suivante : à chaque instant n , X_n s'accroît de ± 1 (avec des probabilités égales à $\frac{1}{2}$) :

$$X_n = \sum_1^n \xi_k, \quad (2)$$

les ξ_k étant des v.a. indépendantes, à valeurs ± 1 (probabilités égales), $X_0 = 0$. Dans tous les cas l'étude de la suite X_n est liée étroitement à celle de l'itération de la matrice $P = |p_{ij}|$:

$$P^k = |P_{ij}^{(k)}|, \quad P_{ij}^{(k+1)} = \sum_i P_{ii}^{(k)} P_{ij}, \quad P_{ij}^{(k)} = P_r \{X_{n+k} = j \mid X_n = i\}.$$

2/ ETUDE DU PROCESSUS DE POISSON. C'est le processus défini en I-2.

1 - PARTONS DE LA CONSTRUCTION INITIALE, et posons $\lambda = \frac{1}{A}$.

La loi de U a pour fonction caractéristique

$$\int_0^\infty e^{i\theta u} d\{1 - e^{-\lambda u}\} = \int_0^\infty \lambda e^{-u(\lambda - i\theta)} du = \frac{\lambda}{\lambda - i\theta}$$

Celle de $T_n = \sum_1^n U_i$ est donc $\left\{ \frac{\lambda}{\lambda - i\theta} \right\}^n$, ainsi T_n est la loi de densité

$$\lambda^n e^{-\lambda u} \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} \quad u > 0 \quad (3)$$

car

$$\int_0^\infty e^{i\theta u - \lambda u} \frac{\lambda^n u^{n-1}}{(n-1)!} du = \int_0^\infty \frac{\lambda^n e^{-v} v^{n-1}}{(n-1)! (\lambda - i\theta)^n} dv = \frac{\lambda^n}{(\lambda - i\theta)^n}$$

La probabilité de $\{K(t) = k\}$ s'obtient en intégrant par rapport à τ (valeur de T_k) de 0 à t (et pour la loi (3) de T_k) la probabilité conditionnelle que T_k valant τ , T_{k+1} soit $> t$, c. a. d. $e^{-\lambda(t-\tau)}$:

$$P_r \{X(t) = k\} = \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} \frac{\lambda^k e^{-\lambda\tau} \tau^{k-1}}{(k-1)!} d\tau = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}. \quad (4)$$

La loi de $X(t)$ est donc la loi de Poisson (de "pas" unité), de paramètre λt nécessairement proportionnel au temps vu les propriétés A et B.

2 - ON RETROUVE (3) EN PARTANT DES PROPRIETES CARACTERISTIQUES A, B, C (et $K(t)$ entier) : partageons l'intervalle $]0, t_0]$ en n intervalles égaux τ_i, τ_{i+1} , de longueur $\tau = \frac{t_0}{n}$; pour n assez grand (aléatoire) ces intervalles séparent les instants (aléatoires) $t_1, \dots, t_{K(t)}$ où E s'est produit, donc $X(t_0) =$ la limite (lorsque $n \rightarrow \infty$) du nombre des intervalles $]\tau_i, \tau_{i+1}]$ où

$$X(\tau_{i+1}) - X(\tau_i) \neq 0. \quad (5)$$

Or les évènements (5) ont même probabilité, soit $p(\tau) \leq \overline{K(t_0)}$ (le trait désignant la moyenne), leur nombre obéit à une loi de Bernoulli et on a

$$[1 - p(\tau)]^n = 1 - p(t_0) = P\{K(t_0) = 0\};$$

on en déduit

$$\frac{1}{t_0} \text{Log} (1 - p(t_0)) = \frac{1}{\tau} \text{Log} (1 - p(\tau)) = \lim_{\tau = \frac{t_0}{n} \rightarrow 0} \frac{p(\tau)}{\tau} = \lambda.$$

Alors la loi de Bernoulli en question, qui dépend de n , tend, lorsque $n \rightarrow \infty$ et $n p(\tau) = t_0 \frac{p(\tau)}{\tau} \rightarrow \lambda t_0$, vers la loi de Poisson de paramètre λt_0 , c'est celle de $K(t_0)$. λ est indépendant de t_0 vu la propriété B (on peut tirer ce résultat de la démonstration précédente en la compliquant légèrement, en prenant des intervalles de longueur $\tau \rightarrow 0$, il y en a $\left[\frac{t_0}{\tau} \right]$, partie entière de $\frac{t_0}{\tau}$, plus un autre plus petit).

3 - CONDITIONNELLEMENT LORSQUE $K(T) = N$ (T DONNE), la répartition de T_1, \dots, T_n est "uniforme" sur le segment $]0, T]$. Ainsi une façon simple de définir le processus est d'envisager les processus de Bernoulli $K(t)/N$ pour $t \leq T$, puis de les pondérer, N variant suivant la loi de $K(T)$, loi de Poisson de paramètre λT . Une autre façon est encore de faire tendre T vers $+\infty$ en prenant $N = [\lambda T]$ (partie entière de) : la probabilité que $T_k \in]t, t + \delta]$ (k, t, δ donnés) est $\frac{\delta}{T}$ (pour N donné) et $T \rightarrow \infty$ tandis que son produit par $N \rightarrow \lambda \delta$; donc la loi de Bernoulli sur cet intervalle tend vers la loi de Poisson de paramètre $\lambda \delta$. De même la loi multinomiale donnant les nombres de T_k (toujours pour N donné) sur r intervalles fixes contenus dans $]0, T]$, tend lorsque $T \rightarrow \infty$ vers le "produit" des lois de Poisson correspondantes, et on retrouve, à la limite, c'est-à-dire pour le processus $K(t)$ lui-même l'indépendance des accroissements :

Soit tout d'abord $\Delta =]t, t']$ un intervalle $\in]0, T]$. L'évènement $K(t') - K(t) = k$, conditionné par $K(T) = N$, a pour probabilité :

$$p_N(k) = \binom{N}{k} \left(1 - \frac{l}{T}\right)^{N-k} \left(\frac{l}{T}\right)^k, \quad \text{avec } l = t' - t, \quad (6)$$

car cette dernière s'obtient en divisant la probabilité de l'évènement $\{K(t') - K(t) = k, K(T - l) = N - k\}$,

soit

$$e^{-\lambda l} \frac{(\lambda l)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda(T-l)} \frac{[\lambda(T-l)]^{N-k}}{(N-k)!} = e^{-\lambda T} \frac{\lambda^N l^k (T-l)^{N-k}}{k! (N-k)!},$$

par la probabilité $e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^N}{N!}$ de $\{K(T) = N\}$, d'où (5).

Tout se passe donc comme si on choisissait au hasard et indépendamment N instants t sur $]0, T]$, en les ordonnant on obtient $T_1 \dots T_n$ (v.a. conditionnées par $K(T) = N$) ; alors la loi des nombres k_1, \dots, k_r de T_n "tombant" dans les intervalles $\Delta_1, \dots, \Delta_r$ de longueurs l_1, \dots, l_r , est, pour $K(T) = N$ donné, la loi multinomiale.

$$P\{\Delta_i K(t) = k_i, i = 1, \dots, r \mid K(T) = N\} = \frac{N!}{(N-k)! \prod_1^r k_i!} \prod_1^r \left(\frac{l_i}{T}\right)^{k_i} \left(1 - \frac{l}{T}\right)^{n-k}$$

avec
$$\sum_1^r l_i = l, \quad \sum_1^r k_i = k,$$

$$= \prod_1^r \left\{ \left(l_i \frac{N}{T}\right)^{k_i} \frac{1}{k_i!} \right\} \left[\left(1 - \frac{l}{T}\right)^{n-k} \frac{N(N-1) \dots (N-k+1)}{N^k} \right]$$

$$\xrightarrow{T \rightarrow \infty} \prod_1^r \left\{ e^{-\lambda l_i} \frac{(\lambda l_i)^{k_i}}{k_i!} \right\},$$

car le crochet tend lorsque $T \rightarrow \infty$ et $\frac{N}{T} \rightarrow \lambda$, vers

$$e^{-\lambda l} = \prod_1^r e^{-\lambda l_i}.$$

Ainsi définissant le processus $K(t)$ par sa loi conditionnée de Bernoulli, nous retrouvons l'indépendance des accroissements fixes $\Delta K(t)$ et l'homogénéité du processus puisque les lois des ΔK ont des moyennes $\Delta K = \lambda l$ proportionnelles à l'intervalle de temps l , paramètres des lois de Poisson correspondantes.

4 - NOTONS D'AUTRES PROPRIETES REMARQUABLES

$K(t)$ n'a aucun saut fixe, et est, pour chaque t_0 donné, continu avec probabilité 1 ; plus précisément la probabilité que $K(t)$ soit constant sur $]t_0 - \eta, t_0 + \eta]$ est

$$P_r \{K(t_0 + \eta) - K(t_0 - \eta) = 0\} = P_r \{K(2\eta) = 0\} = e^{-2\lambda\eta} \sim 1 - 2\lambda\eta$$

et croît vers 1 lorsque η décroît vers 0.

L'évènement limite, lorsque $\eta \downarrow 0$, consiste en ce que $K(t)$ est constant sur un intervalle $t_0 - \eta, t_0 + \eta$ assez petit (η aléatoire), c'est par exemple l'intersection de tous ces évènements pour

$\eta = \frac{1}{2^i}$, $i = 1, 2, \dots$. Sa probabilité est $\lim_{\eta \rightarrow 0} e^{-2\lambda\eta} = 1$, et à fortiori, $K(t)$ est bien continue en t_0 , avec cette même probabilité (ou "presque sûrement"). Et pourtant $K(t)$ ne varie que par sauts unités.

On retrouve facilement, partant des propriétés A-B-C, la loi de l'intervalle de temps séparant deux sauts consécutifs (que nous connaissons par la construction du n° 1-2), et leur indépendance. En effet la probabilité pour que $K(t)$ soit constant sur les intervalles $]0, t_1]$, $]t_1 + dt_1, t_2]$, ... $]t_{k-1} + dt_{k-1}, t_k]$ (t_i, dt_i donnés, les t_i étant fixés) et subisse un saut sur $]t_1, t_1 + dt_1]$, ..., équivaut à (puisque $e^{-\lambda dt_i} \lambda dt_i \sim \lambda dt_i$)

$$\prod_1^k \{e^{-\lambda u_i} \lambda dt_i\}, \quad u_i = t_i - t_{i-1}.$$

C'est dire que la loi des variables T_1, \dots, T_k a pour densités $\lambda_i^k \prod_1^k e^{-\lambda u_i}$, et, le jacobien du changement de variable ($t_i \rightarrow u_i$) $t_i = \sum_1^i u_j$ valant 1, que la loi simultanée de U_1, \dots, U_k est définie par la densité

$$\prod_1^k \{e^{-\lambda u_i} \lambda\}.$$

On retrouve bien l'indépendance des U_i , et leur loi commune (cf. (1)).

Terminons cette partie par une extension importante :

5 - PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDEPENDANTS DERIVES D'UN PROCESSUS DE POISSON

Supposons que les sauts de $K(t)$ (en T_1, \dots, T_k, \dots) ne soient plus égaux à 1 mais choisis au hasard et indépendamment suivant une loi définie par la fonction de répartition $F(x)$: en T_i se place l'accroissement X_i (la fréquence (relative) moyenne des sauts appartenant à une intervalle Δ de la droite des x est ΔF et $K(t)$ devient

$$X(t) = \sum_{T_i < t} X_i. \quad (7)$$

On peut aussi bien considérer les points $t \times x$ du demi-plan $t > 0$: pour $K(T) = N$ fixé ces points sont, d'après le n° 3 ci-dessus choisis au hasard suivant la loi $\frac{dt}{T} \times dF = d\mu$ (loi uniforme pour t , loi définie par F pour x) et N variant suivant la loi de Poisson de paramètre λT , on voit que dans tout domaine R du plan, le nombre de points suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda T \times$ la mesure de ce domaine (pour la loi dite ci-dessus) :

En effet, partageons la bande $0 < t \leq T$ du plan en r régions R_1, \dots, R_r de probabilités p_1, \dots, p_r pour la loi μ ; pour N fixé, on a $N = \sum_1^r k_i$, avec

$$P \{k_1, \dots, k_r\} = \frac{N!}{k_1! \dots k_r!} p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}.$$

Pour obtenir la probabilité qu'il y ait k_i points exactement dans R_i lorsque $N(T) = N$ est aléatoire et obéit à la loi de Poisson de paramètre λT , il suffit de multiplier par $e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^N}{N!}$ puisque $N = \sum_1^r k_i$ est donné par les k_i , d'où

$$P \{k_1, \dots, k_r\} = e^{-\lambda T} (\lambda T)^N \prod_{i=1}^r \frac{p_i^{k_i}}{k_i!} = \prod_{i=1}^r \left\{ e^{-\lambda T p_i} \frac{(\lambda T p_i)^{k_i}}{k_i!} \right\}.$$

Ainsi nous trouvons que les "accroissements" dans le plan, c'est-à-dire les nombres de points dans les régions R_1, \dots, R_r , sont indépendants (la loi de k_1, \dots, k_r est le "produit" des lois de k_1, \dots, k_r), et ont des lois qui ne dépendent que de la mesure correspondante $\mu(R_i)$. Le paramètre de chacune de ces lois de Poisson est $\lambda T p_i$, c'est la fréquence moyenne (rapportée à N) du nombre de points "tombés" dans R_i .

Nous voyons avec quelle facilité se définit un processus de Poisson dans un espace quelconque S : c'est une variable aléatoire entière $K(R)$, fonction de la partie R de S , telle que à r régions distinctes correspondent des variables $K(R_1), \dots, K(R_r)$ indépendantes, la moyenne $\overline{K(S)}$ du nombre total de points étant partagée, si $S = \sum_1^r R_i$, entre les R_i , suivant la loi de probabilité μ sur S : $\overline{K(R_i)} = \lambda' \mu(R_i)$ (ci-dessus $\lambda' = \lambda T$). Ces moyennes définissent parfaitement les lois de Poisson correspondantes, celles des $K(R_i)$.

Revenons au cas du plan et à la formule (7) :

$X(t)/K(t) = N$ a pour loi celle de $\sum_1^N X_i$, les X_i étant indépendantes et de loi F , la fonction caractéristique est donc $\varphi^N(\theta)$, si $\varphi(\theta)$ est celle commune aux X_i , d'où pour $X(t)$ la fonction caractéristique

$$\sum_{N=0}^{\infty} P_t(N) \varphi^N(\theta) \quad \text{avec} \quad P_t(N) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^N}{N!}, \quad \varphi(\theta) = \int e^{i\theta x} dF(x).$$

Ainsi la deuxième fonction caractéristique

$$\psi_t(\theta) = \text{Log } \Phi_t(\theta) \text{ de } X(t)$$

s'écrit

$$\psi_t(\theta) = \lambda t \int (e^{i\theta x} - 1) dF(x); \quad (8)$$

$\lambda t F(x)$ est le nombre moyen de sauts $< x$ intervenant avant l'instant t . On peut aussi écrire la probabilité relative à $X(t)$:

$$\exp(\lambda t \mu) = e^{-\lambda t} \sum_0^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mu^{*n} \quad (9)$$

μ étant la mesure de probabilité définie par $F(x)$, μ^{*n} sa n -ième convoluée c'est-à-dire celle correspondant à la loi de $\sum_1^n X_i$.

Si par exemple les T_i sont les temps d'arrivées à un même guichet, suivant la loi de Poisson de paramètre λt , et si les X_i sont les temps de service (indépendants et de même loi) pour chaque client, $X(t)$ est le temps de travail à ce guichet nécessaire pour servir les personnes arrivées antérieurement à t .

Le processus à accroissements indépendants le plus général (sous la restriction que $|X(t)|$ est petit avec t , sauf une probabilité, elle aussi arbitrairement petite avec t), est constitué de deux processus de ce type, indépendants, dont l'un dérive du précédent par une légère extension, et dont l'autre est le processus gaussien dit de Wiener-Lévy ou du mouvement brownien dont il est parlé en la partie III ci-dessous.

3/ PROCESSUS GAUSSIENS. (LOIS NORMALES).

Revenons à la promenade au hasard (2), mais en faisant des changements d'échelle sur le temps est l'espace :

Soit $N = 2^n$ et $X_n\left(\frac{k}{N}\right) = \sum_1^k \pm \frac{1}{\sqrt{N}}$; c'est un processus discret dans le temps, qu'on peut aussi bien définir pour tout t , en posant $X_n\left(\frac{k}{N}\right) = X_n(t)$ pour tout $\frac{k}{N} \leq t < \frac{k+1}{N}$, ou mieux en interpolant linéairement ; la variance en ces temps discrets est $\frac{k}{N} =$ ce temps lui-même.

Lorsqu'on passe de $N = 2^n$ à $2^{n+1} = N'$, on affine le processus ; passons à la limite lorsque n et $N \rightarrow \infty$. Chaque loi de $X_n(t)$, avec $t = \frac{k}{2^p}$ ($N \geq 2^p$), tend vers une loi normale centrée de variance t . De même la loi de $X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)$, $t_k = \frac{k}{2^{pk}}$, $N \geq 2^{pk}$, pour tout k , ou aussi bien celle multinomiale des v. a. ind. $X_n(t_1), X_n(t_2) - X_n(t_1), \dots$, tendent vers les lois normales (à k dimensions) ; la fonction de répartition des accroissements

$$U_k(N) = X_n(t_k) - X_n(t_{k-1})$$

est

$$F_n(u_1, \dots, u_k) = \prod_1^k F_{n,k}(u_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_1^k \int_{-\infty}^{u_k} e^{-\frac{x^2}{2t_k}} dx ;$$

Un processus $X(t)$ est ainsi défini à la limite par sa loi temporelle sur les t binaires : $\frac{k}{2^n}$, il est à accroissements indépendants. On peut définir un ensemble dénombrable de variables $X\left(\frac{k}{2^n}\right)$ ($k < 2^n$, ou non) admettant ces lois temporelles, on peut montrer que à tout δ correspond η tel que la probabilité de l'évènement

$$\{\Delta t < \eta \implies \Delta X < \delta \text{ (tout intervalle } \Delta t)\}$$

soit $\geq 1 - \alpha(\eta, \delta)$ avec $\alpha(\eta, \delta) \underset{\eta \downarrow 0}{\downarrow} 0$, pour tout δ . C'est dire que par continuité, $X(t)$ est bien défini, et, sur presque toutes les épreuves, est une fonction continue de t .

Sachant que le processus est Gaussien, c. a. d. que toutes ses lois (de dimensions K) sont normales, il suffit pour préciser ces lois d'avoir, (puisqu'elles sont ici centrées : $\overline{X}(t) = 0$)

$$\text{Var}(X(t)) \quad \text{et} \quad \text{Cov}(X(t), X(t')).$$

Ici le processus est homogène : $\text{Var}(X(t)) = t$ (ou λt), à accroissements indépendants, ce qui équivaut à :

$$\text{Cov}(X(t), X(t')) = \inf(t, t') \quad (\text{parce que } = \text{Var}(X(t)) \text{ si } t < t').$$

Il existe des processus gaussiens qui ne sont pas à accroissements indépendants, (de même que des processus ayant, en chaque t , une loi de Poisson), celui-ci est le processus de Wiener-Lévy du mouvement Brownien.

Remarque - ΔX est en probabilité (c'est-à-dire sauf une probabilité arbitrairement petite avec Δt) de l'ordre de $\sqrt{\Delta t}$, donc $\frac{\Delta X}{\Delta t}$ ne peut tendre en probabilité vers une limite (à fortiori la probabilité est nulle que $X(t)$ soit, en t donné, dérivable par rapport à t).

Au processus on associe souvent la transformation suivante, qui a un sens physique : soit $f(x)$ une fonction assez régulière, par exemple continue et bornée de la valeur x de X . Il lui correspond au temps t , la fonction $T_t f = g$, définie par

$$g(x) = E \{f(X(t)) \mid X(0) = x\},$$

soit ici

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int e^{-\frac{1}{2} \frac{(y-x)^2}{t}} f(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int e^{-\frac{u^2}{2t}} f(x+u) du.$$

$g(x)$ est la valeur moyenne de la fonction $f(y)$ de l'état y du processus au temps t , sachant qu'au temps $0, X = x$. L'avantage, au lieu de considérer la probabilité de passage

$$P(x, dy, t) = P \{X(t) \in dy \mid X(0) = x\}$$

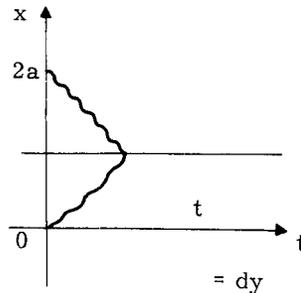
est qu'on peut choisir la famille de fonctions $f(x)$ considérées, pour ses propriétés mathématiques. Le fait que le processus soit de Markoff, et homogène dans le temps se traduit par la relation (dite de demi-groupe, par rapport à t) :

$$T_{t+t'} = T_t \cdot T_{t'}, \quad \text{ou} \quad T_{t+t'} f = T_t \{T_{t'} f\}.$$

$X(t)$ de Wiener-Lévy représente correctement un processus physique de diffusion, par exemple d'un ensemble de particules injecté au temps 0, à l'abscisse 0 dans un milieu liquide ou gazeux unidimensionnel. Un des problèmes importants est de connaître la probabilité d'atteindre la valeur $\pm a$, (une de ces valeurs seulement, ou l'une des deux), au cours du temps, soit :

$$(10) \quad P_r \left\{ \sup_{0 < t < \tau} x(t) \geq a \right\}, \quad \text{ou} \quad P_r \left\{ \sup_{0 < t < \tau} |x(t)| \geq a \right\}. \quad (10')$$

La solution en est simple, moyennant le principe des images dont la justification mathématique précise est possible ; la question est surtout simple pour le problème (10) dit à une barrière : si on établit en $x = a$ une barrière absorbante (par exemple une paroi à travers laquelle les particules diffusantes sont absorbées et disparaissent), la probabilité (10) est le complément de la "masse" restante au temps t . On réalise mathématiquement une telle barrière absorbante, en plaçant au point image (pour la barrière supposée être un miroir), une masse initiale 1 affectée du signe - ; étudions la diffusion de l'ensemble des deux masse +1 en 0, -1 en $2a$ (au temps 0). La masse -1 ne peut diffuser au delà de $x = a$, c'est-à-dire atteindre $x < a$ qu'en touchant à un certain instant la barrière les trajectoires étant continues avec probabilité 1), et, si cela est, elle se détruira avec la masse égale qui aura diffusé de 0 vers $x = a$, dans le même temps (minimum), vu la symétrie du processus. On voit que ce principe vaut pour tout processus à trajectoires presque sûrement continues, *et de Markoff**. On peut le démontrer sous certaines réserves concernant les propriétés de la fonctions g transformée de f . ($T_1 f = g$).



* Il s'agit ici d'une propriété dite de Markoff fort : la loi du processus, par exemple au temps t , conditionné par le temps τ aléatoire où les trajectoires sont supposées atteindre (par exemple pour la première fois) la barrière a , est la même que celle de $\{X(t - \tau) | X(0) = a\}$. Ainsi en intégrant cette loi par rapport à celle de τ (pour les trajectoires qui rencontrent la barrière avant le temps t) on aura la loi de $X(t)$ pour les trajectoires qui ont atteint cette barrière. On montre que cette propriété est ici vérifiée.

On a donc

$$P\{X(t) \in dy \mid X(0) = 0, X(\tau) < a\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left\{ e^{-\frac{y^2}{2t}} - e^{-\frac{(y-2a)^2}{2t}} \right\} dy, \quad (11)$$

et $P\{X(\tau) < a,$

$$\text{tout } \tau \leq t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left\{ \int_{-\infty}^a e^{-\frac{y^2}{2t}} dy - \int_{-\infty}^{-a} e^{-\frac{y^2}{2t}} dy \right\} = \int_{-a/\sqrt{t}}^{a/\sqrt{t}} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}.$$

On en déduit la densité d'absorption par rapport à t , dérivée par rapport à t de

$$1 - \int_{-a/\sqrt{t}}^{a/\sqrt{t}} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{du}{\sqrt{2\pi}}.$$

En particulier le rapport entre la densité en $y = 0$, de $X(t)$, et celle de $\{X(t), X(\tau) < a, \text{ tout } \tau < t\}$ est

$$1 - e^{-\frac{a^2}{2t}}.$$

On remarquera que (11) donne pour $y = a$ une densité toujours nulle, ce qui caractérise l'existence d'une barrière d'absorption en a , pour le processus issu de 0 . La méthode s'étend à deux barrières (limitation de $X(t)$ à $+a$ et $-b$) en introduisant une infinité dénombrable de masses images aux signes alternés (deux miroirs). Il est facile de l'étendre à un processus disymétrique et à des barrières seulement partiellement absorbantes : il est naturel d'imaginer qu'une paroi absorbe seulement une fraction constante des particules ayant diffusé vers elle, les autres poursuivant leur cheminement aléatoire.

Terminons par un exemple de processus Gaussien, c. a. d. à lois normales, mais non à accroissements indépendants, qui est un processus de Markov. Il se présente, par exemple, lors de l'étude asymptotique de la distribution d'un échantillon :

Soit (X_1, \dots, X_n) un échantillon d'une v. a. X de loi définie par la fonction de répartition $F(x)$ supposée continue.

Chaque échantillon (x_1, \dots, x_n) définit une répartition discontinue $F_n(x) = \frac{v_n(x)}{n}$, $v_n(x)$ étant le nombre des $x_i < x$; cette

répartition discontinue est aléatoire, elle définit (x variant de $-\infty$ à $+\infty$) un processus dont les lois temporelles sont binomiales ou multinomiales : la loi de $v_n(x)$ par exemple est :

$$P \{v_n(x) = k\} = \frac{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad p = p(x) = F(x).$$

Ce processus n'est pas à accroissements indépendants car

$$v_n(+\infty) = n$$

On sait (Th. de Glivenko-Cantelli), que, avec probabilité 1, on a

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

c. a. d. que $F_n(x)$ converge uniformément (presque sûrement) vers $F(x)$, fonction constante. Pour étudier plus précisément cette convergence, considérons

$$U_n(x) = \sqrt{n} \{F_n(x) - F(x)\}. \quad (12)$$

Les processus $U_n(x)$ ont des lois qui, lorsque $n \rightarrow \infty$, tendent vers la loi normale (soit de $U(x)$) de moyenne nulle, et de variance $F(x)$. De même on montre que la loi simultanée de

$$\{U_n(x_1), \dots, U_n(x_k)\}$$

tend vers une loi normale à K dimensions (soit de $U_1(x), \dots, U_k(x)$), centrée, et bien définie par

$$\text{Var} \{U(x_k) - U(x_{k-1})\} = [F(x_k) - F(x_{k-1})] [1 - (F(x_k) - F(x_{k-1}))]. \quad (13)$$

(13) donne en effet les moments du second ordre, tels que ($x' > x$)

$$\begin{aligned} \text{Cov} \{U(x), U(x')\} &= \mathfrak{K} \{U(x) \cdot U(x')\} = \\ &= \frac{1}{2} \left[F(x')(1 - F(x')) + F(x)(1 - F(x)) - \right. \\ &\quad \left. - (F(x') - F(x)) [1 - (F(x') - F(x))] \right] \\ &= F(x) [1 - F(x')]. \end{aligned}$$

L'accroissement $U(x') - U(x)$ n'est pas indépendant de $U(x) = U(x) - U(0)$ car on aurait alors

$$\pi\{u(x) \cdot u(x')\} = \pi\{u^2(x)\} = \text{Var}\{u(x)\} = F(x) [1 - F(x)].$$

D'une façon générale la covariance de deux accroissements disjoints ΔU , $\Delta U'$, est $-\Delta F \cdot \Delta' F$.

Les lois de $\sup_x U_n(x)$ et $\sup_x |U_n(x)|$ tendent lorsque $n \rightarrow \infty$, vers celles de $\sup_x U(x)$ et $\sup_x |(U(x))|$. Ces lois sont indépendantes de $F(x)$, car tous les processus $U(x)$ se ramènent au même si on pose $U(x) = V(y)$, avec $y = F(x)$.