

CAHIERS DU BURO

MAURICE GIRAULT

Stockage régulateur d'un écoulement continu

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle.

Série Recherche, tome 4 (1962), p. 41-61

http://www.numdam.org/item?id=BURO_1962__4__41_0

© Institut Henri Poincaré — Institut de statistique de l'université de Paris, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

STOCKAGE RÉGULATEUR D'UN ÉCOULEMENT CONTINU

par

Maurice GIRAULT

1. LA GESTION DES STOCKS

Pose de multiples problèmes très différents les uns des autres suivant les buts que l'on recherche et selon les moyens dont on dispose pour agir, soit sur les livraisons, soit sur les enlèvements. Nous voudrions étudier un type de problème qui se pose fréquemment aux grandes entreprises. Le mieux, pour le situer, est de donner quelques exemples :

1.1. 1er EXEMPLE

Une usine fonctionne en continu et d'une manière régulière. Elle est ravitaillée de façon continue par des chargements importants acheminés par trains, bateaux, etc... et provenant d'un fournisseur lointain, de sorte que l'on ne peut pas imposer exactement les dates $t_1, t_2 \dots t_n$ des livraisons successives. Il est nécessaire de constituer un stock tampon pour atténuer les fluctuations des arrivées.

1.2. 2e EXEMPLE

Il peut s'agir, au contraire, d'un produit fabriqué par une usine d'une manière continue et régulière, ce produit devant alimenter à son tour plusieurs usines éloignées de la première. Cette fois, les enlèvements sont discontinus et aléatoires. Ce problème est identique au premier, au signe près des quantités stockées; ou, si l'on préfère, au sens près de déroulement du temps.

1.3. 3e EXEMPLE

Enfin, ce peut être un stock intermédiaire, où à la fois les arrivées et les départs sont discontinus et aléatoires; mais avec cette particularité fondamentale que les moyennes des quantités écoulées pendant une durée t sont proportionnelles à t .

Le problème abordé ici a donc de nombreuses applications. Nous adopterons pour en parler le langage du premier exemple et, afin de saisir l'essentiel du mécanisme, on se placera en période stable : ce qui veut dire que l'usine fonctionne à un rythme constant. On élimine ainsi les variations saisonnières et les variations systématiques telles qu'une expansion de l'usine. Ce sont là des questions plus particulières qui pourront facilement s'étudier après avoir résolu le problème fondamental que nous soulevons.

2. ÉNONCÉ DU PROBLÈME TYPE

Une usine fonctionne d'une manière continue et parfaitement régulière, c'est-à-dire avec une production uniforme. Elle consomme une quantité Q de matière première par an; soit $q = \frac{Q}{365}$ par jour.

Elle est ravitaillée d'une manière discontinue par des chargements tous égaux à C provenant de fournisseurs lointains. Elle souhaiterait que les livraisons successives soient rigoureusement périodiques avec la période $\lambda = \frac{C}{q}$ (comptée en jours) mais cela est évidemment irréalisable. Il faut donc constituer un stock régulateur.

Les commandes de matière première sont lancées longtemps à l'avance (6 mois, 1 an par exemple) et les délais de livraison sont longs. Il ne saurait donc être question (au moins d'une manière habituelle), de lancer les commandes d'après l'état du stock. On considère comme une donnée le processus de lancement des commandes et celui des livraisons. La seule question posée est le volume à prévoir pour le stockage (bassins, silos, bacs, etc.).

Le stock doit permettre de continuer à alimenter l'usine lorsque les chargements attendus prennent du retard. Il faut aussi prévoir une certaine disponibilité en volume de stockage pour pouvoir entreposer immédiatement des livraisons groupées.

D'une manière plus précise, on veut déterminer un optimum économique en tenant compte :

- a) des frais de stockage (installation, entretien, immobilisation de capitaux, etc.),
- b) des risques dus à un stockage insuffisant.

Ce sont, d'une part, les arrêts de la production en cas de rupture de stock (ou tout au moins les ralentissements de la production en cas de menace de rupture, car aucun Directeur d'usine n'ose envisager un arrêt pur et simple !); et, d'autre part, les attentes des véhicules lorsque les réservoirs (bacs ou magasins, etc.) prévus pour le stockage sont pleins.

La détermination de l'optimum est donc subordonnée à la résolution de deux problèmes distincts :

- un problème économique : évaluation des frais de stockage et des coûts des diverses défaillances.

- un problème de calcul des probabilités : trouver les lois de probabilité des diverses défaillances; ou, plus généralement, la loi de probabilité du stock.

C'est principalement cette dernière question que nous étudierons en détail.

2.1. RÉFÉRENCE A UN MODÈLE DE FILE D'ATTENTE

On peut se référer à un modèle "file d'attente" en assimilant les livraisons C à des clients; le séjour en stockage représente l'attente; enfin, le service est ici représenté par l'écoulement de la matière première dans l'usine.

On souhaiterait qu'il n'y eut jamais aucune interruption de service; on se place donc en régime de saturation. C'est là un aspect très important sur lequel il nous faudra revenir.

3. PLAN DE L'ÉTUDE

Nous avons bien spécifié que le mécanisme de lancement des commandes est une donnée sur laquelle on ne prétend pas revenir. Il faut donc décrire en probabilité les "arrivées" (livraisons). On pourra, dans une première étape, supposer un réservoir infiniment grand, c'est-à-dire que le niveau du stock dans le réservoir peut varier de $(-\infty \text{ à } +\infty)$ autour de sa valeur moyenne prise pour origine. Dans une deuxième étape, on étudiera les répercussions apportées par des limitations dans chaque sens : $-S_1 \leq s(t) \leq S_2$ (où $S_1 + S_2$ représente le volume des réservoirs et S_1 la moyenne temporelle du stock). Ces limitations entraînent les défaillances déjà mentionnées; on en déterminera les probabilités en fonction de S_1 et de S_2 .

4. ANALYSE DES ARRIVÉES

Dans la plupart des cas, on constate tout d'abord que les arrivées sont très bien représentées par un processus ponctuel de Poisson.

On relève, par exemple, jour par jour, le nombre X d'arrivées et l'on compare la distribution observée de ces nombres X_i avec une distribution de Poisson. La concordance est très bonne; au besoin, on complète l'étude par un test du X^2 .

4.1 . EXEMPLE

Analyse statistique des arrivées pendant 730 jours consécutifs. On a noté chaque jour le nombre X_i d'arrivées, colonne (1). Ce nombre varie en fait de 0 à 3 comme l'indique le tableau ci-après. La seconde colonne indique les fréquences dans l'échantillon des différentes valeurs de X_i . Le nombre moyen d'arrivées par jour est 0,4. La colonne (3) donne les "fréquences théoriques" c'est-à-dire les espérances mathématiques des nombres précédents en admettant que l'échantillon soit issu d'une loi de Poisson de paramètre 0,4.

4.2. TABLEAU DES OBSERVATIONS ET TEST DU X^2

1	2	3	4	5	6
Nbr. X_i de véhicules	fréquences n_i	$N p_i$	$n_i - N p_i = \Delta_i$	Δ_i^2	$\Delta_i^2 / N p_i$
0	487	489	2	4	0,008
1	195	195,7	0,7	0,49	0,002
2	43	39	4	16	0,41
3 et plus	5	5,7	0,7	0,49	0,098
				Total X^2	= 0,518

2 degrés de liberté pour $p_0 = 0,9 : X_0^2 = 0,21$

$p_1 = 0,1 : X_1^2 = 4,6$

Conclusion du test : L'hypothèse d'une loi de Poisson est tout à fait acceptable. (Il serait préférable de dire : le test ne permet pas de suspecter l'hypothèse).

5. LE PROCESSUS DE POISSON NE PEUT PAS CONVENIR

Les considérations précédentes ne portent que sur le phénomène pris localement : observations pendant une journée ou quelques jours consécutifs. Effectivement, le nombre aléatoire des arrivées pendant une telle période obéit à une loi de Poisson. Ce qui nous intéresse ici est, au contraire, le phénomène global; c'est-à-dire le processus des arrivées pendant de longues périodes. Or, il est facile de voir que le processus de Poisson ne peut certainement pas représenter le phénomène global.

En effet : dire que la suite des arrivées obéit à un processus de Poisson, c'est dire que le nombre X d'arrivées pendant une période de T jours consécutifs obéit à une loi de Poisson. Le paramètre de cette

loi sera le nombre moyen d'arrivées pendant la même période, soit T_d , et la variance de X est également T_d . Son écart-type, qui peut servir d'indice de dispersion est $\sqrt{T_d}$.

Supposons qu'à l'état initial ($T = 0$) le stock soit suffisant pour éviter toute rupture pendant la période considérée (cet événement aura de toute façon une très faible probabilité). Le stock peut alors être compté algébriquement en choisissant pour origine $S = 0$ la valeur initiale. Or, pendant la durée T de fonctionnement de l'usine, celle-ci a consommé la quantité T_d et il est arrivé X ; la valeur algébrique du stock à l'époque T est donc :

$$S = X - T_d = X - E(X)$$

S n'est autre que la variable X centrée, qui admet pour écart-type $\sqrt{T_d}$. La loi du stock dans ces conditions dépendrait du temps et le volume de stockage qui devrait évidemment suivre la dispersion de S , serait proportionnel à l'âge de l'usine!.. condition inacceptable, qui révèle une inadéquation du modèle.

En pratique, on ne constate jamais une telle évolution; mais, au contraire, on observe une loi stationnaire du stock (loi indépendante du temps) et en particulier la dispersion de $S_{(t)}$ est constante.

On voit alors très nettement la différence des deux points de vue : un point de vue local et un point de vue global.

Prenons une comparaison : si un géographe veut étudier avec soin la surface de la terre, il va rapporter ses observations topographiques à une surface de référence, lieu des points d'altitude constante. Si la région qu'il étudie est une grande ville, ou un canton : un plan représente parfaitement sa surface de référence; mais il serait dangereux d'extrapoler cette surface pour représenter un continent : une caractéristique, tout à fait négligeable, dans le premier cas, devient alors primordiale : la courbure.

Dans notre phénomène aléatoire, ce qui tient le rôle de la courbure, ce sont les liaisons entre arrivées successives qui empêchent le processus d'être à long terme à accroissements indépendants, bien qu'à très court terme (quelques jours) ces liaisons soient négligeables et même indiscernables.

D'ailleurs, si le processus des arrivées était à accroissements indépendants, en nous référant au modèle "file d'attente", il apparaîtrait que S diverge en probabilité. Il ne saurait évidemment en être ainsi car les arrivées correspondent à des commandes prévues initialement à intervalles réguliers. De nombreuses causes sont responsables de perturbations apportées à ces dates, ce qui produit des fluctuations du stock; mais l'ordre de grandeur de ces fluctuations ne doit pas dépendre de la durée de fonctionnement du processus.

En résumé : l'analyse du phénomène nous conduit à rechercher un modèle d'arrivées stationnaire où localement les arrivées sont mutuellement indépendantes, mais où, à plus long terme, une mémoire agit pour compenser les écarts du passé.

6. MODÈLE PROPOSÉ

Les réflexions précédentes suggèrent le modèle suivant :

Les dates $t_1, t_2 \dots t_n$ des arrivées sont repérées à partir de leurs valeurs moyennes θ_n par les relations :

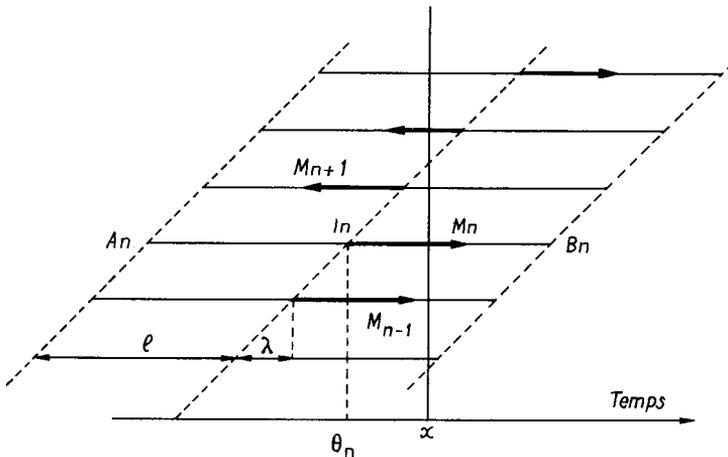
$$t_n = \theta_n + \varepsilon_n$$

où les θ_n non aléatoires sont régulièrement espacés : $\theta_{n+1} = \theta_n + \lambda$ avec $\lambda = \frac{c}{q}$ (période moyenne des arrivées).

Les ε_n sont des variables aléatoires centrées, mutuellement indépendantes et bornées qui obéissent toutes à la même loi. On pose : $-\ell < \varepsilon < \ell$. Cette limitation en module des ε n'a rien d'essentiel du point de vue mathématique; mais comme elle est toujours réalisée en fait, nous la posons a priori. En effet, ε est, bien entendu, borné inférieurement; il est également borné supérieurement; car si, pour une raison grave, un véhicule est immobilisé, on le remplace par un autre.

6.1. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES ARRIVÉES

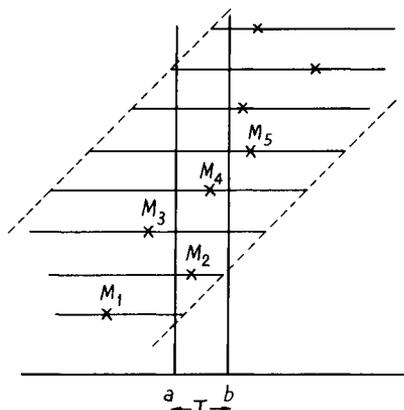
Le temps est porté en abscisse. Pour donner plus de netteté à la représentation, on repère sur des axes distincts les arrivées. Le chargement attendu à la date $\theta_n = n \lambda$ arrive à l'époque représentée par un point M_n sur le segment $A_n B_n$ de milieu I_n . Les segments sont classés suivant les abscisses $\theta_n = n \lambda$ de leur milieu.



Une droite d'abscisse x rencontre k segments AB où $k =$ partie entière de $\frac{2\ell}{\lambda}$ ou (partie entière de $\frac{2\ell}{\lambda} + 1$, suivant la position de x par rapport aux θ_i). Le nombre maximum de chargements susceptibles d'arriver au même moment est k .

6.2. STRUCTURE LOCALE DES ARRIVÉES

Soit X_T le nombre aléatoire d'arrivées pendant la période (a, b) de durée T (courte devant 2ℓ). X_T est la somme de k variables aléatoires indépendantes chacune égale à 0 ou à 1.



Exemple : $x_4 = 1$ si M_4 se projette sur (a, b) , c'est-à-dire si $a < \theta_4 < b$, soit p_4 la probabilité de cet évènement.

On a donc $x_4 = 0$ avec la probabilité $1 - p_4$

= 1 avec la probabilité p_4

et $X_T = x_1 + x_2 + \dots + x_7$

Si ℓ est grand devant λ et si ℓ est grand devant T , les probabilités p_i sont faibles et X_T suit sensiblement une loi de Poisson de valeur moyenne $\frac{T}{\lambda}$. On retrouve bien, localement, un processus de Poisson pour décrire les arrivées successives (Processus qu'on peut considérer comme uniforme en négligeant la variation périodique de période λ sans importance dans le présent problème).

6.3. STRUCTURE GLOBALE

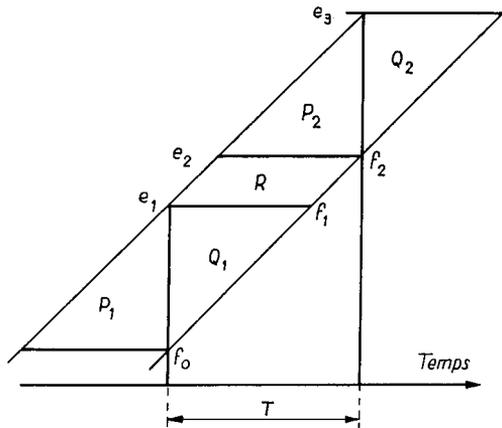
Observons maintenant pendant une durée T au moins égale à 2ℓ :
soit

$$T = 2\ell + r$$

Le nombre d'arrivées X_T est alors égal à la somme :

$$X_T = Q_1 + R + P_2$$

où R = nombre de points M sur les segments AB du parallélogramme $e_1 f_1 f_2 e_2$; celui-ci contient entièrement $\frac{r}{\lambda}$ segments, donc $R = \frac{r}{\lambda}$ est un nombre certain.



Q_1 est le nombre de points M situés dans le triangle $f_0f_1e_1$

P_2 est le nombre de points M situés dans le triangle $e_2f_2e_3$

On a $P_1 + Q_1 = k$ $P_2 + Q_2 = k$; Q_1 et P_2 sont indépendants en probabilité.

Enfin Q_1 et Q_2 obéissent à la même loi.

D'où : $E(Q_1) + E(P_2) = E(P_2) + E(Q_2) = k$

Finalement : $X_T = Q_1 + P_2 + \frac{T}{\lambda}$

$$E(X_T) = k + \frac{T}{\lambda}$$

La variable X_T centrée est $X_T - E(X_T) = Q_1 + P_2 - k$

La variance de X_T est égale à $\text{var}.Q_1 + \text{var}.P_2$; elle est indépendante de T pour $T > 2\ell$.

4.4. CORRÉLATION DES Y_T

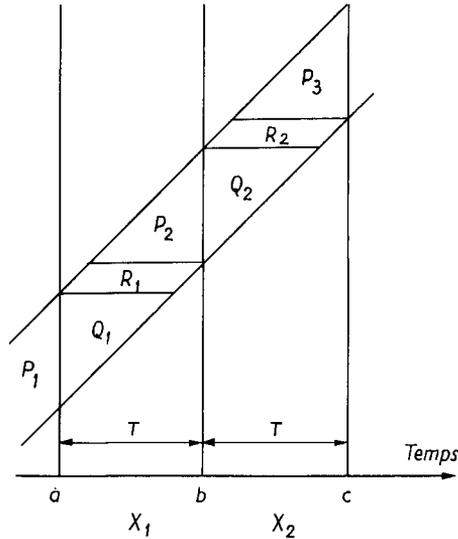
Considérons deux périodes consécutives de même durée $T > 2\ell$ et soient X_1 et X_2 les nombres correspondants d'arrivées. On lit sur la figure :

$$X_1 = Q_1 + R_1 + P_2$$

$$X_2 = Q_2 + R_2 + P_3$$

où $R_1 = R_2 = \frac{T}{\lambda}$ est une valeur certaine, Q_1 et P_2 sont des aléatoires indépendantes ainsi que Q_2 et P_3 ;

mais $P_1 + Q_1 = P_2 + Q_2 = P_3 + Q_3 = k$



Les variables X_i centrées deviennent Y_i :

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 - \bar{X}_1 = Q_1 - \bar{Q}_1 + P_2 - \bar{P}_2 \\ &= Q_1 - \bar{Q}_1 + \mathcal{K} - Q_2 - \mathcal{K} + \bar{Q}_2 \end{aligned}$$

Si l'on pose $Q_1 - \bar{Q}_1 = Z_1$, on a finalement

$$Y_1 = Z_1 - Z_2$$

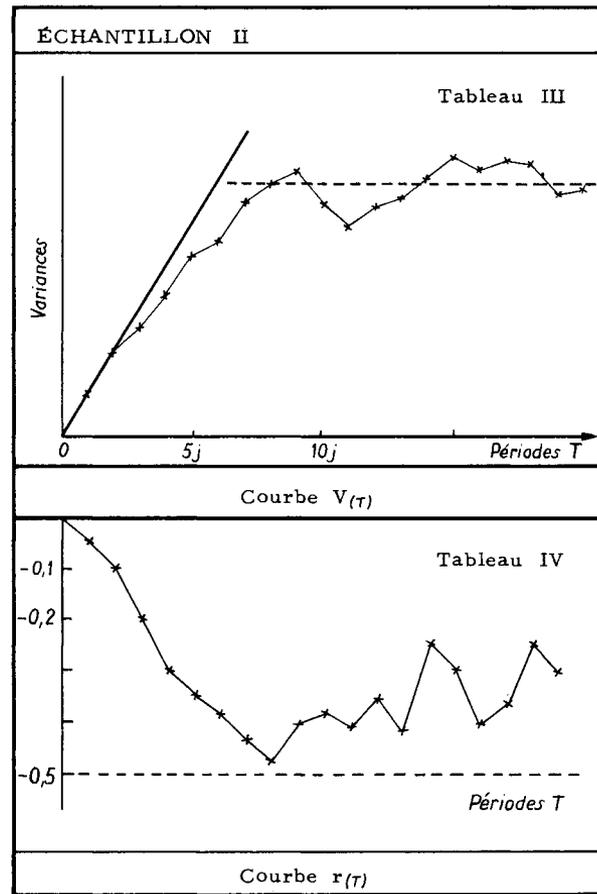
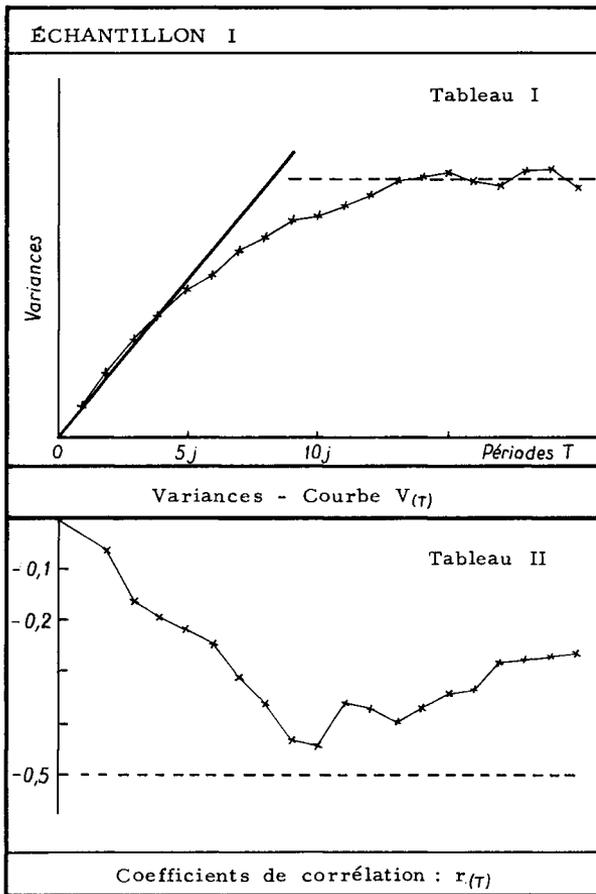
$$Y_2 = Z_2 - Z_3$$

Les variables Z_1, Z_2, Z_3 obéissent à la même loi de probabilité et sont indépendantes en probabilité; ce sont, de plus, des variables centrées. Posons : $\text{var}.Z = \text{var}.Q = \text{var}.P = s^2$, le coefficient de corrélation ρ_τ de X_1 et de X_2 vaut :

$$\rho_\tau = \frac{E(Y_1 Y_2)}{E(Y_1^2) \cdot E(Y_2^2)} = \frac{-s^2}{2s^2} = -\frac{1}{2}$$

7. CONFRONTATION DU MODÈLE AVEC DES ÉCHANTILLONS D'ARRIVÉES RÉELLES

Observons pendant une longue durée les arrivées réelles et partageons cette durée en intervalles consécutifs égaux, chacun d'amplitude T . Les nombres successifs d'arrivées pendant ces périodes sont $X_1^{(T)}, X_2^{(T)}, \dots, X_k^{(T)}$ etc. On calcule la variance $V_{(T)}$ de cet échantillon des valeurs $X_i^{(T)}$ et le coefficient de corrélation $r_{(T)}$ des valeurs consécutives $(X_k^{(T)}, X_{k+1}^{(T)})$. Ces expressions V et r sont calculées pour



différentes valeurs de T : 1 jour, 2 jours... jusqu'à 20 jours. Les résultats sont donnés par les tableaux I à IV pour deux échantillons tout à fait différents. Les tableaux I et II sont relatifs à l'échantillon I déjà mentionné en 4.1 et provenant d'un port d'Europe, les tableaux III et IV sont relatifs à l'échantillon II obtenu dans un port d'Afrique.

Si l'on admet le modèle proposé, la courbe $V_{(T)}$ doit partir de l'origine où elle admet une tangente.

En effet, localement (c'est-à-dire pour de faibles valeurs de T) les arrivées forment sensiblement un processus de Poisson et $V_{(T)}$ est alors proportionnel à T . Au contraire, pour des valeurs assez grandes de T (supérieures à 2ℓ , encore inconnu) $V_{(T)}$ est constant.

La courbe $r_{(T)}$ doit passer par l'origine (pour T très petit, r est nul), et doit tendre vers $-\frac{1}{2}$ pour T assez grand (supérieur à 2ℓ).

Le résultat observé est tout à fait conforme à celui que donne le modèle, tout au moins en ce qui concerne les variances. Le comportement des courbes $r_{(T)}$ est moins proche du résultat attendu. Il y a lieu de faire remarquer que l'estimation d'un coefficient de corrélation est moins bonne (plus dispersée) que celle d'une variance; que, d'autre part, les estimations, tant de V que de r sont moins bonnes pour les grandes valeurs de T que pour les petites, car la taille de l'échantillon des $X_i^{(T)}$ est inversement proportionnelle à T .

Mais ceci dit, il est visible que $r_{(T)}$ après s'être approché de $-\frac{1}{2}$, augmente vers 0 lorsque T croît.

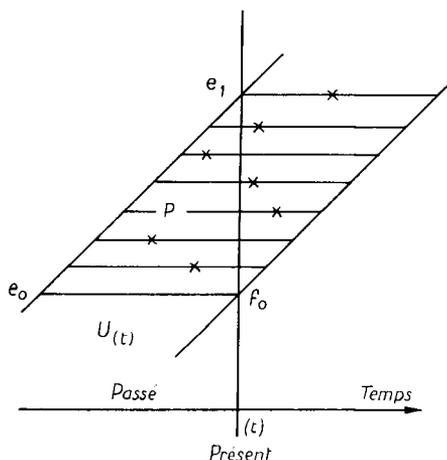
Pour expliquer ce phénomène, il faut penser que la réalité est moins rigide que ne l'est le modèle. La production, par exemple, n'est pas absolument constante : Nous avons pu constater dans l'un des exemples retenus qu'elle subit des variations saisonnières. Ces variations, bien que faibles en valeurs relatives, finissent par avoir une contribution importante lorsqu'elles sont cumulées. C'est ainsi que les quantités R_1 et R_2 qui interviennent respectivement dans X_1 et X_2 (en 6.3) ne sont plus égales et cela diminue la valeur absolue du coefficient de corrélation du couple (X_1, X_2) .

Le modèle proposé paraît donc assez satisfaisant. En l'admettant nous allons maintenant résoudre le problème posé.

8. LOI DE PROBABILITÉ DU STOCK A UN INSTANT QUELCONQUE

Nous supposons tout d'abord le volume de stockage suffisamment grand, ainsi que le stock initial, pour ne donner lieu à aucune défaillance. Dans ces conditions, nous nous proposons de chercher la loi de probabilité du stock $S_{(t)}$, celui-ci rapporté, comme il a été dit, à sa

valeur moyenne. Cette loi ne dépend pas de t dès que t est au moins égal à ℓ . Si l'on veut regarder les choses de très près, et selon le modèle proposé, cette loi est périodique et de période λ . En effet, si $t = n\lambda + u$ avec $0 < u < \lambda$ la loi à l'instant $n\lambda + u$ ne dépend pas de n , mais dépend de u . Toutefois, en pratique, les fluctuations de cette loi sont faibles (u est de l'ordre d'une demi-journée) et il ne saurait être question d'estimer la loi du stock avec assez de précision pour faire apparaître l'influence de u sur cette loi (tout au moins dans les cas que nous avons rencontrés, où λ est petit devant ℓ). D'ailleurs, ce que nous voulons connaître, c'est la loi moyenne du stock, c'est-à-dire la loi du stock observé en un instant (u) choisi de manière aléatoire selon une loi uniforme de 0 à λ . A l'instant (t), le stock $S_{(t)}$ est égal à la somme des commandes reçues avant l'instant (t) diminuée des quantités utilisées.



Les arrivées figurées au-dessous de la droite $e_0 f_0$ sont certaines et égales à $U_{(t)}$; celles figurées dans le triangle $e_0 f_0 e_1$ sont aléatoires et valent P .

$$S_{(t)} = P - E(P)$$

Remarquons qu'il est indispensable de constituer un stock, non seulement pour éliminer les fluctuations aléatoires des dates d'arrivées, mais également en raison du caractère discret des arrivées (par quantités finies égales à q) tandis que les enlèvements se font d'une manière continue.

Si les arrivées se produisaient toutes exactement à la date attendue, on pourrait considérer, par exemple, que chaque ligne (n) donne lieu à un stock $s_n(t)$ variant linéairement de 0 à $-\frac{q}{2}$ pour t variant de $\theta_n - \ell$ à θ_n et de $+\frac{q}{2}$ à 0 pour t variant de θ_n à $\theta_n + \ell$.

Si la date d'arrivée est maintenant figurée par M_n (d'abscisse $\theta_n + \varepsilon_n$) et si $F(\varepsilon)$ est la fonction des ε_n ; en un instant $t = \theta_n + e$ où $-\ell < e < +\ell$, le stock dû à la n^e ligne est :

$$\frac{q}{2} - \frac{q}{2} \frac{e}{\ell} \text{ avec la probabilité } F(e)$$

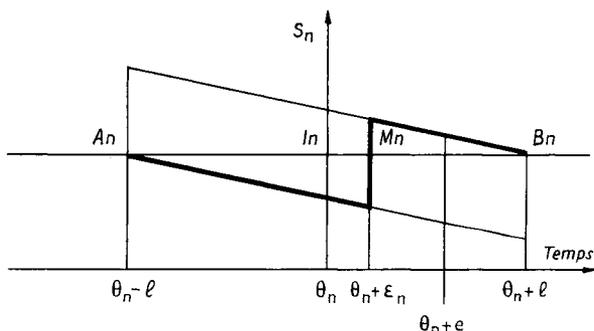
$$\text{et } -\frac{q}{2} - \frac{q}{2} \frac{e}{\ell} \text{ avec la probabilité } 1 - F(e)$$

Le stock à l'instant (t) est la somme des stocks s_n du type précédent, c'est-à-dire la somme de k v.a. indépendantes mais obéissant à des lois différentes. Si k est assez grand, $S_{(t)}$ obéit sensiblement à une loi de Laplace Gauss centrée (cela sous des hypothèses assez larges facilement admissibles ici).

La variance de cette variable aléatoire est $\text{var}(P)$; or l'étude 6.3 des variances de $X_{(T)}$ nous a donné pour $T > 2\ell$:

$$\text{var}(X_T) = 2 \text{var}(P)$$

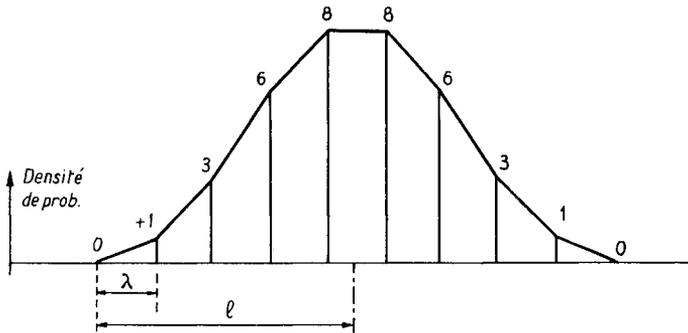
On a donc ainsi une estimation de $\text{var}(P)$ ce qui achève de déterminer la loi de S .



Remarque : Dans l'étude de $X_{(T)}$ les périodes successives d'amplitude T sont placées arbitrairement par rapport aux θ_n ; c'est donc la loi de $S_{(t)}$ pour t arbitraire (moyenne par rapport à u des lois de S_u) qui se trouve étudiée ici.

8.1. EXEMPLE

Prenons à titre d'exemple pour loi de probabilité des ε la loi suivante :



$k = 8$

$\left\{ \begin{array}{l} s_1 = 1 \\ s_1 = 0 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} \text{prob. } 1/72 \\ \text{" } 71/72 \end{array}$	$\left\{ \begin{array}{l} s_8 = 1 \\ s_8 = 0 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} \text{prob. } 71/72 \\ \text{" } 1/72 \end{array}$
$\left\{ \begin{array}{l} s_2 = 1 \\ s_2 = 0 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} \text{prob. } 5/72 \\ \text{" } 67/72 \end{array}$	$\left\{ \begin{array}{l} s_7 = 1 \\ s_7 = 0 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} \text{prob. } 67/72 \\ \text{" } 5/72 \end{array}$
$\left\{ \begin{array}{l} s_3 = 1 \\ s_3 = 0 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} \text{prob. } 14/72 \\ \text{" } 58/72 \end{array}$	$\left\{ \begin{array}{l} s_6 = 1 \\ s_6 = 0 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} \text{prob. } 58/72 \\ \text{" } 14/72 \end{array}$
$\left\{ \begin{array}{l} s_4 = 1 \\ s_4 = 0 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} \text{prob. } 28/72 \\ \text{" } 44/72 \end{array}$	$\left\{ \begin{array}{l} s_5 = 1 \\ s_5 = 0 \end{array} \right.$	$\begin{array}{l} \text{prob. } 44/72 \\ \text{" } 28/72 \end{array}$

en faisant $u = 0$ on obtient pour S (compté en nombre de chargements) une variable aléatoire pouvant varier de 0 à 8 par valeurs entières ; son écart-type est $\sigma = \frac{35}{36}$. Sa loi est donnée par les valeurs suivantes :

	Ecart réduit	Valeur de E pour la loi de Laplace Gauss
$\pi_7 = \text{Prob. } (S \leq 7) = 0,9999_{64}$	3,6	0,9998
$\pi_6 = \text{Prob. } (S \leq 6) = 0,9968$	2,56	0,9948
$\pi_5 = \text{Prob. } (S \leq 5) = 0,944$	1,55	0,938
$\pi_4 = \text{Prob. } (S \leq 4) = 0,703$	0,515	0,697

L'adéquation est très satisfaisante, bien que nous n'ayons pas recherché par la loi des ϵ les conditions les plus favorables pour assurer la convergence vers une loi de Laplace.

9. CALCUL ÉCONOMIQUE

Soit $(S_1 + S_2)$ le volume des réservoirs et S_1 l'espérance mathématique du stock (puisque cette espérance mathématique est indépendante du temps, elle peut être estimée par la moyenne temporelle du stock observé pendant une assez longue période). Il faut déterminer S_1 et S_2 de manière à rendre minimum le coût global de gestion. Choisissons une unité de temps, d'ailleurs arbitraire, et récapitulons les dépenses de gestion pendant cette période. De plus, afin de simplifier les notations, nous mesurons le volume stocké en prenant pour unité de volume l'écart-type de $S_{(t)}$. La loi de S est alors une loi de Laplace Gauss centrée réduite.

9.1. FRAIS FIXES

Les dépenses fixes sont, d'une part, l'amortissement et l'entretien des installations (greniers, réservoirs ou silos); ils sont, par unité de temps, proportionnels à $(S_1 + S_2)$ soit : $A(S_1 + S_2)$.

D'autre part, l'immobilisation du capital constitué par les produits stockés représente une dépense proportionnelle à S_1 : soit BS_1 .

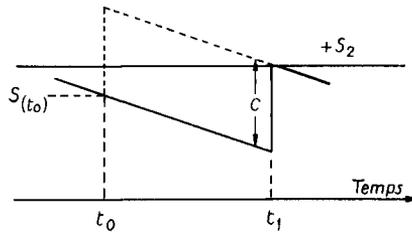
9.2. DÉFAILLANCES

Soit $S_{(t)}$ le stock à l'instant (t) et $F_{(s)}$ sa fonction de répartition lorsqu'on n'impose aucune contrainte à ses variations.

Si, dans son évolution naturelle, $S_{(t)}$ devient inférieur à $(-S_1)$: il y a rupture de stock. Cette défaillance est extrêmement grave; et l'expérience montre qu'il est difficile d'en calculer le coût. Une évaluation en est pourtant indispensable si l'on veut faire une gestion économique. Soit donc D_1 le coût de cette défaillance par unité de temps. Si l'on observe le fonctionnement du système pendant la durée T , la durée moyenne (espérance mathématique) pendant laquelle le stock a une valeur inférieure à $-S_1$ est $T F(-S_1)$. Par unité de temps, elle s'élève à $D_1 F(-S_1)$.

La durée pendant laquelle $S_{(t)}$ serait, dans son évolution naturelle, supérieure à S_2 , représente la durée d'attente des véhicules avant de pouvoir être déchargés, comme le montre la figure ci-après. Le coût de ces attentes est bien connu puisqu'en général on le paie effectivement. Soit D_2 le coût de l'immobilisation d'un chargement C pendant une unité de temps. La probabilité d'une telle défaillance est à chaque instant $1 - F(S_2)$.

Toutefois, si $S - S_2$ devient assez grand, il peut y avoir plusieurs chargements en attente :



A l'instant (t_0) où un chargement (c) est livré, le stock est $S(t_0) > S_2 - c$
 évolution du stock en l'absence de contrainte entre t_0 et t_1 où $S(t) = S_2$
 ——— évolution lorsqu'on impose $S(t) < S_2$. Les produits ne peuvent être déchargés qu'à l'instant t_1 . Durée d'attente = $t_1 - t_0$.

si $S_2 < S_{(t)} < S_2 + c$, évènement de prob. $F(S_2 + c) - F(S_2) \rightarrow$ } un chargement en attente
 si $S_2 + c < S_{(t)} < S_2 + 2c$, " " " $F(S_2 + 2c) - F(S_2 + c) \rightarrow$ } 2 chargements en attente
 etc...

D'où : espérance mathématique du coût de cette défaillance :

$$d_2 = D_2 [F(S_2 + c) - F(S_2)] + 2 D_2 [F(S_2 + 2c) - F(S_2 + c)] + \dots$$

soit $d_2 = D_2 G(S_2)$.

REMARQUE : $d_2 = D_2 G$ où G n'est autre que la valeur approchée de l'expression $\frac{1}{c} \int_{u=S_2}^{\infty} u dF(u)$; c'est-à-dire le moment partiel de la variable aléatoire $\frac{S - S_2}{c}$ pour $S - S_2 > 0$. Si la pénalisation est proportionnelle au temps et au volume immobilisé, on a alors, avec des notations évidentes :

$$d_2 = \frac{D_2}{c} \int_{u=S_2}^{\infty} u dF(u) = \frac{D_2}{c} M(S_2) .$$

9.3. BILAN DE GESTION

Coût global :

$$A(S_1 + S_2) + B S_1 + D_1 F(-S_1) + D_2 G(S_2)$$

soit : $[(A + B) S_1 + D_1 F(-S_1)] + [A S_2 + D_2 G(S_2)]$ (1)

en annulant les dérivées partielles par rapport à S_1 et à S_2 on obtient les conditions optimales suivantes :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{A+B}{D_1} = f(S_1) \\ \frac{A}{D_2} = f(S_2) + f(S_2 + c) + f(S_2 + 2c) + \dots \end{array} \right.$$

10. DÉCISIONS

Les équations précédentes montrent l'intérêt qu'il y avait de se donner les deux paramètres S_1 et S_2 : ils interviennent de façons indépendantes dans ces équations.

Si l'on connaît $\sigma_{(s)}$, estimé comme il a été dit en 8 (voir aussi 6.3) et les coûts A , B , D_1 et D_2 , le système 9.3,2 détermine S_1 et S_2 . On choisira comme volume de stockage $S_1 + S_2$. On s'assurera, d'autre part, que le stock varie autour de la valeur moyenne S_1 en calculant des moyennes temporelles du stock pendant plusieurs mois par exemple. Si l'on juge que cette moyenne s'écarte significativement de S_1 on lancera une commande supplémentaire, ou au contraire, on annulera une commande de manière à ramener la moyenne à la valeur voulue.

11. CONCLUSION

Nous avons présenté un problème abstrait plus simple que les cas réels dont il est issu; mais aussi plus général. Deux types de remarques sont maintenant nécessaires : les premières concernent l'ajustement du modèle abstrait aux systèmes réels, les secondes signaleront quelques questions qui restent posées.

11.a. ADAPTATION DU MODÈLE AUX CAS RÉELS

Les hypothèses simplificatrices qui ont été adoptées sont parfois trop rigides : ainsi la production peut ne pas être parfaitement uniforme, mais au contraire, être soumise à des variations saisonnières ou systématiques (expansion par exemple). Les variations saisonnières ont pour effet de rendre variables les quantités notées R (6.3 et 6.4), ce qui augmente la variance $V(T)$ et diminue la valeur absolue du coefficient de corrélation $r(T)$ et cela d'autant plus que T est grand. S'il y a des variations saisonnières, celles-ci sont évidemment connues d'avance et on en a tenu compte en lançant les commandes. On peut donc rapporter les arrivées aux prévisions pour estimer la variance moyenne.

Les variations systématiques soulèvent moins de difficultés : elles s'effectuent progressivement et si la seule modification est l'augmentation du nombre de lignes, la variance de $S_{(t)}$ est sensiblement proportionnelle au nombre k de lignes, c'est-à-dire au débit. [Si la cadence de production augmente, il faut dans (P) ajouter des lignes qui introduisent des variances supplémentaires (p_i, q_i) avec $p_i = F(e_i)$ et où les e_i sont uniformément répartis de $-\ell$ à $+\ell$.] En général on modifiera par étapes le stockage en l'alignant chaque fois sur le débit.

Une inégalité des capacités des bateaux composant la "flotte" ne soulève aucune difficulté nouvelle si, du moins, cette flotte reste inchangée dans son ensemble. Le modèle est alors constitué par la superposition de plusieurs ensembles de lignes, chaque ensemble étant caractérisé par une valeur de λ (et inversement proportionnelle à c). Les résultats 6.3, 6.4 et 8 concernant les variances $V_{(t)}$, les coefficients de corrélation $r_{(\tau)}$ et la loi de $S_{(t)}$ restent inchangés.

Par contre, si l'on modifie la répartition des capacités des bateaux constituant la flotte, cela entraîne une modification de la loi de $S_{(t)}$ facilement calculable; si, du moins, ces changements ne perturbent pas la loi des ε (loi des "retards"). En effet : si les capacités sont multipliées par h : le nombre k de lignes est multiplié par $\frac{1}{h}$. La variance du nombre d'arrivées P sur un triangle $e_o f_o e_1$ est multipliée par $\frac{1}{h}$ tandis que la variance des quantités arrivées est le produit par h^2 de la variance précédente. Finalement la variance $V(P) = \text{Var}(S_{(t)})$ est multipliée par h .

L'acheminement des produits peut s'effectuer d'une manière plus compliquée qu'il n'a été dit. Par exemple, l'usine n'est pas à proximité du lieu de déchargement (gare ou port) et il faut constituer deux stocks : l'un à l'usine, l'autre au lieu de déchargement. Il faudra alors compléter le modèle proposé après avoir défini en probabilité le processus d'acheminement des matières premières jusqu'à l'usine.

Le cas d'une alimentation par un petit nombre de lignes régulières mérite quelque attention.

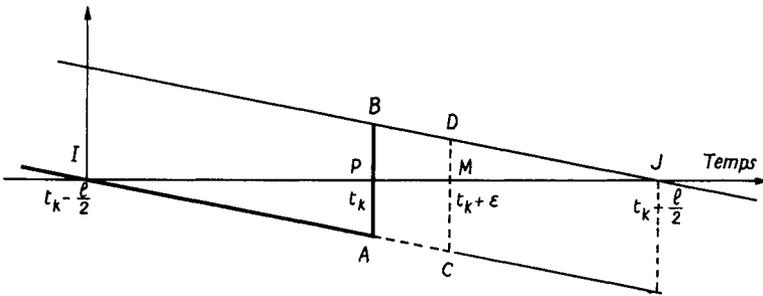
11.b. ALIMENTATION PAR UN PETIT NOMBRE DE LIGNES RÉGULIÈRES

Le transport des matières premières est assuré par n bateaux, chacun d'eux effectuant toujours le même trajet aller retour entre l'usine et un centre de production (ou un lieu de stockage intermédiaire).

Considérons l'un quelconque des bateaux : soit Q_i sa capacité et ℓ_i la période moyenne avec laquelle il effectue un trajet complet.

Si ses trajets étaient rigoureusement constants, le bateau donnerait lieu à un stock qui, rapporté à sa valeur moyenne, varierait uniformément de $-\frac{Q_i}{2}$ à $+\frac{Q_i}{2}$ au cours du temps (voir figure). Nous perturbons

ce processus systématique par l'adjonction de "retards" (algébriques) ε mutuellement indépendants entre deux trajets successifs et obéissant à une certaine loi d'expression élémentaire $f(\varepsilon)d\varepsilon$. Une arrivée est, avec la probabilité $f(\varepsilon)d\varepsilon$, retardée de ε et le stock, au cours de la période correspondante, varie uniformément de $-\frac{Q_i}{2} - \varepsilon \frac{Q_i}{\ell_i}$ à $+\frac{Q_i}{2} - \varepsilon \frac{Q_i}{\ell_i}$ (voir figure).



Evolution du stock de matière première transportée par une ligne.

IABJ figure l'évolution du stock en supposant les voyages parfaitement réguliers. La quantité $AB = Q_i$ transportée par un bateau est consommée par l'usine en une durée $\ell_i = IJ$ et cela avec une cadence constante. Si, au k^e trajet, le bateau arrive avec un retard $PM = \varepsilon$ la variation du stock est alors figurée par ICDJ.

Le stock $s_i(t)$ dû à ce seul bateau n'est autre que la somme d'une variable aléatoire uniformément répartie de $-\frac{Q_i}{2}$ à $+\frac{Q_i}{2}$ et d'une v.a. $\varepsilon \frac{Q_i}{\ell_i}$ indépendante de la première et obéissant à une loi continue.

Le stock global $S(t)$ est la somme des stocks entraînés par chaque ligne. Or, les variables $s_i(t)$ sont indépendantes si les périodes ℓ_i sont incommensurables entre elles, ce qui élimine toute liaison entre les distributions uniformes introduites par chaque ligne; et, d'autre part, les ε sont, par hypothèse, mutuellement indépendants. Finalement, si le système comporte n lignes, le stock $S(t)$ est égal à la somme de $2n$ variables aléatoires obéissant toutes à des lois continues indépendantes. Dans ces conditions, et pour des valeurs relativement faibles de n , la loi de $S(t)$ est sensiblement laplacienne et centrée. Il suffit, là encore, d'en estimer la variance.

11.c. QUESTIONS OUVERTES

Aucune étude de R.O. n'est définitive. En effet : toute recherche se limite fatalement à quelques questions isolées par la pensée, d'ensembles plus vastes. Cela conduit à la recherche d'optima pour

certains niveaux de décision qui, si l'on se place à un échelon supérieur, ne deviennent que des sous-optima. Il est donc toujours possible d'élargir une question en se plaçant à un niveau hiérarchique plus élevé.

D'autre part, le chercheur opérationnel est chargé de faire son étude préparatoire à une décision le plus rapidement possible; c'est-à-dire après avoir observé les phénomènes en cause pendant une durée limitée; ce qui n'en donne que des connaissances partielles.

Si l'on continue à observer le phénomène, l'information supplémentaire qu'on en obtiendra pourra permettre d'améliorer la qualité des modèles et, par exemple, de réduire les dispersions des lois de probabilité introduites.

Ces remarques générales s'appliquent, bien entendu, au cas que nous venons de traiter.

En particulier, il serait intéressant de connaître la loi de probabilité des ϵ et, plus généralement, les types de lois qui conviennent aux divers modes de transport.

Il reste un dernier point très important et qui illustre la première partie des commentaires précédents : contre quels risques exactement veut-on se prémunir ?

J'ai décrit sommairement le processus par lequel passe une commande depuis son lancement jusqu'à sa réception. Dans le "planning" de ces commandes, des aléas s'introduisent : la date à laquelle un bateau est disponible au lieu de chargement n'est pas exactement la date souhaitée pour réaliser une périodicité des arrivées; le tonnage du bateau est-il conforme aux prévisions ? Les durées des trajets sont aléatoires (avaries mécaniques, mauvais temps). Tels sont les principaux aléas auxquels on pense d'abord; en un mot : ensemble de nombreux petits ennuis, tous très fréquents. Dans ces conditions, on peut assez facilement admettre que les "retards" entre bateaux successifs sont indépendants.

Si, pourtant, on observe ce qui s'est passé au cours de plusieurs années consécutives (et, bien entendu, pour la période que nous vivons, la seule intéressante ici) on remarque inmanquablement quelques périodes "anormales", c'est-à-dire affectées de perturbations plus graves que les précédentes et dues aux conflits politiques ou sociaux : grèves prolongées, guerres localisées, etc , ou parfois à des phénomènes naturels d'un caractère exceptionnel : froid intense prolongé, raz de marée, etc.

Les phénomènes de ce genre sont, du point de vue qui nous occupe ici, totalement différents des premiers car ils introduisent des retards systématiques sur toutes les lignes. En d'autres termes, c'est pendant une certaine période, la cadence moyenne des arrivées qui se trouve modifiée : les conséquences en sont très graves. Souvenons-nous que le stock fonctionne comme un processus de file d'attente saturé (son coefficient d'emploi est exactement égal à 1). On sait qu'un tel processus est particulièrement instable; il est donc très sensible à des fluctuations systématiques.

On se trouve donc en présence de deux problèmes distincts de gestion. Ils diffèrent à la fois par les buts à atteindre et par les modèles mathématiques utilisés.

a) gestion d'un stock "technique" - C'est l'étude présentée ici et telle qu'elle se pose à la direction d'une usine. On cherche, en constituant un stock, à se parer (économiquement) contre des aléas inhérents aux moyens techniques employés pour le transport.

b) gestion d'un stock de sécurité contre des événements exceptionnels. Ce problème se pose à un échelon plus élevé : direction de la société, voire même à l'échelon national. Il est plus difficile que le premier en raison du manque d'information pour estimer les lois de probabilité et pour calculer les coûts des défaillances. Enfin, la décision ne consistera pas seulement à choisir le volume de stockage; mais aussi à prévoir, en cas d'évènement grave, une certaine réglementation dans la distribution des produits finis.