MOHAUD AIT OUYAHIA

Généralisation de l'algorithme de Dantzig par l'emploi de pivots matriciels Applications aux problèmes de décomposition

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 4 (1962), p. 3-15

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1962__4__3_0>

GÉNÉRALISATION DE L'ALGORITHME DE DANTZIG PAR L'EMPLOI DE PIVOTS MATRICIELS APPLICATIONS AUX PROBLÈMES DE DÉCOMPOSITION

par

Mohaud AIT OUYAHIA

INTRODUCTION

L'élimination simultanée de plusieurs variables dans la résolution d'un système d'équations linéaires, par le choix d'un pivot matriciel, conduit dans le cas particulier des programmes linéaires à une généralisation naturelle de l'algorithme de DANTZIG.

Cette nouvelle définition du cheminement vers l'optimum introduit un principe général de décomposition cohérent et fournit d'une manière simple les algorithmes correspondants.

Certains aménagements ont été apportés à la notation classique à seule fin d'alléger l'exposé.

Il pourra paraître curieux de ne pas se servir, ou du moins de parler, d'espaces vectoriels, de dualité ou d'autres notions fondamentales. Ces notions sont, en fait, implicites tout au long de l'exposé.

Enfin le langage lui-même emprunte beaucoup à la géométrie classique, ce qui permet de rendre compte de l'essentiel avec le minimum de mots.

I. RAPPELS DE GÉNÉRALITÉS

I.I. NOTATIONS

I	Ensemble d'indices i de lignes ou de contraintes (nombre n_I)
J	Ensemble d'indices j de colonnes ou de variables de la base (nombre n^J)
I_I, I_h	... Sous-ensembles de I
J_I, J_h	... Sous-ensembles de J
I', J'	... Sous-ensembles complémentaires
x^J	Variables réelles (Vecteur)
s_I	Variables d'écart
(I, J)	Matrice de coefficients
(i, j)	Elément de (I, J)
(i, J)	Ligne de (I, J)
(I, j)	Colonne de (I, J)

Fonction économique à maximiser : $\zeta = c_o^J\,(-x^J)$

Contraintes : $(I, J)\,x^J \leqslant b_I$

Variables d'écart (positives) : $s_I = b_I + (I, J)(-x^J)$

Matrices unitaires : (U) $(-U)$

I.2. RAPPEL DE DÉFINITIONS

BASE

Ce sera un ensemble de n^J plans linéairement indépendants d'équations :

$$t^J = 0$$

Nous ne considérerons que des bases extraites de l'ensemble de plans :

$$x^J = 0$$

$$s_I = 0$$

L'indépendance linéaire équivaut à la possibilité de résoudre en x^J le système linéaire :

$$t^J = 0$$

Toute base peut être prise comme nouveau système de coordonnées. L'indépendance linéaire équivaut donc aussi à la possibilité de résoudre en y^J le même système, pourvu que les n^J plans :

$$y^J = 0$$

forment eux-mêmes une base.

VARIÉTÉS LINÉAIRES D'UNE BASE

Soit : une base $t^J = 0$

Tout sous-ensemble $t^{J_1} = 0$

représente une variété linéaire à $n^J - n^{J_1}$ dimensions.

Toutes les variétés linéaires possibles d'une base existent, les variétés de mêmes dimensions étant toutes distinctes.

Deux variétés linéaires d'une même base sont dites complémentaires, lorsque leurs nombres de dimensions sont eux-mêmes complémentaires (somme n^J).

CORRESPONDANCES GÉOMÉTRIQUES

Tout x^J est représenté par un point dans un espace à n^J dimensions rapporté à un système de n^J plans de coordonnées arbitrairement choisis sous réserve que toutes les variétés linéaires d'intersection existent et qu'elles soient distinctes lorsqu'elles ont les mêmes dimensions.

Toute base définit en particulier un point unique à distance finie, soit comme l'intersection des n^J plans de la base, soit comme l'intersection de deux variétés linéaires complémentaires quelconques de cette base.

L'ensemble des bases extraites de :

$$x^J = 0$$

$$s_I = 0$$

sera figuré par un polyèdre étoilé ou complet P.

A chaque base $t^J = 0$, on peut faire correspondre un cône convexe

$$t^J \geq 0$$

qui sera dit cône positif associé à la base. L'intersection de tous les cônes positifs associés à toutes les bases forme un domaine convexe fermé par un polyèdre convexe P1.

I.3. RAPPEL DE PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

BASES ADMISSIBLES

Les bases t^J (pour simplifier on sous-entendra = 0) dont le nombre total ne peut excéder le nombre de combinaisons de $(n_I + \ldots n^J)$ objets n^J à n^J peuvent être distinguées de la manière suivante :

1) Bases I-admissibles : le point d'intersection des plans de la base appartient à P1; ses coordonnées satisfont toutes les contraintes

2) Bases J-admissibles : le point d'intersection des plans de la base rend maximum la fonction économique dans le cône positif associé

3) Bases non admissibles : ce sont celles qui ne possèdent ni l'une ni l'autre des propriétés précédentes.

BASES OPTIMALES

Toute base à la fois I-admissible et J-admissible est dite optimale. Le point d'intersection des plans de la base constitue une solution du problème.

POLYÈDRE P2

Il est constitué par l'ensemble des bases J-admissibles. P2 est contenu dans P comme l'est P1 (polyèdre formé par les bases I-admissibles).

PROPRIÉTÉS DE P, P1 ET P2

P1 est convexe, P2 ne l'est pas forcément. Tout sommet commun à P1 et P2 est une solution du problème. Si P1 est vide, le problème n'a évidemment pas de solution. Si P2 est vide sans que P1 le soit, la fonction économique peut augmenter indéfiniment dans P1, ce qui entraîne que P1 ait des sommets à l'infini. P n'est jamais vide puisqu'il contient au moins la base x^J.

Considérons l'ensemble des bases I-admissibles ou J-admissibles (polyèdre P'). P' peut être décomposé en deux polyèdres P1 et P2 dont les bases communes sont optimales; les positions relatives de P1 et P2 sont telles que, pour la fonction économique $\zeta = c_o^J\,(-x^J)$ il y a maximum dans P1 et minimum dans P2, ce qui justifie les règles de cheminement vers l'optimum appliquées normalement :

On suppose connue une base quelconque dans P' (base admissible). Si cette base appartient à P1 (base I-admissible) et n'appartient pas à P2 (optimum non atteint) on cherche une nouvelle base améliorant la valeur de ζ, et appartenant à P1, et ainsi de suite...

Si cette base appartient à P2 (base J-admissible) et n'appartient pas à P1 (optimum non atteint) on cherche une nouvelle base de P2 diminuant la valeur de ζ , et ainsi de suite...

Lorsqu'il n'y a pas de dégénérescence, ζ croît (ou décroît) strictement à chaque itération et l'optimum est atteint au bout d'un nombre fini de changements de base.

Si l'on rencontre des dégénérescences, l'aménagement lexicographique permet d'assurer la convergence du cheminement.

I.4. ORGANISATION DES CALCULS - TABLEAU REPRÉSENTATIF

A chaque itération ou changement de base, il est commode d'effectuer un changement de coordonnées et d'exprimer toutes les quantités :

$$\zeta\ ,\ x^J \text{ et } s_I$$

en fonction de t^J (variables dans la base). Ce tableau permet à chaque instant de déterminer :

- les coordonnées x^J du sommet atteint
- la composition de la base correspondante
- les formules de changement de coordonnées liant x^J et t^J
- la valeur atteinte par la fonction économique ζ
- les éléments permettant de juger si la base est optimale
- les éléments permettant d'effectuer le changement de base suivant.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par :

I	l'ensemble de toutes les lignes du tableau à l'exception de la 1ère
J	l'ensemble de toutes les colonnes du tableau à l'exception de la 1ère
s_I	l'ensemble de toutes les quantités x^J et s_I précédemment définies
t^J	la base (définition inchangée)
(I, J)	la matrice définie par les éléments des lignes I et des colonnes J
I_I J_I (I_I , J_I) etc.	gardant leur définition précédente.

D'une manière précise, la ligne i représentant l'équation

$$s_i = b_i + (i, J)(-t^J)$$

contiendra :

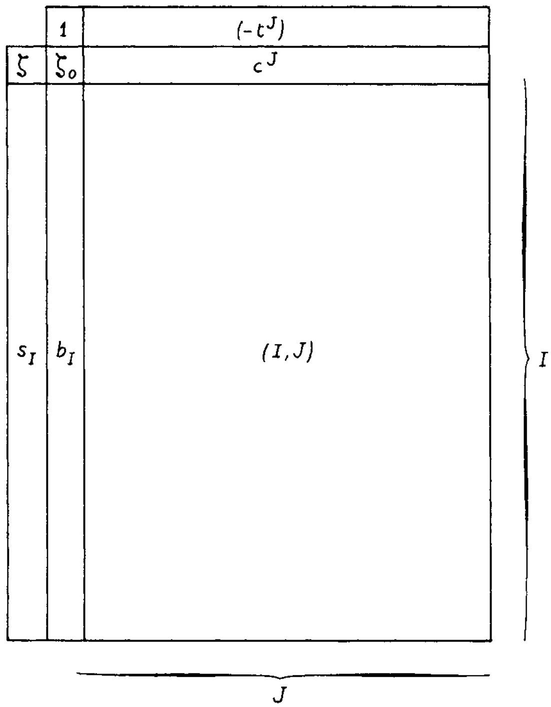
- dans la 1ère colonne b_i
- dans les colonnes J les coefficients (i, J) de $(-t^J)$

La 1ère ligne contiendra de la même manière la fonction économique:

$$\zeta = \zeta_o + c^J\ (-t^J)$$

ζ_o étant la valeur de la fonction économique au point d'intersection des plans de la base

$$t^J = 0$$



Le tableau fournit bien tous les renseignements nécessaires. En effet :

- L'examen de la 1ère colonne (valeurs de b_I) indique si la base est I-admissible (lorsque $b_I \geqslant 0$); il donne aussi les valeurs de ζ , x^J et, d'une manière générale, de s_I au point $t^J = 0$.

- L'examen de la 1ère ligne (valeurs de c^J) indique si la base est J-admissible (lorsque $c^J \geqslant 0$)

- La base t^J est optimale lorsque l'on a simultanément :

$$b_I \geqslant 0$$

$$c^J \geqslant 0$$

Il nous reste à indiquer comment s'effectue le changement de base au cours du cheminement et comment se remplit le tableau relatif à la base suivante.

REMARQUE

On peut, à partir d'un tableau donné ayant suffisamment de lignes, reconstituer un programme linéaire pour lequel le tableau représenterait une étape particulière du cheminement.

2. CHEMINEMENT SIMPLICIAL GÉNÉRALISÉ

2.1. CHANGEMENT DE BASE

Nous supposerons que le cheminement s'effectue sur P1 (par bases I-admissibles).

Les conclusions seraient tout à fait analogues dans le cas d'un cheminement par bases J-admissibles, en permutant les rôles des indices I et J.

b_I reste $\geqslant 0$ à chaque changement de base; tout changement de base doit conserver cette propriété.

Désignons par J_1 l'ensemble des colonnes telles que :

$$c^{J_1} < 0$$

et par J' l'ensemble complémentaire

$$c^{J'} \geqslant 0$$

Nous sommes assurés que J_1 n'est pas vide tant que l'optimum n'a pas été atteint. Si J' est vide, c'est que la base t^J rend minimum la fonction économique ζ. On a un pessimum au lieu de l'optimum souhaité. Nous remarquerons que, dans ce cas particulier, toute autre base I-admissible améliore ζ (en négligeant les cas de dégénérescence). Les règles de pivotage exposées plus loin nous assurent que J' ne peut être vide que pour la base de départ et qu'ensuite J' se maintient non vide. Hormis le cas de la première étape - que nous examinerons à part - nous pouvons supposer que ni J_1 ni J' ne sont vides. Ceci revient à négliger le départ et l'arrivée du cheminement.

Désignons par T le tableau représentatif complet (T désignera aussi pour simplifier le programme linéaire qu'il est censé représenter). Nous nous servirons des tableaux (ou programmes linéaires) T_1 et T' obtenus en supprimant respectivement les ensembles de colonnes (ou de variables) J' et J_1.

Les problèmes T_1 et T' s'obtiennent à partir de T en imposant les conditions supplémentaires :

$$t^{J'} = 0 \qquad \text{pour } T_1$$

$$t^{J_1} = 0 \qquad \text{pour } T'$$

ce qui revient à rendre maximum ζ non plus sur le polyèdre P_1, mais sur les facettes (convexes) de P1 contenues respectivement dans les variétés linéaires :

$$t^{J'} = 0$$

$$t^{J_1} = 0$$

REMARQUE FONDAMENTALE

Le point d'intersection des plans de la base t^J constitue un optimum pour le problème T' et un pessimum pour le problème T_1 .

Sauf cas de dégénérescence, l'optimum du problème T_1 permet de définir une nouvelle base du problème T qui améliore la valeur de la fonction ζ .

Après avoir transformé le tableau T pour la nouvelle base, on examine de nouveau les colonnes et l'on extrait de nouveau un nouvel ensemble J_1 et un nouveau problème T_1 qui permet à son tour d'engendrer une nouvelle base, un nouveau tableau T, etc.

Par leur mode de génération, les facettes parcourues successivement ne sont jamais vides, et si l'une d'elles présente un optimum non borné il en sera de même de T. Il y a équivalence entre le problème T et la suite de sous-problèmes T_1 .

Dans ce qui suit, nous supposons que la solution de chaque problème T_1 est atteinte par un procédé quelconque (ce pourra être, par exemple, un cheminement du même type ou un dénombrement total classé de toutes les bases admissibles) et que l'on connaît pour chaque problème T_1 la base optimale correspondante, c'est-à-dire un ensemble de n^{J_1} plans linéairement indépendants dont l'intersection avec $t^{J'} = 0$ est constituée de variétés linéaires elles-mêmes indépendantes. La nouvelle base du problème T sera constituée en complétant les n^{J_1} plans trouvés par les n^J plans $t^{J'} = 0$.

2.2. EXÉCUTION PRATIQUE - PIVOT MATRICIEL

A l'optimum du problème T_1 on connaît l'ensemble I_1 des lignes fournissant la base optimale qui est donc constituée par les $n_{I_1} = n^{J_1}$ plans :

$$s_{I_1} = 0$$

dans la variété linéaire :

$$t^{J'} = 0$$

La nouvelle base de T est constituée par les n^J plans :

$$s_{I_1} = 0$$
$$t^{J'} = 0$$

Le transformation du tableau T revient donc à éliminer t^{J_1} de la base et à lui substituer s_{I_1} . Cette opération revient à utiliser un pivot matriciel :

$$(I_1, J_1)$$

Des équations :

$$s_{I_1} = b_{I_1} + (I_1, J_1)(-t^{J_1}) + (I_1, J')(-t^{J'})$$

qui servent de lignes-pivots, on tire :

$$t^{J_1} = (I_1, J_1)^{-1} b_{I_1} + (I_1, J_1)^{-1}(-s_{I_1}) + (I_1, J_1)^{-1}(I_1, J')(-t^{J'})$$

en prémultipliant les deux membres par $(I_1, J_1)^{-1}$ qui existe bien; il suffit ensuite de terminer la substitution dans l'ensemble des s_I, ce qui donne :

$$s_I = b_I - (I, J_1)(I_1, J_1)^{-1} b_{I_1} - (I, J_1)(I_1, J_1)^{-1}(-s_{I_1}) \\ + \Big((I, J') - (I, J_1)(I_1, J_1)^{-1}(I_1, J')\Big)(-t^{J'})$$

La fonction ζ devient d'une manière analogue :

$$\zeta = \zeta_o - c^{J_1}(I_1, J_1)^{-1} b_{I_1} - c^{J_1}(I_1, J_1)^{-1}(-s_{I_1}) \\ + \Big((c^{J'}) - c^{J_1}(I_1, J_1)^{-1}(I_1, J')\Big)(-t^{J'})$$

Les formules précédentes permettent de transformer entièrement le tableau T. Elles se traduisent par les règles pratiques suivantes :

1) Composition de la nouvelle base :

On remplace t^{J_1} par s_{I_1} dans t^J.

2) Lignes du pivot :

Elles deviennent simplement :

$$s_{I_1} = (-U)(-s_{I_1})$$

Le pivot matriciel (I_1, J_1) est remplacé par $(-U)$, le reste des lignes du pivot par 0.

3) Colonnes du pivot :

Chaque sous-ligne $\big(c^{J_1},\ (i, J_1)\big)$ est post-multipliée par l'inverse du pivot et changée de signe.

4) Reste du tableau T :

Chaque élément $\big(b_{i'},\ c^{j'},\ (i', j')\big)$ est diminué du produit de la sous-ligne de cet élément par l'inverse du pivot et par la sous-colonne de ce même élément :

(i', j') est remplacé par :				$(i', j') - (i', J_1)(I_1, J_1)^{-1}(I_1, j')$
$b_{i'}$	"	"	"	$b_{i'} - (i', J_1)(I_1, J_1)^{-1} b_{I_1}$
$c^{j'}$	"	"	"	$c^{j'} - c^{J_1}(I_1, J_1)^{-1}(I_1, j')$

A l'ordre des multiplications matricielles près, ces formules redonnent exactement les règles de transformation classiques lorsque le pivot, au lieu d'être une matrice carrée non singulière, est un élément non nul. Comme on peut le vérifier aisément, l'algorithme de DANTZIG consiste à remplacer le problème T par des problèmes T_1 à une variable ($t^{j'}$ que l'on veut éliminer de la base) que l'on résout directement par un dénombrement classé des bases admissibles. Le cheminement s'effectue le long de variétés linéaires à 1 dimension (arêtes) au lieu de variétés linéaires de dimensions quelconques en employant le pivot matriciel.

2.3. FORME CONDENSÉE DE LA TRANSFORMATION DU TABLEAU T

Les éléments du tableau T forment une matrice (T) à $n_I + 1$ lignes et $n^J + 1$ colonnes. On a à chaque instant :

$$\begin{vmatrix} \zeta \\ s_I \end{vmatrix} = (T) \begin{vmatrix} 1 \\ -t^J \end{vmatrix}$$

Par ailleurs :

$$\begin{vmatrix} 1 \\ -t^J \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ -t^{J_1} \\ -t^{J'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(I_1, J_1)^{-1} b_{I_1} & -(I_1, J_1)^{-1} & -(I_1, J_1)^{-1} (I_1, J') \\ 0 & 0 & (U) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 \\ -s_{I_1} \\ -t^{J'} \end{vmatrix}$$

$$= (E) \begin{vmatrix} 1 \\ -s_{I_1} \\ -t^{J'} \end{vmatrix}$$

Soit $\underline{T}$ le tableau transformé, $(\underline{T})$ sa matrice associée. On a, en arrangeant convenablement les lignes de (E) :

$$(\underline{T}) = (T)\,(E)$$

Il suffit donc de connaître le tableau initial T_0 et chaque matrice élémentaire de transformation (E_k) relative au k^e changement de base pour en déduire le tableau T_k, en effectuant le produit :

$$(T_k) = (T_0)\,(E_1)\,(E_2) \ldots\ldots (E_k)$$

3. APPLICATIONS AUX PROBLÊMES DE DÉCOMPOSITION

Nous venons de voir que l'on peut ramener le problème donné T à une suite de problèmes T_1 plus réduits en nombre de variables, la liaison entre deux problèmes T_1 successifs étant un simple pivotage matriciel. Il s'agit donc bien d'un principe général de décomposition, les dimensions des problèmes T_1 variant constamment au cours du cheminement.

On peut en déduire deux variantes :

1) le cheminement par facettes complémentaires, sans projection

2) le cheminement par facettes complémentaires, avec projection.

3.1. CHEMINEMENT PAR FACETTES COMPLÉMENTAIRES SANS PROJECTION

Nous raisonnerons encore sur des bases I-admissibles (cheminement sur P_1).

Nous supposerons que la base de départ x^J est telle que :

x^{J_1} correspondant à $c_o^{J_1} < 0$ contienne m variables

$x^{J'}$ correspondant à $c_o^{J'} \geqslant 0$ contienne p variables

avec naturellement :

$$m + p = n^J$$

On peut alors montrer que le problème T peut se ramener à une suite de problèmes T_1 qui sont alternativement de dimension (fixe) m ou p, ce qui justifie l'expression de cheminement par facettes complémentaires.

En effet :

Le premier problème T_1 est de dimension m. A l'optimum de T_1 et après changement de base, les p colonnes J' contiennent tous les nouveaux candidats. En définissant le nouveau J_1 comme l'ancien J', on est assuré de cheminer sur une facette susceptible d'améliorer ζ bien que cette facette soit trop "large" (puisque J_1 pourrait être réduit aux seuls $c^J < 0$).

L'itération suivante nous redonnera de la même manière un problème T_1 à m colonnes et ainsi de suite. La convergence est assurée de la même façon (en supposant toujours un aménagement tenant compte des dégénérescences).

Cette méthode revient à :

1) Considérer le sommet de P_1 où l'on se trouve comme l'intersection de deux facettes complémentaires de P_1 et telles que pour l'une d'elles il y ait optimum.

2) Chercher le sommet de la facette complémentaire (et donc de P_1) qui rend ζ maximum. Ce nouveau sommet peut, à son tour, être considéré, etc.

3.2. CHEMINEMENT PAR FACETTES COMPLÉMENTAIRES AVEC PROJECTION

Les problèmes T_1 engendrés précédemment s'énoncent très simplement dans le système de variables t^J. On peut dans certains cas vouloir les énoncer dans le système de variables d'origine x^J (ce sera le cas, en particulier, lorsque la base x^J possède des propriétés que ne possèdent pas les autres).

On est alors amené à résoudre les problèmes T_1 en projection. On distinguera deux cas :

1) Il y a symétrie complète entre les x^J : dans ce cas, il est toujours possible de trouver une variété linéaire de dimension m ou p dans x^J qui donne une projection "fidèle" de T_1, c'est-à-dire une correspondance bi-univoque entre la facette de P_1 et sa projection.

2) Les variables x^J sont "spécialisées"(1). On s'astreint à projeter les facettes sur deux variétés linéaires bien déterminées de x^J. Si les projections existent toujours, elles risquent de ne pas toujours être fidèles; dans cette dernière éventualité la facette considérée présente certains parallélismes avec des variétés linéaires de x^J. On peut montrer que le problème T_1 lui-même se décompose à son tour jusqu'à ce que l'on trouve une projection fidèle.

---

(1) Nous pensons, en particulier, aux problèmes comportant des variables mixtes (continues et entières).

4. CONCLUSIONS

Tout cheminement sur P_1 de sommet en sommet est ramené à un cheminement de même nature sur des facettes de P_1 en considérant l'intersection de P_1 et de ces facettes (ainsi que l'intersection de ζ et de ces facettes). Le choix des facettes successives assure la croissance de ζ à chaque changement de facette (aux dégénérescences près). L'optimum est atteint lorsque la base considérée est optimale pour toute facette.

Dans chaque facette on est amené à résoudre un programme linéaire plus simple :

1) soit en vraie grandeur si l'on se sert des variables t^J de la base mobile,

2) soit en projection (spécialisée ou non) sur des x^J (avec ou sans décomposition possible).