CAHIERS DU BURO

MARC BARBUT

Méthodes récurrentes dans les problèmes de renouvellement de stock

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 2 (1957), p. 11-26

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1957__2__11_0>

MÉTHODES RECURRENTES DANS LES PROBLÈMES DE RENOUVELLEMENT DE STOCK

par

Marc BARBUT

I - FORMULATION DU PROBLÈME

Le gestionnaire d'un stock est confronté à la situation suivante : d'une part, il sait que pendant les unités de temps futur seront prélevées sur son stock des quantités (demandes) aléatoires, dont nous supposerons la distribution, pour chaque unité de temps, connue, continue, et indépendante des précédentes. D'autre part, son stock est alimenté par des commandes passées à des fournisseurs, et il sait que lorsqu'il passe sa commande pour une certaine date, la livraison n'aura pas nécessairement lieu à celle-ci, mais peut-être à d'autres, avec des probabilités données. Ces probabilités varieront selon la date de la commande, la date pour laquelle celle-ci est faite, selon la quantité commandée et selon le fournisseur; dans la suite, nous n'envisageons que le cas où il y a dépendance seulement du temps, Enfin, avoir une certaine quantité en stock coûte au gestionnaire (immobilisation de capital, frais de gestion, etc...) mais ne pouvoir faire face, par insuffisance de son stock, à une demande, lui coûte encore plus cher. Le premier coût (coût de stockage) sera supposé proportionnel, pour un niveau de stock donné, à la quantité de bien en stock et au temps pendant lequel elle est stockée ; le second (pénalité de défaillance) sera proportionnelle à la différence entre la demande et le stock (déficit de stock). Une autre hypothèse sur ces coûts que celle de proportionnalité, outre qu'elle ne permettrait pas un traitement mathématique simple, conduirait probablement à des conclusions différentes de celles auxquelles nous parviendrons. On pourrait envisager également d'autres frais, tels que ceux de mise en stock et de déstockage ; nous ne le ferons pas.

Mathématiquement, nous pouvons considérer le problème comme un jeu entre le gestionnaire et la nature, où les stratégies sont les suivantes:

A) Pour la nature : 1°) le choix d'un vecteur :

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$$

où X_n est la demande pendant l'unité de temps n, choisie au hasard avec une probabilité de densité $f_n(x)$:

$$f_n(x)\,dx = \Pr\left[\, x \leqslant X_n < x+dx \,\right]$$

2°) le choix d'une matrice

$$T = \| T_{in} \| \qquad\qquad n \geqslant i$$

où T_{in} est le délai de livraison d'une commande faite à la date i pour la date n, et est distribué suivant une loi connue :

$$\Pr\left[\, T_{in} = h \,\right] = p_{in}(h) \qquad\qquad h = 0,1,2,\ldots$$

B) Pour le gestionnaire : sa stratégie consiste à choisir une matrice :

$$Q = \| q_{in} \| \qquad\qquad n \geqslant i$$

où q_{in} est la commande faite à la date i pour la date n.

Les quantités considérées peuvent être astreintes à diverses conditions, sous forme d'inégalités généralement. Pour les X_n et les T_{in}, ces conditions sont contenues dans leurs lois de probabilité, de sorte que nous les supposons seulement positives ou nulles ; de plus les T_{in} sont des entiers.

Lorsque $\vec{X}$, T, Q sont choisis, il en résulte un coût $\mathcal{P}(\vec{X},T,Q)$ bien déterminé. Mais comme le gestionnaire ne connaît pas le choix de son adversaire, ce qu'il peut faire de mieux c'est de choisir Q de façon à rendre minimum, par exemple, l'espérance de $\mathcal{P}$ par rapport aux distributions p_{in} et $f_n(x)$; on pourrait imaginer d'autres critères, tel celui proposé par R. Bellman (*) de rendre minimum la probabilité pour que ce coût dépasse une valeur donnée. Nous nous contenterons du premier, comme le fait Bellman dans l'article cité; mais il importe de remarquer que ce critère fait partie de la règle du jeu.

Il faut encore préciser, pour que cette règle soit complète, quel est l'horizon qu'on se donne, soit que l'on envisage une période de temps finie de N unités de temps, et les seules commandes à passer pendant cette période, abstraction faite de ce qui a lieu avant et après; soit au contraire que l'on prenne un horizon infini.

Jusqu'ici l'ensemble des stratégies possibles pour chacun des joueurs est extrêmement vaste, et la recherche de la (ou les) stratégie optimale pour le gestionnaire n'a pas encore été entreprise dans toute sa généralité. On peut se proposer de se restreindre à la recherche de l'optimum dans un sous-ensemble de l'ensemble des stratégies. Par exemple, le gestionnaire peut n'avoir le droit que de choisir dès l'instant initial (dans le cas d'une période de temps finie) toutes les quantités à commander. Les deux matrices T et Q se réduisent alors à des vecteurs

$$\vec{T} = (T_1\,,\ T_2\,,\ldots,\ T_N)$$

$$\vec{q} = (q_1\,,\ q_2\,,\ldots,\ q_N)$$

(*) BELLMAN, GLICKSBERG et GROSS - On the optimal inventory equations, dans "Management Science", Oct. 1955, pp. 83 à 104.

où T_n est le délai de livraison d'une commande faite pour la date n et q_n la quantité commandée pour cette date. Il faut alors choisir $\vec{q}$ de façon à minimiser l'espérance a priori de $\mathcal{P}(\vec{X},\vec{T},\vec{q})$. Les résultats obtenus dans ce cas seront exposés dans une autre publication. (*)

On peut au contraire astreindre le gestionnaire à faire une commande à chaque unité de temps, en se servant de toutes les informations dont il dispose alors : commandes faites dans le passé, et celles qui sont déjà livrées, nombre d'unités de temps restant jusqu'à la fin de la période, niveau actuel de son stock. Il s'agit alors d'une programmation dynamique.

II - LA MÉTHODE DE PROGRAMMATION DYNAMIQUE

Nous supposons dans la suite que les indices n vont en commençant par la fin du processus, et que q_n désigne la commande faite n unités de temps avant qu'il se termine. Chaque q_n devra être choisi de façon à rendre minimum l'espérance Φ_n du coût pour l'ensemble des n unités de temps restantes. Pour bien voir comment se forment alors les équations de récurrence qui déterminent les q_n et les Φ_n, établissons les sur deux exemples; nous désignerons par λ le coût unitaire du bien en stock, et par μ le coût de défaillance.

1°) Supposons que le délai de livraison soit certain, et égal à une unité de temps quelle que soit la date de la commande. Il faut déterminer q_n en fonction du seul niveau du stock, S, au début de l'unité de temps n. Le coût probable est par suite une fonction $\Phi_n(S)$ de S seul. Si la demande pendant l'unité de temps n est x, et si je commande q, j'aurai en stock au début de l'unité de temps (n-1) une quantité (S+q-x) si (S-x) est positif, et q dans le cas contraire. D'autre part, mon stock me coûte, pendant l'unité de temps n, $\lambda(S-x)$ dans le premier cas, et $\mu(x-S)$ dans le second.

De sorte que, si l'on pose :

$$\psi_n(S) = \lambda \int_0^S (S-x)\, f_n(x)\, dx + \mu \int_S^{+\infty} (x-S)\, f_n(x)\, dx$$

$$H_n\left[S, q\,;\,\Phi(x)\right] = \Phi(q) \int_S^{+\infty} f_n(x)\, dx + \int_0^S \Phi(S+q-x)\, f_n(x)\, dx$$

q doit être choisi de façon à rendre minimum :

$$\psi_n(S) + H_n\left[S, q\,;\,\Phi_{n-1}\right]$$

et l'on aura, si ce minimum existe pour une valeur de q :

bien déterminée : $q = q_n(S)$

$$\Phi_n(S) = \psi_n(S) + \min_{q \geq 0} H_n\left[S, q\,;\,\Phi_{n-1}\right]$$

$$= \psi_n(S) + H_n\left[S, q_n(S)\,;\,\Phi_{n-1}\right]$$

(*) Cahiers du Bureau Universitaire de Recherche Opérationnelle, n° 1.

2°) Le raisonnement n'est guère modifié si les délais de livraison sont aléatoires. Supposons que la commande q_n ne puisse être disponible qu'aux dates (n-1) et (n-2) avec des probabilités α_n et $(1-\alpha_n)$ respectivement. Au début de la période n, on peut être dans l'une ou l'autre des deux situations suivantes :

(1) la commande q_{n+1} est livrée ; il faut alors choisir q_n en fonction de S seul, $q_n^{(1)}$ (S) et l'on aura une espérance $\Phi_n^{(1)}$ (S) ne dépendant que de S

(2) la commande q_{n+1} n'est pas livrée; mais elle sera sûrement disponible pour l'unité de temps (n-1). Il faut choisir q_n en fonction de S et de q_{n+1}, soit $q_n^{(2)}$ (S,q_{n+1}) et l'on aura de même $\Phi_n^{(2)}$ (S,q_{n+1}). En raisonnant comme plus haut, on a alors les deux équations :

$$(1) \quad \Phi_n^{(1)}(S) = \psi_n(S) + \min_{q\geqslant 0}\Big\{\alpha_n\Big[\Phi_{n-1}^{(1)}(q)\int_S^{+\infty} f_n(x)\,dx + \int_0^S \Phi_{n-1}^{(1)}(S+q-x)\,f_n(x)\,dx\Big]$$

$$+(1-\alpha_n)\Big[\Phi_{n-1}^{(2)}(0,q)\int_S^{+\infty} f_n(x)\,dx + \int_0^S \Phi_{n-1}^{(2)}(S-x,q)\,f_n(x)\,dx\Big]\Big\}$$

$$(2) \quad \Phi_n^{(2)}(S,q_{n+1}) = \psi_n(S) + \min_{q\geqslant 0}\Big\{\alpha_n\Big[\Phi_{n-1}^{(1)}(q_{n+1}+q)\int_S^{+\infty} f_n(x)\,dx +$$

$$\int_0^S \Phi_{n-1}^{(1)}(S+q_{n+1}+q-x)\,f_n(x)\,dx\Big] + (1-\alpha_n)\Big[\Phi_{n-1}^{(2)}(q_{n+1},q)\int_S^{+\infty} f_n(x)\,dx +$$

$$+\int_0^S \Phi_{n-1}^{(2)}(S+q_{n+1}-x,q)\,f_n(x)\,dx\Big]\Big\}$$

$q_n^{(1)}$ (S) et $q_n^{(2)}$ (S,q_{n+1}) sont les valeurs de S pour lesquelles les minimum, dans (1) et (2), sont respectivement atteints.

III - LES RÉSULTATS DE BELLMAN

R. Bellman, dans l'article déjà cité, n'étudie que des cas où les délais de livraisons sont certains. D'autre part, il suppose que la densité $f_n(x)$ est indépendante de la date n, et il prend comme coût afférent à l'unité de temps n, la fonction :

$$\psi\ (S,q) = kq + \mu\int_S^{+\infty}(x-S)\,f(x)\,dx$$

où k est ici un prix d'achat. Il se place d'abord dans l'hypothèse où les délais de livraison sont tous nuls. L'équation de récurrence est alors ;

$$(1) \quad \Phi_n(S) = \min_{q\geqslant 0}\Big[\ kq + \mu\int_{S+q}^{+\infty}(x-S-q)\,f(x)\,dx + \Phi_{n-1}(0)\int_{S+q}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$+\int_0^{S+q}\Phi_{n-1}(S+q-x)\,f(x)\,dx\ \Big]$$

Puis, passant au cas d'un processus infini, et prenant la précaution de multiplier les coûts, lorsque n augmente d'une unité, par une constante a inférieure à 1 pour éviter que ceux-ci puissent devenir infinis, il étudie l'équation :

$$(2) \quad \Phi_n(S) = \min_{q \geq 0} \Big[kq + \mu a \int_{S+q}^{\infty} (x-S-q) f(x)\,dx + a\Phi_{n-1}(0) \int_{S+q}^{\infty} f(x)\,dx$$
$$+ a \int_0^{S+q} \Phi_{n-1}(S+q-x) f(x)\,dx \Big]$$

Il montre alors que Φ_n (S) converge vers une fonction Φ (S), bornée, quelle que soit la fonction Φ_1 (S) bornée choisie au départ. D'autre part, il prouve l'existence d'un niveau de stock critique $\bar{S}_n$ tel que la politique optimum soit :

$$\text{si } S \leq \bar{S}_n \qquad \text{prendre} \qquad q_n = \bar{S}_n - S$$
$$\text{si } S > \bar{S}_n \qquad \text{prendre} \qquad q_n = 0$$

et que $\bar{S}_n$ tende, dans le cas de l'équation (2), vers une limite $\bar{S}$ lorsque n tend vers l'infini. $\bar{S}_n$ est solution d'une équation simple déduite de (1) ou de (2), suivant le cas.

Bellman étudie ensuite quelques cas plus généraux, tel celui où les délais de livraison sont égaux à une unité de temps, ou celui où le stock est non plus homogène, mais se compose de i catégories de biens distincts dont les demandes sont indépendantes entre elles ou pas. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à son article, mais les démonstrations sont du même type que celles qui vont suivre, et les résultats, dans le cas du stock homogène, que nous envisagerons seul, moins généraux.

IV - ÉTUDE COMPLÈTE D'UN CAS OU LES DÉLAIS DE LIVRAISON SONT ALÉATOIRES

Afin de n'avoir pas des notations trop lourdes, nous allons traiter complètement un cas très simple. La marche des raisonnements est la même dans les cas plus généraux, et nous indiquerons seulement plus loin les résultats qui leur sont particuliers.

Le processus que nous allons étudier est le suivant. La commande q_n a une probabilité α_n d'être disponible immédiatement, et $(1-\alpha_n)$ de ne l'être que pour l'unité de temps (n-1). Dans ces conditions, l'équation de récurrence est :

$$\Phi_n(S) = \min_{q \geq 0} H_n(S,q)$$

$$H_n(S,q) = \alpha_n \psi_n(S+q) + (1-\alpha_n)\psi_n(S) + \alpha_n T_n(S+q\,; \Phi_{n-1}(0))$$
$$+ (1-\alpha_n) T_n(S\,; \Phi_{n-1}(q))$$

en posant :

$$\psi_n(S) = \lambda \int_0^S (S-x) f_n(x)\,dx + \mu \int_S^{+\infty} (x-S) f_n(x)\,dx$$

$$T_n(S\,; \Phi_{n-1}(q)) = \Phi_{n-1}(q) \int_S^{+\infty} f_n(x)\,dx + \int_0^S \Phi_{n-1}(S+q-x) f_n(x)\,dx$$

Nous allons prouver les résultats suivants: si $\Phi_{n-1}(S)$ est une fonction convexe, à dérivée continue, il en est de même de $\Phi_n(S)$; dans les mêmes hypothèses, le minimum de $H_n(S,q)$ est atteint pour une valeur

$$q = q_n(S)$$

qui est fonction continue non croissante de S, et est nulle lorsque S est supérieur à une valeur critique $\bar{S}_n$, de sorte que la politique optimale est :

$$\begin{array}{lll} q_n = q_n(S) & \text{si} & S \leqslant \bar{S}_n \\ q_n = 0 & \text{si} & S > \bar{S}_n \end{array}$$

Enfin, autres résultats remarquables : $\Phi_n(S)$ est une fonction à croissance de plus en plus rapide, pour les grandes valeurs de S, lorsque n augmente, et il existe d'autre part un stock optimum σ_n inférieur au stock critique $\bar{S}_n$.

a) ETUDE DE $\Phi_1(S)$

On a, à la fin du processus :

$$\Phi_1(S) = \min_{q \geqslant 0} \left\{ \alpha_1 \psi_1(S+q) + (1-\alpha_1)\psi_1(S) \right\} = \min_{q \geqslant 0} H_1(S,q)$$

où

$$\psi_1(S) = \lambda \int_0^S (S-x)\, f_1(x)\, dx + \mu \int_S^{+\infty} (x-S)\, f_1(x)\, dx$$

$\psi_1(S)$ est fonction continue de S. Elle a pour dérivée

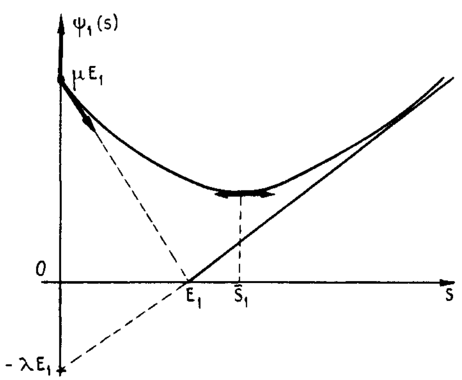
$$\psi'_1(S) = (\lambda+\mu) \int_0^S f_1(x)\, dx - \mu$$

Cette dérivée est continue, croissante et s'annule pour la valeur $\bar{S}_1$ telle que :

$$\int_0^{\bar{S}_1} f_1(x)\, dx = \frac{\mu}{\lambda+\mu} < 1$$

Cette valeur est bien déterminée et unique, puisque, $f_1(x)$ étant une densité de probabilité (1), $\int_0^S f_1(x)dx$ est fonction continue croissante de S et que :

$$\int_0^{+\infty} f_1(x)\, dx = 1$$



On a :

$$\psi'_1(0) = -\mu$$

$$\psi_1(0) = \mu \int_0^{+\infty} x f_1(x)\, dx = \mu E_1$$

$$\psi'_1(\infty) = \lambda$$

$$\lim_{S=\infty} (\psi_1(S) - \lambda S) = -\lambda E_1$$

(1) Nous supposons $f_1(x) > 0$ pour éviter les complications de présentation qui résulteraient de l'existence d'un intervalle de valeurs S annulant $\Phi'_1(S)$.

ψ_1 (S) a donc l'allure indiquée sur la figure.

On a alors :

$$\frac{\partial H_1(S,q)}{\partial q} = \alpha_1 \psi'_1(S+q) = \alpha_1 \left[(\lambda+\mu) \int_0^{S+q} f_1(x)\, dx - \mu \right]$$

$$\frac{\partial^2 H_1(S,q)}{\partial q^2} = \alpha_1 \psi''_1(S+q) = \alpha_1 (\lambda+\mu) f_1(S+q)$$

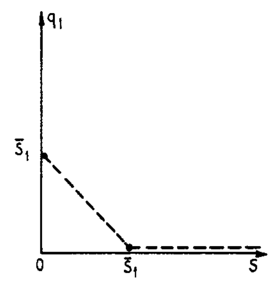
Il en résulte que pour tout S donné, $H_1(S,q)$ est fonction convexe de q, à dérivée continue croissante. Pour q = 0, cette dérivée vaut :

$$\alpha_1 \left[(\lambda+\mu) \int_0^{S} f_1(x)\, dx - \mu \right]$$

donc :

1) si $S > \bar{S}_1$, elle est positive pour q = 0, donc pour toute valeur de q, et $H_1(S,q)$ est fonction croissante de q. Son minimum est par suite atteint pour q = 0.

2) si $S \leqslant \bar{S}_1$, $\dfrac{\partial H(S,q)}{\partial q}$ s'annule pour $q = \bar{S}_1 - S$, valeur pour laquelle $H_1(S,q)$ passe par son minimum.



Donc le choix optimum de q_1 est :

si	$S > \bar{S}_1$	$q_1 = 0$
si	$S \leqslant \bar{S}_1$	$q_1 = \bar{S}_1 - S$

et l'on a

$$\Phi_1(S) = H_1(S,0) = \psi_1(S) \qquad \text{si } S > \bar{S}_1$$

$$\Phi_1(S) = H_1(S,\bar{S}_1 - S) = \alpha_1 \psi_1(\bar{S}_1) + (1-\alpha_1)\psi_1(S) \qquad \text{si } S \leqslant \bar{S}_1$$

On voit immédiatement que Φ_1 (S) est continue en $\bar{S}_1$. Elle a pour dérivée :

$$\Phi'_1(S) = \psi'_1(S) \qquad \text{si } S > \bar{S}_1$$

$$\Phi'_1(S) = (1-\alpha_1)\psi'_1(S) \qquad \text{si } S \leqslant \bar{S}_1$$

Il en résulte que $\Phi_1'(S)$ est croissante, comme $\psi_1'(S)$ et continue en $\bar{S}_1$ où elle s'annule.

Par contre, comme

$$\Phi''_1(S) = \psi_1''(S) \qquad \text{si } S > \bar{S}_1$$

$$\Phi''_1(S) = (1-\alpha_1)\psi_1''(S) \qquad \text{si } S \leqslant \bar{S}_1$$

$\Phi_1''(S)$ sera en général discontinue en $\bar{S}_1$, où elle admettra un saut égal à:

$$\alpha_1 \psi_1''(\bar{S}_1) = \alpha_1 (\lambda+\mu) f_1(\bar{S}_1)$$

En résumé, Φ_1 (S) est convexe continue, à dérivée première continue, et à dérivée seconde positive mais ayant une discontinuité.

b) CHOIX OPTIMUM DE q_n

Ceci étant, supposons que $\Phi_{n-1}(S)$ jouisse des mêmes propriétés, et supposons en outre que :

$$-\mu \leqslant \Phi'_{n-1}(0) < 0$$
$$\lim_{S \to \infty} \Phi'_{n-1}(S) = k_{n-1} > 0$$

On a : $$\Phi_n(S) = \min_{q \geqslant 0} H_n(S,q)$$

si toutefois ce minimum existe. Les fonctions intervenant sous le signe $\int$ dans la définition de $H_n(S,q)$ étant à dérivée première continue, on a :

$$(1) \quad \frac{\partial H_n(S,q)}{\partial q} = \alpha_n \psi'_n(S+q) + \alpha_n \int_0^{S+q} \Phi'_{n-1}(S+q-x)\, f_n(x)\, dx$$
$$+ (1-\alpha_n)\left[\Phi'_{n-1}(q) \int_S^{+\infty} f_n(x)\, dx + \int_0^S \Phi'_{n-1}(S+q-x)\, f_n(x)\, dx\right]$$

et

$$(2) \quad \frac{\partial H_n(S,q)}{\partial S} = \frac{\partial H_n(S,q)}{\partial q} + (1-\alpha_n)\left[\psi'_n(S) - \Phi'_{n-1}(q) \int_S^{+\infty} f_n(x)\, dx\right]$$

Pour le calcul de $\frac{\partial^2 H_n(S,q)}{\partial q^2}$ et des autres dérivées secondes, il faut montrer que bien que la dérivée seconde de $\Phi_{n-1}(S)$ puisse avoir des discontinuités, la formule de dérivation sous le signe somme est ici toujours valable. Montrons-le par exemple pour l'intégrale :

$$I(S,q) = \int_0^S \Phi'_{n-1}(S+q-x)\, f_n(x)\, dx$$

la démonstration étant analogue pour les autres. Supposons que $\Phi'_{n-1}(S)$ admette une discontinuité de première espèce pour $S = \sigma$, x variant de 0 à S, $(S+q-x)$ varie de $(S+q)$ à q. Il n'y a donc de difficulté que si

$$q < \sigma < S+q$$

et on a alors

$$I(S,q) = \int_0^{S+q-\sigma-0} \Phi'_{n-1}(S+q-x)\, f_n(x)\, dx + \int_{S+q-\sigma+0}^S \Phi'_{n-1}\, f_n\, dx$$

$$\frac{\partial I}{\partial q} = \int_0^{S+q-\sigma-0} \Phi''_{n-1}(S+q-x)\, f_n(x)\, dx + \Phi'_{n-1}(\sigma+0)\, f_n(S+q-\sigma-0)$$
$$+ \int_{S+q-\sigma+0}^S \Phi''_{n-1}(S+q-x)\, f_n(x)\, dx - \Phi'_{n-1}(\sigma-0)\, f_n(S+q-\sigma+0)$$

$\Phi'_{n-1}(S)$ et f_n étant continues, il reste

$$\frac{\partial I}{\partial q} = \int_0^{S+q-\sigma-0} \Phi''_{n-1}\, f_n\, dx + \int_{S+q-\sigma+0}^S \Phi''_{n-1} f_n\, dx = \int_0^S \Phi''_{n-1}(S+q-x)\, f_n(x)\, dx$$

On a donc, tous calculs réduits :

$$(3) \quad \frac{\partial^2 H_n(s,q)}{\partial q^2} = \alpha_n f_n(s+q)\,(\lambda+\mu+\Phi'_{n-1}(0)) + \alpha_n \int_0^{s+q} \Phi''_{n-1}(s+q-x)\, f_n(x)\, dx$$

$$+ (1-\alpha_n)\Big[\int_0^s \Phi''_{n-1}(s+q-x)\, f_n(x)\, dx + \Phi''_{n-1}(q)\int_s^{+\infty} f_n(x)\, dx\Big]$$

On calcule de même les autres dérivées secondes et l'on obtient les formules :

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 H_n}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 H_n}{\partial s \partial q} - (1-\alpha_n)\,\Phi''_{n-1}(q)\int_s^{+\infty} f_n(x)\, dx$$

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 H_n}{\partial S^2} = \frac{\partial^2 H_n}{\partial s \partial q} + (1-\alpha_n)\, f_n(s)\big[\lambda + \mu + \Phi'_{n-1}(q)\big]$$

De l'égalité (3), et de l'inégalité

$$\Phi'_{n-1}(0) \geqslant -\mu$$

il ressort, toutes les intégrales écrites dans (3) étant positives, que $\frac{\partial^2 H_n(s,q)}{\partial q^2}$ est, pour tout s fixé, positive quel que soit q ; donc $\frac{\partial H_n}{\partial q}$ est une fonction croissante de q. Or pour q = 0, on a :

$$(6) \quad \left(\frac{\partial H_n(s,q)}{\partial q}\right)_{q=0} = \alpha_n \psi'_n(s) + \int_0^s \Phi'_{n-1}(s-x) f_n(x)\, dx + (1-\alpha_n)\Phi'_{n-1}(0)\int_s^{+\infty} f_n(x)\, dx$$

On s'assure aisément que c'est là une fonction croissante de S, qui pour s = 0 vaut :

$$(1-\alpha_n)\Phi'_{n-1}(0) < 0$$

et qui est positive lorsque $S \to \infty$; il nous faut, pour trouver la limite de $\left(\frac{\partial H_n}{\partial q}\right)_{q=0}$ lorsque $s \to \infty$, chercher :

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^s \Phi'_{n-1}(s-x)\, f_n(x)\, dx = \lim_{s\to\infty} \beta(s)$$

en désignant l'intégrale par $\beta(s)$. Montrons que cette limite est :

$$k_{n-1} = \lim_{x\to\infty} \Phi'_{n-1}(x)$$

ε étant donné, choisissons X tel que si

$$x > X \qquad \text{on ait} \qquad \left|\Phi'_{n-1}(x) - k_{n-1}\right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

et X' tel que :

$$\int_{X'}^{+\infty} f_n(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{3\,(M + k_{n-1})}$$

où $M = \sup(\mu, k_{n-1})$ est une borne supérieure de $\left|\Phi'_{n-1}(x)\right|$

Prenons : $s > X + X'$

On a alors :

$$\left| \beta (s) - k_{n-1} \right| = \left| \beta (s) - k_{n-1} \int_0^{+\infty} f_n (x)\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^{s-X} (\Phi'_{n-1} (s-x) - k_{n-1})\, f_n (x)\, dx + \int_{s-X}^{s} (\Phi'_{n-1}(s-x) - k_{n-1})\, f_n\, x(dx) \right.$$

$$\left. - k_{n-1} \int_s^{+\infty} f_n (x)\, dx \right|$$

La première intégrale est en valeur absolue inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$, puisque (S-x) y varie de s à X; la troisième, à $\varepsilon \frac{k_{n-1}}{3(M+k_{n-1})}$. Enfin la seconde est en module inférieur à :

$$(M+k_{n-1}) \int_{s-X}^{s} f_n (x)\, dx < \frac{\varepsilon}{3} \qquad \text{puisque } s-X > X'$$

Finalement :

$$\left| \beta (s) - k_{n-1} \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon\, k_{n-1}}{3(M+k_{n-1})} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$$

La limite de $\varphi_n'(S)$ étant λ lorsque S tend vers l'infini, il en résulte que la limite de l'expression (6) est :

$$\lambda \alpha_n + k_{n-1} > 0$$

Donc $\left(\frac{\partial H_n}{\partial q}\right)_{q=0}$ s'annule pour une valeur $\bar{S}_n$ de S positive bien déterminée, racine unique de :

$$\left(\frac{\partial H_n}{\partial q}\right)_{q=0} = 0$$

D'où

1) si $S > \bar{S}_n$, $\frac{\partial H_n}{\partial q}$ est positive pour tout $q \geqslant 0$, et $H_n(S,q)$ est une fonction croissante de q dont le minimum est atteint pour $q = 0$.

2) si $S \leqslant \bar{S}_n$, $\frac{\partial H_n}{\partial q}$ s'annule pour une valeur $q = q_n(S)$, racine de l'équation

$$\frac{\partial H_n(s,q)}{\partial q} = 0 \tag{7}$$

(on montre, comme on vient de le faire, que $\lim\limits_{q\to\infty} \frac{\partial H_n(S,q)}{\partial q} > 0$). $\frac{\partial H_n(S,q)}{\partial q}$ étant continue en S et q, $q_n(S)$ est fonction continue de S. Les dérivées secondes de $H_n(s,q)$ étant elles-mêmes continues, $q_n'(S)$ existe et l'on a :

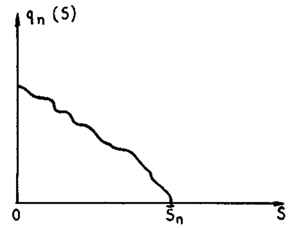
$$q_n'(S) \frac{\partial^2 H_n}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial q\, \partial s} = 0$$

Il résulte alors de la formule (4) que :

$$-1 < q_n'(S) < 0$$

donc $q_n(S)$ est décroissante. On peut enfin montrer que :

$$q_n(0) < \bar{S}_n$$



et plus généralement que :

$$\bar{S}_n \geq q_n(S) + S \geq q_n(0)$$

et à cause de la continuité de $\dfrac{\partial H_n(S,q)}{\partial q}$ que :

$$q_n(\bar{S}_n) = 0$$

de sorte que $q_n(S)$ est continu en $\bar{S}_n$; mais $q_n'(S)$ ne l'est pas. En résumé, on a pour la stratégie optimum :

si $S > \bar{S}_n$	$q_n = 0$
si $S \leq \bar{S}_n$	$q_n = q_n(S)$

c) ETUDE DE Φ_n (S)

1) Pour $S > \bar{S}_n$, on a :

$$\Phi_n(S) = H_n(S,0) = \psi_n(S) + \Phi_{n-1}(0)\int_S^{+\infty} f_n(x)\,dx + \int_0^S \Phi_{n-1}(s-x)\,f_n(x)\,dx$$

fonction continue dont les dérivées sont, compte tenu de

$$\psi_n'(S) = (\lambda+\mu)\int_0^S f_n(x)\,dx - \mu$$

$$\Phi_n'(S) = (\lambda+\mu)\int_0^S f_n(x)\,dx - \mu + \int_0^S \Phi_{n-1}'(S-x)\,f_n(x)\,dx$$

$$\Phi_n''(S) = \left[\lambda + \mu + \Phi_{n-1}'(0)\right] f_n(S) + \int_0^S \Phi_{n-1}''(S-x)\,f_n(x)\,dx$$

$\Phi_n''(S)$ est donc positive, et $\Phi_n(S)$ est convexe à dérivée continue. Montrons que $\Phi_n'(S)$ est elle aussi positive pour $S > \bar{S}_n$. En effet, de l'égalité (2) on tire :

$$\Phi_n'(S) = \frac{\partial H_n(S,0)}{\partial S} = \frac{\partial H_n(S,0)}{\partial q} + (1-\alpha_n)\left[\psi_n'(S) - \Phi_{n-1}'(0)\int_S^{+\infty} f_n(x)\,dx\right]$$

or la quantité entre crochets est positive, puisque $\Phi_{n-1}'(0)$ est négative, et d'après la définition même de $\bar{S}_n$, $\dfrac{\partial H_n(S,0)}{\partial q}$ est positive si $S > \bar{S}_n$.

Il en résulte que $\Phi_n(S)$ est croissante dans l'intervalle $(\bar{S}_n, +\infty)$. Enfin, lorsque $S \to \infty$, on a :

$$\Phi_n'(S) \to \lambda + k_{n-1}$$

Donc :

$$k_n = \lim_{S\to\infty} \Phi_n'(S) = (n+1)\lambda$$

ce qui montre que lorsque n augmente, la croissance de $\Phi_n(S)$, lorsque S est supérieur au stock critique $\bar{S}_n$, est de plus en plus rapide, la direction asymptotique ayant une pente de plus en plus relevée.

2) si $S \leqslant \bar{S}_n$, on a :

$$\Phi_n(S) = H_n(S, q_n(S))$$

d'où :

$$\Phi'_n(S) = \frac{\partial H_n(S, q_n(S))}{\partial S} + q'_n(S) \frac{\partial H_n(S, q_n(S))}{\partial q}$$

Mais, d'après la définition même de $q_n(S)$ (équation 7)

$$\frac{\partial H_n(S, q_n(S))}{\partial q} = 0$$

Donc :

$$\Phi'_n(S) = \frac{\partial H_n(S, q_n(S))}{\partial s}$$

Ce qui peut s'écrire, compte tenu de (7) et de (2) :

$$\Phi'_n(S) = (1-\alpha_n)\left[(\lambda+\mu)\int_0^S f_n\ (x)\ dx - \mu - \Phi'_{n-1}\left(q_n(s)\right)\int_S^{+\infty} f_n\ (x)\ dx \right]$$

D'autre part :

$$\Phi''_n(S) = \frac{\partial^2 H_n}{\partial s^2}(S, q_n(S)) + q'_n(S) \frac{\partial^2 H_n}{\partial s \partial q}$$

Comme : $q'_n(S) > -1$, et compte tenu de (5) :

$$\Phi''_n(S) > \frac{\partial^2 H_n}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 H_n}{\partial s \partial q} = (1-\alpha_n)\ f_n\ (S)\left[\lambda+\mu+\Phi'_{n-1}(q_n(S))\right]$$

or, Φ'_{n-1} étant croissante, et $q_n(S) \geqslant 0$

$$\Phi'_{n-1}(q_n(S)) > \Phi'_{n-1}(0) \geqslant -\mu$$

Donc : $$\Phi''_n(S) > 0$$

et $\Phi_n(S)$ est convexe.

D'autre part :

$$\Phi'_n(0) = -(1-\alpha_n)\left[\mu + \Phi'_{n-1}(q_n(0))\right] < 0$$

car $$\Phi'_{n-1}(q_n(0)) > \Phi'_{n-1}(0) \geqslant -\mu$$

puisque $$q_n(0) > 0$$

Montrons enfin que :

$$\mu + \Phi'_n(0) \geqslant 0$$

En effet :

$$\mu + \Phi'_n(0) = \mu\ \alpha_n + (1-\alpha_n)\Phi'_{n-1}(q_n(0))$$

Or :

$$\Phi'_{n-1}(q_n(0)) \leqslant \frac{\mu\ \alpha_n}{1-\alpha_n}$$

En effet, supposons le contraire ; $q_n(0)$ est racine de :

$$\left(\frac{\partial H_n(S,q)}{\partial q}\right)_{s=0} = 0$$

Le premier membre de cette équation peut s'écrire, au moyen d'une intégration par parties :

$$\alpha_n \int_0^q f_n(x)\, dx \left[\lambda + \mu + \Phi'_{n-1}(0)\right] + \alpha_n \int_0^q \Phi''_{n-1}(q-x)\, f_n(x)\, dx +$$
$$+ \left[(1-\alpha_n)\Phi'_{n-1}(q) - \mu\, \alpha_n\right]$$

Si $\Phi'_{n-1}(q) > \frac{\mu\, \alpha_n}{1-\alpha_n}$, ce premier membre est positif, et nous aboutissons à une contradiction.

3) On vérifie aisément que

$$\Phi_n(\bar{S}_n - 0) = \Phi_n(\bar{S}_n + 0)$$
$$\Phi'_n(\bar{S}_n - 0) = \Phi'_n(\bar{S}_n + 0) > 0$$

et que par contre :

$$\Phi''_n(\bar{S}_n + 0) > \Phi''_n(\bar{S}_n - 0)$$

$\Phi''_n(S)$ possède un saut pour $S = \bar{S}_n$, et c'est sa seule discontinuité.

d) STOCK OPTIMUM

Il résulte de cette étude que $\Phi_n(S)$ passe par un minimum pour une valeur σ_n qui annule sa dérivée et est donc comprise dans l'intervalle $(0, \bar{S}_n)$. Comme $\Phi'_n(S) = \frac{\partial H_n(S, q_n(S))}{\partial S}$, en σ_n, les deux dérivées de $H_n(S,q)$ sont simultanément nulles, de sorte que l'on peut déterminer σ_n, et la commande optimum $q_n(\sigma_n)$ qui lui correspond, en résulvant le système :

$$\frac{\partial H_n(S,q)}{\partial q} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial H_n(S,q)}{\partial s} = 0$$

Compte tenu de l'égalité (2), l'une des deux équations peut d'ailleurs être remplacée par :

$$\int_0^s f_n(x)\, dx = \frac{\mu + \Phi'_{n-1}(q)}{\lambda + \mu + \Phi'_{n-1}(q)}$$

qui est plus maniable

Il va sans dire qu'il est indépendant de la volonté du gestionnaire d'être à ce niveau de stock optimum ; cela dépend du seul hasard. Et si par chance le stock est au niveau σ_n à la date n, il n'y a aucune raison pour qu'il soit au niveau σ_{n-1} à la date (n-1), quoi que fasse le gestionnaire.

V - CAS DU PROCESSUS INFINI

Nous allons maintenant examiner ce qui se passe si n augmente indéfiniment, c'est-à-dire si l'horizon devient infini. A priori, si les $f_n(x)$ et les α_n sont tous différents, et varient sans régularité, il n'y a pas de raison pour que $\Phi_n(S)$ converge vers une fonction $\Phi(S)$ bien déterminée ; et le problème de trouver les conditions nécessaires de convergence n'est pas résolu. Mais on peut trouver des conditions suffisantes. Par exemple que α_n admette une limite quand n augmente indéfiniment et que $f_n(x)$ converge uniformémént vers une fonction $f(x)$. Nous nous bornerons à examiner le cas où toutes les fonctions $f_n(x)$ et tous les α_n sont égaux entre eux, et nous poserons :

$$f_n(x) = f(x) \qquad\qquad \alpha_n = \alpha$$

Dans cette hypothèse, on vérifie d'abord que l'on a une certaine régularité pour les valeurs remarquables de S déterminées plus haut, à savoir que les suites σ_n et $\bar{S}_n$ sont non décroissantes. De plus, la suite des fonctions $\Phi_n(S)$ est elle aussi non décroissante. Or $\Phi_n(S)$ n'est pas bornée, nous avons vu qu'elle augmente indéfiniment avec S, et même que $\Phi_n(S)$ croît plus vite que $\Phi_{n-1}(S)$ pour les grandes valeurs de S, les directions asymptotiques augmentant en progression arithmétique. Il en résulte qu'il pourrait très bien se faire que pour des valeurs de S fixes et finies $\Phi_n(S)$ augmente indéfiniment ; mais il n'en sera pas ainsi si nous faisons l'hypothèse supplémentaire que lorsque n augmente d'une unité, tous les prix sont multipliés par une constante a inférieure à 1, (1-a) correspondant alors à un taux d'intérêt. Montrons que dans ces conditions $\Phi_n(S)$ converge. Nous avons alors :

$$\Phi_n(S) = \min_{q\geq 0}\left\{\alpha\psi(S+q) + (1-\alpha)\psi(S) + a\alpha\left[\Phi_{n-1}(0)\int_{S+q}^{+\infty} f(x)\,dx + \int_0^{S+q}\Phi_{n-1}(S+q-x)f(x)\,dx\right]\right.$$

$$\left. + a(1-\alpha)\left[\Phi_{n-1}(q)\int_S^{+\infty} f(x)\,dx + \int_0^S \Phi_{n-1}(S+q-x)f(x)\,dx\right]\right\}$$

où :

$$\psi(S) = \lambda\int_0^S (S-x)f(x)\,dx + \mu\int_S^{+\infty}(x-S)f(x)\,dx$$

Posons toujours :

$$\Phi_n(S) = \min_{q\geq 0} H_n(S,q)$$

et soit q_n la valeur pour laquelle le minimum est atteint, q_{n-1} la valeur correspondante pour $\Phi_{n-1}(S)$

On a :

$$\Phi_n(S) = H_n(S,q_n) \leq H_n(S,q_{n-1})$$

$$\Phi_{n-1}(S) = H_{n-1}(S,q_{n-1}) \leq H_{n-1}(S,q_n)$$

D'où :

$$H_n(S,q_n) - H_{n-1}(S,q_n) \leq \Phi_n(S) - \Phi_{n-1}(S) \leq H_n(S,q_{n-1}) - H_{n-1}(S,q_{n-1})$$

Or :

$$H_n(S,q_n) - H_{n-1}(S,q_n) =$$

$$= a\Big\{\alpha\Big[(\Phi_{n-1}(0) - \Phi_{n-2}(0))\int_{S+q_n}^{+\infty} f(x)\,dx + \int_0^{S+q_n} (\Phi_{n-1}(S+q_n-x) - \Phi_{n-2}(S+q_n-x))f(x)\,dx\Big]$$

$$+ (1-\alpha)\Big[(\Phi_{n-1}(q_n) - \Phi_{n-2}(q_n))\int_S^{+\infty} f(x)\,dx + \int_0^S (\Phi_{n-1}(S+q\ -x) - \Phi_{n-2}(S+q_n-x))f(x)\,dx\Big]\Big\}$$

Donc :

$$\left| H_n(S,q_n) - H_{n-1}(S,q_n)\right| \leq a \operatorname*{Max}_{S \geq 0} \left|\Phi_{n-1}(S) - \Phi_{n-2}(S)\right|$$

De même, on a

$$\left| H_n(S,q_{n-1}) - H_{n-1}(S,q_{n-1})\right| \leq a \operatorname*{Max}_{S \geq 0} \left|\Phi_{n-1} - \Phi_{n-2}\right|$$

Donc finalement :

$$\left|\Phi_n(S) - \Phi_{n-1}(S)\right| \leq a \operatorname*{Max}_{S \geq 0}\left|\Phi_{n-1}(S) - \Phi_{n-2}(S)\right|$$

pour tout S ; et par conséquent :

$$\operatorname*{Max}_{S \geq 0}\left|\Phi_n\ (S) - \Phi_{n-1}(S)\right| \leq a \operatorname*{Max}_{S \geq 0}\left|\Phi_{n-1} - \Phi_{n-2}\ \right|$$

Comme on s'assure facilement que $\left|\Phi_2\ - \Phi_1\ \right|$ est borné, il en résulte que la série de terme général

$$\Phi_n(S) - \Phi_{n-1}(S)$$

converge uniformément par rapport à S, puisqu'elle est absolument convergente pour toute valeur de S.

VI - AUTRES RÉSULTATS

Dans le cas de processus plus compliqués, tel celui donné comme second exemple du paragraphe (2), les démonstrations sont beaucoup plus lourdes. Cependant, un premier allégement provient de ce qu'il n'y a pas lieu de considérer plusieurs fonctions différentes suivant "l'état" dans lequel on se trouve à la date n, cet état étant caractérisé par le nombre de commandes faites dans le passé et non encore livrées. On montre en effet que, par exemple, pour le processus dont il est question au paragraphe 2, on a :

$$\Phi_n^{(1)}(S) = \Phi_n^{(2)}(S,0)$$

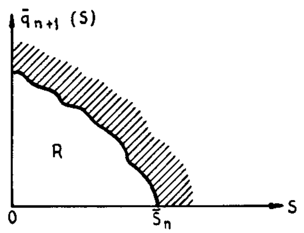
et de même

$$q_n^{(1)}(S) = q_n^{(2)}(S,0)$$

de sorte qu'il n'y a à considérer qu'une seule fonction

$$\Phi_n(S,q_{n+1})$$

Résultat d'ailleurs intuitif, car si la commande q_{n+1} est déjà livrée à la date n, on est exactement dans la même situation (par rapport à l'avenir) que si on n'en avait pas fait du tout, et seul compte le niveau S du stock.



Dans le cas de ce processus, on montre l'existence d'un stock critique $\bar{S}_n$, et d'une commande q_{n+1} critique, soit $\bar{q}_{n+1}(S)$ positive, décroissante et continue pour $S \leqslant \bar{S}_n$, et nulle pour $S \geqslant \bar{S}_n$.

Considérons alors le domaine R limité par la fonction $\bar{q}_{n+1}(S)$. Si le point (S, q_{n+1}) appartient à R, la commande optimum est: $q_n = q_n(S, q_{n+1})$, $q_n(S, q_{n+1})$ étant une fonction continue, décroissante en S et en q_{n+1}, s'annulant le long de la courbe $\bar{q}_{n+1}(S)$. Si le point (S, q_{n+1}) n'appartient pas à R, il faut prendre

$$q_n = 0$$

VII - CONCLUSIONS

Bien que les démonstrations données aient pu paraître fastidieuses, il est quand même intéressant de savoir que dans la catégorie de "jeux" considérée, le gestionnaire possède toujours une stratégie optimum, et qu'il saura répondre de la façon la moins coûteuse possible à tous les "coups" de la nature ; mais les équations déterminant ses q_n sont compliquées, et leur résolution par approximations successives peut être rapidement très laborieuse. Aussi quelques théorèmes de convergence, qui font encore défaut, permettant de remplacer les Φ_n par des fonctions simples seraient-ils fort utiles, même pour les processus les plus simples.