CAHIERS DU BURO

BERNARD ROY

Recherche d'un programme d'approvisionnement ou de production

Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle. Série Recherche, tome 1 (1957), p. 2-41

<http://www.numdam.org/item?id=BURO_1957__1__2_0>

RECHERCHE D'UN PROGRAMME D'APPROVISIONNEMENT OU DE PRODUCTION

par

Bernard ROY

A. LE PROBLÈME

I. ÉNONCÉ GÉNÉRAL

Considérons une entreprise qui consomme une certaine matière première. Les possibilités d'achat sont souvent trop rigides pour s'adapter à la consommation. Il est nécessaire d'interposer un stock pour amortir les fluctuations. Si ce stock est trop important, il entraîne des frais de gestion élevés, il fait supporter par l'entreprise des intérêts intercalaires excessifs. Au contraire, s'il est insuffisant, il occasionne des approvisionnements extraordinaires de matière première à des prix anormaux. Une règle d'approvisionnement convenable, susceptible de maintenir le stock à un niveau approprié, évitera l'un et l'autre excès.

Le problème se pose en termes semblables pour un grossiste, ou un organisme quelconque de distribution.

Considérons maintenant une entreprise fabriquant des produits manufacturés destinés à être vendus. Là encore un stock doit s'interposèr entre la demande trop fluctuante et la production trop rigide. Les inconvénients du stock trop abondant seront les mêmes que ci-dessus, ceux du stock insuffisant seront une production intensive à certains moments et par conséquent des frais anormaux dus aux heures supplémentaires, aux vieilles machines que l'on doit remettre en service. Là encore une règle convenable de production est susceptible d'éviter ces ennuis.

Ces deux problèmes peuvent s'énoncer sous la forme commune suivante :

1) Une entreprise utilise un certain produit. Le flux entrant doit être régularisé par un stock : le flux sortant étant aléatoire.

2) Les frais de stockage sont variables avec l'importance du stock,

3) Le flux entrant se compose de deux parties :

- l'une normale, prévue
- l'autre anormale, imprévue,

la seconde coûtant plus cher et ayant lieu lorsque la première se révèle insuffisante,

4) Il s'agit de régler le flux normal de façon telle que le coût total du flux entrant et du stock soit minimal.

II. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

Le coût que nous cherchons à minimer est le coût global annuel.

a) LE FLUX SORTANT

Il est aléatoire. Sa valeur moyenne et l'importance de ses fluctuations sont généralement variables au cours de l'année. C'est pourquoi nous diviserons celle-ci en n périodes (12 mois, 4 trimestres...) pour lesquelles ces grandeurs peuvent être considérées comme stables à l'intérieur de la période.

Les périodes seront repérées par la variable discrète $\theta = 1, 2 \ldots n$.

On désignera par

- X_θ la quantité de flux sortant pendant la période θ
- $F_\theta(x)$ et $f_\theta(x)$ la loi de probabilité totale et la densité de la variable aléatoire X_θ. Il convient de noter qu'il n'existe pas nécessairement partout une densité et qu'il peut y avoir des masses aux extrémités de l'intervalle de variation de X_θ.

Les variables aléatoires X_θ ne sont pas nécessairement indépendantes. Nous n'aurons pas à utiliser les lois liées.

b) LE STOCK

Nous supposerons que la totalité du flux normal entrant traverse le stock. Au contraire le flux anormal ne traverse jamais le stock (besoin immédiat).

On désignera par :

- s_θ la quantité de produit restant en stock au début de la période θ.
- e_θ un stock de sécurité destiné à faire face à des défaillances dans l'arrivée du flux (grève, avaries de machines, etc...). Ce stock par contre ne doit pas être entamé pour faire face à des excès de flux sortant : on doit pour cela faire appel au flux anormal. e_θ est une donnée, il peut être nul.

Le coût du stockage sera précisé plus loin.

c) LE FLUX ENTRANT

On désignera par :

- u_θ la quantité de flux normal entrant pendant la période θ .

On ne s'intéresse pas à l'intensité du flux qui apporte la quantité u_θ. On suppose seulement que cette intensité est suffisamment souple pour que : tant que la quantité u_θ n'est pas intégralement entrée, on puisse toujours maintenir le stock au-dessus du niveau e_θ. En d'autres termes cela signifie que, si le flux sortant s'accroît, on peut accroître l'intensité du flux normal entrant tant que la quantité u_θ prévue n'est pas totalement entrée.

- n_θ la somme $u_\theta + s_\theta$; $n_\theta - e_\theta$ représente la quantité de produit dont on dispose pendant la période θ pour alimenter le flux sortant, sans avoir à recourir au flux anormal.

- z_θ la quantité de flux anormal entrant pendant la période θ . On suppose qu'on n'a recours au flux anormal que lorsque u_θ est intégralement entré. En raison de la précédente hypothèse soulignée ce recours n'a lieu que lorsque :

$$X_\theta > n_\theta - e_\theta$$

et alors, si l'on admet que la quantité de flux anormal appelée peut être exactement celle qui permet de faire la soudure :

$$z_\theta = X_\theta - (n-e)_\theta$$

Ce que nous admettrons.

- $a_\theta(u_\theta)$ le coût d'une quantité u_θ de flux normal pour la période θ . Ce coût doit comprendre, outre le prix d'achat (ou de production) le coût du transport, de la manutention (stockage et déstockage) et d'une façon générale tous les frais indépendants de la durée passée en stock et du niveau du stock. La détermination de ce coût pose des problèmes qui sont à résoudre séparément pour chaque cas particulier.

- $\alpha_\theta(z_\theta)$ le coût d'une quantité z_θ de flux anormal pour la période θ . a_θ et α_θ sont supposés payés au début de la période θ (il suffit de faire un calcul d'escompte s'il y a lieu pour toujours se ramener à ce cas).

Remarque : les cas sont nombreux où le flux anormal n'existe pas; lorsque le volume du flux normal s'avère insuffisant cela occasionne une défaillance pure et simple. z_θ n'est autre que le montant de cette défaillance, elle cause à l'entreprise un certain préjudice. On peut alors introduire un flux anormal fictif permettant d'alimenter sans défaillance le flux sortant, le coût de ce flux fictif étant convenablement calculé pour tenir compte du préjudice subi par l'entreprise. Ainsi, on peut intégrer dans cette étude, sans aucune modification, les problèmes où le flux anormal n'existe pas.

III. NATURE DE LA SOLUTION CHERCHÉE

Il s'agit de déterminer les u_θ : quantité de flux normal qu'il faut commander pour chaque période θ, de façon à rendre minimal le coût global d'exploitation C. La quantité z_θ sera, en raison des hypothèses faites, absolument déterminée.

Il est clair que u_θ dépend de s_θ. Si les variables X_θ ne sont pas indépendantes, ce qui est généralement le cas, les prévisions sur X_θ se trouvent modifiées par la connaissance des quantités $x_{\theta-i}$ de flux sorti pendant les périodes θ - 1. La quantité u_θ à commander peut varier quelque peu suivant les valeurs prises par les $X_{\theta-i}$. Le problème posé dans toute sa généralité conduirait à rechercher n fonctions

$$u_\theta(s_\theta, x_{\theta-1}, \ldots) \qquad \theta = 1 \ldots n$$

rendant minimale une certaine fonction (sérieusement compliquée d'ailleurs)

$$C(u_1 \ldots u_n)$$

Il semble extrêmement difficile, sinon impossible, de résoudre un tel problème : des obstacles nombreux empêchent d'obtenir C. Il semble plus sage de se donner a priori une classe de règles (*) d'approvisionnement (ou de production) inspirées par la réalité et de chercher dans cette classe, celle des règles qui est optimale.

Il est fréquent de considérer que pour faire face aux sorties durant une période θ, il faille disposer d'une quantité déterminée de produit. Les achats ou la production de cette période sont alors faits en conséquence. En termes mathématiques cela signifie qu'on considère :

$$n_\theta - e_\theta \text{ donc } \underline{n_\theta \text{ comme une constante}}$$

et que l'on achète (ou produit) la quantité :

$$u_\theta = n_\theta - s_\theta$$

nécessaire pour s'assurer de disposer d'une quantité n_θ durant la période θ sans avoir à recourir au flux anormal.

Cela constitue ce que nous appellerons le <u>principe des quantités garanties</u> (**). L'ensemble des règles (d'àpprovisionnement ou de production) qui lui sont conformes sera désigné sous le nom de <u>classe des quantités garanties</u>.

<u>On se propose donc de résoudre le problème posé au I avec les notations et hypothèses précisées au II par la détermination de la règle appartenant à la classe des quantités garanties qui rend C minimal.</u>

<u>On est ainsi conduit à chercher les valeurs des n_θ</u>.

(*) On trouvera des précisions à ce sujet dans la conclusion.

(**) Méthode semblable à la méthode s,S ou à celle de la cote d'alerte. On pourra consulter à ce sujet respectivement deux articles parus dans Econometrica (avril et juillet 1952) et un article de La Houille blanche (numéro 4 juillet-août 1951) relatif à la consigne d'exploitation optimum des réservoirs saisonniers et dû à M. MORLAT.

Remarquons que la quantité à commander pour la période θ est aléatoire. Elle n'est connue exactement qu'au début de la période θ, lorsque s_θ (lui-même aléatoire) est connu. Dans le cas où les commandes doivent se faire une période ou plus d'avance il sera nécessaire d'admettre, pour que la règle puisse fonctionner, que l'on prévoit la valeur de s_θ une période ou plus d'avance avec suffisamment de précision.

Une hypothèse semblable est à faire en ce qui concerne les commandes de flux anormal : si les délais d'arrivée ne sont pas très courts, il faut admettre que l'on peut prévoir avec une avance égale aux délais d'arrivage, la valeur que prendra z_θ.

Nous aurions pu choisir d'autres classes de règles. Nous avons retenu celle-ci, après en avoir essayé d'autres, parce que :

- d'une part, elle était applicable et appliquée,

- d'autre part, elle permettait de conduire les calculs jusqu'au bout dans des cas particulièrement étendus.

B. MISE EN ÉQUATION

I. COÛT DU FLUX ENTRANT

a) COÛT DU FLUX NORMAL

Pour la période θ ce coût est par définition

$$a_\theta(u_\theta) = a_\theta(n_\theta - s_\theta)$$

Il dépend de la valeur s_θ que prend la variable aléatoire S_θ. Autrement dit il est aléatoire et c'est son espérance mathématique qui nous intéresse soit :

$$A_\theta = E\left[a_\theta(n_\theta - s_\theta)\right]$$

Pour la calculer il faut connaître la densité (si elle existe) de S_θ.

Plusieurs cas peuvent se produire :

1) $s_\theta > n_\theta$: nous allons admettre que dans ce cas, la quantité excédentaire $s_\theta - n_\theta$ est revendue au prix

$$- a_\theta(n_\theta - s_\theta)$$

Cette hypothèse est à peu près indispensable pour la conduite des calculs. Elle est en fait sans grande importance : la quantité revendue est en fait rachetée la période suivante et cela signifie seulement qu'on ne supporte pas de frais de stockage sur cette quantité pendant une période. Nous verrons dans les applications que la probabilité d'être dans une telle situation est souvent nulle (alors tout se passe comme si l'hypothèse n'existait pas) sinon très faible et qu'elle porte sur des quantités faibles.

Elle est alors sans conséquence. Il faut cependant s'assurer qu'on est bien dans de telles conditions sous peine de trouver des résultats grotesques.

2) $s_\theta > e_{\theta-1}$: il est alors certain, en raison des hypothèses faites en (A, II, c) qu'on n'a pas eu recours au flux anormal durant la période $\theta - 1$. En appliquant à cette période $\theta - 1$ l'hypothèse faite ci-dessus en (1) nous en déduisons que le flux $X_{\theta-1}$ valait :

$$x_{\theta-1} = n_{\theta-1} - s_\theta$$

et que l'on a nécessairement $s_\theta \leqslant n_{\theta-1}$

On en déduit que :

$$\Pr\left[s_\theta < S_\theta < s_\theta + ds_\theta\right] = f_{\theta-1}(n_{\theta-1} - s_\theta)\, ds_\theta$$

pour $$e_{\theta-1} < s_\theta \leqslant n_{\theta-1}$$

3) $s_\theta = e_{\theta-1}$: là encore en raison des hypothèses faites en (A, II, c) cela signifie qu'on a dû recourir au flux anormal durant la période $\theta - 1$. Nous avons vu qu'un tel phénomène se produisait lorsque :

$$X_{\theta-1} > n_{\theta-1} - e_{\theta-1}$$

donc avec une probabilité :

$$1 - F_{\theta-1}(n_{\theta-1} - e_{\theta-1})$$

la quantité à acheter est alors, pour la période θ :

$$n_\theta - e_{\theta-1}$$

4) $s_\theta < e_{\theta-1}$ est impossible sauf si une défaillance du type de celles mentionnées en (A, II, b) s'était produite durant la période $\theta - 1$. La probabilité d'un tel événement peut être considérée comme très faible et par conséquent négligée pour le calcul qui nous intéresse.

Nous sommes maintenant en possession de la loi de probabilité de S_θ qui possède une densité et une masse en $e_{\theta-1}$.

En tenant compte de l'hypothèse de revente faite en (1) on obtient pour A_θ :

(1) $$A_\theta = a_\theta(n_\theta - e_{\theta-1})\left[1 - F_{\theta-1}(n_{\theta-1} - e_{\theta-1})\right] + \int_{e_{\theta-1}}^{n_{\theta-1}} a_\theta(n_\theta - s_\theta) . f_{\theta-1}(n_{\theta-1} - s_\theta)\, ds_\theta$$

Le coût moyen annuel du flux normal entrant est alors

(1') $$A = \Sigma_1^n A_\theta$$

car : $$E\left[\Sigma\, a_\theta(u_\theta)\right] = \Sigma\, E\left[a_\theta(u_\theta)\right]$$

b) COÛT DU FLUX ANORMAL

Pour la période θ ce coût est par définition : $\alpha_\theta(z_\theta)$.

Désignons par :

$$E_\theta = E\left[\alpha_\theta(z_\theta)\right]$$

son espérance mathématique. Pour la calculer il faut connaître la densité de probabilité de la variable aléatoire Z_θ. Là encore plusieurs cas sont à envisager :

1) $z_\theta = 0$: il n'y a alors aucune dépense :

$$\alpha_\theta(0) = 0 \text{ en général.}$$

Il n'est donc pas nécessaire de calculer la probabilité d'une telle éventualité. Il se peut que dans certains cas $\alpha_\theta(0)$ ne soit pas nulle, il faudrait alors calculer la probabilité d'avoir $z_\theta = 0$ et introduire dans E_θ un terme que nous n'écrirons pas ici.

2) $z_\theta > 0$: un tel cas se produit lorsque $X_\theta > n_\theta - e_\theta$ et alors $Z_\theta = X_\theta - (n-e)_\theta$ (voir A, II, c), nous en déduisons :

$$\Pr\left[z_\theta < Z_\theta < z_\theta + dz_\theta\right] = f_\theta(n_\theta - e_\theta + z_\theta)\, dz_\theta$$

avec $$z_\theta > 0$$

Il vient ensuite :

(2) $$E_\theta = \int_0^\infty \alpha_\theta(z_\theta)\; f_\theta(n_\theta - e_\theta + z_\theta)\, dz_\theta$$

Le coût moyen annuel du flux anormal entrant est alors :

(2') $$E = \sum_1^n E_\theta$$

(Il y aurait lieu de modifier légèrement les expressions (1) et (2) dans le cas où la loi de X_θ possèderait des masses (aux extrémités par exemple de l'intervalle de variation de X_θ) et dans le cas aussi où la densité s'annulerait en dehors d'un certain intervalle.

Ces considérations peuvent être importantes pour les calculs de dérivation qui conduiront à l'optimum.

II. COÛT DU STOCKAGE

Il reste maintenant à apprécier le coût de stockage qui est variable avec la quantité moyenne stockée par période. Nous supposerons ce coût proportionnel à cette quantité moyenne. Il a été dit que les frais de stockage indépendants de cette quantité moyenne étaient incorporés dans a_θ. Il a également été dit que le flux anormal ne traversait pas le stock et ne supportait donc aucun frais de stockage au sens où nous les envisageons ici.

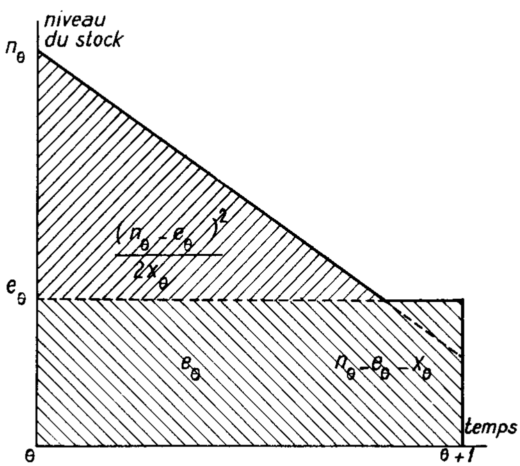
Nous allons raisonner par périodes, et distinguer pour chaque période deux éléments dans ce coût de stockage, l'un ou l'autre pouvant d'ailleurs être nul.

a) COÛT FINANCIER

Il s'agit des intérêts intercalaires. Nous les supposerons proportionnels à la quantité moyenne stockée :

1) Pour déterminer cette quantité moyenne il convient de prendre en considération, non pas le rythme d'arrivage du flux normal mais le rythme de paiement de ce flux. Nous avons supposé les paiements effectués au début de chaque période. Nous devons donc calculer la quantité moyenne qui serait stockée si toute la quantité u_θ prévue entrait en stock au début du mois.

Il est clair qu'un tel calcul ne peut se faire que si l'on connaît le rythme du flux sortant. La période ayant été supposée homogène de ce point de vue (A, II, a) nous supposerons l'écoulement du stock linéaire



- si $x_\theta < n_\theta - e_\theta$: la quantité moyenne stockée est n-x durant toute la période et x durant une demi période soit

$$n_\theta - x_\theta/2$$

- si $x_\theta > n_\theta - e_\theta$: la quantité moyenne stockée vaut :

$$\frac{(n_\theta - e_\theta)^2}{2x_\theta} + e_\theta$$

(voir figure ci-contre).

2) Pour déterminer le coefficient de proportionnalité, il suffit de choisir un taux d'intérêt i de l'argent pour une période et de l'appliquer au prix que coûte le flux stocké (que l'on peut évaluer à partir d'un coût unitaire moyen d'approvisionnement par période...). Nous désignerons par b_θ ce coefficient. Ainsi le coût financier moyen pour la période θ peut s'écrire :

(3) $$J_\theta = \int_0^{n_\theta - e_\theta} b_\theta (n_\theta - x/2) \cdot f_\theta(x)\, dx + \int_{n_\theta - e_\theta}^{\infty} b_\theta \frac{(n_\theta - e_\theta)^2}{2x} \cdot f_\theta(x)\, dx + \int_{n_\theta - e_\theta}^{\infty} b_\theta e_\theta \cdot f_\theta(x)\, dx$$

Le même coût pour l'année vaut

(3') $$J = \sum_1^n J_\theta$$

b) COÛT D'EXPLOITATION

Les frais d'entretien du stock (conditionnement, surveillance...) sont proportionnels à la quantité moyenne effectivement stockée. Pour la calculer il faut non seulement connaître le rythme du flux sortant, mais aussi celui du flux normal entrant.

On peut proposer empiriquement de prendre la moyenne du stock de début et du stock de fin de période. Si c désigne la constante de proportionnalité, le coût d'exploitation pour la période θ pourra être estimé par :

$$c . \frac{s_\theta + s_{\theta+1}}{2}$$

Cette expression est exacte si l'on suppose que la différence entre le flux entrant et le flux sortant pour un intervalle de temps arbitrairement petit est une constante. C'est le cas en particulier si le rythme d'arrivage et celui de sortie sont tous les deux constants.

Si on était éloigné de ce cas: arrivages concentrés au début de période, il serait préférable de faire des calculs analogues à ceux du paragraphe a).

En admettant que la formule $c\ (s_\theta + s_{\theta+1})/2$ soit applicable, on estime le coût d'exploitation moyen pour la période θ en en prenant l'espérance mathématique : chose facile puisque l'on a calculé en (B, I, a) les lois de S_θ et $S_{\theta+1}$ et que l'on a, malgré leur liaison ;

$$E\,(s_\theta + s_{\theta+1}) = E\,(s_\theta) + E\,(s_{\theta+1}).$$

Si H_θ désigne le coût cherché, il vient en posant :

$$\begin{aligned} H^*_\theta &= c . e_{\theta-1}\left[1 - F_{\theta-1}\,(n_{\theta-1} - e_{\theta-1})\right] \\ &\quad + c . \int_{e_{\theta-1}}^{n_{\theta-1}} s_\theta \,.\, f_{\theta-1}\,(n_{\theta-1} - s_\theta)\,ds_\theta \\ H_\theta &= \frac{1}{2} . \,(H^*_\theta + H^*_{\theta+1}) \end{aligned} \tag{4}$$

et le même coût pour l'année vaut :

$$H = \sum_1^n H_\theta = \sum_1^n H^*_\theta \tag{4'}$$

III. COÛT GLOBAL ANNUEL

L'espérance du coût d'exploitation annuel comprend :

- l'espérance A + E du coût du flux entrant,
- l'espérance H + J du coût du stockage,
- un terme additionnel tenant compte de la variation algébrique du stock.

En effet si s_1 désigne la hauteur du stock de début d'année, s_{n+1} celle du stock de fin d'année, et si $V(s)$ représente la valeur d'un stock de hauteur s, la quantité $V(s_1) - V(s_{n+1})$ doit figurer dans l'expression du coût. Il s'agit là d'une grandeur aléatoire dont seule l'espérance mathématique nous intéresse ici. Les variables aléatoires S_1 et S_{n+1} apparaissent comme le résultat des différences :

$$n'_n - X'_n = S_1 \qquad \text{et} \qquad n_n - X_n = S_{n+1}$$

(où les ' sont relatifs à l'année précédant l'année considérée).

Si l'on suppose (ce que nous ferons) que les années successives sont identiques, les quantités garanties n'_n et n_n sont les mêmes (*), X'_n et X_n ayant même loi de probabilité, il en est de même pour S_1 et S_{n+1}. Ainsi, quelle que soit la fonction V, l'espérance mathématique du terme additionnel est nulle.

Le coût global annuel qu'il s'agit de rendre minimal vaut donc :

$$C = A + E + H + J$$

Le problème consiste maintenant à trouver le système (s'il existe) des n valeurs de n_θ :

- qui annule le système des n dérivées partielles de C (lorsqu'elles sont continues),

- qui constitue pour C un minimum et même le plus petit s'il y en avait plusieurs.

Ce système est donc une des solutions (s'il y en a) des n équations (lorsqu'elles sont continues) :

$$\frac{\partial C}{\partial n_\theta} = 0 \qquad \theta = 1, 2 \ldots n$$

que l'on peut encore écrire :

$$(5) \qquad \sum_{\theta'=1}^{n} \left[\frac{\partial A_{\theta'}}{\partial n_\theta} + \frac{\partial E_{\theta'}}{\partial n_\theta} + \frac{\partial H^*_{\theta'}}{\partial n_\theta} + \frac{\partial J_{\theta'}}{\partial n_\theta} \right] = 0 \qquad \theta = 1, \ldots, n$$

Nous allons rechercher les solutions du système (5) dans un certain nombre de cas particuliers. Auparavant, nous allons examiner certaines grandeurs caractéristiques. La connaissance de leur valeur est certainement au moins aussi importante que la connaissance des quantités garanties n_θ.

IV. GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES

a) VALEUR MOYENNE DU STOCK AU DÉBUT DE LA PÉRIODE θ

$$(6) \qquad t_\theta = E(s_\theta) = e_{\theta-1} \left[1 - F_{\theta-1} (n_{\theta-1} - e_{\theta-1}) \right] + \int_{e_{\theta-1}}^{n_{\theta-1}} s_\theta \, . \, f_{\theta-1} (n_{\theta-1} - s_\theta) \, ds_\theta$$

b) VALEUR MOYENNE DU FLUX NORMAL ENTRANT PENDANT LA PÉRIODE θ

$$(7) \qquad v_\theta = n_\theta - t_\theta = (n_\theta - e_{\theta-1}) \left[1 - F_{\theta-1} (n_{\theta-1} - e_{\theta-1}) \right] + \int_{e_{\theta-1}}^{n_{\theta-1}} (n_\theta - s_\theta) \, . \, f_{\theta-1} (n_{\theta-1} - s_\theta) \, ds_\theta$$

(*) On trouvera des précisions à ce sujet dans la conclusion.

c) VALEUR MOYENNE DU FLUX ANORMAL ENTRANT PENDANT LA PÉRIODE θ

$$w_\theta = \int_0^\infty z_\theta \, . \, f_\theta\,(n_\theta - e_\theta + z_\theta)\, dz_\theta \tag{8}$$

d) UNE RELATION CONCRÈTE

On établira aisément que :

$$E\,(x_\theta) + t_{\theta+1} = n_\theta + w_\theta \tag{9}$$

en s'assurant que l'on a toujours :

$$x_\theta + s_{\theta+1} = n_\theta + z_\theta$$

Ainsi lorsque les n_θ seront calculés, $E\,(X_\theta)$ étant donné, il suffira de calculer l'une des valeurs v, w ou t (pour chaque θ) pour en déduire les valeurs des deux autres (pour chaque θ) à l'aide de la première des relations (7) et de la relation (9).

C. SOLUTION DU SYSTÈME (5)

I. HYPOTHÈSES SUR LA NATURE DES FONCTIONS $a_\theta(u_\theta)$ et $\alpha_\theta(z_\theta)$

Ces deux fonctions dépendent à la fois de la période d'entrée θ et de la quantité de flux qui entre : u_θ et z_θ. Il est nécessaire, pour donner une expression précise aux deux premiers termes du système (5) de préciser un peu la nature de cette dépendance.

a) NATURE DE $a_\theta\,(u_\theta)$:

On peut d'abord songer, en première approximation, à prendre un coût unitaire indépendant de la quantité u_θ mais dépendant de la période θ, cela donne :

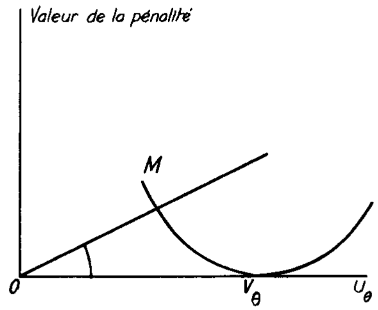
$$a_\theta(u_\theta) = a_\theta \, . \, u_\theta$$

On peut, pour être plus près de la réalité dans bien des cas, ajouter un terme qui pénalise les irrégularités. L'irrégularité peut revêtir deux formes :

1) Dispersion des u_θ autour de leur valeur moyenne pour la période θ : v_θ. Les u_θ étant aléatoires, seules leurs moyennes v_θ peuvent être indiquées au producteur de flux normal. Celui-ci, en général, désire voir ces prévisions respectées au mieux. Pour cela, il pénalise les écarts à la moyenne v_θ.

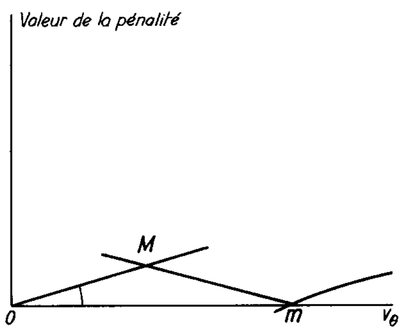
Nous allons convenir d'une pénalité proportionnelle au carré de l'écart $u_\theta - v_\theta$, donc en moyenne, proportionnelle à la variance de u_θ (pour chaque période).

Dans quelle mesure une telle pénalité a-t-elle un sens concret, c'est difficile à dire ! Il semble bien qu'en général l'écart à la prévision coûte (que ce soit pour un problème d'approvisionnement ou de production). Ce coût est proportionnellement plus élevé pour un grand écart que pour un petit écart. C'est pourquoi nous avons choisi un carré.



2) Dispersion des u_θ autour de leur moyenne annuelle m. Le producteur de flux normal désire souvent égaliser au maximum ses ventes (s'il s'agit d'un problème de production) par période. Pour cela il pénalise l'écart à la moyenne.

Nous allons convenir d'une pénalité proportionnelle à la valeur absolue de l'écart $v_\theta - m$ (*). Prendre le carré de l'écart conduirait en pratique à des pénalités prohibitives dès que les moyennes des x_θ seraient assez différentes d'une période à l'autre; de plus les calculs seraient d'application numérique fort difficile.



Là encore on peut se demander dans quelle mesure cette formule représente une réalité. Si m désigne le niveau moyen d'activité au cours de l'année du producteur de flux normal, le stockage que lui occasionnent des ventes irrégulières (problème d'approvisionnement) ou les modifications de ce niveau d'activité (problème de production) suscitent dans une certaine mesure des coûts proportionnels à l'écart choisi. Par exemple pour un programme de production, les coûts de licenciement ou de formation qui accompagnent souvent une modification du niveau d'activité, sont de cette nature. Il convient cependant de dire que le coût unitaire n'est pas le même lorsque la variation a lieu dans un sens ou dans l'autre. Il semble que ce ne soit là qu'un détail qui ne complique guère les calculs. Nous avons cependant préféré prendre le même.

Ainsi nous adopterons la formule :

$$a_\theta (u_\theta) = a_\theta \, . \, u_\theta + a' \left| v_\theta - m \right| + a'' (u_\theta - v_\theta)^2$$

où a', a'' sont des constantes qu'il n'y a pas lieu de supposer dépendantes de θ.

(*) Nous prenons v_θ et non pas u_θ d'une part pour avoir des formules plus maniables (voir en annexe I le calcul avec u_θ), d'autre part pour permettre la prévision du coût de l'approvisionnement (voir annexe II).

La variation des pénalités de type a' et a'' est représentée graphiquement sur les figures ci-dessus. On remarquera que, pour chacune d'elles, le supplément de coût unitaire qu'elles procurent (représenté par la pente de la droite OM) décroît jusqu'à la moyenne puis croît. Ces pénalités ont donc bien pour effet de ramener u_θ vers v_θ (pénalité a'') et v_θ vers m (pénalité a').

On notera cependant que l'emploi d'une pénalité de type a' ne se justifie vraiment que lorsque $a_\theta = a$ indépendant de θ (cas où la production du flux normal n'est pas saisonnière mais toutefois assez rigide...).

Une remarque importante doit être faite dès à présent au sujet de m. m sera considérée comme indépendante des n_θ. Ce ne pourra donc être la moyenne exacte des u_θ, mais seulement une valeur voisine estimée d'avance. Il n'y a pas là de difficulté notoire : on pourra prendre pour m la moyenne de la somme des x_θ si le recours au flux anormal est faible. Cette valeur de m sera alors à peine trop élevée.

Nous verrons à la fin que la formule adoptée est d'un emploi commode tant pour le calcul algébrique que pour le calcul numérique au jour le jour. En particulier elle permet de prévoir le coût de l'approvisionnement en flux normal (Annexe II).

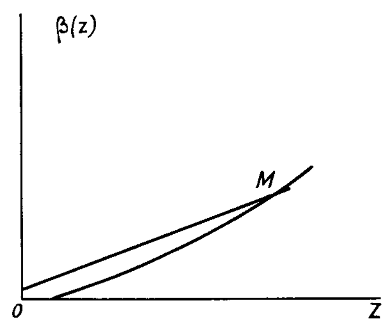
b) NATURE DE $\alpha_\theta(z)_\theta$

On peut songer, en première approximation, à prendre, là encore, un coût unitaire indépendant de la quantité z_θ mais dépendant de la période θ. Cela donne :

$$\alpha_\theta(z_\theta) = \alpha_\theta \cdot z_\theta$$

On peut, pour être plus près de la réalité dans bien des cas, ajouter un terme qui augmente le coût unitaire lorsque z_θ croît. On supposera cette augmentation indépendante de θ. Soit $\beta(z)$ un tel terme.

Dire que le coût unitaire augmente, c'est dire que $\beta(z)/z$ croît avec z



donc que la pente de la droite OM (voir figure ci-contre) augmente avec z.

La condition $\alpha_\theta(0) = 0$ entraîne :

$$\beta(0) = 0$$

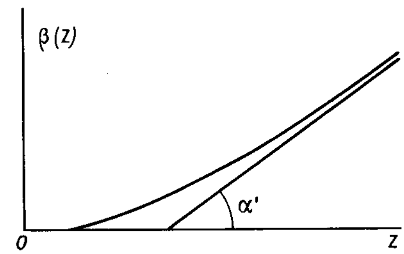
Nous pouvons supposer de même sans restriction

$$\beta'(0) = 0$$

(sinon retrancher de $\beta(z)$ un terme de la forme $\beta'(0).\,z$ et l'ajouter à $\alpha_\theta . z$).

La seule supposition que nous ferons est que le coût unitaire ne croît pas au-delà de toute limite lorsque z croît, donc que $\beta'(\infty)$ a une valeur finie que nous désignerons par α', laquelle valeur ne doit pas dépasser 10 à 20 % de α_θ.

Dans ces conditions $\beta(z)$ a l'allure ci-contre.



Ainsi nous adopterons la formule :

$$\alpha_\theta(z_\theta) = \alpha_\theta \,.\, z_\theta + \beta(z_\theta)$$

où β possède les propriétés ci-dessus.

II. CALCULS RELATIFS AU FLUX ENTRANT

Il s'agit de calculer les deux premiers termes du système (5) soit :

$$\frac{\partial A}{\partial n_\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial E}{\partial n_\theta}$$

en utilisant les relations (1) (1') et (2) (2') (voir B, I a et b) et les considérations précédantes (C, I a et b).

a) CALCUL DE $\frac{\partial A}{\partial n_\theta}$

En examinant la formule (1) on constate que A_θ ne dépend que de $n_{\theta-1}$ et de n_θ . n_θ ne figure donc que dans A_θ et $A_{\theta+1}$, ainsi :

$$\frac{\partial A}{\partial n_\theta} = \frac{\partial A_\theta}{\partial n_\theta} + \frac{\partial A_{\theta+1}}{\partial n_\theta}$$

Pour n'avoir à calculer que sur A_θ nous calculerons :

$$\frac{\partial A_\theta}{\partial n_\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial A_\theta}{\partial n_{\theta-1}}$$

puis nous remplacerons θ par $\theta + 1$ dans la seconde formule.

Nous ferons ce calcul en décomposant A_θ en une somme de trois termes :

$$A_\theta = A^1_\theta + A^2_\theta + A^3_\theta$$

dont chacun est obtenu en remplaçant successivement $a_\theta(u_\theta)$ dans la formule (1) par le premier, le second et le troisième terme qui le compose (voir C, I, a). Cela est possible puisque A_θ est linéaire en $a_\theta(u_\theta)$ (*).

(*) Voir en annexe II le calcul avec une pénalité a' proportionnelle à $|u_\theta - m|$.

1) <u>calcul des dérivées de A^1_θ</u> :

Le calcul est simple et donne :

I $$\frac{\partial A^1_\theta}{\partial n_\theta} = a_\theta$$

I' $$\frac{\partial A^1_\theta}{\partial n_{\theta-1}} = - a_\theta \, . \, F(n-e)_{\theta-1}$$

La notation $F(n-e)_{\theta-1}$ est mise pour $F_{\theta-1}(n_{\theta-1} - e_{\theta-1})$

2) <u>calcul des dérivées de A^2_θ</u> :

On a : $A^2_\theta = a' \mid v_\theta - m \mid$ où m est une constante.

Comme $\frac{\partial v_\theta}{\partial n_\theta} = 1$ et $\frac{\partial v_\theta}{\partial n_{\theta-1}} = - F(n-e)_{\theta-1}$

il vient en posant :

$$\varepsilon_\theta \begin{cases} = +1 & \text{si } v_\theta > m \\ \text{indéterminé} & \text{si } v_\theta = m \quad (*) \\ = -1 & \text{si } v_\theta < m \end{cases}$$

II $$\frac{\partial A^2_\theta}{\partial n_\theta} = a' \varepsilon_\theta$$

II' $$\frac{\partial A^2_\theta}{\partial n_{\theta-1}} = - a' \varepsilon_\theta \, F(n-e)_{\theta-1}$$

3) <u>calcul des dérivées de A^3_θ</u> :

pour faire ce calcul on remarquera que :

$$A^3_\theta = a'' E(u_\theta - v_\theta)^2 = a'' \left[E(u^2_\theta) - v^2_\theta \right] \quad \text{puisque } E(u_\theta) = v_\theta$$

il vient :

$$\frac{\partial E(u^2_\theta)}{\partial n_\theta} = 2 v_\theta \qquad\qquad \frac{\partial v_\theta}{\partial n_\theta} = 1$$

$$\frac{\partial E(u^2_\theta)}{\partial n_{\theta-1}} = - 2 \int_{e_{\theta-1}}^{n_{\theta-1}} (n_\theta - s) \, f_{\theta-1}(n_{\theta-1} - s) \, ds \qquad \frac{\partial v_\theta}{\partial n_{\theta-1}} = - F(n-e)_{\theta-1}$$

d'où l'on déduit :

III $$\frac{\partial A^3_\theta}{\partial n_\theta} = 0$$

III' $$\frac{\partial A^3_\theta}{\partial n_{\theta-1}} = a'' \left[1 - F(n-e)_{\theta-1} \right] . G_{\theta-1}(n_{\theta-1})$$

où G_θ désigne une fonction définie par :

$$G_\theta(n_\theta) = \int_0^{(n-e)_\theta} F_\theta(u) \, du = \left[(n-e) \, . \, F(n-e) \right]_\theta - \int_0^{(n-e)_\theta} u \, . \, f_\theta(u) \, du$$

(*) Dans ce cas il n'y a pas de dérivées, le système n'est alors pas correct non plus que ceux qui suivent et lui sont équivalents. Cela réserve des difficultés. Nous verrons comment les surmonter.

En réunissant maintenant toutes les formules précédées d'un, deux ou trois index γ et en ayant soin de changer θ en $\theta + 1$ dans toutes celles dont les index sont primés, il vient :

(11) $$\frac{\partial A}{\partial n_\theta} = a_\theta + a' \varepsilon_\theta - (a_{\theta+1} + a' \varepsilon_{\theta+1}) \cdot F(n-e)_\theta$$
$$+ a'' \left[1 - F(n-e)_\theta\right] \cdot G_\theta(n_\theta) \qquad (*)$$

b) CALCUL DE $\frac{\partial E}{\partial n_\theta}$

En examinant (2) on constate que E_θ ne dépend que de n_θ d'où :

$$\frac{\partial E}{\partial n_\theta} = \frac{\partial E_\theta}{\partial n_\theta}$$

Nous ferons le calcul en décomposant E_θ en une somme de deux termes :

$$E_\theta = E_\theta^1 + E_\theta^2$$

dont chacun est obtenu en remplaçant successivement $\alpha_\theta(z_\theta)$ dans la formule (2) par le premier et le second terme qui le composent (voir C, I, b).

1) calcul de la dérivée de E_θ^1 :

On trouve :

$$\frac{\partial E_\theta^1}{\partial n_\theta} = -\alpha_\theta + \alpha_\theta \cdot F(n-e)_\theta$$

2) calcul de la dérivée de E_θ^2 :

$$\frac{\partial E_\theta^2}{\partial n_\theta} = \int_0^\infty \beta(z) \cdot f'_\theta(n_\theta - e_\theta + z)\, dz$$

$$= -\int_0^\infty \beta'(z) \cdot f_\theta(n_\theta - e_\theta + z)\, dz$$

le terme tout intégré de l'intégration par partie disparaît en raison des propriétés de β (C, I, b)

$$= -\alpha' + R_\theta(n_\theta)$$

où :

$$R_\theta(n_\theta) = \int_0^\infty \beta''(z) \cdot F_\theta(n_\theta - e_\theta + z)\, dz$$

ainsi :

(12) $$\frac{\partial E}{\partial n_\theta} = -\alpha_\theta - \alpha' + \alpha_\theta \cdot F(n-e)_\theta + R_\theta(n_\theta)$$

Remarquons que :

$$\alpha' \cdot F(n-e)_\theta \leqslant R_\theta(n_\theta) \leqslant \alpha'$$

d'où :

(12') $$-(\alpha_\theta + \alpha') + (\alpha_\theta + \alpha') \cdot F(n-e)_\theta \leqslant \frac{\partial E}{\partial n_\theta} \leqslant -\alpha_\theta + \alpha_\theta \cdot F(n-e)_\theta$$

(*) Voir en annexe II d'autres expressions de A_θ.

l'erreur relative que l'on commet en adoptant l'une ou l'autre des expressions extrêmes est au plus égale à :

$\alpha'/(\alpha_\theta+\alpha')$ rapport que nous avons supposé faible.

La moyenne des expressions extrêmes sera en général assez précise, soit :

(12'') $$\frac{\partial E}{\partial n_\theta} \# -(\alpha_\theta+\alpha'/2) + (\alpha_\theta+\alpha'/2) \cdot F(n-e)_\theta$$

III. CALCULS RELATIFS AUX STOCKS

Il s'agit de calculer ici les deux derniers termes du système (5) soit :

$$\frac{\partial J}{\partial n_\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H}{\partial n_\theta}$$

en utilisant les relations (3) (3') et (4) (4') (voir B, II, a et b).

a) CALCUL DE $\frac{\partial J}{\partial n_\theta}$

En examinant la formule (3) on constate que J_θ ne dépend que de n_θ donc que :

$$\frac{\partial J}{\partial n_\theta} = \frac{\partial J_\theta}{\partial n_\theta}$$

On obtient aisément :

$$\frac{\partial J_\theta}{\partial n_\theta} = b_\theta \cdot F(n-e)_\theta + \int_{(n-e)_\theta}^{\infty} b_\theta \cdot \frac{(n-e)_\theta}{x} \cdot f_\theta(x)\, dx$$

et en intégrant par partie :

(13) $$\frac{\partial J}{\partial n_\theta} = \int_{(n-e)_\theta}^{\infty} b_\theta \cdot \frac{(n-e)_\theta}{x^2} \cdot F_\theta(x)\, dz$$

et en utilisant le fait que F est croissante :

(13') $$b_\theta \cdot F_\theta\,(n-e)_\theta \leqslant \frac{\partial J}{\partial n_\theta} \leqslant b_\theta$$

Là encore, la moyenne des expressions extrêmes sera en général assez précise, soit :

(13'') $$\frac{\partial J}{\partial n_\theta} \# \frac{b_\theta}{2} + \frac{b_\theta}{2} \cdot F(n-e)_\theta$$

b) CALCUL DE $\frac{\partial H}{\partial n_\theta}$

Faisons les calculs sur H_θ^*. En examinant la formule (4) on constate que H_θ^* ne dépend que de $n_{\theta-1}$. Donc :

(14) $$\frac{\partial H}{\partial n_\theta} = c \cdot F(n-e)_\theta$$

Notons que ce résultat serait très différent si c variait au cours du temps. Le second membre de (4') ne serait plus valable et la dérivée ci-dessus contiendrait $n_{\theta-1}$ et $n_{\theta+1}$.

IV. SOLUTION DU SYSTÈME (5)

Reportons les systèmes (11), (12), (13), (14) dans le système (5). On obtient un système (15) équivalent si les fonctions $a_\theta(u)$ et $\alpha_\theta(z)$ satisfont aux hypothèses (C, I) : ce système peut s'écrire :

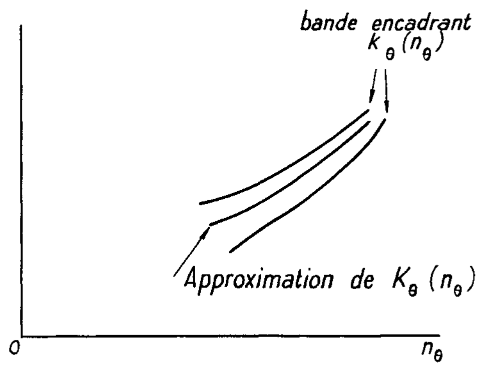
$$(15)\quad \begin{aligned} &[-a_{\theta+1}+\alpha_\theta+c]\,F(n-e)_\theta+[a_\theta-\alpha_\theta-\alpha']+R_\theta(n_\theta)+\frac{\partial J}{\partial n_\theta} \\ &= a'\varepsilon_{\theta+1}\,F(n-e)_\theta - a'\varepsilon_\theta - a''\,[1-F(n-e)_\theta]\,G_\theta(n_\theta) \end{aligned}$$

Le système écrit sous cette forme n'est guère maniable. Commençons par examiner le premier membre que nous désignerons par $K_\theta(n_\theta)$. La seule variable y figurant étant en effet n_θ. Montrons que $K_\theta(n_\theta)$ est une fonction croissante de n_θ :

Tout d'abord le coefficient de F, (premier terme du système (15), est positif, le flux anormal coûtant nettement plus cher que l'autre. Ensuite R est croissante, $\beta''(z)$ étant positif, puisque la pente de la droite OM doit croître (voir C, I, b). Enfin $\frac{\partial J}{\partial n_\theta}$ est aussi croissante (il suffit pour s'en assurer d'intégrer par parties sa dérivée).

Dans la formation du système (15) à partir de (5), si l'on utilise les formules (12') et (13') au lieu de (12) et (13) on obtient deux fonctions croissantes encadrant K_θ et assez voisines l'une de l'autre lorsque $F(n-e)_\theta$ est assez voisin de 1.

Si maintenant l'on utilise (12") et (13") au lieu de (12) et (13), on obtiendra un système (15") dont le premier membre sera une approximation assez bonne de $K_\theta(n_\theta)$ car ce sera une fonction située dans l'étroite bande encadrant K_θ.



Nous ne nous occuperons maintenant que de la résolution du système (15") :

$$(15'')\qquad \left[\Delta_\theta - a'\varepsilon_{\theta+1}\right] F(n-e)_\theta - (\lambda_\theta - a'\varepsilon_\theta) = -a''\left[1-F(n-e)_\theta\right] G_\theta(n_\theta)$$

avec :

$$\Delta_\theta = \alpha_\theta + \alpha'/2 - a_{\theta+1} + b_\theta/2 + c$$

$$\lambda_\theta = \alpha_\theta + \alpha'/2 - a_\theta - b_\theta/2$$

a) CAS $a' = a'' = 0$

Dans ces conditions, le système (15") se réduit au système (16) :

(16) $$\Delta_\theta F(n-e)_\theta - \lambda_\theta = 0 \qquad (*)$$

On en déduit immédiatement la valeur de $F(n-e)_\theta$.

Remarquons tous d'abord que celle-ci correspond bien à un minimum: dérivée de C d'abord négative puis positive.

Remarquons ensuite que si l'on trouve pour chaque θ une valeur $F(n-e)_\theta < 1$ on peut en déduire, dès que l'on possède une table ou une forme analytique de F_θ, les valeurs de n puis celles de v, t, w.

Remarquons enfin que si :

$$\Delta_\theta - \lambda_\theta = a_\theta - a_{\theta+1} + b_\theta + c \leqslant 0,$$

le système (16) n'a pas, pour la valeur de θ considérée de solution en $F(n-e)_\theta$. On voit aisément que dans ce cas le minimum de C a lieu pour $F(n-e)_\theta = 1$ c'est-à-dire pour une valeur de n_θ aussi élevée qu'il est possible. Un tel résultat peut paraître absurde. Il tient au fait que nous sommes dans un cas où la différence de prix entre deux périodes consécutives est supérieure au coût du stockage. Puisque l'excédent est supposé pouvoir être revendu, il est bien clair que l'on a intérêt à acheter tout ce qu'on peut, le surplus sera revendu la période suivante. L'hypothèse de revente devient ici prépondérante et le résultat trouvé n'est plus valable lorsque cette hypothèse n'est pas réelle.

Il semble cependant qu'une telle situation ne doive jamais être rencontrée dans la réalité. En effet, elle conduit de toute manière à acheter suffisamment par période pour n'avoir rien à acheter la période suivante. Le fournisseur qui aurait un tel barème ne vendrait rien dans la période $\theta + 1$:

Par contre si :

$$\Delta_\theta - \lambda_\theta = a_\theta - a_{\theta+1} + b_\theta + c > 0$$

la valeur trouvée pour F est strictement plus petite que 1. Il est cependant nécessaire de s'assurer que l'hypothèse de revente ne joue qu'un rôle négligeable. Pour cela on calcule la probabilité d'avoir pendant la période θ un flux sortant supérieur à :

$$n_\theta - n_{\theta+1}$$

Cette différence est très souvent (lorsqu'elle est positive !) inférieure à la quantité minimum de flux sortant pendant la période. Dans ce cas, l'hypothèse de revente est sans aucune influence.

b) CAS $a' = 0$, $a'' \neq 0$:

Dans ces conditions, le système (15") s'écrit :

(17) $$\Delta_\theta F(n-e)_\theta - \lambda_\theta = - a'' \left[1 - F(n-e)_\theta\right] G_\theta(n_\theta)$$

(*) On trouvera en conclusion une interprétation concrète de cette formule.

Pour le résoudre, il semble préférable de faire tabuler le second membre comme fonction de $F(n-e)_\theta$. On procède ensuite graphiquement en prenant l'intersection de la droite représentée par le premier membre et la courbe représentée par le second. Ce second membre ayant en général une valeur assez faible, les valeurs trouvées pour $F(n-e)_\theta$ sont peu différentes de celles trouvées dans la résolution du système (16). Les trois mêmes remarques que ci-dessus sont encore à faire.

La méthode graphique semble la meilleure. En effet, le second membre est une fonction suffisamment compliquée pour que l'on ne puisse rien dire du système (17) même en précisant la nature de F_θ. Cette fonction commence par décroître depuis 0; pour n_θ tendant vers $+\infty$ elle est croissante jusqu'à 0. Rien n'indique que sa concavité reste positive, rien ne permet de situer la position du dernier 0 de sa dérivée. Il se peut donc que le système (17) ait plusieurs solutions en $F(n-e)_\theta$; une discussion est alors nécessaire pour déterminer lesquelles de ces solutions constituent des minimums et lequel d'entre eux est le plus petit.

c) CAS $a' \neq 0$, $a'' = 0$:

Dans ces conditions le système (15") s'écrit :

(18) $$\gamma_\theta = \frac{\lambda_\theta - a'\varepsilon_\theta}{\Delta_\theta - a'\varepsilon_{\theta+1}} \qquad \text{en posant } \gamma_\theta = F(n-e)_\theta$$

système dont les inconnues sont les γ d'où l'on déduit aisément les n, t, v, w.

On remarquera que $1 - \gamma_\theta$ représente le risque d'être contraint de recourir au flux anormal durant la période.

Dans ce qui suit, nous raisonnerons indifféremment sur les n et sur les γ : ce sont des inconnues équivalentes. Il convient de remarquer qu'elles croissent simultanément.

Nous allons tout d'abord examiner le parti qu'on peut tirer du système (18).

Dès à présent il est clair qu'il ne suffit pas pour déterminer l'optimum cherché : C est en effet une fonction qui possède des valeurs absolues, la connaissance de ses seules dérivées partielles ne permet donc pas d'obtenir son minimum. Pour ce faire, il sera nécessaire de compléter le système (18).

Ce dernier et ses compléments seront ensuite mis sous une forme unique relativement simple.

Enfin, nous essaierons d'indiquer comment on peut calculer numériquement les valeurs n_θ optimales.

1) examen du système (18) :

Précisons quelques notations et définitions.

L'indice o supérieur signifiera que l'on se place au minimum de C.

Une période θ sera dite période de continuité si elle satisfait aux deux conditions :

$$v^\circ_\theta \neq m \qquad\qquad v^\circ_{\theta+1} \neq m$$

Le système (18) n'existe que pour de telles périodes.

Il est bien évident que, pour une période θ de continuité, γ°_θ doit être solution du système (18). Ce résultat se traduit par le tableau suivant (*) :

$$\gamma^\circ_\theta = r^1_\theta = \frac{\lambda_\theta - a'}{\Delta_\theta + a'} \qquad \begin{array}{lll} \cdot v^\circ_\theta & & m \\ \hline & \cdot v^\circ_{\theta+1} & \end{array} \qquad (1)$$

$$\gamma^\circ_\theta = r^2_\theta = \frac{\lambda_\theta - a'}{\Delta_\theta - a'} \qquad \begin{array}{lll} \cdot v^\circ_\theta & \cdot v^\circ_{\theta+1} & m \\ \hline & & \end{array} \qquad (2)$$

$$\gamma^\circ_\theta = r^3_\theta = \frac{\lambda_\theta + a'}{\Delta_\theta + a'} \qquad \begin{array}{lll} & & m \\ \hline \cdot v^\circ_\theta & \cdot v^\circ_{\theta+1} & \end{array} \qquad (3)$$

$$\gamma^\circ_\theta = r^4_\theta = \frac{\lambda_\theta + a'}{\Delta_\theta - a'} \qquad \begin{array}{lll} & \cdot v^\circ_{\theta+1} & m \\ \hline \cdot v^\circ_\theta & & \end{array} \qquad (4)$$

où la partie gauche indique la valeur que doit avoir γ°_θ pour chaque disposition possible du couple v_θ, $v_{\theta+1}$ par rapport à m. Ces dispositions sont en effet les seules puisque θ est supposé être une période de continuité.

Il faut maintenant examiner ce qui se passe pour les valeurs de θ qui ne constituent pas une période de continuité à l'optimum.

2) <u>systèmes complémentaires du système (18)</u> :

Là encore donnons quelques définitions et notations.

Toute période qui n'est pas de continuité sera dite de discontinuité.

On appelle séquence de longueur j, d'origine θ une suite de périodes de discontinuité telle que :

$$v^\circ_\theta \neq m \;,\quad v^\circ_{\theta+1} = m, \ldots\; v^\circ_{\theta+i} = m, \ldots\; v^\circ_{\theta+j} = m \;,\quad v^\circ_{\theta+j+1} \neq m \qquad i < j$$

Dans les formules pour alléger l'écriture l'origine θ sera omise et l'on écrira $v_0, v_1, \ldots v_j$.

Toute période de discontinuité appartient à une séquence de discontinuité bien déterminée.

Cherchons à quelles relations satisfont les $\gamma^\circ_0, \ldots \gamma^\circ_i \ldots \gamma^\circ_j$ appartenant à une telle séquence. Pour cela donnons aux valeurs $n^\circ_0, \ldots n^\circ_i, \ldots n^\circ_j$ correspondantes, des accroissements $dn_0, \ldots dn_i, \ldots dn_j$, il en résulte un accroissement dC :

$$dC = (\Delta_0 \gamma^\circ_0 - \lambda_0)dn_0 + \ldots (\Delta_i \gamma^\circ_i - \lambda_i)dn_i + \ldots (\Delta_i \gamma^\circ_j - \lambda_j)dn_j + a'\varepsilon_0\, dn_0 - a'\varepsilon_{j+1}\gamma^\circ_j\, dn_j$$
$$+ a'\Big[\left| dn_1 - \gamma^\circ_0\, dn_0\right| + \ldots \left|dn_i - \gamma^\circ_{i-1}\, dn_{i-1}\right| + \ldots \left|dn_j - \gamma^\circ_{j-1}\, dn_{j-1}\right|\Big]$$

(*) Les valeurs r sont à remplacer par 0 lorsqu'elles deviennent négatives et par 1 lorsqu'elles dépassent 1.

Puisque nous sommes en un minimum de C, il est nécessaire que

$$dC \geqslant 0 \text{ quels que soient } dn_o \ldots dn_i \ldots dn_j .$$

Ecrivons que cette condition est réalisée pour les j + 1 systèmes d'accroissement suivants (dépendant chacun d'un paramètre seulement) :

$dn_o,\ dn_1 = 0$	$dn_j = 0$
$dn_o,\ dn_1 = \gamma_o^o\, dn_o,\ dn_2 = 0 \ldots$	$dn_j = 0$
$\ldots\ldots$	
$dn_o,\ \text{"}\ \ \text{"}\ dn_{i+1} = \gamma_i^o\, dn_i,\ dn_{i+2} = 0 \ldots$	$dn_j = 0$
$dn_o,\ \text{"}\ \ \text{"}$	$dn_j = \gamma_{j-1}^o\, dn_{j-1}$

il vient (en omettant les indices o supérieurs pour alléger l'écriture) :

$$(18') \qquad \frac{\lambda_o - a'\varepsilon_o}{\Delta_o + a'} \leqslant \gamma_o \leqslant \frac{\lambda_o - a'\varepsilon_o}{\Delta_o - a'}$$

$$(18'') \qquad \frac{1}{\Delta_i + a'} \cdot P_i(\gamma_{i-1}, \ldots \gamma_o) \leqslant \gamma_i \leqslant \frac{1}{\Delta_i - a'} \cdot P_i(\gamma_{i-1}, \ldots \gamma_o) \qquad i = 1, 2 \ldots j-1$$

$$\gamma_j = \frac{1}{\Delta_j - a'\varepsilon_{j+1}} \cdot P_j(\gamma_{j-1}, \ldots \gamma_o)$$

avec :

$$P_i(\gamma_{i-1}, \ldots \gamma_o) = \frac{\lambda_o - a'\varepsilon_o}{\gamma_{i-1} \ldots \gamma_o} + \frac{\lambda_1 - \Delta_o}{\gamma_{i-1} \ldots \gamma_1} + \ldots \frac{\lambda_k - \Delta_{k-1}}{\gamma_{i-1} \ldots \gamma_k} + \ldots \lambda_j - \Delta_{j-1}$$

Le système (18') assigne des limites à γ_θ^o lorsque la période θ est origine d'une séquence de discontinuité. Ces limites sont celles indiquées dans le tableau suivant (avec les mêmes notations qu'au 1) :

$r_\theta^1 \leqslant \gamma_\theta^o \leqslant r_\theta^2$	$\cdot\, v_\theta^o$ ——— m ; $\cdot\, v_{\theta+1}^o$	(5)
$r_\theta^3 \leqslant \gamma_\theta^o \leqslant r_\theta^4$	——— m ; $v_\theta^o \cdot \quad \cdot\, v_{\theta+1}^o$	(6)

Le système (18") assigne des limites à $\gamma_{\theta+1}^o \ldots\ \gamma_{\theta+j-1}^o$ et lie de façon rigide $\gamma_{\theta+j}$ à tous les autres γ de la séquence.

Les systèmes (18), (18') et (18") constituent des conditions nécessaires pour qu'un ensemble des valeurs γ_θ^o ($\theta = 1, 2 \ldots n$) fournisse un minimum de C. Ces conditions sont également suffisantes.

On trouvera l'idée de la démonstration à l'annexe III.

Ces trois systèmes sont peu maniables, nous allons leur donner une forme plus élégante.

3) transformation des système (18), (18'), (18'') :

Commençons par transformer le système (18'') : des inégalités de (18'') on déduit

$$\Delta_i - a' \leqslant P_i/\gamma_i \leqslant \Delta_i + a' \qquad i = 1, \ldots j-1$$

ce qui permet de poser :

$$P_i/\gamma_i = \Delta_i - a' \varepsilon'_{i+1} \quad \text{avec} \quad -1 \leqslant \varepsilon'_{i+1} \leqslant +1 \qquad i = 1, \ldots j-1$$

Cette écriture est équivalente aux inégalités (18'').

On peut écrire P sous la forme :

$$p_i = \underline{p_i - \frac{1}{\gamma_{i-1}}} + \lambda_i - \Delta_{i-1} = \lambda_i - a' \varepsilon'_i \qquad i = 1, \ldots j-1$$

d'où l'on déduit :

$$\gamma_i = \frac{\lambda_i - a' \varepsilon_i'}{\Delta_i - a' \varepsilon'_{i+1}} \qquad i = 1, \ldots j-1$$

L'égalité (18'') peut s'écrire sous la forme ci-dessus à condition de poser

$$\varepsilon'_{j+1} = \varepsilon_{j+1}$$

De même, les inégalités (18') peuvent encore s'écrire sous cette forme à condition de poser :

$$\varepsilon'_o = \varepsilon_o$$

Si l'on rapproche maintenant cette nouvelle expression commune des systèmes (18') et (18'') du système (18) il apparaît que l'on peut énoncer le résultat suivant :

Un ensemble de valeurs γ^o_θ fournit un minimum de C si et seulement si les γ^o_θ sont de la forme :

$$\gamma^o_\theta = \frac{\lambda_\theta - a' \varepsilon_\theta'}{\Delta_\theta - a' \varepsilon'_{\theta+1}} \qquad \text{pour} \quad \theta = 1, 2 \ldots n$$

avec :

si	$v_\theta < m$	$\varepsilon_\theta' = -1$
si	$v_\theta = m$	$-1 \leqslant \varepsilon'_\theta \leqslant +1$
si	$v_\theta > m$	$\varepsilon_\theta' = +1$

4) méthode pratique de résolution :

Il convient tout d'abord de faire un certain nombre de remarques :

Deux cas extrêmes peuvent se produire :

- la solution ne comporte que des valeurs $v_\theta \neq m$, c'est le cas si $a' = 0$, et aussi plus généralement tant que $a' < a'^-$, valeur que nous déterminerons plus loin;
- la solution ne comporte que des valeurs $v_\theta = m$, c'est le cas pour $a' = +\infty$ (au sens de très grand), et aussi, plus généralement, dès que $a' \geqslant a'^+$ valeur que nous déterminerons également plus loin.

Entre ces deux cas extrêmes prennent place des solutions possédant les caractéristiques suivantes :

- certaines périodes θ sont des périodes de continuité dites supérieures si $v_\theta > m$, inférieures dans le cas contraire,
- certaines périodes θ sont origines de séquences de discontinuité dites :

descendantes si $v_\theta > m$, $v_{\theta+j+1} < m$

ascendantes si $v_\theta < m$, $v_{\theta+j+1} > m$

supérieures si $v_\theta > m$, $v_{\theta+j+1} > m$

inférieures si $v_\theta < m$, $v_{\theta+j+1} < m$

Ces deux derniers cas se rencontrent rarement : le caractère saisonnier des problèmes conduisant à des v_θ d'allure sinusoïdale.

Dans tout ce qui suit nous appellerons $V_\theta(\gamma_{\theta-1}, \gamma_\theta)$ la valeur de V_θ calculée à l'aide de la formule (7) pour les valeurs $\gamma_{\theta-1}$ et γ_θ. On trouvera des renseignements sur la fonction V_θ à l'annexe III.

Examinons maintenant, tout d'abord les deux cas extrêmes, puis le cas intermédiaire.

Nous ne donnons ici que la manière de procéder, les justifications en sont données à l'annexe III.

α - examen du cas $a' < a'^-$:

Commencer par résoudre pour $a' = 0$ comme il est indiqué au a) p. 21. En déduire les v_θ et les disposer par rapport à la droite de cote m sur un schéma. Chaque couple θ, $\theta + 1$ est disposé comme une et une seule des dispositions (1), (2), (3), (4). Considérer alors

$$V_\theta(\gamma^\circ_{\theta-1}, \gamma^\circ_\theta) \text{ comme des fonctions de } a'$$

(où les $\gamma^\circ_{\theta-1}$, γ°_θ sont déterminés par le tableau du § (1)). Faire croître progressivement a' jusqu'à ce que l'un des V_θ franchisse la valeur m.

a'^- est la valeur pour laquelle ce phénomène se produit pour la première fois.

Tant que $a' < a'^-$ la disposition des points reste celle trouvée pour $a' = 0$, les γ°_θ étant ceux indiqués par le tableau du (1), page 23.

β - examen du cas $a' > a'^+$:

Commencer par résoudre le système d'équations :

$$V_\theta(\gamma_{\theta-1}, \gamma_\theta) = m \qquad \text{pour} \qquad \theta = 1, \dots n$$

On peut pour cela partir d'une valeur γ_n arbitraire, en déduire γ_1 par $V_1(\gamma_n, \gamma_1) = m$ puis de proche en proche $\gamma_2 \dots \gamma_{n-1}, \gamma_n'$; on recommence alors les mêmes opérations avec γ_n' et ainsi de suite. En raison des propriétés des fonctions V le procédé converge plus ou moins rapidement selon les cas.

La pénalité limite a'^+ est la plus petite valeur de a' pour laquelle ces valeurs de γ satisfont aux conditions indiquées à la fin du (3). Pour l'obtenir, on peut procéder comme suit : écrire γ_θ sous la forme indiquée à la fin du (3) et résoudre les n équations par rapport aux inconnues $a'_\theta = a' \varepsilon'_\theta$.

Cela donne : $$a'_{12}\left[1 - 1/(\gamma_{12}\ldots\gamma_1)\right] = \lambda_{12}\left[1 - 1/(\gamma_{12}\ldots\gamma_1)\right] +$$
$$+ \frac{\Delta_{12}-\lambda_1}{\gamma_{11}\cdots\gamma_1} + \frac{\Delta_1-\lambda_2}{\gamma_{11}\cdots\gamma_2} + \ldots + \Delta_{11} - \lambda_{12}$$

d'où l'on déduit a'_{12} et de là tous les autres a'_θ par la formule de récurrence :

$$a'_{\theta+1} = \frac{a'_\theta - \lambda_\theta}{\gamma_\theta} + \Delta_\theta$$

Comme il est aisé de s'en rendre compte :

$$a'^{+} = \text{maximum} \left| a'_\theta \right| \qquad (\theta = 1, \ldots n)$$

Dès que a' dépasse la valeur limite a'^{+}_θ, les γ trouvées ci-dessus constituent pour C un minimum.

γ - <u>examen du cas $a'^{-} < a' < a'^{+}$</u>

Commencer par répartir les valeurs de θ dans les 4 catégories suivantes :

- période indifférente : v_θ peut se trouver au-dessus, sur ou au-dessous de la droite de cote m seulement si :

$$V_\theta\,(r^2, r^2) > m \qquad\qquad V_\theta\,(r^3, r^3) < m$$

- période supérieure : v_θ peut se trouver au-dessus ou sur, mais non au-dessous de la droite de cote m seulement si :

$$V_\theta\,(r^2, r^2) > m \qquad \text{et} \qquad V_\theta\,(r^3, r^3) \geqslant m$$

- période inférieure : v_θ peut se trouver au-dessous ou sur, mais non au-dessus de la droite de cote m seulement si :

$$V_\theta\,(r^2, r^2) \leqslant m \qquad \text{et} \qquad V_\theta\,(r^3, r^3) < m$$

- période médiane : v_θ peut se trouver sur, mais ni au-dessus ni au-dessous de la droite de cote m seulement si :

$$V_\theta\,(r^2, r^2) \leqslant m \qquad \text{et} \qquad V_\theta\,(r^3, r^3) \geqslant m$$

Localiser ensuite les séquences de discontinuité. Pour cela appliquer les critères suivants :

- pour que la période θ puisse être origine d'une séquence descendante ou supérieure, il est nécessaire qu'elle vérifie :

$$V_\theta\,(r^2, r^2) \geqslant m \qquad\qquad V_{\theta+1}\,(r^2, r^1) \leqslant m$$

$$V_\theta\,\left(r^2, \frac{\lambda - a'}{\Delta - xa'}\right) = m \quad \longrightarrow \quad V_{\theta+1}\left(\frac{\lambda - a'}{\Delta - xa'}, \frac{\lambda - xa'}{\Delta - a'}\right) \geqslant m$$

- pour que la période θ puisse terminer une séquence descendante ou inférieure, il est nécessaire qu'elle vérifie :

$$V_{\theta+1}\,(r^3, r^3) \leqslant = m \qquad\qquad V_\theta\,(r^1, r^3) \geqslant m$$

$$V_{\theta+1}\left(\frac{\lambda - xa'}{\Delta + a'}, r^3\right) = m \quad \longrightarrow \quad V_\theta\left(\frac{\lambda + a'}{\Delta - xa'}, \frac{\lambda - xa'}{\Delta + a'}\right) \leqslant m$$

- pour qu'une période θ puisse être origine d'une séquence ascendante ou inférieure, il est nécessaire qu'elle vérifie :

$$V_\theta\,(r^3,\ r^3) \leqslant m \qquad\qquad V_{\theta+1}\,(r^3,\ r^4) \geqslant m$$

$$V_\theta\,\left(r^3, \frac{\lambda + a'}{\Delta - xa'}\right) = m \quad \longrightarrow \quad V_{\theta+1}\,\left(\frac{\lambda + a'}{\Delta - xa'}, \frac{\lambda - xa'}{\Delta + a'}\right) \leqslant m$$

- pour qu'une période θ puisse terminer une séquence ascendante ou supérieure, il est nécessaire qu'elle vérifie

$$V_{\theta+1}\,(r^2,\ r^2) \geqslant m \qquad\qquad V_\theta\,(r^4,\ r^2) \leqslant m$$

$$V_{\theta+1}\,\left(\frac{\lambda - xa'}{\Delta - a'}, r^2\right) = m \quad \longrightarrow \quad V_\theta\,\left(\frac{\lambda - a'}{\Delta - xa'}, \frac{\lambda - xa'}{\Delta - a'}\right) \geqslant m$$

Dans ces deux tableaux, les indices inférieurs des r ont été systématiquement omis.

Les flèches qui figurent dans le second tableau indiquent qu'il faut résoudre en x l'équation de gauche et que cette solution doit satisfaire à l'inégalité de droite.

Construire alors l'ensemble des séquences de discontinuité possibles. Soit θ l'origine d'une telle séquence possible de longueur j, résoudre le système d'équations :

$$V_1\,(\gamma_0, \gamma_1) = m \ldots \qquad\qquad V_j\,(\gamma_{j-1}, \gamma_j) = m$$

$\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_j$ satisfaisant de plus à l'égalité du système (18").

La solution est en général unique. Pour l'obtenir on peut partir d'une valeur γ_0 arbitraire qui soit dans les limites indiquées au (2), dispositions (5) et (6), en déduire de proche en proche des valeurs $\gamma_1 \ldots \gamma_j^0$, porter celles-ci dans l'équation (18") en déduire une valeur γ_j'. Si

$\gamma_j' > \gamma_j$ recommencer à partir d'une valeur γ_0 plus élevée,

$\gamma_j' < \gamma_j$ recommencer à partir d'une valeur γ_0 plus faible ainsi par tâtonnements successifs on trouve les γ solutions.

Il reste maintenant à voir s'ils sont ou non acceptables. Pour cela, on résoud le système en a'_θ (comme au β) en posant :

$$a'_0 = a'\,\varepsilon_0 \qquad\qquad a'_{j+1} = a'\,\varepsilon_{j+1} \qquad\qquad \text{ces } \varepsilon \text{ étant connus}$$

Si l'on a pour tout i :

$$-\,a' < a'_i < a'$$

les γ trouvés sont acceptables et la séquence peut être retenue.

On trouve ainsi toutes les séquences de discontinuité acceptables et leurs γ. Ceux relatifs aux périodes de continuité sont ensuite obtenus sans peine grâce au tableau du (1) dispositions (2) et (3).

d) CAS $a' \neq 0$, $a'' \neq 0$

Dans ces conditions la résolution du système (15") apparaît comme beaucoup plus difficile. Il faut combiner les méthodes b) et c). On peut encore déterminer (graphiquement cette fois) des valeurs r_θ^1, r_θ^2, r_θ^3, r_θ^4 valables pour les dispositions (1), (2), (3), (4). Seulement les inégalités (18') et (18'') se compliquent considérablement. La résolution complète ne peut alors se faire que dans certains cas particuliers (a' très petit, ou n petit par exemple).

D. CAS PARTICULIER OU LES F SONT DES LOIS DEMI-GAUSSIENNES

Nous désignerons par m_θ et $\emptyset_\theta$ les paramètres des lois F_θ. Par définition de $F_\theta(x_\theta)$ nous avons :

(20)
$$\Pr\left[(X_\theta \leqslant m_\theta)\right] = 0$$
$$\Pr(X_\theta \leqslant x_\theta) = 2\,h \int_{m_\theta}^{x\emptyset_\theta} e^{-[(t-m_\theta)/\emptyset_\theta]^{2/2}}\, dt/\emptyset_\theta \qquad \text{pour } x_\theta \geqslant m_\theta$$

en posant : $h = 1/\sqrt{2\pi} \neq \frac{2}{5}$

On en déduit les formules suivantes :

(21) $$E(X_\theta) = m_\theta + 2\,h\emptyset_\theta$$

(22) $$V(X_\theta) = \emptyset_\theta^2\,(1 - 4h^2)$$

Désignons par γ_θ les valeurs numériques des solutions du système (15'') considéré comme système en $F(n-e)_\theta$.

I. DÉTERMINATION DES γ_θ

Nous reprenons le plan suivi au C. IV.

a) CAS a' = a'' = 0:

On a toujours :

$$\gamma_\theta = \lambda_\theta / \Delta_\theta$$

qui ne dépend que des prix figurant dans λ et Δ mais nullement des paramètres de structure m et $\emptyset$. Les mêmes remarques qu'au C, IV a) subsistent. En particulier, on notera que, si l'on a pour chaque θ :

$$n_\theta - n_{\theta-1} \leqslant m_\theta$$

tout se passe comme si l'hypothèse de revente n'avait pas été faite.

b) CAS a' = 0, a'' ≠ 0 :

La fonction $\left[1 - F(n-e)_\theta\right] G_\theta(n_\theta)$ qui figure au second membre du système (17) et qu'il est recommandé de tabuler, prend dans ce cas demigaussien une forme particulièrement maniable. En se reportant aux définitions de G_θ (page 17) et de F_θ (formule 20) on peut écrire :

$$\left[1 - F(n-e)_\theta\right] . G_\theta(n_\theta) = (1-\gamma_\theta) . \int_{m_\theta}^{(n-e)_\theta} dx . \int_{m_\theta}^{x} 2h . e^{-\frac{1}{2}[(t-m)/\varnothing]_\theta^2} dt/\varnothing_\theta$$

ce qui par simple changement de variable se met sous la forme

$$= \varnothing_\theta \, (1-\gamma_\theta) . \int_0^{\omega_\theta} dv . \int_0^{v} 2h . e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

où ω_θ est défini par :

$$h . \int_{-\omega_\theta}^{\omega_\theta} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = \gamma_\theta \qquad = F(n-e)_\theta \tag{23}$$

Ainsi le second membre du système (17) s'écrit :

$$- a'' \varnothing_\theta \, M(\gamma_\theta)$$

où $M(\gamma)$ est une fonction définie par :

$$M(\gamma) = (1-\gamma) . \int_0^{\omega} dv . \int_0^{v} 2h . e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

Comme on le voit elle ne dépend ni de l'indice θ ni d'aucun des paramètres du problème.

On en trouvera ci-joint une table et une représentation graphique.

En mettant le système (17) sous la forme :

$$M(\gamma_\theta) = - \frac{\Delta_\theta \gamma_\theta}{a'' \varnothing_\theta} + \frac{\lambda_\theta}{a'' \varnothing_\theta} \qquad (*)$$

sa résolution par la méthode graphique indiquée au C, IV, b) est très rapide.

Les γ_θ ainsi trouvés dépendent ici non seulement des prix figurant dans λ et Δ mais aussi des paramètres $\varnothing$. Par contre ils ne dépendent pas des quantités minimales de consommation m, celles-ci peuvent donc varier sans que le calcul donnant γ en soit affecté.

Il est facile de voir comment les variations de a'' (ou de $\varnothing$) se répercutent sur γ (variation de la pente des droites...).

c) CAS $a' \neq 0$, $a'' = 0$:

Une simplification importante vient faciliter l'application de la méthode indiquée au C, IV, c : le fait que F_θ soit demi-gaussienne permet de donner à la fonction V_θ une forme beaucoup plus maniable (voir D, II) que dans le cas général (formule 7).

d) CAS $a' \neq 0$, $a'' \neq 0$:

On ne peut ici rien dire de plus qu'au C, IV, d.

(*) Cette formule peut ne pas paraître homogène à première vue. En fait, il n'en est rien : a'' n'a pas la dimension d'un prix, c'est a''$\varnothing$ qui l'a (voir définition de a'' au C, I, a). Cette remarque est importante pour les applications numériques.

II. GRANDEURS CARACTÉRISTIQUES

Les grandeurs caractéristiques du problème s'expriment simplement en fonction des principaux paramètres.

En conservant les notations de la formule (23) il est clair que l'on a :

(24) $$n_\theta = e_\theta + m_\theta + \omega_\theta \sigma_\theta$$

La formule (6) permet ensuite de calculer le niveau moyen du stock de fin de période θ soit $t_{\theta+1}$. Pour lui donner une expression simple introduisons la quantité :

(25) $$J_\theta = (\omega\gamma + 2h \,.\, e^{-\omega^2/2} - 2h)_\theta$$

aisée à calculer puisque les tables donnent la valeur de $h.e^{-\omega^2/2}$. Il vient alors :

(26) $$t_{\theta+1} = e_\theta + j_\theta \sigma_\theta$$

Des formules (24) et (26) on déduit conformément à la formule (7)

(27) $$v_\theta = n_\theta - t_\theta = e_\theta - e_{\theta-1} + m_\theta - j_{\theta-1}\sigma_{\theta-1} + \omega_\theta \sigma_\theta$$

valeur moyenne des entrées de flux normal durant la période θ .

Enfin, conformément à la formule (9) on obtient la valeur moyenne des entrées de flux anormal durant la période θ

(28) $$w_\theta = j'_\theta \sigma_\theta$$

en posant :

(29) $$j'_\theta = j_\theta - \omega_\theta + 2h$$

On trouvera dans la table ci-jointe les valeurs de ω, j, j' pour un certain nombre de valeurs de γ .

Ces formules sont simples et d'un emploi facile. Elles permettent d'étudier en détail l'influence des divers paramètres :

1) Les paramètres de prix sont comme résumés par γ : ils n'interviennent nulle part ailleurs. Leur influence sur γ est assez facile à étudier, les tables données permettent de voir comment une variation de γ se répercute sur les n, t, v, w, il en résulte qu'on peut se faire une idée de la sensibilité du modèle aux variations de prix.

2) Les paramètres de structure m et σ interviennent différemment selon que les pénalités sont nulles ou non.

Si a' = a'' = 0 nous avons vu que γ ne dépendait pas de ces paramètres de structure qui interviennent alors linéairement dans les quantités n, t, v, w.

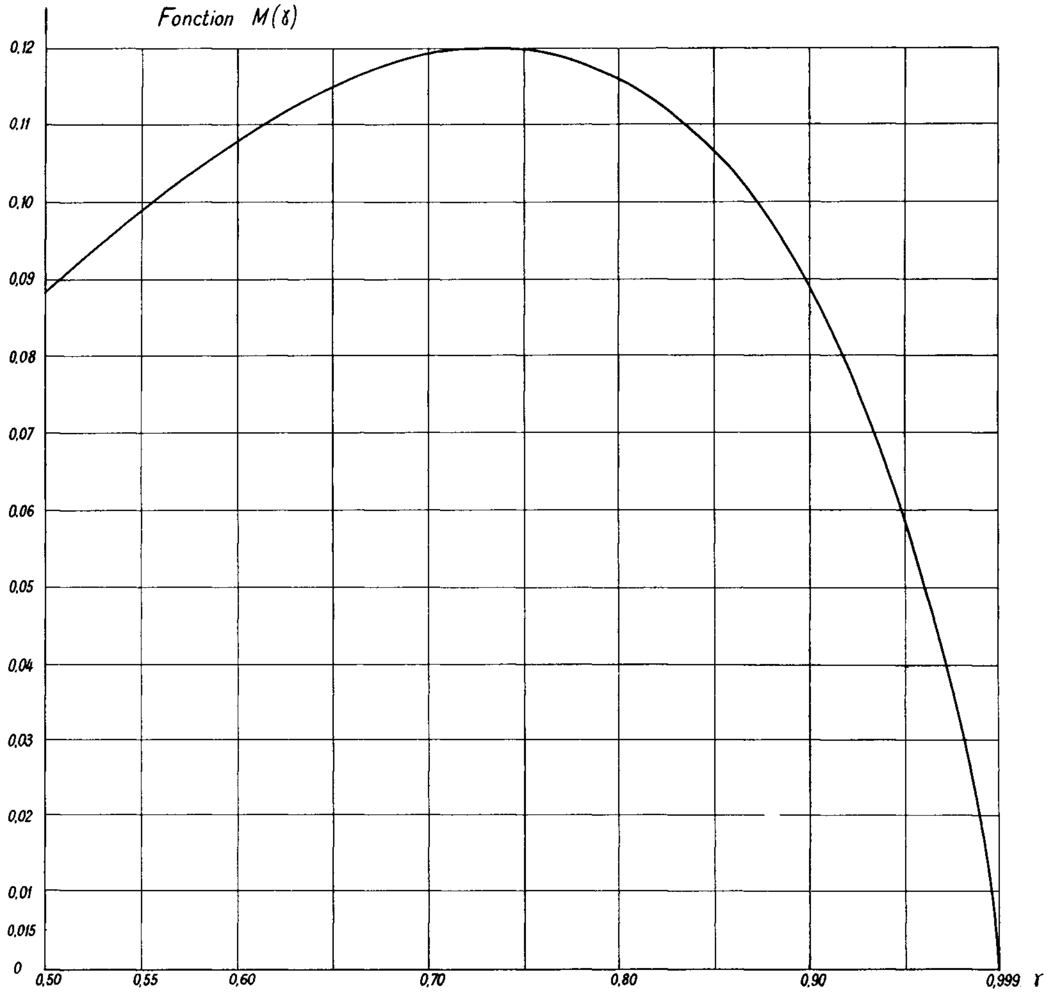
Si a' seul est nul, γ_θ dépend de σ_θ seulement et l'on constate que w_θ ne dépend que de la variance de X_θ. v_θ par contre dépend des 4 paramètres $m_{\theta-1}$ m_θ, $\sigma_{\theta-1}$ σ_θ .

Si a' n'est pas nul, les liaisons peuvent toujours être étudiées numériquement (dans un voisinage...) mais on ne peut plus rien dire de général.

Ainsi, dans ce cas particulier, on voit que sans trop de peine les calculs peuvent être conduits jusqu'au bout et que l'on peut apprécier la sensibilité du modèle aux divers paramètres.

TABLES

γ	ω	j	j'	M(γ)
0,50	0,674490	0,17456044	0,29795500	0,088718
0,55	0,755415	0,21719369	0,25966325	0,099059
0,60	0,841621	0,26688804	0,22315160	0,108045
0,65	0,934589	0,32519829	0,18849385	0,114946
0,70	1,036433	0,39401854	0,15547010	0,119249
0,75	1,150349	0,47687719	0,12441275	0,120105
0,80	1,281552	0,57855704	0,09488960	0,116488
0,81	1,310579	0,60188443	0,08918999	0,115097
0,82	1,340755	0,62673454	0,08386410	0,113455
0,83	1,372204	0,65244476	0,07812532	0,111561
0,84	1,405072	0,67977592	0,07258848	0,109460
0,85	1,439521	0,70910829	0,06747185	0,106935
0,86	1,475791	0,74009570	0,06218926	0,104686
0,87	1,514102	0,77318418	0,05696674	0,101059
0,88	1,554774	0,80891656	0,05202712	0,097579
0,89	1,598193	0,84690721	0,04659877	0,093656
0,90	1,644854	0,88928404	0,04231460	0,089338
0,91	1,695398	0,92572762	0,03721418	0,084527
0,92	1,750686	0,98554656	0,03274512	0,079206
0,93	1,811911	1,04199267	0,02796623	0,073215
0,94	1,880794	1,10646180	0,02355236	0,066686
0,95	1,959964	1,18128124	0,01920180	0,059287
0,96	2,053749	1,27091448	0,01505004	0,051023
0,97	2,170090	1,38310274	0,01089730	0,041628
0,975	2,24	1,4513	0,0092	0,036392
0,98	2,326348	1,53533648	0,00687304	0,030809
0,985	2,44	1,6463	0,0042	0,024630
0,99	2,575829	1,78118615	0,00324171	0,017852
0,995	2,81	2,01347	0,00135	0,010093
0,999	3,29053	2,49296	0,00031	0,002237


Fonction M(γ)
0,12
0,11
0,10
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0,015
0
0,50
0,55
0,60
0,70
0,80
0,90
0,999
γ

E. CONCLUSION

Nous voudrions, pour conclure, préciser deux points : l'un concerne le principe des quantités garanties, l'autre une interprétation concrète de la solution obtenue.

a) PRINCIPE DES QUANTITÉS GARANTIES

Le problème posé au A vient d'être résolu en ce sens que nous savons déterminer le programme (d'approvisionnement ou de production) le meilleur satisfaisant au principe des quantités garanties. Il est bien clair que l'obéissance à un tel principe restreint l'ensemble des programmes admis à concourir pour l'optimalité. Cette restriction peut paraître non indispensable et quelque peu arbitraire.

Certes elle n'est pas indispensable : on sait résoudre pas mal de problèmes du genre de celui exposé au A en employant des méthodes récurrentes qui remontent le cours du temps. Les calculs sont en général assez compliqués. Si les fluctuations saisonnières sont fortement marquées, ou bien si les fonctions de coût sont un peu complexes il est rare qu'on puisse mener les calculs jusqu'au bout.

Pour limiter l'arbitraire disons que le principe des quantités garanties répond à deux soucis importants : l'un d'ordre concret, l'autre d'ordre théorique.

Pour qu'un programme (même optimal) puisse être appliqué il est nécessaire qu'il soit simple et que sa logique apparaisse clairement. Un élément quelconque de la classe des quantités garanties satisfait à cette exigence. En ne recherchant l'optimum qu'au sein de cette classe on s'assure par avance que la solution trouvée pourra se traduire dans les faits.

Sur le plan théorique disons d'abord que, dans le cas où les fluctuations saisonnières sont absentes et les prix tous proportionnels aux quantités sur lesquelles ils portent, le programme optimal appartient à la classe des quantités garanties d'après un théorème dû à Bellman. Disons enfin que la prise en considération dans le cas général de ces seuls programmes apporte des simplifications considérables que nous allons brièvement passer en revue ci-dessous. Elles sont suffisantes pour qu'à priori on puisse espérer pouvoir mener les calculs jusqu'au bout même avec des fluctuations saisonnières marquées et des fonctions de coût assez raffinées.

Les simplifications mathématiques apportées par la restriction de l'ensemble des possibles à la classe des quantités garanties, sont essentiellement de trois ordres :

- le problème restreint est paramétrique, tandis que le problème général était fonctionnel,
- la fonction $V(s)$ valeur du stock, a priori inconnue, disparaît dans l'expression du coût C,

- deux périodes non consécutives sont indépendantes, il en résulte que les dérivées partielles des divers coûts contiennent tout au plus deux niveaux.

b) INTERPRÉTATION CONCRÈTE DE LA SOLUTION

Dans la résolution du système (5), nous avons vu tout naturellement apparaître l'inconnue :

$$\gamma_\theta = F(n-e)_\theta$$

à la place de l'inconnue n_θ.

Elle a un sens concret très précis : c'est la probabilité de ne pas avoir à recourir au flux anormal durant la période θ. Pour simplifier, nous dirons que c'est la probabilité qu'il n'y ait pas défaillance ou qu'il y ait excédent (sous-entendu du flux normal).

Portons notre attention sur la formule (16) :

$$\gamma_\theta = \frac{\lambda_\theta}{\Delta_\theta}$$

qui détermine l'optimum dans le cas où il n'y a pas de pénalité.

Rappelons que nous avons supposé page 5 que le flux normal pour une période était payé en totalité au début de la période. Son coût unitaire réel peut donc être estimé à :

$$a_\theta^r = a_\theta + \frac{1}{2} b_\theta$$

En introduisant ce nouveau coût dans les expressions de λ et Δ (voir page 20), et en transformant un peu la formule (16) on peut écrire :

$$\frac{\gamma_\theta}{1-\gamma_\theta} = \frac{\alpha_\theta + \frac{1}{2}\alpha' - a_\theta^r}{c + \frac{1}{2}(b_\theta + b_{\theta+1}) + a_\theta^r - a_{\theta+1}^r}$$

Cette formule d'allure un peu compliquée, est justiciable d'une interprétation simple. Le premier membre est un rapport de probabilité dont la signification est claire, c'est le second membre qu'il s'agit d'analyser avec un peu de soin pour découvrir la relation que nous avons en vue.

Au numérateur de ce second membre, figure le groupement

$$\alpha_\theta + \frac{1}{2}\alpha'$$

Il représente (d'après les définitions des pages 15 et 16) un coût unitaire moyen du flux anormal. Le numérateur complet symbolise ce que nous appellerons la <u>perte par défaillance</u> : à savoir le supplément de coût unitaire qui résulte de la défaillance du flux normal, laquelle oblige à recourir au flux anormal (réel ou fictif).

Le dénominateur de cette même formule symbolise à son tour la <u>perte par excédent</u> à savoir le supplément de coût unitaire qui résulte de l'excédent, lequel oblige à stocker. En effet ce dénominateur comprend une première partie :

$$c + \frac{1}{2}(b_\theta + b_{\theta+1})$$

qui représente un coût de stockage proprement dit et une seconde partie :

$$a^r_\theta - a^r_{\theta+1}$$

qui peut surprendre a priori mais qui est cependant nécessaire. En effet :

- si $a^r_\theta > a^r_{\theta+1}$ l'excédent coûte par les frais de stockage qu'il entraîne, et aussi par la perte qu'il a fait subir en achetant à un prix supérieur à celui auquel on aurait pu acheter
- si $a^r_\theta < a^r_{\theta+1}$ le gain que l'on fait en achetant plus tôt est à déduire du coût du stockage pour calculer le coût qu'occasionne l'excédent.

Ainsi la formule (16) se présente comme la traduction mathématique de la relation (R) suivante :

La quantité de flux normal dont on doit pouvoir disposer pendant la période θ doit, à l'optimum, être telle que :

$$\text{(R)} \qquad \frac{\text{probabilité de l'excédent}}{\text{probabilité de la défaillance}} = \frac{\text{perte par défaillance}}{\text{perte par excédent}}$$

Ce résultat assez remarquable subsiste lorsqu'on introduit une pénalité de type a', pourvu que l'on prenne comme coût réel d'achat du flux normal l'expression :

$$a^r_\theta + a'\varepsilon_\theta'$$

(voir formules page 25). Par contre il disparaît lorsqu'on introduit une pénalité de type a'' (voir formule (17)).

La relation R est assez remarquable à plusieurs points de vue :

1) Elle est simple et naturelle. Elle apparaît conforme aux théorèmes généraux d'espérance marginale (*). Notons qu'il ne faut pas en conclure pour cela qu'elle aurait pu en être déduite sans calcul. En effet dès qu'on enlève aux coûts leur caractère de proportionnalité simple (pénalité a'' proportionnelle au carré d'un écart, coût fixe (payé seulement s'il y a commande de flux anormal, etc...) la relation R cède sa place à des relations de nature fort différente dans lesquelles peuvent intervenir la primitive de F (pénalité a'') ou la densité de probabilité (coût fixe).

2) Elle ne fait intervenir que deux coûts dont la conception est facile.

3) Elle ne fait intervenir F_θ que par le rapport de deux probabilités elles aussi de conception facile.

4) La connaissance de F_θ dans son ensemble n'est pas nécessaire pour savoir si l'on est voisin ou non de l'optimum et pour savoir, s'il y a lieu, dans quel sens on s'en écarte.

(*) Voir à ce sujet le livre de Monsieur Massé : Les Réserves et la Régulation de l'avenir dans la vie économique, tome II : Avenir aléatoire. Actualités scientifiques et industrielles 1008, Hermann, Paris, 1946.

ANNEXE I

CALCULS DANS LE CAS D'UNE PÉNALITÉ a' PROPORTIONNELLE A $|u_\theta - m|$

Nous remplaçons $|v_\theta - m|$ par $|u_\theta - m|$ dans la formule donnant $a_\theta(u_\theta)$ (C, I, a).

Les calculs faits en C, II, a (2) doivent être remplacés par les suivants :

2) <u>calcul des dérivées de A_θ^2</u> :

On a :

$$A_\theta^2 = a' \left| n_\theta - e_{\theta-1} - m \right| . \left[1 - F(n-e)_{\theta-1}\right]$$

$$+ a' \int_{e_{\theta-1}}^{n_\theta - m} (n_\theta - s_\theta - m) . f_{\theta-1} (n_{\theta-1} - s_\theta) \, ds_\theta$$

$$- a' \int_{n_\theta - m}^{n_{\theta-1}} (n_\theta - s_\theta - m) . f_{\theta-1} (n_{\theta-1} - s_\theta) \, ds_\theta$$

Dans le premier de ces trois termes, le signe $|\ldots|$ peut être supprimé. En effet, il y a tout lieu de croire que l'on a toujours

$$m \leqslant n_\theta - e_{\theta-1}$$

ce qui signifie que la quantité maximum que l'on puisse avoir à acheter chaque période est toujours supérieure à la moyenne m. Si pour une période il n'en était pas ainsi (on le verrait une fois les calculs finis...) il faudrait recommencer en changeant le signe de la quantité entre $|\ldots|$. Il n'y aurait pas de difficulté notoire. Ceci étant supposé on trouve aisément :

XX $$\frac{\partial A_\theta^2}{\partial n_\theta} = a' - 2\, a' \, F_{\theta-1} (m + n_{\theta-1} - n_\theta)$$

XX' $$\frac{\partial A_\theta^2}{\partial n_{\theta-1}} = - a' \, F(n-e)_{\theta-1} + 2\, a' \, F_{\theta-1} (m + n_{\theta-1} - n_\theta)$$

Dans ces conditions, la formule (11) s'écrit :

$$\frac{\partial A}{\partial n_\theta} = a_\theta + a' - (a_{\theta+1} + a') . F(n-e)_\theta$$
$$+ 2\, a' \left[F_\theta (m + n_\theta - n_{\theta+1}) - F_{\theta-1} (m + n_{\theta-1} - n_\theta)\right]$$
$$+ a'' \left[1 - F(n-e)_\theta\right] . G_\theta(n_\theta)$$

La formule (15) devient :

$$\left[- (a_{\theta+1} + a') + \alpha_\theta + \alpha' + c\right] F(n-e)_\theta + \left[a_\theta + a' - (\alpha_\theta + \alpha_i\right] + R_\theta(n_\theta) + \frac{\partial J}{\partial n_\theta}$$
$$= 2\, a' \left[F_{\theta-1} (m + n_{\theta-1} - n_\theta) - F_\theta (m + n_\theta - n_{\theta+1})\right] - a'' \left[1 - F(n-e)_\theta\right] G_\theta(n_\theta)$$

Les raisonnements qui permettent de passer de (15) à (15'') subsistent mais (15'') s'écrit :

$$(\Delta_\theta - a')F(n-e)_\theta - (\lambda_\theta - a') =$$
$$= 2a'\left[F_{\theta-1}(m+n_{\theta-1}-n_\theta) - F_\theta(m+n_\theta-n_{\theta+1})\right] - a''\left[1-F(n-e)_\theta\right]G_\theta(n_\theta)$$

La résolution de ce système dans les cas (c) et (d) présente certaines difficultés. De plus certains termes peuvent être modifiés lorsque l'hypothèse faite dans le calcul de la dérivée de A_θ^2 ne se trouve pas satisfaite.

ANNEXE II

COÛT DE L'APPROVISIONNEMENT EN FLUX NORMAL

Nous allons donner ici une valeur approchée par excès de A_θ.

Il est clair que l'on a :

$$A_\theta = a_\theta \cdot v_\theta + a'\left|v_\theta - m\right| + a''.V(U_\theta)$$

où $V(U_\theta)$ = variance de U_θ.

On remarquera que la variable aléatoire U_θ peut se déduire de $X_{\theta-1}$ de la façon suivante (voir B, I, a) :

$$U_\theta = n_\theta - n_{\theta-1} + X_{\theta-1} \quad \text{pour} \quad X_{\theta-1} \leqslant n_{\theta-1} - e_{\theta-1}$$
$$U_\theta = n_\theta - e_{\theta-1} \quad \text{pour} \quad X_{\theta-1} \geqslant n_{\theta-1} - e_{\theta-1}$$

Il en résulte

$$v_\theta \leqslant E(X_{\theta-1}) + n_\theta - n_{\theta-1} \quad \text{(majoration qui peut être utile)}$$

$$V(U_\theta) \leqslant V(X_{\theta-1})$$

Ainsi :

$$A_\theta \leqslant a_\theta . v_\theta + a'\left|v_\theta - m\right| + a''.V(X_{\theta-1})$$

On peut aisément calculer la valeur de chaque terme de cette formule dès que les quantités garanties n_θ sont connues.

Si la pénalité a' portait sur $\left|u_\theta - m\right|$ au lieu de $\left|v_\theta - m\right|$, son espérance mathématique ne revêtirait pas une forme aussi simple.

ANNEXE III

COMPLÉMENTS RELATIFS AU C, IV, c

CARACTÈRE SUFFISANT DES SYSTÈMES (18'), (18"): (voir page 21)

Soit :

$$dn = dn_o, \dots dn_i, \dots dn_j$$

un système quelconque d'accroissements. Il s'agit de montrer que dC (formule donnée en bas de la page 24), calculé pour un tel système est positif lorsque la période o est origine d'une séquence de discontinuité de longueur j et lorsque les $dn_o, dn_i, \dots, dn_j$ satisfont aux systèmes (18') et (18")). Pour cela posons :

$$\{dn^k\} = dn_o^k, \dots dn_i^k, \dots dn_j^k \qquad k = 0, 1 \dots j$$

avec

$dn_j^o = dn_j$	$dn_j^1 = 0$	$dn_j^2 = 0$	$\dots dn_j^j = 0$
$dn_{j-1}^o = dn_j^o / \gamma_{j-1}^o$	$dn_{j-1}^1 = dn_{j-1} - dn_{j-1}^o$	$dn_{j-1}^2 = 0$	$\dots dn_{j-1}^j = 0$
$dn_{j-2}^o = dn_{j-1}^o / \gamma_{j-2}^o$	$dn_{j-2}^1 = dn_{j-1}^1 / \gamma_{j-1}^o$	$dn_{j-2}^2 = dn_{j-2} - dn_{j-2}^o - dn_{j-2}^1$	$\dots dn_{j-2}^j = 0$
.....	.....	...	...
$dn_o^o = dn_1^o / \gamma_o^o$	$dn_o^1 = dn_1^1 / \gamma_o^o$	$dn_o^2 = dn_1^2 / \gamma_o^o$	$\dots dn_o^j = dn_o - dn_o^o - \dots - dn_o^{j-1}$

Il est clair que l'on a :

$$\{dn\} = \{dn^o\} + \{dn^1\} + \dots \{dn^j\}$$

(l'addition se faisant entre les dn de même indice inférieur).

On peut alors s'assurer aisément que dC se laisse décomposer en une somme :

$$dC = dC^o + dC^1 + \dots dC^j$$

(où dC^k est la valeur de dC calculée pour le système $\{dn^k\}$

Cela tient au choix des $\{dn^k\}$ qui annulent un nombre suffisant de termes figurant sous les signes $| \dots |$

Ces $\{dn^k\}$ sont précisément ceux pour lesquels les systèmes (18') et (18'') expriment que l'accroissement de C (autrement dit dC^k) doit être positif.

dC apparaît ainsi comme une somme de termes positifs, il est donc lui-même positif (c.q.f.d.).

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS V_θ (voir page 26 et suivantes):

V_θ est une fonction décroissante de $\gamma_{\theta-1}$ (donc aussi de $n_{\theta-1}$) et croissante de γ_θ (donc aussi de n_θ). Cela résulte des formules suivantes déjà utilisées (page 17) :

$$\partial V_\theta / \partial n_{\theta-1} = -\gamma_{\theta-1} \qquad \partial V_\theta / \partial n_\theta = 1$$

On en déduit aisément les deux formules suivantes :

$$\partial V_\theta / \partial \gamma_{\theta-1} = -\gamma_{\theta-1} / f_{\theta-1} \quad \text{et} \quad \partial V_\theta / \partial \gamma_\theta = 1/f_\theta$$

avec : $f_\theta = f(n-e)_\theta$

f étant la dérivée de F.

C'est de ces deux formules qu'on déduit la convergence de l'itération fournissant les solutions du système :

$$V_\theta(\gamma_{\theta-1}, \gamma_\theta) = m \quad \text{pour} \quad \theta = 1, 2 \ldots n \text{ (*)}$$

En effet, avec les notations de la page 26, cherchons à exprimer la dérivée de γ_n' considéré comme fonction de γ_n.

Il vient :

$$\frac{d\gamma_n'}{d\gamma_n} = \frac{d\gamma_n'}{d\gamma_{n-1}} \cdot \frac{d\gamma_{n-1}}{d\gamma_{n-2}} \cdot \ldots \ldots \frac{d\gamma_1}{d\gamma_n}$$

Sur une ligne $V_\theta = m$ on a :

$$\frac{d\gamma_\theta}{d\gamma_{\theta-1}} = \frac{\gamma_{\theta-1} \cdot f_\theta}{f_{\theta-1}}$$

d'où

$$\frac{d\gamma_n'}{d\gamma_n} = \gamma_{n-1} \ldots \gamma_1 \cdot \gamma_n \frac{f_n'}{f_n}$$

avec f_n = valeur de f_n pour γ_n

f_n' = valeur pour γ_n'

Pour $\gamma_n = \gamma_n'$ cette dérivée est positive et plus petite que 1 (produit de n termes chacun plus petit que 1). Ce résultat reste vrai dans un voisinage assez grand du point $\gamma_n = \gamma_n'$.

(*) Il n'y a en fait de solution que pour :

$$m < \frac{1}{n} \Sigma_1^n E(X_\theta)$$

$$\Sigma_1^n (v_\theta + W_\theta) = \Sigma_1^n E(X_\theta)$$

On s'assure ainsi que si la solution cherchée existe, elle est unique et que l'itération proposée est bien convergente.

C'est encore à partir de ces deux formules qu'on justifie la méthode préconisée page 28 pour obtenir les valeurs $\delta_0 \ldots \delta_j$. On calcule pour cela la dérivée :

$d\delta_j' \;/\; d\delta_j$ et l'on montre qu'elle est négative.

On s'appuie ensuite sur le fait que δ_j est une fonction croissante de δ_0. Le résultat est alors évident.