SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 312-322

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__312_1>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 NOVEMBRE 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. André : *Sur les permutations alternées et leurs relations avec les développements en série de* séc x *et de* tang x.

M. Andoyer : *Sur les courbes paraboliques des surfaces algébriques et certaines singularités de ces surfaces.*

M. de Séguier adresse la Note suivante :

Courbe remplissant un cube à n dimensions.

Considérons l'ensemble V des points $(x_1, \ldots, x_n)$ [1] $(n \geq 2)$ défini

[1] MM. Peano (*M. A.*, t. XXXVI), Hilbert (*M. A.*, t. XXXVIII), Moore (*Transaction of the American Society*, 1900) ont étudié le cas où $n = 2$. *Voir* aussi E. Picard, *Traité d'Analyse*, 2e édition, Ch. I. Ce qui suit n'est qu'une généralisation de l'exemple donné par M. Hilbert.

par $0 \leq x_i < 1$ et l'ensemble L des points (x) défini par $0 \leq x < 1$, puis les variétés

$$x = \frac{\xi}{2^{nk}} (\xi = 0, 1, \ldots, 2^{nk} - 1), \qquad x_i = \frac{\xi_i}{2^k} (\xi_i = 0, \ldots, 2^k - 1),$$

qui partagent L et V en 2^{kn} parties, $L_\xi^k V_{\xi_1 \ldots \xi_n}^k$, définies

$$L_k^k \frac{\xi}{2^{nk}} \leq x < \frac{\xi + 1}{2^{nk}}, \qquad V_{\xi_1 \ldots \xi_n}^k$$

par

$$\frac{\xi_i}{2^k} \leq x_i < \frac{\xi_i + 1}{2^k},$$

[j'appellerai $\frac{\xi}{2^{nk}}$ le point initial de L_ξ et $\left(\frac{\xi_1}{2^k}, \ldots, \frac{\xi_n}{2^k}\right)$ le point initial de $V_{\xi_1 \ldots \xi_n}^k$].

Supposons d'abord $k = 1$ et cherchons à ranger les $V_{\xi_1 \ldots \xi_n}^1$ dans un ordre tel que chacun se déduise du précédent par une translation égale à $\frac{1}{2}$ et parallèle à un des axes, c'est-à-dire que si l'un d'eux est défini par $\frac{\xi_i}{2} \leq x_i < \frac{\xi_i + 1}{2}$, le suivant le sera par les mêmes inégalités où *un* et *un seul* des ξ_i sera augmenté ou diminué de 1. Soit S_n la suite ainsi formée. L'ordre des termes sera déterminé par la suite s_n des systèmes $\xi_1 \ldots \xi_n$ qui y figurent. Supposons s_n formée pour $n = \nu$, le premier système étant 0, 0..., 0, le dernier répondant à ξ_h *seul* $\neq 0$, l'avant dernier à ξ_h et ξ_i *seuls* $\neq 0$. Pour former $s_{\nu+1}$ on peut procéder ainsi. Entre le $i^{\text{ème}}$ élément et le suivant (le premier étant regardé comme succédant au dernier) de chaque système de s_ν écrivons un 0 qui sera le $i + 1$ élément, le rang de chacun des éléments suivants jusqu'au dernier se trouvant ainsi accru de 1. Soit $s_{\nu,0}$ la suite ainsi formée. Formons une suite analogue $s_{\nu,1}$ en insérant entre le $i^{\text{ième}}$ et le $(i+1)^{\text{ième}}$ élément de s_ν un 1 au lieu d'un 0. Écrivons alors tous les termes de $s_{\nu,0}$, sauf le dernier, dans l'ordre où ils se présentent, puis tous les termes de $s_{\nu,1}$, sauf le dernier, dans l'ordre inverse en commençant par l'avant-dernier, puis le dernier terme de $s_{\nu,1}$, puis le dernier terme de $s_{\nu,0}$. La suite ainsi formée sera une suite $s_{\nu+1}$: nous dirons qu'elle *conduit* du point (0, 0, ..., 0) au point

$$(x_1 = x_2 = \ldots = x_{h-1} = x_{h+1} = \ldots x_{\nu+1} = 0, \qquad x_h = 1.)$$

Pour obtenir une suite $s_{\nu+1}$ conduisant du point $(o, \ldots, o)$ au point $x_1 = \ldots = x_\nu = 0$, $x_{\nu+1} = 1$, on écrirait $s_{\nu,0}$ puis $s_{\nu,1}$ dans l'ordre inverse.

Cela posé, désignons les termes de s_n par $V_0, \ldots, V^1_{2^n-1}$ et faisons correspondre V^1_ξ à L^1_ξ, *les points initiaux se correspondant*. Pour $k = 2$ on peut réaliser une correspondance analogue entre les $V^2_{\xi_1 \ldots \xi_n}$ contenus dans V^1_μ et les L^2_ξ contenus dans L^1_μ, en ayant soin que la suite des $V^2_{\xi_1 \ldots \xi_n}$ conduise du point initial de V^1_μ au point initial de $V^1_{\mu+1}$. Soit V^2_ξ le $V^2_{\xi_1 \ldots \xi_n}$ répondant à L^2_ξ.

On pourra de même faire correspondre à L^k_ξ un $V^k_{\xi_1 \ldots \xi_n}$ que j'appellerai V^k_ξ. Quand k croît indéfiniment, un point $(x_1, \ldots, x_n)$ dont les coordonnées ne sont pas toutes de la forme $\frac{\alpha}{2\beta}$ (α impair) sera intérieur à toute une série de $V^k_{\xi_1 \ldots \xi_n}$ où chacun contient tous les suivants; cette série définit $(x_1, \ldots, x_n)$. La série des L^k_ξ correspondants définit un point x correspondant à $(x_1, \ldots, x_n)$. Ainsi on a réalisé une correspondance *biunivoque* entre les points de V et ceux de L qui peut être représentée par $x_i = f_i(\xi)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Entre deux points $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ quelconques, l'arc de la *courbe* $x_i = f_i(\xi)$ qui remplit V est toujours infini, car, pour k assez grand, $(a_1, \ldots)$ et $(b_1, \ldots)$ sont dans deux $V^k_{\xi_1 \ldots \xi_n}$ *non adjacents* et la courbe remplit chaque $V^k_{\xi_1 \ldots \xi_n}$ au point initial duquel elle passe. Plus précisément, la variation de x_i étant $> \frac{1}{2^{k+N}}$ dans $V^{k+N}_{\xi_1 \ldots \xi_n}$ et, par suite, $> \frac{1}{2^k}$ dans une *file* de $2^N V^{k+N}_{\xi_1 \ldots \xi_n}$ intérieurs à $V^k_{\xi_1 \ldots \xi_n}$ dont chacun se déduit du précédent par une translation de $\frac{1}{2^{k+N}}$ parallèle aux x_i sera $> 2^{(n-1)N} 2^{-k}$ dans $V^k_{\xi_1 \ldots \xi_n}$; donc la variation de $f_i(\xi)$ ne peut être bornée dans aucun $V^k_{\xi_1 \ldots \xi_n}$, si petit soit-il.

M. Combebiac adresse la Note suivante :

Sur la force vive utilisable.

Le *Bulletin* a publié dans son dernier fascicule une Note de M. Lecornu sur la *Dynamique des corps déformables*.

Il ne paraît pas sans intérêt de compléter cette Note par la proposition suivante :

Dans le cas où les forces extérieures se font équilibre, la force vive *utilisable* est uniquement fonction de la position du système.

Je rappelle que M. Lecornu appelle *force vive utilisable* la force vive que prendrait le corps si, à l'instant considéré, il venait à se solidifier.

Nous considérerons, comme M. Lecornu, le mouvement par rapport à un point fixe. Il est clair que la proposition est également vraie pour le mouvement autour du centre de gravité et, par suite, pour le mouvement général du système.

Soit γ le vecteur représentatif du moment résultant des quantités de mouvement de tous les points du système.

Soit ε le vecteur représentatif de l'axe instantané de rotation du mouvement que prendrait le système, s'il était brusquement solidifié.

On sait que la force vive de rotation du système solidifié a pour expression

$$T = (\varepsilon)\,(\gamma)\cos\theta,$$

où (ε) et (γ) sont les grandeurs respectives des vecteurs ε et γ et θ l'angle que ces vecteurs forment entre eux.

On sait également que, dans un corps solide, le vecteur γ est une fonction du vecteur ε déterminée par la position des axes principaux d'inertie et par les valeurs des moments principaux d'inertie.

Réciproquement, ε est une fonction analogue de γ, et, θ ne dépendant que de ε et de γ, il en résulte que T ne dépend que de γ et des positions des différents points du système.

Dans le cas où les forces extérieures se font équilibre (au sens qu'a ce mot dans la Mécanique des systèmes indéformables), le vecteur γ est constant en grandeur et en direction, et l'expression T n'est fonction que de la position du système, C. Q. F. D.

Il résulte en outre de la démonstration que l'expression T prendra la même valeur, non seulement quand le système passera par la même position, mais encore quand il passera par des positions présentant la même forme, au point de vue de la répartition de la masse par rapport au vecteur constant γ.

On voit que, pour toute autre position, la force vive utilisable est forcément comprise entre certaines limites, comme l'a indiqué M. Lecornu.

Si les forces intérieures n'équilibrent pas l'action des forces centrifuges, le système se dilatera et la force vive utilisable diminuera en même temps que (ε).

Si, au contraire, les forces intérieures centripètes ont la prépondérance sur les forces centrifuges, le système se condensera et la force vive utilisable augmentera, puisque, (γ) restant constant, (ε) croîtra pendant que les moments d'inertie diminueront. Si le mouvement de condensation se produit suffisamment lentement, le travail des forces internes sera presque entièrement employé à accroître la force vive utilisable.

Dans le cas, cité par M. Lecornu, du système formé par l'écureuil et sa cage, la force vive utilisable serait constante, si l'écureuil n'était pas soumis à la pesanteur, et, à défaut d'impulsion primitive, le système s'arrêterait chaque fois que l'écureuil se fixerait à la cage.

Dans la réalité, le moment du poids de l'écureuil par rapport à l'axe fixe n'est équilibré que par des forces d'inertie, et c'est ce moment qui accroît la valeur de (ε), le moment d'inertie restant ici constant.

Il y a lieu d'observer que la considération de la force vive utilisable correspond à une décomposition remarquable du mouvement.

Soient p, q, r les composantes de l'axe instantané de rotation ε suivant les directions des axes principaux d'inertie à l'instant considéré, et A, B, C les valeurs des moments d'inertie principaux; soient x, y, z les coordonnées d'un point du système par rapport aux axes principaux d'inertie, et soient x', y', z' les composantes suivant ces axes de la vitesse absolue de ce point.

On a, d'après la définition de ε,

$$\mathrm{A}p = \Sigma m(yz' - zy'), \qquad \mathrm{B}q = \Sigma m(zx' - xz'), \qquad \mathrm{C}r = \Sigma m(xy' - yx').$$

Décomposons le mouvement en deux autres, dont l'un serait le mouvement de rotation sans déformation déterminé par l'axe instantané ε, c'est-à-dire posons

$$x' = qz - ry + u, \qquad y' = rx - pz + v, \qquad z' = py - qx + w.$$

On a

$$T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + \Sigma m(u^2 + v^2 + w^2)$$
$$+ 2\Sigma m[u(qz - ry) + v(rx - pz) + w(py - qx)].$$

Or le troisième terme est nul (et c'est ce qui constitue l'intérêt de cette décomposition).

Ce troisième terme peut en effet s'écrire, en remplaçant u, v et w par leurs valeurs,

$$\Sigma m[x'(qz - ry) + y'(rx - pz) + z'(py - qx)] - (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$$

ou

$$p\Sigma m(yz' - zy') + q\Sigma m(zx' - xz') + r\Sigma m(xy' - yx') - (Ap^2 + Bq^2 + C\varepsilon^2),$$

quantité nulle, d'après la définition de p, q, r.

On a donc

$$T = Ap^2 + Bq^2 + Cz^2 + \Sigma m(u^2 + v^2 + w^2).$$

Observons, en terminant, que les lettres p, q, r n'ont pas la même signification que dans la Note de M. Lecornu, pas plus que les lettres x', y', z'.

M. L. Ripert fait la Communication suivante :

Sur trois propriétés de six points d'une conique.

I. — Le théorème de la droite de Simson du point M d'un cercle (ABC), étant une propriété de six points (A, B, C, M, I, J) du cercle, a cette conséquence projective :

Soient A, B, C, D, E, F *six points d'une conique ;* A_1, B_1, C_1 *les points où* BC, CA, AB *coupent* EF ; A_2, B_2, C_2 *leurs points conjugués sur* EF. *Les droites* DA_2, DB_2, DC_2 *rencontrent les droites* BC, CA, AB *en des points situés sur une droite* d.

Au triangle ABC, en permutant circulairement les points D, E, F, correspondent trois droites d, e, f. Or, il y a vingt triangles

ABC(1), ABD(2), ..., CEF(19), DEF(20).

Donc, *à six points donnés sur une conique correspondent* *soixante droites*, essentiellement distinctes des Pascals, et que l'on peut nommer *Simsons*.

Le calcul montre que le triangle DEF et le triangle formé par les droites d, e, f sont homologiques. En désignant par K_1 et k_1 le centre et l'axe d'homologie, on voit que, *aux soixante Simsons correspondent vingt points* K *et vingt droites* k.

Si l'on opère sur DEF par rapport à (A, B, C) comme on a opéré sur ABC par rapport à (D, E, F) on obtient K_{20} et une droite k_{20}. Si les six points donnés sont tels que les triangles ABC et DEF soient homologiques, la droite $K_1 K_{20}$ passe par le centre d'homologie et les droites k_1 et k_{20} se coupent sur l'axe d'homologie.

II. — Une autre propriété des six points se déduit du lemme suivant:

Soient A, B, C, E, F *cinq points d'une hyperbole équilatère. Les perpendiculaires abaissées du point* F *sur les droites* AE, BE, CE *coupent les droites* BC, CA, AB *en des points situés sur une droite* Δ *qui est perpendiculaire à* EF.

En effet, le triangle ABC étant de référence, soient α, β, γ; α', β', γ', les coordonnées barycentriques de E et F. Si l'on pose

$$b^2 + c^2 - a^2 = \mathbf{a}, \qquad c^2 + a^2 - b^2 = \mathbf{b}, \qquad a^2 + b^2 - c^2 = \mathbf{c},$$

on trouve que le pied L de la perpendiculaire abaissée de F sur AE a pour coordonnées

$$o, \quad \beta'(\mathbf{b}\beta - \mathbf{c}\gamma) - \alpha'(2b^2\gamma + \mathbf{a}\beta), \quad \gamma'(\mathbf{b}\beta - \mathbf{c}\gamma) + \alpha'(2c^2\beta + \mathbf{a}\gamma).$$

En formant la condition pour que le point L et les deux points M et N que l'on obtient par permutation circulaire soient collinéaires, on trouve

$$\sum \frac{\alpha(\mathbf{b}\beta - \mathbf{c}\gamma)}{\alpha'} = o.$$

C'est la condition qui exprime que la conique ABCEF passe par l'orthocentre D de ABC, c'est-à-dire est hyperbole équilatère; elle est remplie par hypothèse. On vérifie d'ailleurs que les coordonnées des droites EF et LMN (ou Δ) satisfont à la condition de perpendicularité.

Or, l'orthocentre D d'un triangle ABC est le point du plan tel que les côtés AD et BC, BD et CA, CD et AB du quadrangle ABCD soient conjugués par rapport au cercle des neuf points de ce quadrangle, défini projectivement par les milieux des six côtés et les trois points d'intersection des côtés conjugués.

Si l'on remplace l'orthocentre de ABC par un point arbitraire D du plan, on sait que le quadrangle ABCD conserve une conique Ω des neuf points, de même définition projective.

D'où cette conséquence :

Soient A, B, C, D, E, F *six points d'une conique. Les conjuguées menées par* F *des droites* AE, BE, CE *par rapport à la conique* Ω *du quadrangle* ABCD *coupent les droites* BC, CA, AB *en des points situés sur une droite* Δ, *qui est conjuguée de* EF *par rapport à* Ω.

Aux six points donnés correspondent cent vingt droites Δ, car, les trois points D, E, F ayant dans la propriété des rôles distincts, à chacun des vingt triangles ABC correspondent six droites. Les cent vingt droites se répartissent en quinze faisceaux de huit droites parallèles, respectivement conjuguées des droites AB, AC, ...DF, EF par rapport aux coniques Ω des quadrangles CDEF, ...ABCD.

Il est aisé de généraliser ce théorème de manière à faire correspondre à six points d'une conique quinze faisceaux de huit droites concourant en quinze points situés sur une droite arbitrairement donnée.

III. — Le théorème suivant est dû à M. Lemoine (*M.*, 1901, p. 240):

Soient M *un point du cercle circonscrit à un triangle* ABC; A', B', C' *les pieds des hauteurs. On porte sur* AA', BB', CC' *les longueurs* MA, MB, MC *en* AA_1, BB_1, CC_1 *dans le sens* AA', BB', CC', *ou dans le sens opposé suivant que* MA, MB, MC *coupent* BC, CA, AB *sur les côtés du triangle ou sur leurs prolongements. Les quatre points* M, A_1, B_1, C_1 *sont sur une droite* δ_1.

On peut remarquer que : 1° si l'on désigne par A_2 le second point d'intersection de AA′ et du cercle de centre A et de rayon AM, et de même, B_2 et C_2, les points M, A_2, B_2, C_2 sont sur une droite δ_2, perpendiculaire à δ_1; 2° les droites B_1C_2 et C_1B_2, C_1A_2 et A_1B_2, A_1B_2 et B_1A_2 se coupent en des points A_3, B_3, C_3 situés sur une droite δ_3 passant par M; 3° les droites A_1A_3, B_1B_3, C_1C_3 concourent en un point P_1 et les droites A_2A_3, B_2B_3, C_2C_3 en un point P_2. D'où cette conséquence :

Soient A, B, C, D, E, F *six points d'une conique;* AA′, BB′, CC′ *les droites menées par* A, B, C *et qui coupent* EF *aux points conjugués des intersections de cette droite avec* BC, CA, AB. *Considérons les trois coniques passant par* D, E, F *et ayant* A, B, C *pour pôles respectifs de* EF*; soient* A_1 *et* A_2, B_1 *et* B_2, C_1 *et* C_2 *les points où ces coniques coupent* AA′, BB′, CC′. *Trois de ces points* (A_1, B_1, C_1) *sont sur une droite* δ_1 *passant par* D; *les trois autres, sur une droite* δ_2 *passant par* D *et conjuguée de* δ_1 *par rapport à* EF. *Les droites* B_1C_2 et C_1B_2, ..., *etc.*

On voit aisément que, *aux six points donnés correspondent cent quatre-vingts droites* δ, *réparties en six faisceaux de trente droites chacun,* ayant respectivement les points A, ..., F pour sommets et *soixante couples de points* P.

Remarques. — Tous les théorèmes précédents ont des corrélatifs.

Les figures formées par les soixante droites du n° 1, les cent vingt droites du n° 2, les cent quatre-vingts droites du n° 3 ont d'autres propriétés; ce sont des questions qui restent à étudier.

M. Pellet adresse la Note suivante :

Sur la méthode d'approximation de Newton.

1. Il est aisé de démontrer que l'équation

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = 0$$

n'a qu'une racine de module inférieur à la plus petite racine positive ξ de l'équation majorante

$$\alpha_0 - \alpha_1\xi + \alpha_2\xi^2 + \ldots + \alpha_n\xi^n + \ldots = 0.$$

$\alpha_n \geqq |a_n|$ pour $n = 0, 2, \ldots$, et $\alpha_1 a_1 \leqq |a_1|$. x_1, x_2 étant ces deux racines, on en déduirait

$$a_1 + a_2 \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} + \ldots + a_n \frac{x_2^n - x_1^n}{x_2 - x_1} + \ldots = 0;$$

d'où

$$\alpha_1 < 2\alpha_2 \xi + \ldots + n\alpha_n \xi^{n-1} + \ldots.$$

Or α_1 est supérieur au second membre de cette inégalité lorsque la racine ξ est simple, et lui est seulement égal lorsque ξ est racine double.

On peut même déduire de la méthode une démonstration du théorème fondamental de la théorie des fonctions implicites. Si les coefficients a sont des séries holomorphes en t, a_0 s'annulant avec t et non a_1, prenons pour α_n une fonction majorante de $\frac{a_n}{a_1}$ $(n = 0, 2, \ldots)$ et $\alpha_1 = 1$.

On pourra assigner deux nombres positifs, τ et Ξ, tels que t étant inférieur à τ, l'équation en ξ ait une seule racine positive inférieure à Ξ. Cette racine pourra se développer suivant les puissances croissantes de t, et il en sera *a fortiori* de même de la racine de plus petit module de l'équation en x.

2. La méthode comporte des simplifications dans certains cas. Ainsi, soit l'équation

$$f(u) = u - e\sin(b + u) - a = 0.$$

a, b, e étant des quantités réelles, la dernière e plus petite que 1 en valeur absolue, elle a une seule racine réelle comprise entre $-(|b| + |e|)$ et $|b| + |e|$. Posons

$$u_1 = \frac{e\sin b + a}{1 - e\cos b};$$

il vient

$$\frac{f(u_1)}{f'(u_1)} = \left(\frac{u_1^2}{2}\,\frac{e\sin(b + \theta u_1)}{1 - e\cos(b + u_1)}\right), \qquad 0 < \theta < 1.$$

Or

$$\left|\frac{e\sin(b + \theta u_1)}{2[1 - e\cos(b + u_1)]}\right| < \frac{\varepsilon}{2(1 - \varepsilon)} < 1,$$

si ε module de e est $< \frac{2}{3}$. La méthode de Newton répétée conduira donc à une suite de termes $u_2, u_3, \ldots, u_k, \ldots$, tendant vers o et tels que $|u_k| < |u_{k-1}|^2$, si u_1 a un module inférieur à 1.

SÉANCE DU 20 NOVEMBRE 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Élections :

M. Clairin, présenté par MM. Bioche et Borel, et M. Vessiot, présenté par MM. Painlevé et Borel, sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

Communications :

M. Andoyer : *Sur l'équation de Kepler.*

M. Servant : *Sur la déformation des surfaces du second ordre.*

M. d'Ocagne : *Sur les courbes de raccordement des chemins de fer.*

FIN DU TOME XXIX.

ERRATA.

P. 172, *lignes* 6 *et* 7 (en remontant), *lire :*

$$\theta = \frac{2}{5}\ \text{arc sin}\ \frac{(\sqrt{51}-7)\,t^3-(3\sqrt{51}-19)\,t^2-(3\sqrt{51}+19)\,t+\sqrt{51}+7}{192\sqrt{3}\,t^{\frac{5}{2}}}\sqrt{T_1}$$

$$= \frac{2}{5}\ \text{arc cos}\ \frac{(\sqrt{51}-17)\,t^3+(3\sqrt{51}-19)\,t^2-(3\sqrt{51}+19)\,t-\sqrt{51}-7}{192\sqrt{3}\,t^{\frac{5}{2}}}\sqrt{T_2}.$$

P. 175, *ligne* 15, *lire :* Armstrong.
