SMF

# Vie de la Société

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 29 (1901), p. 209-232
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__209_0>

# COMPTES RENDUS DES SÉANCES

## SÉANCE DU 3 AVRIL 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

*Communications :*

M. Torrès : 1° *Sur les rapports entre le calcul mécanique et le calcul graphique;* 2° *Sur un système articulé permettant de montrer la permutation des deux racines d'une équation du second degré.*

M. Laisant : *Sur une transformation des déterminants.*

M. Lecornu : *Sur une question d'aires.*

M. d'Ocagne : *Sur la vérification des angles en topographie.*

M. Edmond Maillet fait la Communication suivante :

### Sur les systèmes complets d'équations aux dérivées partielles.

Nous avons établi antérieurement [1] un théorème relatif aux systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles définissant deux divisions P et Q de l'espace $R_n$ invariables par un groupe fini continu transitif G de transformations de Lie.

On peut établir un théorème tout à fait analogue qui ne fait pas intervenir la théorie des groupes de Lie [2] :

Théorème I. — *Soient*

$$(1)\qquad \begin{cases} Y_1 = 0, & \ldots, & Y_p = 0, \\ Z_1 = 0, & \ldots, & Z_q = 0 \end{cases}$$

*deux systèmes complets,*

$$(2)\qquad \begin{cases} \Omega_1, & \ldots, & \Omega_{n-p}, \\ O_1, & \ldots, & O_{n-q} \end{cases}$$

(1) *Comptes rendus*, mai-juin 1900, et *Journal de Mathématiques*, p. 50 et suiv.; 1901.

(2) *Voir* un résumé de notre Note : *Comptes rendus*, 4 mars 1901.

*deux systèmes de solutions indépendantes de ces deux systèmes. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'ensemble des équations* (1) *forme un système complet à* $p+q-s$ *équations sont que l'ensemble des fonctions* (2) *comprenne* $n-s$ *fonctions indépendantes et que les deux systèmes complets* (1) *aient* $n-(p+q-s)$ *solutions communes.*

Les conditions sont nécessaires.

En effet, si l'ensemble des équations (1) forme un système complet à $p+q-s$ équations, il y a exactement $s$ des équations du second système (1) dont les premiers membres sont fonctions linéaires des $p+q-s$ autres premiers membres. On pourra toujours supposer que ces $s$ équations appartiennent au second système (1). On aura, par exemple,

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{ll} Z_{q-s+1} & = \lambda_1' Y_1 + \ldots + \lambda_p' Y_p + \mu_1' Z_1 + \ldots + \mu_{q-s}' Z_{q-s}, \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,} \\ Z_q & = \lambda_1^s Y_1 + \ldots + \lambda_p^s Y_p + \mu_1^s Z_1 + \ldots + \mu_{q-s}^s Z_{q-s}. \end{array}\right.$$

Ces $s$ équations pourront être mises sous la forme

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \lambda_1' Y_1 + \ldots + \lambda_p' Y_p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \lambda_1^s Y_1 + \ldots + \lambda_p^s Y_p = 0, \end{array}\right.$$

et elles sont évidemment indépendantes, puisque les équations du second système (1), par suite les équations

$$(5)\qquad Z_{q-s+1} = 0, \qquad \ldots, \qquad Z_q = 0$$

le sont.

Dès lors, en choisissant convenablement les $Y_i$, on pourra mettre les équations (4) sous la forme

$$(6)\qquad Y_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_s = 0.$$

Nous supposerons qu'il en soit ainsi.

Il y a donc exactement $s$ équations linéaires communes aux deux systèmes (1).

Ceci posé, toute équation linéaire aux dérivées partielles dont les $\Omega_i$ sont des solutions est une combinaison linéaire des $Y_i = 0$ [1]. Toute équation aux dérivées partielles dont les $O_i$ sont des solutions est une combinaison linéaire des $Z_j = 0$. Donc, toute équation dont l'ensemble des fonctions (2) est solution est à la fois une combinaison linéaire des $Y_i = 0$ et des $Z_j = 0$; c'est une équation commune aux deux systèmes (en considérant comme appartenant à chaque système les combinaisons linéaires des équations de chaque système). Elle est donc une conséquence linéaire du système (6), c'est-à-dire que les $O_i$ et les $\Omega_j$ sont des solutions de (6). Donc, *parmi ces fonctions, il y en a au plus $n - s$ indépendantes; il n'y en a pas moins,* sans quoi elles satisferaient à un système complet de plus de $s$ équations, par suite à quelque équation qui ne serait pas conséquence de (6), tout en étant commune aux deux systèmes (1).

D'autre part, *le nombre des solutions indépendantes de* (1) *est bien $n - (p + q - s)$.*

Les conditions sont suffisantes.

En effet, supposons-les remplies : toute solution commune aux deux systèmes (1) est de la forme

$$\Theta_i = \theta_i(O_1, \ldots, O_{n-q}) = \tau_i(\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-q}), \tag{7}$$

et il y a $n - \theta$ solutions indépendantes de cette forme, avec $\theta = p + q - s$ [2].

Dès lors, le système complet dérivé de (1) comprend évidemment $p + q - s$ équations. Donc, si les deux systèmes (1) ont $\omega$ équations communes, et $p + q - \omega$ équations linéairement indépendantes, on a $\omega \geqq s$, c'est-à-dire que l'on pourra trouver exactement $\omega$ des expressions $Z_j$ qui soient fonctions linéaires des $Y_i$ et de $Z_1, \ldots, Z_{q-\omega}$. En raisonnant comme sur les systèmes (3) et (4), on pourra mettre ces $\omega$ équations sous la forme

$$Y_1 = 0, \qquad \ldots, \qquad Y_\omega = 0 \qquad (\omega \geqq s). \tag{8}$$

---

[1] Sans quoi, en l'adjoignant au premier système (1), on en déduirait un système complet de plus de $p$ équations admettant $n - p$ solutions indépendantes.

[2] Ces équations sont résolubles par rapport à $n - \theta$ des quantités $O_1, \ldots, O_{n-q}$ par exemple, car sinon il y aurait entre les $\theta_i$ au moins une relation, et les $n - \theta$ solutions $\Theta_i$ ne seraient pas indépendantes.

Soit $\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-\omega}$ un système de solutions indépendantes de (8) : $\Omega_i$ et $O_j$ satisfaisant au système (8), on aura

$$(9)\quad \begin{cases} \Omega_i = F_i(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-\omega}), \\ O_j = f_j(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-\omega}), \end{cases}$$

et les $\Omega_i$ et $O_j$ seraient fonctions des $n - \omega$ fonctions $\Psi_k$. Donc, en éliminant $\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-\omega}$ entre ces $n - p + n - q$ relations, on obtiendra au moins

$$\delta = n - p + n - q - (n - \omega) = n - (p + q - \omega)$$

relations entre les $\Omega_i$ et $O_j$. Parmi ces fonctions, il y en aura au plus

$$n - p + n - q - \delta = n - \omega$$

indépendantes : d'après l'hypothèse

$$n - \omega \geqq n - s,$$
$$\omega \leqq s.$$

Il en résulte $\omega = s$. Parmi les équations (1), il y en a exactement $p + q - s$ indépendantes; le système complet dérivé comprenant $p + q - s$ équations indépendantes, il en résulte que les équations (1) forment déjà un système complet.

C. Q. F. D.

*Interprétation géométrique.* — Supposons que (1) forme un système complet à $p + q - s$ équations indépendantes. Le théorème I est alors applicable.

Considérons l'ensemble des multiplicités

$$(10)\quad \begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \begin{cases} \Omega_1 = \alpha_1, & \ldots, & \Omega_{n-p} = \alpha_{n-p}, \\ O_1 = a_1, & \ldots, & O_{n-q} = a_{n-q}; \end{cases}$$

soient $\Pi_0$ un point quelconque $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ de position générale et $P_0$ celle des multiplicités P qui passe par $\Pi_0$, d'équations

$$(11)\quad \Omega_1 = \alpha_1^0, \quad \ldots, \quad \Omega_{n-p} = \alpha_{n-p}^0.$$

Formons les équations de la multiplicité M engendrée par toutes les multiplicités Q qui rencontrent $P_0$. Une multiplicité $Q_1$

de Q qui rencontre $P_0$ a ses équations de la forme

$$(12)\qquad O_1 = a_1, \quad \ldots, \quad O_{n-q} = a_{n-q}$$

et, pour tout point de l'intersection, (11) et (12) ont lieu simultanément.

D'après les équations (7), on aura à la fois

$$(13)\quad \theta_i(a_1, \ldots, a_{n-q}) = \eta_i(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-q}^0) \qquad [i = 1, 2, \ldots, n-(p+q-s)]$$

et $n-(p+q-s)$ des équations (12), les dernières, par exemple, sont des conséquences des équations (11) et des $(p-s)$ premières équations (12).

On a ainsi entre les coordonnées d'un point de l'intersection $n-s$ équations qui représentent une multiplicité R à $\zeta \geqq s$ degrés de liberté et qui est l'intersection de $P_0$ et de $Q_1$. On a $\zeta = s$ : sinon une des équations $O_1 = a_1, \ldots, O_{p-s} = a_{p-s}$; la dernière, par exemple, serait une conséquence des autres et de (11), et il ne peut en être ainsi en général (¹), puisque parmi les fonctions O et $\Omega$ il y en a exactement $n-s$ indépendantes. Or, parmi les constantes $a_i$ de (12), $n-(p+q-s)$ sont fonctions de $a_1, \ldots, a_{p-s}$ et des $\alpha_j^0$, d'après (13), par exemple. Si donc on élimine les $a_i$ entre (12) et (13), on obtient le lieu des multiplicités Q qui coupent $P_0$. Ce lieu est

$$(14)\qquad \theta_i(O_1, \ldots, O_{n-q}) = \eta_i(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-q}^0).$$

Réciproquement, toute multiplité $Q_1$ située sur (14) coupe $P_0$, car, pour $Q_1$, les $a_i$ satisfont aux équations (13) et l'intersection de $Q_1$ et de $P_0$ est déterminée par $n-s$ équations indépendantes.

Ceci posé, nous remarquerons, si $Q_0$ est la multiplicité Q qui passe par $\Pi_0$, que l'on a

$$(15)\quad \theta_i(O_1, \ldots, O_{n-q}) = \eta_i(\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-p}) = \eta_i(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-q}^0) = \theta_i(a_1^0, \ldots, a_{n-q}^0).$$

Si l'on avait cherché à obtenir le lieu des multiplicités P qui

(¹) Comparer, par exemple, JORDAN, *Cours d'Analyse lithographié* de l'École Polytechnique, première division.

rencontrent $Q_0$, on eût été conduit aux équations

$$(16) \qquad \eta_i(\Omega_1 \ldots, \Omega_{n-p}) = \theta_i(a_1^0, \ldots, a_{n-q}^0),$$

qui, d'après (15), sont identiques aux équations (14). Les multiplicités (14) et (16) coïncident donc.

Ainsi :

Quand les équations (1) forment un système complet de $p+q-s$ équations indépendantes, soient

$$(10) \qquad \begin{cases} P, & \Omega_1 = \alpha_1, & \ldots, & \Omega_{n-p} = \alpha_{n-p}, \\ Q, & O_1 = a_1, & \ldots, & O_{n-q} = a_{n-q}, \end{cases}$$

les deux divisions de l'espace déterminées par les deux systèmes (1),

$$\theta_i(O_1, \ldots, O_{n-q}) = \eta_i(\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-q}) \qquad [i = 1, 2, \ldots, n-(p+q-s)],$$

les solutions communes aux deux systèmes (1), $P_0$ et $Q_0$ deux multiplicités quelconques des deux divisions (10) qui se coupent. Le lieu des multiplicités Q qui rencontrent $P_0$ coïncide avec le lieu des multiplicités P qui rencontrent $Q_0$ et est une des multiplicités

$$(17) \qquad \theta_i = \text{const.} \qquad [i = 1, 2, \ldots, n-(p+q-s)].$$

Ces dernières équations représentent une division de l'espace dont chaque multiplicité R est engendrée au choix par des multiplicités P et des multiplicités Q.

Dans quelle mesure peut-on établir une réciproque ?

Considérons deux systèmes complets (1) tels que le système complet dérivé ait $p+q-s$ équations indépendantes, (2) représentant encore deux systèmes de solutions indépendantes des deux systèmes (1), et les multiplicités (10) correspondantes. Supposons que le lieu des multiplicités P qui rencontrent une quelconque des multiplicités Q soit une multiplicité d'équations

$$\delta_i = \text{const.},$$

la même multiplicité étant en même temps le lieu des multiplicités Q qui rencontrent une multiplicité P.

Tout lieu de multiplicités P a ses équations de la forme

$$\delta'_1(\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-p}) = \text{const.}$$

D'après l'hypothèse, les équations $\delta_i = \text{const.}$ deviendront

$$(18) \qquad \delta_i(\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-p}) = \gamma_i(O_1, \ldots, O_{n-q}) = \text{const.},$$

les fonctions $\delta_i$ étant évidemment indépendantes.

Les $\delta_i$ sont ainsi des solutions communes aux deux systèmes (1) : soit $\xi$ leur nombre : $\xi \leqq n - (p + q - s)$.

D'autre part, en raisonnant comme précédemment, on voit que les deux systèmes (1) ont $\omega$ équations communes, avec $\omega \geqq s$, et comprennent $p + q - \omega$ équations linéairement indépendantes. Ces $\omega$ équations seront de la forme (8) et l'on aura encore (9). On en conclura au moins $n - (p + q - \omega)$ relations entre les $\Omega_i$ et les $O_j$, dont $n - \omega$ au plus seront indépendantes. Admettons que parmi les fonctions $\Omega$ et $O$ il y en ait exactement $n - \rho$ indépendantes avec $\rho \geqq \omega$. L'intersection d'une multiplicité $P_0$ et d'une multiplicité Q ayant un point commun avec $P_0$ est une multiplicité R à $\rho$ degrés de liberté. Soient

$$(19) \qquad \lambda_i(O_1, \ldots, O_{n-q}, \Omega_1, \ldots, \Omega_{n-p}) = 0$$

les $n - p + n - q - (n - \rho) = n - (p + q - \rho)$ relations entre les O et les $\Omega$. On en conclura $n - (p + q - \rho)$ relations

$$(20) \qquad \lambda_i(a_1, \ldots, a_{n-q}, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-p}^0) = 0,$$

nécessaires pour que Q coupe $P_0$. Le lieu des multiplicités Q sera la multiplicité S

$$\lambda_i(O_1, \ldots, O_{n-q}, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_{n-p}^0) = 0,$$

et toute multiplicité $Q_1$ située sur S coupera $P_0$, car, pour $Q_1$ les $a_i$ satisfont aux équations (20) et l'intersection de $Q_i$ et $P_0$ existe et est déterminée par $n - \rho$ relations. On a

$$n - (p + q - \rho) = \xi \leqq n - (p + q - s),$$

d'où $\omega \leqq \rho \leqq s$, avec $s \leqq \omega$, c'est-à-dire $\rho = \omega = s$. Parmi les fonctions $\Omega_i$ et $O_j$, il y en a ainsi $n - s$ indépendantes exactement; les relations (18) sont au nombre de $n-(p+q-s)$, et les deux systèmes (1) ont $s$ équations communes exactement.

C. Q. F. D.

On en conclut :

Théorème II. — *Soient*

$$(1)\qquad \begin{cases} Y_1 = 0, & \ldots, & Y_p = 0, \\ Z_1 = 0, & \ldots, & Z_q = 0 \end{cases}$$

*deux systèmes complets,*

$$(2)\qquad \begin{cases} \Omega_1, & \ldots, & \Omega_{n-p}, \\ O_1, & \ldots, & O_{n-q} \end{cases}$$

*deux systèmes de solutions indépendantes de ces deux systèmes,*

$$\begin{cases} P, & \Omega_1 = \alpha_1, & \ldots, & \Omega_{n-p} = \alpha_{n-p}, \\ Q, & O_1 = a_1, & \ldots, & O_{n-q} = a_{n-q} \end{cases}$$

*les deux divisions de l'espace correspondantes. Par tout point* $\Pi_0$ *de l'espace passe une multiplicité* $P_0$ *de* P *et une* $Q_0$ *de* Q. *La condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble des équations* (1) *forme un système complet de* $p+q-s$ *équations indépendantes est que, quel que soit le point* $\Pi_0$ (*de position générale*) *le lieu* R *des multiplicités* Q *qui rencontrent* $P_0$ *coïncide avec le lieu des multiplicités* P *qui rencontre* $Q_0$; *l'ensemble des lieux* R *est alors une division de l'espace à* $p+q-s$ *degrés de liberté*

$$\varphi_1 = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{n-(p+q-s)} = \text{const.},$$

*les premiers membres de ces équations formant un système de solutions indépendantes du système* (1) [1]. C. Q. F. D.

---

[1] Comparer Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles de premier ordre,* p. 80. Paris, 1891.

M. E. Lemoine fait la Communication suivante :

### Détermination simple de la direction des axes d'une conique.

Les méthodes classiques pour trouver la direction des axes d'une conique conduisent à des calculs, souvent assez compliqués, qui manquent *toujours* d'élégance, de symétrie, et donnent un résultat définitif ne correspondant à aucune image géométrique, ne menant point à une construction simple. La présente Communication a pour but d'indiquer une solution générale exempte des défauts inhérents à la méthode classique. Elle repose sur un théorème de Géométrie élémentaire fort connu, dont voici l'énoncé :

*Si* M *est un point du cercle circonscrit à un triangle* ABC, *les bissectrices des angles que fait un côté avec la droite qui joint le point* M *au sommet opposé ont la même direction, quel que soit le côté considéré.*

Donc, à chaque groupe de deux *directions* rectangulaires correspond un point du cercle circonscrit, lequel détermine ces directions et réciproquement; nous dirons pour abréger : point M correspondant à telles directions.

On arrive sans difficultés à calculer que :

*Si*

$$lx + my^2 + nz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$$

*est l'équation générale d'une conique en coordonnées normales, le point* M *correspondant à la direction de ses axes a pour coordonnées normales*

$$(1) \qquad \frac{a}{l(b^2 - c^2) + a^2(m - n) + 2gac - 2hab}, \quad \ldots,$$

résultat fort simple, car il faut considérer qu'il doit contenir les six coefficients de l'équation générale.

Lorsque la conique est circonscrite au triangle de référence, le point M est évidemment le quatrième point commun à cette conique et au cercle circonscrit.

Dans la pratique, les calculs se font le plus souvent avec rapidité ou même donnent immédiatement le résultat.

Pour les coniques remarquables du triangle, à cause de la symétrie, on n'a qu'à calculer la coordonnée $x$, les autres s'en déduisant par permutation circulaire des lettres $a$, $b$, $c$, $l$, $m$, $n$. On ramène donc immédiatement la détermination des directions de leurs axes à la connaissance d'un point remarquable du cercle circonscrit; mais comme, en général, on arrive ainsi à un point remarquable déjà étudié que l'on sait construire simplement, la question est complètement résolue par une détermination géométrique et imagée, au lieu de l'être par des formules compliquées de radicaux et qui ne disent rien.

Voici comme exemples l'indication de quelques applications :

1. Les axes de la conique

$$\sum a(p-a)x^2 - \sum [bc + (p-b)(p-c)]yz = 0,$$

qui passe par les points où les tangentes au cercle inscrit parallèles aux côtés coupent les autres côtés du triangle, ont pour point M le point $\frac{1}{b-c}, \ldots,$ car la substitution des coefficients dans (1) donne successivement

$$\frac{a}{\left\{\begin{array}{l} a(p-a)(b^2-c^2) + a^2[b(p-a) - c(p-c)] \\ \quad - ac[ac + (p-c)(p-a)] + ab[ab + (p-a)(p-b)] \end{array}\right\}}, \quad \ldots,$$

$$\frac{a}{\left\{\begin{array}{l} ap(b^2-c^2) + a^2[-b^2+c^2+b(p-a) - c(p-c) - c^2 + b^2] \\ \quad - ac(p-c)(p-a) + ab(p-b)(p-a) \end{array}\right\}}, \quad \ldots,$$

$$\frac{a}{ap(b^2-c^2) + abp(p-b) - acp(p-c)}, \quad \ldots,$$

$$\frac{1}{(b^2-c^2) + b(p-b) - c(p-c)}, \quad \ldots \quad \text{ou} \quad \frac{1}{b-c}, \quad \ldots.$$

2. Les axes des coniques de Cesàro (coniques telles que la somme des carrés des distances de chacun de leurs points aux trois côtés soit constante) ont pour point M le point $\frac{a}{b^2-c^2}, \ldots.$

3. Les axes de la conique d'inertie du triangle (réduit à trois

masses égales à l'unité, placées en ses sommets), ont pour point M le point de Steiner $\frac{1}{a(b^2-c^2)}$, ....

4. Les axes de l'hyperbole équilatère qui passe par le barycentre, par les centres des quatre cercles tritangents au triangle et a pour équation

$$\sum a^2x^2(b^2-c^2)=0,$$

ont pour point M le point $\frac{1}{a[(b^4+c^4-a^2(b^2+c^2)]}$, ..., c'est-à-dire le point de Tarry.

5. Pour montrer l'extrême commodité de cette méthode, nous citerons encore la conique dont l'équation est

$$\sum(p-a)x^2-\sum ayz=0,$$

étudiée par M. de Longchamps (*A. F. A. S., Congrès de Nancy;* 1886), elle a pour centre le centre du cercle inscrit et elle passe par les pieds des bissectrices intérieures. M. de Longchamps renonce à déterminer la direction des axes *par la méthode générale* (car il y arrive autrement par un artifice géométrique ingénieux). Il dit : *on ne peut vérifier* directement *la proposition que par des calculs très laborieux et que nous n'avons même pas poussés jusqu'au bout, par suite des complications qu'ils semblent présenter*.

Avec notre formule générale on trouve *immédiatement* que la direction des axes de cette ellipse a pour point M le point

$$\frac{a}{(p-a)(b^2-c^2)-a^2(b-c)}, \quad \ldots,$$

ou

$$\frac{a}{(b-c)[(b+c)^2-a(b+c)-2a^2]}, \quad \ldots,$$

ou

$$\frac{a}{(b-c)(2a-b-c)}, \quad \ldots,$$

ce qui est le point correspondant à la direction de la droite qui joint le centre du cercle circonscrit au centre du cercle inscrit et à la direction perpendiculaire, laquelle est celle de l'axe antiorthique

$$x + y + z = 0.$$

La transformation continue (voir *N. A.*, p. 20; 1893) montre immédiatement qu'il y a trois autres coniques transformées continues de celle qu'a étudiée M. de Longchamps et jouissant des mêmes propriétés, lesquelles se déduisent par transformation continue des propriétés établies pour la première, coniques que l'auteur n'a pas remarquées.

---

## SÉANCE DU 17 AVRIL 1901.

### PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

*Communications :*

M. Carvallo : *Sur le cerceau et les cycles.*

M. Lovett présente un appareil stéréoscopique de M. Greenhill.

M. Lindemann : *Sur les chiffres chez les anciens.*

M. Walther Dyck : *Sur des intégrales triples de Kronecker.*

M. Borel : *Sur les fonctions méromorphes.*

M. Hadamard : *Sur l'équilibre élastique d'une plaque circulaire non encastrée.*

---

## SÉANCE DU 1er MAI 1901.

### PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

*Élections :*

M. Hancock (Harris), présenté par MM. Darboux et d'Ocagne; M. Angiboust, présenté par MM. Raffy et Servant, sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

*Communications :*

M. André fait hommage à la Société d'une brochure dont il est l'auteur et qui traite de la *comptabilité des assauts complets.*

M. Demoulin : *Sur une propriété des courbes algébriques et des surfaces algébriques.*

M. Raffy : *Sur les surfaces à lignes de courbure planes.*

M. Angiboust : *Sur les surfaces W à lignes de courbure planes dans un système.*

---

## SÉANCE DU 15 MAI 1901.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE ET DE M. D'OCAGNE.

*Communications :*

M. Servant : *Sur la déformation du paraboloïde.*

M. Demoulin : *Sur une propriété caractéristique des surfaces de M. Voss.*

M. Laisant : *Sur l'Annuaire des mathématiciens.*

M. Edmond Maillet adresse la Note suivante :

### Sur certains théorèmes de Géométrie cinématique.

Nous nous proposons d'indiquer ci-dessous par un ou deux exemples les extensions simples dont sont susceptibles plusieurs des propriétés indiquées par M. Mannheim dans ses *Principes et développements de Géométrie cinématique* (¹) :

Théorème. — *Soit un système invariable mobile dont les positions dépendent d'un ou deux paramètres. A chaque point* $p(X, Y, Z)$ *de ce système, faisons correspondre un plan* P

$$AX_1 + BY_1 + CZ_1 + D = 0$$

(OXYZ *axes fixes*), *les coefficients de son équation dépendant rationnellement de* X, Y, Z *et de leurs dérivées par rapport aux paramètres variables.*

*Pour une position quelconque du système, considérons :* 1° *les points p qui sont sur une courbe unicursale et les plans* P *correspondants; l'enveloppe de ces plans* P *est une surface*

(¹) Gauthier-Villars, 1894.

*réglée unicursale dont l'arête de rebroussement est unicursale ;* 2° *les points p qui sont sur une surface unicursale et les plans* P *correspondants; leur enveloppe est unicursale.*

En effet, soient

$$(1) \qquad \begin{cases} X = X_0 + a\ x + b\ y + c\ z, \\ Y = Y_0 + a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ Z = Z_0 + a_2 x + b_2 y + c_2 z \end{cases}$$

les équations qui définissent les trajectoires de chaque point du système invariable mobile ($Oxyz$ axes mobiles, fixes par rapport au système invariable mobile), $X_0$, $Y_0$, $Z_0$, $a$, ..., $c_2$ dépendant d'un ou deux paramètres variables $t$ ou $u$ et $v$, suivant que le mouvement est à un ou deux degrés de liberté.

A chaque position de $p(x, y, z, X, Y, Z)$ sur sa trajectoire, nous faisons correspondre le plan P.

Considérons les points $p$ qui sont sur une courbe C ou une surface S unicursale, dont les équations en $x, y, z$ dépendent d'un ou deux paramètres variables $t_1$ ou $u_1$ et $v_1$, et les plans P correspondants.

Pour une courbe C, l'enveloppe des plans P s'obtient en considérant les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} AX_1 + BY_1 + CZ_1 + D = 0, \\ X_1 \dfrac{dA}{dt_1} + Y_1 \dfrac{dB}{dt_1} + Z_1 \dfrac{dC}{dt_1} + \dfrac{dD}{dt_1} = 0. \end{cases}$$

Dans tous les cas, les dérivées de X, Y, Z par rapport aux paramètres variables, c'est-à-dire les dérivées de X, Y, Z relatives au point $p$ sur sa trajectoire (courbe ou surface) sont rationnelles en $t_1$ ou en $u_1$ et $v_1$. Il en est de même de A, B, C, D, et l'on déduira de (2) $X_1$ et $Y_1$ en fonction rationnelle de $Z_1$ et de $t_1$. *Pour chaque position du système invariable mobile, l'enveloppe est une surface réglée unicursale.*

L'arête de rebroussement est donnée par (2) et par

$$(3) \qquad X_1 \frac{d^2 A}{dt_1^2} + Y_1 \frac{d^2 B}{dt_1^2} + Z_1 \frac{d^2 C}{dt_1^2} + \frac{d^2 D}{dt_1^2} = 0.$$

Ce sera une courbe unicursale.

*Pour une surface S, l'enveloppe des plans P est évidemment une surface unicursale.*

Des généralisations sont possibles; nous n'insistons pas.

C. Q. F. D.

On peut déduire de là, comme corollaire, deux théorèmes de M. Mannheim ([1]) en les englobant dans une même démonstration.

Supposons que A, B, C soient du deuxième degré, et D du troisième en X, Y, Z et leurs dérivées. Ce sera le cas du plan osculateur de la courbe trajectoire dans un mouvement à un paramètre

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} X_2 - X & Y_2 - Y & Z_2 - Z \\ dX & dY & dZ \\ d^2X & d^2Y & d^2Z \end{vmatrix} = 0.$$

Ce sera encore le cas du plan passant par le point X, Y, Z et dont les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à $X^2$, $Y^2$, $Z^2$, ou du plan passant par X, Y, Z, perpendiculaire au plan osculateur et parallèle à une droite fixe.

D'autre part, ce sera encore le cas du plan tangent de la surface trajectoire, dans un mouvement à deux paramètres,

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} X_2 - X & Y_2 - Y & Z_2 - Z \\ X'_u & Y'_u & Z'_u \\ X'_v & Y'_v & Z'_v \end{vmatrix} = 0.$$

Ce sera encore le cas du plan passant par X, Y, Z et dont les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à $X^2$, $Y^2$, $Z^2$ déjà indiqué, ou du plan normal parallèle à une droite fixe.

Le théorème précédent sera applicable.

Prenons le cas particulier où la courbe C est une droite D

$$(6)\qquad X = X_0 + cz, \qquad Y = Y_0 + c_1 z, \qquad Z = Z_0 + c_2 z$$

($z$ remplaçant ici $t_1$).

Les équations des six plans ci-dessus sont de la forme

$$(7)\qquad \left\{ \begin{aligned} & X_2(m + nz + pz^2) + Y_2(m_1 + n_1 z + p_1 z^2) \\ & \qquad + Z_2(m_2 + n_2 z + p_2 z^2) + D = 0. \end{aligned} \right.$$

---

([1]) *Loc. cit.*, p. 162 et 247.

La deuxième équation (2) devient

$$(8)\qquad X^2(n+2pz)+Y_2(n_1+2p_1z)+Z_2(n_2+2p_2z)+D'_z=0.$$

Le cône directeur s'obtient en éliminant $z$ entre les équations (7) et (8) où l'on néglige D et $D'_z$. Or, si l'on coupe ce cône par un plan quelconque $Z_2=\alpha X_2+\beta Y_2$, et si l'on élimine $X_2$ et $Y_2$, on a une équation en $z$, de degré 2, en général [1]. Donc, en général, *ce cône est du second ordre.*

*Quant à l'enveloppe elle-même,* déterminée par (7) et (8), *sa classe est évidemment égale* au plus grand degré de A,, B, C, D, c'est-à-dire *à* 3. *Son degré est* 4, car si on la coupe par une droite on trouve quatre valeurs de $z$.

On obtient ainsi, par une même démonstration, six théorèmes, dont deux ont été indiqués par M. Mannheim.

*Remarque.* — On pourra encore considérer le cas où la courbe C est une conique mobile et le cas où la surface S est un plan mobile, étudier également le cas où le degré des lieux (et de leurs cônes directeurs dans le cas des surfaces réglées) s'abaisse [2]. Nous croyons inutile d'insister.

M. Hadamard fait la Communication suivante :

### Sur l'itération et les solutions asymptotiques des équations différentielles.

Les travaux de M. Poincaré ont montré comment une solution périodique d'un système d'équations différentielles quelconques était, en général, entourée d'un cortège de solutions asymptotiques. Dans certains cas, toute solution suffisamment voisine de la solution périodique est par cela même asymptotique. Dans d'autres, l'asymptotisme n'a lieu que pour les trajectoires situées sur certaines surfaces passant par la courbe fermée qui sert de point de départ. Pour former les équations de ces surfaces,

---

(1) Le degré des déterminants des équations (7) et (8) s'abaisse en effet au deuxième.

(2) Dans le cas où C est une conique il y a probablement des cas intéressants d'abaissement du cône directeur.

M. Poincaré emploie des développements en séries entières, établis en supposant les équations données analytiques.

Il m'a paru intéressant de traiter la même question au point de vue exclusivement réel et sans faire intervenir l'analyticité des données. Je me bornerai d'ailleurs aux cas les plus simples et aux résultats les plus immédiats.

Le problème revient, comme on sait, à celui de l'itération à plusieurs variables. Soit donc

$$x_1 = f(x, y) = ax + by + \ldots,$$
$$y_1 = \varphi(x, y) = cx + dy + \ldots,$$

une transformation ponctuelle du plan, conservant l'origine. Nous supposerons que l'équation

$$\begin{vmatrix} a - s & b \\ c & d - s \end{vmatrix} = 0,$$

ait ses racines $s$, $s'$ réelles et distinctes. Alors, moyennant un changement de coordonnées, la transformation s'écrira

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = f(x, y) = s\,x + \mathrm{F}(x, y), \\ y_1 = \varphi(x, y) = s'y + \Phi(x, y), \end{cases}$$

F et $\Phi$ étant des fonctions dont les développements (formels) commencent par des termes du second degré. Nous admettrons que F et $\Phi$ ont des dérivées partielles dans un certain domaine entourant l'origine, ces dérivées partielles étant continues et, en particulier, tendant vers zéro avec $x$ et $y$. Enfin $s$, supposé plus grand que $s'$ en valeur absolue (l'égalité étant exclue), sera positif et plus grand que 1.

Le point $(x_1, y_1)$ est dit le *conséquent* de $(x, y)$ et celui-ci l'*antécédent* de $(x_1, y_1)$; le point $(x_2, y_2)$, conséquent de $(x_1, y_1)$, est dit le *second conséquent* de $(x, y)$, etc.

Une circonférence de rayon suffisamment petit, décrite avec l'origine pour centre, aura pour conséquente, moyennant les hypothèses faites sur $s$ et $s'$, une sorte d'ellipse allongée suivant l'axe des $x$; celle-ci aura, à son tour, pour conséquente une courbe de forme analogue, mais plus allongée encore, et ainsi de suite. Dès lors, il est à présumer que toute la partie du plan entourant l'origine ira en s'amincissant indéfiniment et tendra vers une courbe unique. C'est ce que nous allons vérifier.

A cet effet, traçons, en partant de l'origine, un arc de courbe C non tangent à l'axe des $y$, arc sur lequel $y$ sera bien déterminé en fonction de $x$ et $\frac{dy}{dx}$ partout inférieur en valeur absolue à un certain nombre $\alpha$. Il est aisé de voir, étant données les hypothèses faites sur les fonctions $f$ et $\varphi$, que la conséquente de la courbe C jouira de la même propriété, du moins si l'on se restreint (comme nous allons le faire) à un certain domaine D entourant l'origine. Toutes les conséquentes successives seront donc coupées par une parallèle quelconque à l'axe des $y$ en un seul point et les coefficients angulaires de leurs tangentes et, par conséquent aussi, de leurs cordes quelconques, seront tous moindres que $\alpha$.

Soit C′ une seconde courbe remplissant les mêmes conditions que C. Si nous coupons ces deux lignes par une même droite $x =$ const., la différence $y - y'$ sera nulle avec $x$ et le rapport $\frac{|y - y'|}{x}$ aura, dans le domaine D, un certain maximum $\mu$.

Soient maintenant $C_1$, $C'_1$ les conséquentes de C et de C′; $\mu_1$ la quantité analogue à $\mu$ déterminée à l'aide de $C_1$ et de $C'_1$. Le rapport $\frac{\mu_1}{\mu}$ est *inférieur à un nombre fixe $\sigma$ plus petit que* 1, à savoir un nombre supérieur d'aussi peu qu'on veut à $\frac{|s'|}{s}$, si le domaine D a été pris suffisamment restreint.

Désignons, en effet, par Y, Y′ les ordonnées de C et de C′ correspondant à une même valeur X de l'abscisse (X étant supposé positif pour fixer les idées); $y_1$, $y'_1$, les ordonnées analogues de $C_1$ et de $C'_1$. Les points $(X, y_1)$ et $(X, y'_1)$ seront les conséquents de deux points $(x, y)$ et $(x', y')$ respectivement situés sur C et sur $C_1$.

De l'hypothèse faite sur C résulte

$$|y| < \alpha x, \tag{2}$$

et des hypothèses faites sur F et $\Phi$

$$|X - sx| < \eta(x + |y|), \tag{3}$$

$\eta$ pouvant être pris aussi petit qu'on veut avec les dimensions du domaine D.

Ces deux inégalités montrent que $x$, et pareillement $x'$, sont tous deux plus petits que $\frac{X}{s - \eta(1+\alpha)}$.

Si enfin $y'_0$ est le point de $C'_1$ correspondant à l'abscisse $x$, on a

$$(4) \qquad |y'_0 - y| < \mu x < \frac{\mu X}{s - \eta(1+\alpha)},$$

$$(5) \qquad |y' - y'_0| < \alpha\,|x' - x|.$$

D'autre part, puisque les dérivées de F et $\Phi$ sont toutes en valeur absolue plus petites que $\eta$, on peut écrire

$$(6) \qquad |x - x'| < \frac{\eta}{s - \eta}|y - y'|,$$

et, par suite, en vertu de (4) et de (5),

$$(6') \qquad |y - y'| < \frac{|y'_0 - y|}{1 - \dfrac{\alpha\eta}{s - \eta}} < \frac{\mu X(s - \eta)}{[s - \eta(1+\alpha)]^2},$$

puis

$$(7) \qquad |y_1 - y'_1 - s'(y - y')| < \eta(|x - x'| + |y - y'|).$$

Les inégalités (2) à (7) donnent bien, ainsi que nous l'avions annoncé,

$$(8) \qquad |y_1 - y'_1| < \mu\left|\frac{s'}{s} + \varepsilon\right| X,$$

$\varepsilon$ étant limité en fonction de $\eta$ et de $\alpha$ et tendant vers zéro avec $\eta$.

Il est aisé de déduire de là que *les conséquentes successives de* C *tendent vers une courbe limite* $\mathfrak{C}$. Supposons, en effet, que $C'$ coïncide avec $C_1$ : alors $C'_1$ ne sera autre que la seconde conséquente $C_2$ de C. Le segment intercepté, sur l'ordonnée correspondante à l'abscisse X, entre C et $C_1$ étant plus petit que $\mu X$, celui qui est intercepté entre $C_1$ et $C_2$ sera plus petit que $\mu\sigma X$; celui qui est intercepté entre $C_2$ et $C_3$, plus petit que $\mu\sigma^2 X$, .... Ces segments formeront donc une série convergente.

De plus, *la courbe* $\mathfrak{C}$ *obtenue est indépendante du choix de la courbe* C, puisque si $C'$ est une autre courbe quelconque (issue de l'origine et non tangente à l'axe des $y$), $C'_1$, $C'_2$, ..., $C'_n$, ..., ses conséquentes successives, le segment intercepté sur une ordonnée quelconque entre $C_n$ et $C'_n$ tend vers zéro lorsque $n$ augmente indéfiniment.

La courbe $\mathfrak{C}$ est évidemment invariante (c'est-à-dire coïncide avec sa conséquente), et l'on voit, de plus, que c'est la seule courbe invariante qui aboutisse à l'origine, s'y comporte régulièrement et ne soit pas tangente à l'axe des $y$.

On remarquera que *ces différents résultats ne supposent nullement* $|s'| < 1$. Si l'on ajoute cette nouvelle hypothèse, il arrivera que les *antécédentes* d'une courbe quelconque issue de l'origine (et non tangente à l'axe des $x$) tendront également vers une position limite déterminée $\mathfrak{C}'$, laquelle sera tangente à l'axe des $y$.

Les deux courbes $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{C}'$ seront alors les lieux géométriques, l'une des points dont les antécédents successifs tendent vers l'origine, l'autre des points dont les conséquents successifs tendent vers l'origine. Ce sont elles qui interviennent dans la théorie des solutions asymptotiques.

---

## SÉANCE DU 5 JUIN 1901.

### PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

*Correspondance :*

M. le Président signale le dépôt du Tome XII de la 1re série des *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy* et fait valoir l'intérêt qui s'attache à la rédaction d'une Table d'après les conventions du Répertoire.

*Communications :*

M. Raffy : *Sur l'identité des surfaces doublement cylindrées suivant leurs lignes de courbure avec les surfaces à lignes de courbure planes dont les plans enveloppent un cylindre.*

M. d'Adhémar : *Sur l'application de la méthode des approximations successives à une équation aux dérivées partielles de forme particulière.*

M. A. Pellet adresse la Note suivante :

### Sur la méthode d'approximation de Newton.

La formule d'approximation de Newton est susceptible d'une extension très utile dans la pratique. Soit l'équation

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = 0.$$

Désignons par $u$ la racine de plus petit module de l'équation obtenue en se bornant aux $i+1$ premiers termes,

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_i x^i = 0.$$

Si l'on prend pour valeur approchée de la racine de plus petit module de l'équation

$$f(x) = 0, \qquad u - \frac{f(u)}{f'(u)},$$

l'erreur commise a un module inférieur à

$$\frac{M\beta^2}{1 - M^2\beta^2},$$

$\beta$ module de

$$\frac{f(u)}{f'(u)}, \qquad \beta = \left|\frac{f(u)}{f'(u)}\right|,$$

et M nombre positif au plus égal à

$$-\frac{1}{2}\frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)},$$

$\varphi(\xi)$ représentant la fonction

$$\alpha_0 - \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \ldots + \alpha_n \xi^n + \ldots$$

où $\alpha_n$ est le module de

$$a_n, \qquad \alpha_n = |a_n|,$$

et $\xi$ prenant la valeur de la plus petite racine de $\varphi(\xi) = 0$. La seule condition pour que la formule s'applique est l'existence de la racine $\xi$, supposée en outre simple.

Ainsi, soit l'équation

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Posons

$$x = 1 + \frac{1}{3} + y;$$

il vient

$$y^3 + 4y^2 - \frac{5}{3}y + \frac{1}{27} = 0.$$

$\xi$ est inférieur à $\sqrt{2} - 1 - \frac{1}{3}$, ce qui donne

$$M < 1{,}6.$$

Désignant par $u$ la plus petite racine de

$$4u^2 - \frac{5}{3}u + \frac{1}{27} = 0,$$

on aura la valeur approchée de $y$

$$u - \frac{u^3}{3u^2 + 8u - \frac{5}{3}} = u + \frac{u^3}{\frac{61}{36} - 9{,}25u}.$$

Un calcul avec les Tables à 7 décimales donne

$$u = \frac{15 - \sqrt{177}}{72} = 0{,}0235537,$$

$$\beta = \frac{8{,}849561}{10^6}, \qquad \frac{M\beta^2}{1 - M^2\beta^2} < \frac{1{,}26}{10^{10}},$$

d'où

$$x = 1{,}3568958;$$

Serret, *Algèbre supérieure*, traite cet exemple. Mais la formule permettrait d'avoir $x$ avec deux chiffres exacts de plus, puisque l'erreur commise en l'appliquant est inférieure à $\frac{1{,}26}{10^{10}}$.

---

## SÉANCE DU 19 JUIN 1901.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

*Communication :*

M. Blutel : *Sur une propriété des coniques tracées sur le cylindroïde de Cayley.*

---

## SÉANCE DU 3 JUILLET 1901.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

*Élections :*

M. Padé, présenté par MM. Painlevé et Borel; M. Massau, présenté par MM. Demoulin et Borel; M. Delassus, présenté par MM. Cosserat et Kœnigs, sont élus membres de la Société à l'unanimité des membres présents.

*Communication :*

M. Lecornu : *Sur la dynamique des systèmes déformables.*

M. Servant fait la Communication suivante :

**Sur la déformation des quadriques.**

Soit

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

l'élément linéaire d'une quadrique rapportée à ses génératrices rectilignes ; on trouve facilement les relations suivantes :

$$\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\log K, \qquad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\log K, \qquad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} = 0,$$

$$\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\delta'}{\sqrt{K}}, \qquad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\delta'}{\sqrt{K}}, \qquad K^2 = -\frac{1}{RR'},$$

$$\delta' = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\,S\,c\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}.$$

Soit

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2$$

la seconde forme quadratique relative à une surface applicable sur la quadrique donnée; les équations de Gauss deviennent

$$\Omega\frac{\partial\Delta'}{\partial u} = \frac{\partial\Delta}{\partial v}, \qquad \Omega\frac{\partial\Delta'}{\partial v} = \frac{\partial\Delta''}{\partial u}, \qquad \Delta\Delta'' = \Omega^2(\Delta'^2 - 1)$$

où l'on a posé

$$\sqrt{K}\,D = \Delta, \qquad \sqrt{K}\,D'' = \Delta'', \qquad \frac{D'}{\delta'} = \Delta', \qquad \sqrt{K}\,\delta' = \Omega;$$

on voit que ces équations ont la même forme que celles qui déterminent une surface à courbure totale constante rapportée à ses lignes de longueur nulle; la valeur de $\Omega$ seule diffère. L'analogie entre les deux problèmes se poursuit plus loin; en effet, on voit de suite que le réseau conjugué commun à la quadrique et à la surface applicable est

$$\Delta\,du^2 - \Delta''\,dv^2 = 0;$$

c'est l'équation qui détermine les lignes de courbure d'une surface à courbure totale constante rapportée à ses lignes de longueur nulle; on en déduit de suite une proposition de M. Darboux (*A. E. N. S.*, 1900). *Le réseau conjugué commun à une quadrique et à une surface applicable sur celle-ci est un réseau isotherme conjugué.*

On peut, par d'autres méthodes, donner une forme très simple aux équations de la déformation d'une quadrique : en effet, les équations de M. Darboux (*Th. des surf.*, t. III) qui permettent de déterminer les quantités $u$ et $v$ en fonction des asymptotiques $\alpha$ et $\beta$ d'une surface applicable prennent ici la forme très simple :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial u}{\partial\alpha}\,\frac{\partial u}{\partial\beta}\,\frac{\partial}{\partial u}\log\Omega=\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta}+\frac{\partial v}{\partial\alpha}\,\frac{\partial v}{\partial\beta}\,\frac{\partial}{\partial v}\log\Omega=0;$$

on en tire facilement en intégrant

$$\frac{\partial u}{\partial\alpha}\,\frac{\partial v}{\partial\alpha}=\frac{\partial u}{\partial\beta}\,\frac{\partial v}{\partial\beta}=\Omega.$$

Si l'on pose

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial v}{\partial\beta}}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial\beta}}{\dfrac{\partial v}{\partial\alpha}}=\lambda,$$

la quantité $\lambda$ satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial\alpha\,\partial\beta}=\lambda\,\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2}-\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2}. \tag{1}$$

Dans le cas où la quadrique donnée est une *sphère*, une *surface de révolution* ou un *paraboloïde quelconque*, les quantités

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u^2}\quad\text{et}\quad\frac{\partial^2\Omega}{\partial v^2}$$

se réduisent à des constantes, et l'équation (1) devient l'équation bien connue des surfaces à courbure totale constante ; on en déduit facilement une méthode pour ramener la déformation d'une quelconque de ces surfaces à celle de la sphère.

Si la quadrique donnée est un paraboloïde à plan directeur isotrope, l'équation (1) se réduit à celle des surfaces minima ; dans le cas d'un paraboloïde de révolution, elle s'intègre immédiatement.

---

## SÉANCE DU 17 JUILLET 1901.

### PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Le Comité de publication des *Œuvres de Brioschi* fait hommage à la Société du Tome I de ces œuvres.

---