SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 139-160
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__139_1>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES

SÉANCE DU 9 JANVIER 1901.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

La Société, réunie en assemblée générale, procède au renouvellement de son Bureau et à l'élection de son Conseil.

Élections :

M. Davidoglou, présenté par MM. Borel et Laisant; M. van Emelen, présenté par MM. Blutel et Laisant; M. Stetson, présenté par MM. Picard et Perrott, sont élus, à l'unanimité, membres de la Société.

Communications :

M. Saltykow : *Sur l'existence des fonctions implicites.*

M. Hadamard présente quelques observations à ce sujet.

M. Kœnigs : *Sur la réalisation par des articulations de certaines transformations et sur le pantographe oblique de Sylvester, avec généralisation.*

M. Pellet adresse la Note suivante :

Sur la formule d'approximation de Newton.

1. Soit l'équation

$$x = a_0 + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n + \ldots = a_0 + f(x); \tag{1}$$

L'équation, qu'on peut appeler *majorante,*

$$x = \alpha_0 + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n + \ldots = \alpha_0 + \varphi(x), \tag{2}$$

où α_n est une quantité positive égale ou supérieure au module de a_n, a au plus deux racines positives, puisque, en ordonnant par rapport à x, elle offre deux variations de signe.

Supposons qu'elle ait une racine simple que nous désignerons par ξ; si elle en a deux, ξ désignera la plus petite. Alors l'équation proposée (1) a une racine de module inférieur à ξ et une seule [*voir* mon Mémoire *Sur la théorie infinitésimale des équations* (*Bulletin*, 1895)]. Cette racine x_1 s'obtient rapidement par la méthode d'approximation de Newton et l'on peut donner de l'erreur commise après l'application répétée de cette méthode une limite bien plus avantageuse que celle admise ordinairement. Cette méthode consiste à prendre, pour première valeur approchée de x_1, a_0; puis, posant $x = a_0 + y$, mettre l'équation en y sous la forme (1) et prendre pour valeur approchée de y le terme indépendant $\frac{f(a_0)}{1 - f'(a_0)}$, et ainsi de suite. Désignons par u_{n-1} la quantité qu'on obtient à la $n^{\text{ième}}$ opération et par s_{n-1} la somme

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} = s_{n-1};$$

il vient

$$u_0 = a_0, \qquad u_1 = \frac{f(a_0)}{1 - f'(a_0)},$$

$$u_n = \frac{a_0 + f(s_{n-1}) - s_{n-1}}{1 - f'(s_{n-1})} = u_{n-1}^2 \, \frac{\frac{1}{2} f''(s_{n-2}) + \frac{1}{6} f'''(s_{n-2})\, u_{n-1} + \ldots}{1 - f'(s_{n-1})}$$

en remarquant que

$$a_0 + f(s_{n-2}) - s_{n-2} = u_{n-1}[1 - f'(s_{n-2})].$$

Les quantités $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}, \ldots$ ont des modules inférieurs ou au plus égaux à celles qu'on obtient en procédant sur l'équation majorante (2) comme on vient de procéder sur l'équation donnée (1). On en déduit

$$\left| \frac{\frac{1}{2} f''(s_{n-2}) + \frac{1}{6} f'''(s_{n-2})\, u_{n-1} + \ldots}{1 - f'(s_{n-1})} \right| < \frac{\frac{1}{2}\varphi''(\xi)}{1 - \varphi'(\xi)} = \mathrm{M}.$$

Ainsi, en prenant, pour valeur approchée de x_1, s_{n-1}, on commet une erreur de module plus petit que

$$\mathrm{M}\,|u_{n-1}|^2 + \mathrm{M}^3\,|u_{n-1}|^4 + \mathrm{M}^7\,|u_{n-1}|^8 + \ldots < \frac{\mathrm{M}\,|u_{n-1}|^2}{1 - \mathrm{M}^2\,|u_{n-1}|^2}.$$

2. Comme exemple, considérons l'équation $x^3 - 2x - 5 = 0$, traitée par Serret dans son *Algèbre supérieure*, ou, en remplaçant x par $2 + x$,

$$x^3 + 6x^2 + 10x - 1 = 0.$$

Elle peut s'écrire

$$x = 0,1 - 0,6x^2 - 0,1x^3.$$

La plus petite racine positive de l'équation majorante

$$x = 0,1 + 0,6x^2 + 0,1x^3$$

est inférieure à $0,2$. Il en résulte

$$M < \frac{0,66}{1 - 0,252} < 1.$$

Ainsi, en prenant, pour valeur approchée de x,

$$0,1 - \frac{0,061}{11,23},$$

l'erreur commise a un module plus petit que

$$\left(\frac{0,061}{11,23}\right)^2 < \frac{1}{30\,000}.$$

Serret donne pour limite supérieure $0,006$, qui est 180 fois plus grande. On a de même

$$\frac{\overline{0,061}^2}{\overline{11,23}^2} < 0,00003.$$

Posons $y = -x^2$; il vient

$$y^3 + 16y^2 + 112y + 1 = 0.$$

La plus petite racine de l'équation majorante

$$y = \frac{1}{112} + \frac{16}{112}y^2 + \frac{1}{112}y^3$$

est plus petite que $0,01$; il en résulte $M < 0,2$.

Ainsi, en prenant, pour valeur approchée de y,

$$-\frac{1}{112} - \frac{1}{\overline{112}^2} \cdot \frac{\frac{1}{7} - \frac{1}{\overline{112}^2}}{1 - \frac{2}{7}\frac{1}{112} + \frac{3}{\overline{112}^3}},$$

l'erreur commise est inférieure en valeur absolue à

$$0,2\,\frac{1}{112^4}\cdot\frac{\dfrac{1}{7^2}}{\left(1-\dfrac{1}{8.49}\right)^2}<\frac{1}{3.10^{10}}.$$

On a

$$\frac{1}{112}=0,008\,928\,571\,428\,7\ldots=\frac{0,0625}{7};$$

un calcul logarithmique donne pour la seconde partie

$$0,000\,011\,411\,0;$$

d'où, pour x^2,

$$x^2=0,008\,939\,982\,4$$

et, pour x,

$$x=0,094\,551\,48.$$

SÉANCE DU 23 JANVIER 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Bricard : *Sur les systèmes de points réciproques.*

M. Servant fait la Communication suivante :

Sur les formules de Gauss.

Les formules fondamentales de Gauss sont, dans certains cas, plus simples que les formules de Codazzi ; nous allons en donner quelques exemples.

Si l'on suppose la surface rapportée à ses lignes de longueur nulle

$$ds^2=2\lambda\,du\,dv,$$

les formules de Gauss deviennent

$$(1)\qquad \lambda\frac{\partial\Delta'}{\partial u}=\frac{\partial\Delta}{\partial v},\qquad \lambda\frac{\partial\Delta'}{\partial v}=\frac{\partial\Delta''}{\partial u},\qquad \frac{\Delta\Delta''}{\lambda^2}-\Delta'^2+\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial^2\log\lambda}{\lambda\,\partial u\,\partial v}=0,$$

où l'on a posé

$$\Delta=\frac{D}{\lambda};\qquad \Delta''=\frac{D''}{\lambda},\qquad \Delta'=\frac{D'}{\lambda^2};$$

D, D′, D″ étant les déterminants bien connus, l'équation des lignes de courbure est

$$\Delta\, du^2 - \Delta''\, dv^2 = 0,$$

et les rayons de courbure sont donnés par les formules

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 2i\Delta', \qquad \frac{\Delta\Delta''}{\lambda^2} = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)^2.$$

Ces relations très simples permettent de résoudre bien des problèmes presque sans calcul; nous signalerons, en particulier, les suivants : recherche des surfaces minima et des surfaces à courbure moyenne constante applicables sur les surfaces de révolution; les deux problèmes résolus par Ossian Bonnet : recherche des surfaces qui admettent une déformation conservant les lignes de courbure ou les rayons de courbure principaux. Nous allons, comme application, indiquer la solution de ce dernier problème.

Pour avoir une solution du problème, il faut que, λ et Δ' restant les mêmes, on ait pour Δ et Δ'' deux ou plusieurs systèmes de solutions satisfaisant aux équations (1). On voit de suite que si Δ_0 et Δ''_0 sont relatifs à la surface S, les éléments correspondants relatifs à la surface S′ devront être de la forme

$$\Delta_1 = \Delta_0 + U, \qquad \Delta''_1 = \Delta''_0 + V,$$

et l'on devra avoir

$$(\Delta_0 + U)(\Delta''_0 + V) = \Delta^0 \Delta''_0, \qquad \frac{\Delta_0}{U} + \frac{\Delta''_0}{V} + 1 = 0.$$

S'il existe une seconde surface S″ répondant à la question, on aura de même

$$\frac{\Delta_1}{U_1} + \frac{\Delta''_0}{V_1} + 1 = 0,$$

d'où l'on déduit immédiatement que Δ_0 et Δ''_0 seront tels que l'on ait

$$\frac{\Delta_1}{\Delta''_0} = -\frac{V - V_1}{U - U_1},$$

ce qui montre que les surfaces S, S′, S″ sont isothermiques; on peut alors, en choisissant convenablement les variables u et v, poser

$$\Delta_0 = \Delta''_0 = \frac{1}{U + V};$$

substituant dans les équations (1), il vient

$$\lambda \frac{\partial \Delta'}{\partial u} + \frac{V'}{(U + v)^2} = 0, \qquad \lambda \frac{\partial \Delta'}{\partial v} + \frac{U'}{(U + v)^2},$$

d'où

$$\frac{1}{V'} \frac{\partial \Delta'}{\partial v} + \frac{1}{U'} \frac{\partial \Delta'}{\partial u} = 0;$$

si l'on pose

$$V'V'_1 = U'U''_1 = 1,$$

l'intégrale de cette équation est

$$\Delta' = f(U_1 + V_1);$$

on en déduit

$$\lambda = -\frac{U'V'}{(U + V)^2 f'(U_1 + V_1)}.$$

La dernière des équations (1) donne de suite la valeur de f et l'on trouve finalement

$$\Delta' = \frac{2}{U_1 + V_1}, \qquad \lambda = -\frac{1}{2} \frac{(U_1 + V_1)^2}{(U + V)^2} U'V'.$$

La surface est alors complètement déterminée intrinsèquement.

Les formules de Gauss subsistent presque identiquement dans l'espace non euclidien ; il suffit de remplacer la troisième des équations (1) par la suivante :

$$\frac{\Delta\Delta''}{\lambda^2} - \Delta'^2 + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \, \partial v} + 1 = 0.$$

Comme à toute surface isothermique de l'espace non euclidien correspond par projection stéréographique une surface isothermique de l'espace ordinaire, il y a quelque intérêt à résoudre, dans ce cas, le problème d'Ossian Bonnet. Le calcul est le même que précédemment et l'on trouve

$$\Delta = \frac{1}{U + V}, \qquad \Delta' = f(U_1 + V_1), \qquad \lambda = -\frac{U'V'}{(u + V)^2 f'(U_1 + V_1)},$$

$$f(U_1 + V_1) = \frac{e^{U_1 + V_1} - 1}{e^{U_1 + V_1} + 1},$$

où l'on a posé

$$U'U'_1 = V'V'_1 = 1,$$

formules qui déterminent intrinsèquement la surface dans l'espace non euclidien. Pour avoir les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 et, par suite, la surface de l'espace ordinaire correspondante, il faut encore intégrer un système complet d'équations aux dérivées partielles que l'on forme facilement, mais dont l'intégration ne semble pas très aisée. Nous avons négligé, dans le calcul des cas particuliers, celui des surfaces à courbure moyenne constante et une autre famille de surfaces dépendant d'un paramètre qui sont applicables sur des surfaces de révolution.

SÉANCE DU 7 FÉVRIER 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. d'Adhémar : *Sur certaines équations aux dérivées partielles.*

M. C.-A. Laisant fait la Communication suivante :

Sur certaines suites récurrentes.

1. Dans un Mémoire sur les suites récurrentes (*Journal de l'École Polytechnique,* LXIV^e^ Cahier, p. 151; 1894), M. d'Ocagne a étudié les suites définies par la relation

$$u_k[f(u)] = \mathrm{F}(k)$$

que nous écrivons immédiatement sous forme symbolique. $\mathrm{F}(k)$ est un polynome de degré r.

Si, en particulier, $r = 0$, c'est-à-dire si le premier membre de la relation ci-dessus est une constante, la suite considérée est récurrente, et son échelle de récurrence

$$u_k[(u-1)f(u)] = 0$$

est d'un degré plus élevé d'une unité que celui de $f(u)$. Comme cas très particulier, une progression par différence de raison h, définie par

$$u_k[u-1] = h.$$

est récurrente du second ordre, et a pour échelle de récurrence

$$u_k[(u-1)^2] = 0.$$

Cette remarque a été faite par M. d'Ocagne, à côté d'autres résultats beaucoup plus généraux.

Dans cette Note, je me propose d'étudier spécialement les suites où $F(k) = h$, et de chercher à déterminer une loi de formation simple du terme général.

A cet effet, écrivons la relation de définition sous la forme

$$(1) \qquad u_{n+k} - a_1 u_{n+k-1} - \ldots - a_n u_k = h,$$

ou, symboliquement,

$$u_k[f(u)] = h.$$

Lorsque l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de racine égale à l'unité, il est possible d'exprimer d'une façon très simple les termes de la suite (u). Posons, en effet, pour un indice quelconque,

$$u_p = v_p + \eta,$$

la suite (v) étant récurrente et ayant pour échelle $f(x) = 0$.

La relation (1) devient

$$v_{n+k} + \eta - a_1(v_{n+k-1} + \eta) - \ldots - a_n(v_k + \eta) - h = 0,$$

et, en écrivant

$$\eta = \frac{h}{1 - a_1 - \ldots - a_n} + \frac{h}{f(1)},$$

nous pouvons dire que *la suite (u) s'obtient en ajoutant une quantité constante à tous les termes d'une suite récurrente du même ordre et de même échelle.*

La suite (v) s'interpole par une fonction de la forme

$$v_z = A_1 \alpha_1^z + \ldots + A_n \alpha_n^z,$$

pour une valeur quelconque de l'indice, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ étant les racines de l'équation $f(x) = 0$. Donc, la série (u) s'interpolera par la fonction

$$u_z = A_1 \alpha_1^z + \ldots + A_n \alpha_n^z + \eta,$$

η ayant la valeur ci-dessus.

2. Si l'équation $f(x) = 0$ a, au contraire, des racines égales à l'unité, il est quand même possible d'exprimer chaque terme de la suite (u) au moyen de celui d'une suite récurrente (v) auquel on ajoute, non plus une constante, mais un polynome en z.

Soit $f(x) = (x-1)^p \varphi(x)$, et appelons v_z le terme général d'une suite récurrente ayant pour échelle $\varphi(x) = 0$. Il s'ensuit qu'on a

$$v_z = \sum A_i \alpha_i^z,$$

en appelant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$, dont, par hypothèse, aucune n'est égale à l'unité.

Posons

$$u_z = v_z + Q(z) = v_z + w_z,$$

$Q(z)$ représentant un polynome en z, de degré p.

Lorsque nous voudrons former la fonction $f(u)$ ou $\varphi(u)(u-1)^p$, nous pourrons la décomposer en $f(v) + f(Q)$. Mais $f(v)$ sera nul, puisque la suite (v) a pour échelle de récurrence $\varphi(x) = 0$. La fonction $f(u)$ se réduit donc à $f[Q(z)]$. Si le polynome $Q(z)$ est développé sous la forme

$$\beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_p z^p,$$

on pourra encore écrire symboliquement

$$f(\beta_0) + f(\beta_1 z) + \ldots + f(\beta_p z^p).$$

Dans chaque terme, le coefficient β_i entre en facteur; de plus, la fonction $f(x)$ étant $\varphi(x)(x-1)^p$, se traduit symboliquement par $\varphi(u)(u-1)^p$ ou $\varphi(u)\Delta^p u$. Or, les différences $p^{\text{ièmes}}$ des divers termes sont nulles, à l'exception de la dernière, qui est constante et égale à $p!$.

Soit maintenant $\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$.

Nous devrons former

$$(c_0 w_k + c_1 w_{k+1} + c_2 w_{k+2} + \ldots)\beta_p p!;$$

et, dès l'instant où la différence $n^{\text{ième}}$, $\Delta^p = \beta_p p!$ est constante, l'expression symbolique $w_i \Delta^p$ ou $\Delta^p w_i$ est constante aussi, puisque l'indice est indifférent. Par suite, nous aurons

$$(c_0 + c_1 + c_2 + \ldots)\beta_p p!$$

ou encore $\varphi(1)\beta_p p!$.

Il en résulte qu'on aura finalement

$$u_k[f(u)] = \varphi(1)\beta_p p! = h.$$

On remarquera la coïncidence que présente ce résultat avec celui du numéro précédent, lorsque $p = 0$, c'est-à-dire quand l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de racines égales à l'unité.

Lorsque, pour définir la suite (u), on se sera donné les premiers termes $u_0, u_1, \ldots, u_n$, ou, ce qui revient au même, n termes seulement et, en outre, la valeur de h, on écrira les $n+1$ équations

$$u_z = A_1\rho_1^z + A_2\rho_2^z + \ldots + A_m\rho_m^z + \beta_0 + \beta_1 z + \ldots + \beta_p z^p,$$

pour les valeurs $0, 1, \ldots, n$ de z. Dans ces équations, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ sont les racines de $\varphi(x) = 0$, et l'on a $n = m + p$. Les n inconnues sont

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_m, \quad \beta_0, \quad \beta_1, \quad \ldots, \quad \beta_p,$$

c'est-à-dire également au nombre $n + 1 = m + p + 1$.

Il est bon d'éclaircir ce qui précède par un exemple.

Prenons une suite pseudo-récurrente dont l'échelle soit $(u-1)^3(u-2) = h$, avec $h = -6$, et les quatre premiers termes étant $3, 3, 4, 13$; on en déduit immédiatement que le cinquième est 38, en développant $f(u)$, ce qui donne

$$u_4 - 5u_3 + 9u_2 - 7u_1 + 2u_0 = -6.$$

Nous aurons, d'après ce qui précède, $\varphi(x) = x - 2$, $m = 1$, $p = 3$, et

$$\begin{aligned}
3 &= A_1 + \beta_0,\\
3 &= 2A_1 + \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3,\\
4 &= 4A_1 + \beta_0 + 2\beta_1 + 4\beta_2 + 8\beta_3,\\
13 &= 8A_1 + \beta_0 + 3\beta_1 + 9\beta_2 + 27\beta_3,\\
38 &= 16A_1 + \beta_0 + 4\beta_1 + 16\beta_2 + 64\beta_3.
\end{aligned}$$

On tire de ces équations

$$A_1 = 1, \quad \beta_0 = 2, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -3, \quad \beta_3 = 1,$$

et l'expression générale du terme u_z est

$$u_z = 2^z + 2 + z - 3z^2 + z^3,$$

comme il est facile de le vérifier.

On peut se servir utilement, pour obtenir la suite (u), du Tableau des différences. En effet, les différences $4^{\text{ièmes}}$ [en général $(p+1)^{\text{ièmes}}$] provenant du polynome en z seront nulles, et il ne restera plus que celles provenant des puissances de z (et, en général, des termes ν), lesquelles forment elles-mêmes une suite récurrente de même échelle, c'est-à-dire ici une progression par quotient de raison 2. Nous donnons ci-dessous ce Tableau :

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
3 & & 3 & & 4 & & 13 & & 38 & & 89 & & 180 & & 333 & & 586\ldots \\
& 0 & & 1 & & 9 & & 25 & & 51 & & 91 & & 153 & & 253 & \\
& & 1 & & 8 & & 16 & & 26 & & 40 & & 62 & & 100 & & \\
& & & 7 & & 8 & & 10 & & 14 & & 22 & & 38 & & & \\
& & & & 1 & & 2 & & 4 & & 8 & & 16 & & & &
\end{array}$$

Vérifions enfin que $h = -6$, $\varphi(x) = x-2$, $\beta_3 = 1$, $3! = 6$, ce qui donne bien $h = \varphi(1)\beta_p p!$, puisque $\varphi(1) = -1$.

3. La valeur $h = \varphi(1)\beta_p p!$, que nous avons trouvée ci-dessus, peut s'exprimer encore d'une autre manière assez remarquable. On a, en effet,

$$f(x) = (x-1)^p \varphi(x),$$

et, en prenant successivement les dérivées jusqu'à la $p^{\text{ième}}$, puis faisant $x = 1$, on a

$$f^{(p)}(1) = p!\,\varphi(1).$$

On peut donc écrire

$$h = \beta_p f^{(p)}(1)$$

et aussi

$$h = \frac{Q(z) f^{(p)}(1)}{p!} = \varphi(1) Q^{(p)}(z),$$

$Q^{(p)}(z)$ étant une constante, puisque Q est un polynome de degré p.

SÉANCE DU 21 FÉVRIER 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Estanave : *Sur le calcul de* π.

M. Lecornu fait la Communication suivante :

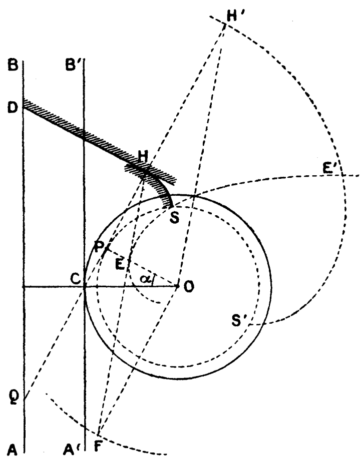
Sur la vis sans fin.

L'engrenage à vis sans fin, destiné à relier deux mouvements de rotation effectués autour d'axes perpendiculaires non concourants, est généralement constitué par une vis à filet carré assujettie à demeurer en contact avec un hélicoïde développable. Le point de contact décrit sur la surface de vis une hélice déterminée, qui tend à devenir une ligne d'usure, sans que le reste de la surface soit utilisé pour le fonctionnement de l'appareil.

Si l'on pouvait faire en sorte que la trajectoire du point de contact n'eût pas tous ses points à la même distance de l'axe de la vis, on remédierait aisément à l'inconvénient de l'usure : car il suffirait de donner, de temps en temps, à la vis un léger déplacement dans le sens de son axe pour faire travailler, à tour de rôle, des parties différentes de la surface.

Le moyen le plus simple de parvenir à ce résultat consiste à remplacer la surface de vis à filet carré par une surface de vis à

Fig. 1.



filet triangulaire qu'on peut d'ailleurs prendre très peu différente de la première. Mais alors la surface conjuguée n'est plus un hélicoïde développable ; je me propose de déterminer ici sa nature.

Soit AB l'axe de la vis triangulaire et soit O la trace du second axe de rotation, perpendiculaire au plan de la figure, que nous supposerons horizontal (*fig.* 1). A chaque instant, la surface de vis coupe le plan de la figure suivant une droite DH inclinée d'un angle constant $\frac{\pi}{2} - \alpha$ sur la droite AB. La vis tournant avec une vitesse uniforme, la droite DH se meut avec une vitesse constante et se comporte ainsi comme une crémaillère à flanc oblique, propre à assurer le roulement relatif d'une droite A'B', parallèle à AB, située à la distance constante R' de AB et d'une circonférence de centre O et de rayon $OC = R$. Les longueurs R et R' sont arbitraires. Si nous abaissons la perpendiculaire CH sur DH, son pied H est le point de contact de DH avec le profil conjugué; et, comme CH est tangent à une circonférence de centre O et de rayon $OP = R\cos\alpha$, le profil est une développante HS de cette circonférence. La distance du point H à l'axe AB croît proportionnellement à l'angle de rotation; il en résulte que, perpendiculairement à cet axe, le lieu des points H considérés comme appartenant à la surface de la vis a pour projection une spirale d'Archimède. Ce lieu est d'ailleurs l'intersection de la vis avec le cône engendré par la rotation de CH autour de l'axe AB.

Il faut maintenant trouver la surface enveloppée par des plans tangents à la développante et tels que chacun d'eux vienne successivement en coïncidence avec un plan tangent à la vis. En appelant h le pas de la vis et ρ le rayon de courbure PH de la développante, on trouve aisément qu'au point H le plan tangent à la vis forme avec le plan de la figure un angle i donné par la formule

$$\operatorname{tang} i = \frac{2\pi}{h}\left[R' + (R\sin\alpha + \rho)\sin\alpha\right]\cos\alpha,$$

ce qu'on peut écrire

$$\operatorname{tang} i = \frac{\rho + b}{a}$$

en posant

$$a = \frac{h}{2\pi\sin\alpha\cos\alpha}, \qquad b = \frac{R'}{\sin\alpha} + R\sin\alpha = PQ.$$

Nous avons donc à construire une surface développable $\sum$, contenant la développante, sachant que le plan tangent au point pour lequel la développante a un rayon de courbure ρ coupe le plan de cette courbe sous un angle i répondant à la formule qui précède.

A cet effet, considérons une développante H'S' parallèle à la première, et située à la distance normale b de celle-ci. Menons par les tangentes à la courbe H'S' des plans parallèles aux plans tangents de la surface $\sum$. Le plan passant en H′ est incliné de l'angle i sur le plan de la figure. Il coupe à la hauteur

$$(\rho + b)\,\text{cotang}\, i,$$

c'est-à-dire a, le plan vertical passant par OP et, par conséquent, il rencontre en un point fixe l'ordonnée du point O. On voit ainsi que la nouvelle surface est un cône $\sum'$. Les sections horizontales de ce cône sont des développantes homothétiques à H′S′. Pour la section faite à la hauteur z, le rapport d'homothétie est $1 - \frac{z}{a}$ et, par suite, le rayon de la circonférence correspondante est

$$R \cos\alpha \left(1 - \frac{z}{a}\right).$$

Cela étant, on obtiendra la surface cherchée $\sum$ en portant horizontalement à partir de chaque point du cône $\sum'$, dans la direction normale à la développante qui passe en ce point, la longueur constante b. Les sections horizontales de $\sum$ sont des développantes égales à celles qui appartiennent au cône. Dans le plan horizontal ayant pour cote z, la rotation qui fait passer de la section du cône à celle de la surface $\sum$ est $\dfrac{b}{R \cos\alpha \left(1 - \frac{z}{a}\right)}$. Cet angle augmente indéfiniment à mesure qu'on se rapproche du sommet du cône. Dans le plan horizontal passant par le sommet, la rotation devient infinie : il est aisé de voir que la section de la surface est alors une circonférence de rayon b. Par conséquent, *la surface* $\sum$ *peut être regardée comme l'enveloppe d'un plan qui s'appuie à la fois sur une circonférence et sur la développante d'une autre circonférence située dans un plan parallèle, les deux circonférences ayant leurs centres sur une même perpendiculaire à la direction de leurs plans.*

Voyons maintenant quelle est la nature de l'arête de rebroussement. Soit HF la projection de la génératrice passant en H. Nous savons que si F est le point situé dans le plan horizontal mené par le sommet du cône, la droite OF est parallèle et égale à HH', dont la longueur est b. Pour une rotation $d\theta$ du rayon ρ, l'extrémité H se déplace le long de la développante d'une longueur $\rho\, d\theta$; l'extrémité F éprouve un déplacement parallèle, mais de sens contraire, et égal à $b\, d\theta$. Le point de contact E de HF avec son enveloppe partage donc HF dans le rapport $\frac{\rho}{b}$, c'est-à-dire que E se trouve sur le rayon OP. Par suite, $OE = OP \times \frac{b}{b+\rho}$ et, comme l'angle θ, mesuré à partir du rayon aboutissant au point de rebroussement S' de la courbe H'S', a pour valeur $\frac{b+\rho}{OP}$, on a la relation $OE \times \theta = b$. Donc :

L'arête de rebroussement de la développable $\sum$ se projette horizontalement suivant une spirale hyperbolique.

Cette spirale, figurée en ESE', passe par le point de rebroussement S de la développable HS, car, en ce point, le rayon vecteur est égal à OP et l'angle polaire à $\frac{b}{OP}$. Dans l'espace, l'arête de rebroussement est le lieu des points de rebroussement des développantes formant les sections horizontales de $\sum$. Cette arête de rebroussement se trouve sur le cône droit dont la base est la circonférence PSS' et dont le sommet est à la hauteur a au-dessus de O en coïncidence avec le sommet du cône $\sum'$. Si l'on développe le cône droit sur un plan, l'arête de rebroussement se développe suivant une spirale hyperbolique égale à la première : on le reconnaît immédiatement en remarquant que les deux spirales ont la même sous-tangente polaire égale à b.

En résumé : *la surface conjuguée de la vis à filet triangulaire est la développable, lieu des tangentes à une spirale hyperbolique enroulée sur un cône de révolution dont le sommet est au pôle de la spirale : les sections faites dans cette surface perpendiculairement à l'axe du cône sont des développantes des sections du cône; la section dont le plan passe par le sommet du cône est circulaire.*

SÉANCE DU 7 MARS 1901.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Estanave : *Sur le calcul de* π.

M. ÉMILE BOREL fait la Communication suivante :

Sur les ordres d'infinitude.

On sait quelle est l'importance de la théorie élémentaire des infiniment petits: *un infiniment petit principal* x ayant été choisi, les autres infiniment petits sont comparés aux puissances positives de l'infiniment petit principal; si l'infiniment petit y est tel que son rapport à x^a tende vers une limite finie lorsque x tend vers zéro, on dit que *l'ordre infinitésimal de* y *est déterminé,* et cet ordre est égal au nombre positif a.

La définition que nous venons de donner est celle qui est actuellement adoptée dans l'enseignement; Cauchy a indiqué une définition différente, souvent plus utile [1] : l'infiniment petit y est dit d'ordre a si, quelque petit que soit le nombre *positif* ε, le quotient

$$\frac{y}{x^{a-\varepsilon}}$$

tend vers zéro, tandis que le quotient

$$\frac{y}{x^{a+\varepsilon}}$$

augmente indéfiniment, lorsque x et y tendent simultanément vers zéro.

Pour éviter toute confusion, nous dirons que l'ordre infinitésimal de y est a lorsque les conditions de la définition usuelle sont vérifiées, et qu'il est (a) lorsque y vérifie seulement les conditions de Cauchy [2] ; l'ordre de la fonction $x^2 \log x$ est (2).

---

[1] *Voir*, par exemple, les *Préliminaires* des *Leçons sur le Calcul différentiel*. Paris, 1829. — *Œuvres de Cauchy*, Série II, t. IV, p. 281.

[2] La notation (a) peut s'énoncer brièvement : *a parenthèse*.

Il est clair que les définitions précédentes se transportent sans difficulté au cas où y et x sont supposés infiniment grands et positifs au lieu d'être supposés infiniment petits ; nous ferons cette hypothèse, qui simplifiera les écritures ultérieures ; ainsi nous désignons désormais par x une variable *positive* infiniment grande.

Notre but est d'étendre la théorie des ordres d'infinitude à des cas où la valeur que l'on serait conduit à leur attribuer serait zéro ou l'infini (1).

Dans ce but, nous conviendrons de dire que x étant l'infiniment petit principal, l'ordre d'infinitude de e^x est ω. Cette définition étant posée, nous conviendrons que, *si l'ordre de z considéré comme fonction de y est a, tandis que l'ordre de y considéré comme fonction de x est b, l'ordre de z considéré comme fonction de x sera désigné par ab*. De plus, si les ordres de y et de z sont respectivement a et b, l'ordre de yz sera dit *égal à $a+b$*.

Enfin, si l'ordre de y considéré comme fonction de x est a, l'ordre de x considéré comme fonction de y est $\frac{1}{a}$.

Ces définitions permettent d'écrire immédiatement les ordres des fonctions que l'on obtient en combinant les fonctions e^x, x^m, $\log x$; voici quelques exemples :

$$e^{x^2} x^3 \log x, \qquad \omega 2 + 3 + \frac{1}{\omega},$$

$$e^{mx} \log x^m, \qquad m\omega + \frac{1}{\omega} m,$$

$$e^{xe^{x^2}}, \qquad \omega [1 + \omega 2].$$

On remarquera que la multiplication n'est généralement pas commutative ; l'on n'a pas $\omega 2 = 2\omega$. De plus, si l'on a toujours

$$[b + c] a = ba + ca,$$

l'on a *généralement*

$$a [b + c] \neq ab + ac.$$

(1) *Cf.* les travaux de du Bois-Reymond et de M. Pincherle sur les fonctions croissantes. Je ne puis donner ici une bibliographie complète.

Voir aussi mon *Mémoire sur les séries divergentes*, première Partie (*Annales de l'École Normale*, 1899).

Les définitions précédentes correspondent à la définition que nous avons rappelée au début de cette Communication ; il est souvent avantageux d'y substituer une définition plus large, analogue à la définition de Cauchy.

Considérons un polynome tel que le suivant :

$$i = ab + cde + fg,$$

les lettres a, b, c, ..., g désignant, soit des nombres positifs, soit l'un des symboles ω ou $\frac{1}{\omega}$. A ce polynome i on peut faire correspondre, d'après ce qui précède, une fonction croissante de x bien déterminée ayant pour ordre d'infinitude i. Nous la désignerons par $F(x, b)$, en mettant en évidence l'une des lettres b qui figurent dans l'expression de i; nous supposons que la lettre ainsi mise en évidence désigne un nombre positif et non un symbole tel que ω.

Supposons qu'une fonction $\varphi(x)$ soit telle que l'on ait, quel que soit le nombre positif ε,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{F(x, b-\varepsilon)} = \infty, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{F(x, b+\varepsilon)} = 0.$$

Nous conviendrons de dire que l'ordre d'infinitude j de $\varphi(x)$ est défini par la formule

$$j = a(b) + cde + fg.$$

Il arrivera d'ailleurs souvent que la présence du symbole (b) permet, sans changer la signification de j, d'en simplifier l'expression en supprimant certains termes; mais nous ne pouvons entrer dans ces détails.

Cette *notation* me paraît devoir être fort commode dans bien des recherches ; j'en ai donné quelques applications dans le Cours que j'ai fait cet hiver au Collège de France ([1]) ; pour le moment, je me contente de la signaler, afin que les mathématiciens à qui elle pourrait rendre des services l'éprouvent à l'usage ([2]).

([1]) Ce Cours sera publié, sous le titre de *Leçons sur les séries à termes positifs*, par les soins de M. Robert d'Adhémar, qui travaille en ce moment à sa rédaction.

([2]) Il est clair qu'il existe des fonctions $\varphi(x)$ dont l'ordre d'infinitude ne peut pas être exprimé par une telle notation, de même qu'il existe des infiniment petits dont l'ordre infinitésimal n'est pas déterminé ; la théorie des ordres infinitésimaux est cependant fort utile.

SÉANCE DU 21 MARS 1901.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. ERNST LINDELÖF adresse la Note suivante :

Sur le prolongement analytique.

Dans le dernier Tome de ce Recueil, M. Borel a donné (¹) un exemple très simple d'une série de polynomes représentant une fonction analytique dans un domaine plus grand que le cercle de convergence de son développement de Taylor. J'ai été conduit à un exemple analogue, mais plus général, que M. Borel a bien voulu m'inviter à présenter ici.

Soit $f(x)$ une fonction analytique définie par son développement de Taylor

$$(1)\qquad f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots,$$

dont nous supposons le rayon de convergence fini, et soit A l'*étoile principale* correspondante, suivant la terminologie de M. Mittag-Leffler. En menant par chaque sommet de A une droite perpendiculaire au rayon vecteur en ce point, nous formerons un polygone P limité par certaines de ces droites et comprenant tout entier le cercle de convergence du développement (1). C'est à ce polygone P que M. Borel a donné le nom de *polygone de sommabilité* (²).

Nous nous proposons de *former une série de polynomes représentant la fonction $f(x)$ dans le polynome* P.

Rappelons d'abord le théorème général qui ramène la question à la recherche d'un développement de la fonction $\frac{1}{1-x}$, théorème qui repose sur une des plus belles applications de l'intégrale de Cauchy (³).

Supposons qu'on ait obtenu, par un procédé quelconque, un

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, p. 200; 1900. *Voir* aussi *Leçons sur les séries divergentes*, p. 170.

(²) *Voir* BOREL, *Leçons sur les séries divergentes*, p. 127.

(³) *Cf.* BOREL, *Mémoire sur les séries divergentes* (*Annales de l'École Normale*, p. 63-65; 1899).

développement de $\frac{1}{1-x}$ en série de polynomes,

$$(2) \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_n (c_{n0} + c_{n1}x + c_{n2}x^2 + \ldots + c_{n\nu_n}x^{\nu_n}),$$

qui converge uniformément dans toute aire comprise dans l'intérieur d'un certain domaine $\overline{X}$, renfermant l'origine et dont le contour n'est coupé en plus d'un point par aucun rayon vecteur issu de l'origine. Si l'on forme alors, à l'aide des coefficients du développement (1), la série

$$(3) \qquad \sum_n (c_{n0}a_0 + c_{n1}a_1 x + c_{n2}a_2 x^2 + \ldots + c_{n\nu_n}a_{\nu_n}x^{\nu_n}),$$

elle sera uniformément convergente et représentera la fonction $f(x)$ dans toute aire intérieure au domaine X, qu'on obtient par la construction géométrique suivante :

α désignant l'affixe d'un sommet quelconque de l'étoile A, appliquons au domaine $\overline{X}$ la transformation homothétique $x' = \alpha x$. En opérant ainsi pour chaque sommet de A, nous aurons un nombre, fini ou infini, de domaines homothétiques à $\overline{X}$; X sera la partie du plan commune à tous ces domaines.

Toutefois, X n'est pas nécessairement le vrai domaine de convergence de la série (3), qui pourrait, en effet, être convergente en des points extérieurs à X.

En vertu du théorème ci-dessus, la question que nous nous sommes proposée revient à celle-ci : *Trouver un développement de la fonction* $\frac{1}{1-x}$ *en série de polynomes qui converge dans le demi-plan* $\overline{P}$, *situé à gauche de la parallèle à l'axe imaginaire menée par le point* $x = 1$.

A cet effet, développons $\frac{1}{1-x}$ suivant les puissances de $x+n$, en désignant par n un entier positif; nous aurons

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{n+1}\left[1 + \frac{x+n}{n+1} + \left(\frac{x+n}{n+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x+n}{n+1}\right)^{m-1}\right] + R_m,$$

le reste R_m ayant la valeur

$$R_m = \left(\frac{x+n}{n+1}\right)^m \frac{1}{1-x}.$$

Pour les valeurs x comprises dans le cercle $|x+n| \leqq 1 + n - \varepsilon$,

ε désignant un nombre positif fixe, la valeur absolue de R_m ne dépassera pas la limite

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon}{n+1}\right)^m,$$

valeur de R_m au point $x = 1 - \varepsilon$ et, lorsque ε tend vers zéro, cette limite tendra également vers zéro, si l'on fait en même temps croître m de telle manière que l'inégalité

$$m \geq \frac{n+1}{\varepsilon^{1+\rho}}$$

ait constamment lieu, ρ désignant un nombre positif quelconque. En effet, il s'ensuit

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(1-\frac{\varepsilon}{n+1}\right)^m \leq \frac{1}{\varepsilon}\left[\left(1-\frac{\varepsilon}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{\varepsilon}}\right]^{\frac{1}{\varepsilon^\rho}} < \frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon^\rho}},$$

et cette dernière expression tend évidemment vers zéro en même temps que ε.

Faisons, en particulier,

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \qquad \rho = 1, \qquad m = (n+1)^2 + 1,$$

ce qui est conforme aux hypothèses précédentes; nous pourrons énoncer les résultats suivants :

Le polynome

$$\overline{P}_n(x) = \frac{1}{n+1}\left[1 + \frac{x+n}{n+1} + \left(\frac{x+n}{n+1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{x+n}{n+1}\right)^{(n+1)^2}\right]$$

représente la fonction $\frac{1}{1-x}$ *dans le cercle*

$$|x+n| \leq n+1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

avec une erreur inférieure à

$$\sqrt{n+1}\, e^{-\sqrt{n+1}}.$$

Lorsque n tend vers l'infini, le cercle tendra à embrasser tout le demi-plan $\overline{P}$ et l'erreur tendra vers zéro; par suite :

La série de polynomes

$$\overline{P}_1(x) + [\overline{P}_2(x) - \overline{P}_1(x)] + [\overline{P}_3(x) - \overline{P}_2(x)] + \ldots$$

est uniformément convergente et représente la fonction $\frac{1}{1-x}$ *dans toute aire comprise dans l'intérieur du demi-plan* $\overline{P}$.

D'après le théorème général énoncé au début, il ne nous reste plus qu'à développer les polynomes $\overline{P}$ suivant les puissances de x, puis remplacer x^i par $a_i x^i$. En désignant, comme d'habitude, par C_ν^p le coefficient binomial

$$C_\nu^p = \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-p+1)}{1.2.\ldots p},$$

nous arrivons ainsi au théorème suivant qui donne la solution du problème que nous nous étions proposé :

Étant donné un développement de Taylor quelconque (1) *dont le rayon de convergence n'est ni nul ni infini; si l'on pose*

$$P_n(x) = \sum_0^{(n+1)^2} \frac{1}{(n+1)^{\nu+1}} [a_\nu x^\nu + C_\nu^1 n a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + C_\nu^\nu n^\nu a_0],$$

la série de polynomes

$$P_1(x) + [P_2(x) - P_1(x)] + [P_3(x) - P_2(x)] + \ldots$$

sera uniformément convergente et représentera la fonction $f(x)$, définie par le développement (1), *dans toute aire qui est entièrement intérieure au polygone* P.

La série précédente, d'après ce que nous avons déjà fait remarquer, pourrait être convergente en des points extérieurs au polygone P. Si l'on cherchait, pour la fonction $f(x)$, un mode de représentation dans P qui diverge sûrement en dehors de ce polygone, on serait amené, suivant M. Mittag-Leffler [1], à former des *expressions limites doubles*. Or, on voit de suite que l'expression

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{1}{(n+1)^\nu} (a_\nu x^\nu + C_\nu^1 n a_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots + C_\nu^\nu n^\nu a_0)$$

répond à la condition requise. Mais ce mode de représentation ne nous fournit pas une *expression analytique* valable dans P, dans le sens propre de ce mot.

---

(1) *Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène*, seconde et troisième Notes (*Acta Mathematica*, t. XXIV).