SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 56-68
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__56_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 20 DÉCEMBRE 1899.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. André : *Sur le théorème des fonctions homogènes.*
M. Landau : *Observations sur un Mémoire de M. Hadamard.*

M. Ripert fait la Communication suivante :

Sur des propriétés générales des formes quadratiques;

1\. Nous désignons par $\varphi_n(x, y, \ldots, s)$ une forme quadratique homogène à n variables (ou *n-aire*), par Δ_n son discriminant, par ψ_n sa forme adjointe.

La loi de formation des formes φ_n est *exclusivement* la suivante :

$$\varphi_1(x) = Ax^2, \qquad \varphi_2(x, y) = \varphi_1 + (2B''xy + A'y^2),$$
$$\varphi_3(x, y, z) = \varphi_2 + (2B'xz + 2Byz + A''z^2),$$
$$\varphi_4(x, y; z, t) = \varphi_3 + (2Cxt + 2C'yt + 2C''zt + Dt^2), \qquad \ldots.$$

2\. On a, *spécialement pour la forme ternaire* φ_3,

$$(1)\quad \begin{cases} 4\varphi_3(a, b, c)\,\varphi_3(a', b', c') - (a'\varphi'_a + b'\varphi'_b + c'\varphi'_c)^2 \\ = 4\psi_3(bc' - cb', ca' - ac', ab' - ba'); \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \varphi_3(a, b, c)\,\psi_3(u, v, w) - \Delta_3(au + bv + cw)^2 \\ = \dfrac{1}{4}\varphi_3(v\varphi'_c - w\varphi'_b,\ w\varphi'_a - u\varphi'_c,\ u\varphi'_b - v\varphi'_a) \\ = \dfrac{1}{4\Delta_3}\psi_3(b\psi'_w - c\psi'_v,\ c\psi'_u - a\psi'_w,\ a\psi'_v - b\psi'_u); \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} 4\psi_3(u, v, w)\,\psi_3(u', v', w') - (u'\psi'_u + v'\psi'_v + w'\psi'_w)^2 \\ = 4\Delta_3\,\varphi_3(vw' - wv', wu' - uw', uv' - vu'). \end{cases}$$

Ces identités, qui se démontrent en développant, n'ont plus de signification pour $n \neq 3$, car, en posant $N = \dfrac{n(n-1)}{2}$, il est facile de voir que, dans les seconds membres, des formes N-*aires* seraient nécessaires. Nous nous proposons de leur faire subir les transformations nécessaires pour qu'elles deviennent vraies, quel que soit n.

3. On a

$$\varphi_3(X, Y, Z) = \Sigma A X^2 + 2 \Sigma B YZ,$$
$$\psi_3(X, Y, Z) = \Sigma(A'A'' - B^2)X^2 + 2\Sigma(B'B'' = AB)YZ,$$

et, à cause de $n = N = 3$, ces formes φ_3 et ψ_3 sont identiques aux suivantes :

$$\xi_N(X, Y, Z) = \Sigma\, \delta^2_{A'A''}\, X^2 + 2\Sigma\, \delta^2_{B'B''}\, YZ, \tag{4}$$

$$\chi_N(X, Y, Z) = \Sigma\, \delta^{n-2}_{[A'A'']} X^2 + 2\Sigma\, \delta^{n-2}_{[B'B'']} YZ, \tag{5}$$

où $\delta^2_{A'A''} = A$, $\delta^2_{B'B''} = B$ sont les mineurs du deuxième ordre de $\Delta_{n=3}$ obtenus en différentiant successivement Δ_3 par rapport à (A', A'') ou (B', B''), et où $\delta^{n-2}_{[A'A'']} = A'A'' - B^2$ et $\delta^{n-2}_{[B'B'']} = B'B'' - AB$ sont les mineurs d'ordre $n - 2 (= 1)$, obtenus en différentiant $\Delta_{n=3}$ par rapport à A ou 2B, c'est-à-dire *par rapport à tous les coefficients de* $\varphi_{n=3}$ *d'espèces* A *ou* B *autres que ceux* (A', A'') *ou* (B', B'') *marqués par les indices*. On a d'ailleurs

$$\Delta_{n-3} = A A' A'' + 2 B B' B'' + \ldots = \delta^2_{A'A''}\, \delta^{n-2}_{[A'A'']} + \delta^2_{B'B''}\, \delta^{n-2}_{[B'B'']} + \ldots.$$

Ceci posé, pour $n \neq 3$, on peut toujours former, d'après la loi (4)(5) indiquée, les formes N-*aires* ξ_N et χ_N, qui deviennent alors entièrement distinctes de φ_n et ψ_n et l'on peut les appeler les *premières formes auxiliaires de* φ_n; dans ces conditions, *les identités*

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{aligned} & 4\varphi_n(a, b, c, d, \ldots)\varphi_n(a', b', c', d', \ldots) - \Sigma^2 a' \varphi'_a \\ & \quad \equiv 4\chi_N(bc' - cb', ca' - ac', ab' - ba', ad' - da', bd' - db', cd' - dc', \ldots) \end{aligned} \right.$$

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi_n(a, b, \ldots)\psi_n(u, v, \ldots) - \Delta_n \Sigma^2 au \\ & \quad \equiv \frac{1}{4} \xi_N(v\varphi'_c - w\varphi'_b, \ldots) \equiv \frac{1}{4\Delta_n} \chi_N(b\psi'_w - c\psi'_v, \ldots), \end{aligned} \right.$$

$$\text{(III)} \quad 4\psi_n(u, v, \ldots)\psi_n(u', v', \ldots) - \Sigma^2 u' \psi'_u \equiv 4\Delta_n \xi_N(vw' - wv', \ldots)$$

sont générales. On les démontre en les vérifiant successivement pour les formes monaire, binaire, ternaire, quaternaire, ... et appliquant le principe de continuité.

4. Au lieu de partir des formes ternaires, partons des formes quaternaires (n° 1) :

$$\begin{matrix} \varphi_4(X, Y, Z, T) = \Sigma A X^2 + 2 \Sigma B YZ \\ \psi_4(X, Y, Z, T) = \Sigma a X^2 + 2 \Sigma b YZ \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} A \ldots D \\ a \ldots d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \ldots C'' \\ b \ldots c'' \end{bmatrix},$$

et posons $M = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$. A cause de $n = M = 4$, les formes φ_4 et ψ_4 sont identiques aux suivantes :

$$\pi_M(X, Y, Z, T) = \Sigma\, \delta^3_{A'A''D}\, X^2 + 2 \Sigma\, \delta^3_{B'B''D}\, YZ, \tag{6}$$

$$\rho_M(X, Y, Z, T) = \Sigma\, \delta^{n-3}_{[A'A''D]} X^2 + 2 \Sigma\, \delta^{n-3}_{[B'B''D]} YZ, \tag{7}$$

où les notations s'expliquent comme au numéro précédent, la correspondance des mineurs résultant de l'égalité

$$\begin{aligned} \Delta_n &= A A' A'' D D' \ldots + 2 B B' B'' D D' \ldots \\ &= \delta^3_{A'A''D}\, \delta^{n-3}_{[A'A''D]} + \delta^3_{B'B''D}\, \delta^{n-3}_{[B'B''D]} + \ldots \end{aligned}$$

où D, D′, ... sont des coefficients d'espèce A.

Pour $n \neq 4$, les formes π_M et ρ_M, entièrement distinctes de φ_n et ψ_n, mais formées d'après la loi (6) (7), pourront être dites les *deuxièmes formes auxiliaires* de la forme φ_n.

Il est facile de généraliser en partant successivement de φ_5, φ_6, ... D'une manière générale, en posant $J = \frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{(p+1)!}$, on pourra, par ces procédés, faire correspondre à une forme φ_n, deux $p^{\text{ièmes}}$ *formes auxiliaires* σ_J et τ_J.

Ces formes et les identités auxquelles elles donnent lieu ont des applications importantes en Géométrie à n dimensions. Nous nous réservons de revenir sur ce sujet.

M. Andrade adresse la Note suivante :

Sur l'équation fonctionnelle de Poisson.

I. On sait que l'équation fonctionnelle de Poisson condense en un seul et même problème : la théorie des fonctions circulaires, la Statique et la recherche des propriétés métriques dans les trois Géométries euclidiennes ou non euclidiennes.

Cette équation fonctionnelle vise la recherche d'une fonction *continue* $F(x)$ qui satisfait à l'identité

$$F(x+y) + F(x-y) = 2F(x)F(y), \tag{1}$$

avec la condition

$$F(0) = 1, \tag{2}$$

Habituellement *on suppose que la fonction* $F(x)$ *est analytique,* et l'on dérive deux fois par rapport à x, puis par rapport à y, l'identité (1); la comparaison des identités obtenues montre alors que la fonction F doit satisfaire à l'équation différentielle

$$\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{1}{K} F(x) \quad \text{(K désignant une constante).}$$

Si alors on remarque que la fonction F, satisfaisant à (1), est nécessairement une fonction paire, on achève aisément la détermination de F et l'on trouve que la fonction F est, suivant que K est nul, positif on négatif, de l'une ou l'autre des trois formes :

$$\left\{\begin{aligned} & F = 1, \\ & F(x) = \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{K}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{K}}}}{2} \qquad \text{si} \quad K > 0, \\ & F(x) = \frac{e^{\frac{ix}{\sqrt{-K}}} + e^{-\frac{ix}{\sqrt{-K}}}}{2} \qquad \text{si} \quad K < 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

L'analyse que l'on vient de rappeler suppose que la fonction F admette des dérivées première et seconde.

Or cette double hypothèse est superflue; on peut ne supposer sur la fonction F que la continuité de cette fonction, et cette hypothèse est d'ailleurs la seule qui intervient dans le problème naturel qui aboutit à l'équation de Poisson. Il y a donc intérêt à modifier l'analyse classique que l'on vient de résumer; c'est l'objet de la présente Note. J'indiquerai d'abord la modification la plus intuitive, par laquelle on peut compléter l'analyse précédente, et je donnerai ensuite une solution simple et directe du problème de Poisson.

II. Si l'on regarde la théorie des fonctions circulaires comme connue, on peut démontrer que (3) donne la solution la plus générale de (1) en fonctions continues.

A cet effet, désignons par $\varphi(x)$ une solution quelconque de (1), supposée seulement continue *dans le voisinage* de la valeur $x = 0$.

Soit x_1 une valeur de x appartenant à ce voisinage de $x = 0$, et pour laquelle la fonction $\varphi(x)$ *ait une valeur différente de* 1; si cette valeur est supérieure à 1 elle sera acquise par $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ pour une valeur x' de x, si cette même valeur positive est inférieure à 1 elle sera acquise pour une valeur x'' de x par la fonction $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$; en désignant par F l'une ou l'autre de ces fonctions, on aura donc

$$\varphi(x_1) = F(x_2),$$

x_2 désignant, suivant les deux cas précités, soit x' soit x''. On peut d'ailleurs évidemment supposer que, si

$$|x| < |x'|,$$
$$|x| < |x''|,$$

l'on aura

$$\varphi(x) > 0 \qquad \text{et} \qquad F(x) > 0.$$

Cela étant, l'équation fonctionnelle (1) permet alors de trouver d'une manière univoque toutes les valeurs des fonctions

$$\varphi\left(\frac{Kx_1}{2^n}\right) \qquad \text{et} \qquad F\left(\frac{Ku}{2^n}\right),$$

u désignant, suivant l'hypothèse faite plus haut, soit x' soit x'', et l'entier K ne surpassant pas 2^n; mais alors les fonctions

$$\varphi(tx_1) \quad \text{et} \quad F(tu)$$

sont deux fonctions continues de t, égales pour toutes les valeurs de t qui sont de la forme $\frac{K}{2^n}$, et moindres que 1; donc ces fonctions *seront égales pour toutes les mêmes valeurs de t moindres que* 1; donc enfin

$$\varphi(\theta) = F\left(\theta \frac{u}{x_1}\right);$$

donc la solution la plus générale de (1) est, suivant les cas, ou bien

$$\varphi(x) = \cos\frac{x}{m},$$

ou bien

$$\varphi(x) = \cos \text{hyp.} \frac{x}{m},$$

à moins que $\varphi(x)$ ne prenne dans le voisinage de $x = 0$ que la valeur constante 1.

Les solutions (3) sont donc les plus générales.

Cette analyse complète la précédente, mais elle repose toujours sur la théorie des fonctions circulaires, supposée faite avant l'étude de l'équation de Poisson. Je vais maintenant exposer une méthode qui rattache à l'équation (1) la théorie même des fonctions circulaires.

III. J'envisage donc une fonction F satisfaisant aux conditions (1) et (2), et je suppose seulement que cette fonction F soit continue.

Cette fonction *étant continue est intégrable;* je pose alors

$$\chi(x) = \int_0^x F(t)\,dt,$$

la fonction $\chi(x)$ *admet alors* $F(x)$ *pour dérivée.*

Je suppose, pour fixer les idées, que l'on ait $x > y$ et je considère l'intégrale

$$\int_0^{x+y} F(t)\,dt$$

on aura identiquement

$$\begin{aligned}\int_0^{x+y} F(t)\,dt &= \int_0^{x-y} F(t)\,dt + \int_{x-y}^{x} F(t)\,dt + \int_x^{x+y} F(t)\,dt \\ &= \chi(x-y) + \int_0^y F(x-t)\,dt + \int_0^y F(x+t)\,dt \\ &= \chi(x-y) + \int_0^y [F(x-t) + F(x+t)]\,dt,\end{aligned}$$

où, en vertu de (1),

$$\chi(x+y) = \chi(x-y) + 2F(x)\chi(y); \tag{4}$$

on a encore identiquement

$$\begin{aligned}\int_0^{x+y} F(t)\,dt &= \int_0^{y-x} F(t)\,dt + \int_{y-x}^{y} F(t)\,dt + \int_y^{y+x} F(t)\,dt \\ &= \chi(y-x) + \int_0^x F(y-t)\,dt + \int_0^x F(y+t)\,dt \\ &= \chi(y-x) + \int_0^x [F(y-t) + F(y+t)]\,dt,\end{aligned}$$

ou, toujours en vertu de (1),

$$(5) \qquad \chi(x+y) = \chi(y-x) + 2F(y)\chi(x).$$

On a déjà observé que la fonction F est paire, la fonction χ est donc impaire, en sorte qu'en ajoutant les équations (4) et (5) membre à membre on aura

$$(6) \qquad \chi(x+y) = F(x)\chi(y) + F(y)\chi(x).$$

La fonction χ admettant une dérivée, *l'identité* (6) *montre que la fonction* F *admettra aussi une dérivée.*

Prenons, par rapport à x, puis par rapport à y, les dérivées des deux membres de l'identité (6); nous aurons

$$F(x+y) = F'(x)\chi(y) + F(y)F(x),$$
$$F(x+y) = F'(y)\chi(x) + F(x)F(y);$$

d'où, en retranchant ces équations membre à membre,

$$F'(x)\chi(y) = F'(y)\chi(x);$$

d'où, en désignant par K une constante, on conclut

$$F'(x) = K\chi(x);$$

d'où, en remontant à l'une des expressions de $F(x+y)$,

$$(7) \qquad F(x+y) = F(x)F(y) - K\chi(x)\chi(y).$$

D'ailleurs la formule $F'(x) = K\chi(x)$ montre que $F'(x)$ admet encore une dérivée et que l'on aura

$$F''(x) = KF(x);$$

cette dernière équation montre le changement de variable

$$x \left\| \frac{x}{\sqrt{|\operatorname{mod} K|}} \right.$$

et permettra de supposer que la constante K est égale à ± 1; alors, en faisant $\varepsilon = \mp 1$, on voit que les fonctions χ et F satisferont aux identités :

$$
(8) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\chi(x+y) &= \chi(x)F(y) + \chi(y)F(x),\\
F(x+y) &= F(x)F(y) + \varepsilon\chi(x)\chi(y\\
\frac{dF}{dx} &= \varepsilon\chi(x),\\
\frac{d\chi}{dx} &= F(x);
\end{aligned}
\right.
$$

des deux dernières on déduit, en vertu de (2),

$$
(9) \qquad F^2(x) - \varepsilon\chi^2(x) = 1;
$$

on déduit aussi

$$
\frac{d^{2k}F}{dx^{2k}} = \varepsilon^k F, \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{d^{2k}F}{dx^{2k}}\right)_0 = \varepsilon^k; \qquad \left(\frac{d^{2k+1}F}{dx^{2k+1}}\right)_0 = 0;
$$

on déduit alors de là que la fonction F est développable en série et que l'on a

$$
F = 1 - \frac{x^2\varepsilon}{1.2} + \frac{x^4\varepsilon^2}{1.2.3.4} + \ldots;
$$

on aurait aussi

$$
\left(\frac{d^{2k}\chi}{dx^{2k}}\right) = 0, \qquad \left(\frac{d^{2k+1}\chi}{dx^{2k+1}}\right)_0 = \varepsilon^k;
$$

le problème statique évoque donc de lui-même les séries d'Euler. On est ainsi conduit, par la voie la plus naturelle et la plus simple, à envisager la fonction exponentielle comme la représentation analytique du *groupe d'équivalence* et à fondre, comme je l'ai montré ailleurs, en une seule étude : les fonctions circulaires, la Trigonométrie sphérique, les Trigonométries planes euclidiennes ou non euclidiennes et la Statique.

SÉANCE DU 3 JANVIER 1900.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

La Société, réunie en assemblée générale, procède au renouvellement du Bureau et à l'élection du Conseil.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Blumenthal, présenté par MM. Painlevé et Borel; M. Breitling, présenté par MM. Blutel et Bourlet; M. Baire, présenté par MM. Drach et Borel.

Communications :

M. Bricard : *Sur les propriétés métriques des correspondances birationnelles.*

M. de Montcheuil adresse une Note de quelques lignes, dans laquelle il fait observer que l'on peut exprimer les coordonnées d'un point d'une surface minima par les formules suivantes, qui renferment moins de termes que celles de Weierstrass :

$$\begin{aligned} x &= f'(u)\sin u + f''(u)\cos u + f_1'(u_1)\sin u_1 + f_1''(u_1)\cos u_1, \\ y &= -f'(u)\cos u + f''(u)\sin u - f_1'(u_1)\sin u_1 + f_1''(u_1)\cos u_1, \\ z &= i[f(u) + f''(u) + f_1'(u_1) + f_1''(u_1)]. \end{aligned}$$

SÉANCE DU 17 JANVIER 1900.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. Fontené : *Sur l'interprétation géométrique de la condition* $\Theta = 0$ *pour un système de deux coniques ou de deux quadriques.*

M. Bricard : *Sur les lignes triplement orthogonales.*

M. Hadamard : *Sur les équations aux dérivées partielles.*

M. Hadamard fait la Communication suivante :

Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires, considérées comme fonctions des données initiales.

On sait qu'en 1896-1897 M. Bendixson (¹), d'une part, M. Picard (²), de l'autre, ont démontré, en restant dans le domaine réel et sans supposer les fonctions données analytiques, la continuité

(¹) Ce Bulletin, 1896.
(²) Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV.

et la dérivabilité des intégrales d'un système d'équations différentielles ordinaires par rapport aux constantes d'intégration.

Je vais indiquer ici la démonstration que j'ai donnée dans un cours professé, en 1897-1898, au Collège de France et qui n'a, d'ailleurs, d'autre avantage que celui de la simplicité. Elle ne nécessite, en effet, aucun algorithme nouveau, aucun calcul autre que ceux qui servent à prouver l'existence même des intégrales.

Cette existence est démontrée, comme on sait, moyennant certaines conditions d'inégalité (C) dans lesquelles figurent quatre constantes a, b, k, M.

Supposons que les coefficients des équations différentielles données, ou les données initiales, dépendent continûment d'un paramètre α. Si, dans certaines limites de variation de α, on peut prendre a, b, k, M indépendants de α, on pourra dire que les conditions (C) sont vérifiées *uniformément*.

S'il en est ainsi, *les intégrales seront des fonctions continues de* α. Cela résulte, par un raisonnement bien connu, de ce qu'elles se présentent comme limites de quantités qui dépendent elles-mêmes continûment de α.

Ceci suffit manifestement pour établir la *continuité des intégrales par rapport aux données initiales*.

Pour établir la dérivabilité de ces mêmes intégrales, considérons, par exemple, un système de deux équations à deux inconnues

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= f(x, y, z), \\ \frac{dz}{dx} &= \varphi(x, y, z). \end{aligned} \right.$$

Supposons que, pour $x = x_0$, les inconnues y et z prennent des valeurs données y_0, z_0, fonctions d'un paramètre α, ces fonctions admettant des dérivées.

Pour établir qu'il en est de même de y et de z pour une valeur quelconque de x, nous donnerons à α un accroissement h, moyennant quoi y et z prendront de nouvelles valeurs, que nous désignerons par $y + \eta h$, $z + \zeta h$. Il s'agit de prouver que η et ζ tendent respectivement vers des limites déterminées.

Or, si nous posons

$$F(x, y, z, \eta, \zeta, h) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\,[f(x, y + \eta h, z + \zeta h) - f(x, y, z)], & \text{pour } h \neq 0, \\ \eta\,\dfrac{\partial f}{\partial y} + \zeta\,\dfrac{\partial f}{\partial z}, & \text{pour } h = 0, \end{cases}$$

$$\Phi(x, y, z, \eta, \zeta, h) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\,[\varphi(x, y + \eta h, z + \zeta h) - \varphi(x, y, z)], & \text{pour } h \neq 0, \\ \eta\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \zeta\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}, & \text{pour } h = 0, \end{cases}$$

η et ζ seront déterminés par les équations différentielles

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\eta}{dx} = F(x, y, z, \eta, \zeta, h), \\ \dfrac{d\zeta}{dx} = \Phi(x, y, z, \eta, \zeta, h). \end{cases}$$

Considérons le système des équations (1) et (2) aux quatre inconnues y, z, η, ζ. On voit aisément que ce système satisfait *uniformément* aux conditions (C), pourvu que les dérivées premières de f et de φ par rapport à y et à z satisfassent à des conditions analogues à celles qui sont imposées aux fonctions f et φ elles-mêmes, pour l'application du théorème d'existence au système (1). L'uniformité a d'ailleurs lieu dans un intervalle comprenant la valeur $h = 0$.

Le théorème est donc démontré : les quantités η et ζ admettent, pour $h = 0$, des limites qui sont les dérivées de y et de z par rapport à α, et ces dérivées vérifient le système linéaire

$$\begin{cases} \dfrac{d\eta}{dx} = \eta\,\dfrac{\partial f}{\partial y} + \zeta\,\dfrac{\partial f}{\partial z}, \\ \dfrac{d\zeta}{dx} = \eta\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \zeta\,\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{cases}$$

M. P. Appell adresse la Note suivante :

Note sur les expériences du Commandant Hartmann.

Les remarquables expériences du Commandant Hartmann sur la déformation des métaux [1] montrent que la théorie actuelle

[1] Hartmann, *Distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts* (*Revue d'Artillerie*, t. XLV et XLVI; 1894-1895).

de l'élasticité est insuffisante dès que les pressions ou tractions deviennent considérables. Elles mettent en évidence ce fait que, à partir d'une certaine intensité de la pression ou de la traction, l'écoulement des molécules se fait suivant des surfaces dont le plan tangent fait, avec la direction de l'effort le plus grand, un angle constant, caractéristique du métal employé.

Peut-être pourrait-on faire la théorie de ces faits en partant de l'idée suivante, que je soumets à la discussion, n'ayant pas actuellement le temps d'en poursuivre les conséquences.

D'après la loi de la distribution des efforts autour d'un point, donnée par Cauchy, il existe en chaque point M d'un milieu trois plans rectangulaires sur lesquels ces efforts sont normaux. Prenons ces trois plans pour plans coordonnés et soient n_1, n_2, n_3 les efforts correspondants; considérons la quadrique directrice

$$\frac{x^2}{n_1}+\frac{y^2}{n_2}+\frac{z^2}{n_3}=\pm 1. \tag{1}$$

Les directions des axes sont les directions principales en M.

Sur un élément plan $d\sigma$, mené par M, l'effort est dirigé suivant le diamètre conjugué de ce plan $d\sigma$ par rapport à la quadrique (1).

Ceci posé, on peut imaginer que, par des efforts suffisamment grands, les molécules du milieu sont soumises à une sorte de frottement intérieur qui fait qu'elles ne glissent pas les unes sur les autres tant que la direction de l'effort sur l'élément $d\sigma$ fait avec la normale à cet élément un angle moindre qu'un certain angle φ; mais que le glissement se produit dans le plan de l'élément $d\sigma$ dès que la direction de l'effort, appliqué sur $d\sigma$, fait avec la normale à $d\sigma$ un angle supérieur à φ.

Imaginons alors, pour fixer les idées, un cylindre soumis à une compression uniforme sur ses deux bases. En un point quelconque M du cylindre l'une des directions principales est sensiblement parallèle aux génératrices du cylindre. En outre, si la compression est grande, c'est l'effort parallèle à cette direction qui est le plus grand effort principal : en prenant un axe Mx parallèle aux génératrices on a donc pour l'équation de la quadrique directrice l'équation (1) où n_1 est plus grand que n_2 et n_3.

Dans ces conditions, au moment où la compression commence, la quadrique (1) est sensiblement une sphère; les efforts sur les divers éléments $d\sigma$ sont sensiblement normaux. Quand la compression augmente, n_1 croît plus vite que n_2 et n_3; la quadrique devient un ellipsoïde dont le grand axe est parallèle à l'axe des x. Or, on sait que le plan diamétral qui fait le plus petit angle possible avec son diamètre conjugué passe par l'axe moyen, n_2 par exemple, et fait avec le grand axe Mx ou n_1 un angle θ tel que

$$\operatorname{tang}\theta = \sqrt{\frac{n_3}{n_1}};$$

d'ailleurs l'angle de ce plan avec son diamètre est

$$\lambda = 2\theta.$$

Quand le rapport $\frac{n_3}{n_1}$ est voisin de 1, λ est voisin de $\frac{\pi}{2}$ et aucun glissement ne se produit. Mais quand on augmente la compression, θ diminue, λ diminue et il arrive un moment où λ atteint la limite $\frac{\pi}{2} - \varphi$. Alors un glissement se produit sur l'élément $d\sigma$ faisant avec la direction de l'effort n_1 un angle déterminé

$$\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\varphi.$$

On a donc un écoulement des molécules dans un plan faisant avec la direction de l'effort un angle déterminé. Une fois qu'un glissement se produit sur un élément, l'équilibre est rompu sur les éléments contigus et un glissement se produit sur toute une surface. Les molécules qui se sont ainsi écoulées forment une nappe d'une certaine épaisseur ε dont la cohésion est plus grande que celle de la masse du cylindre. Si l'on continue la compression, une autre nappe analogue se produit dont le feuillet moyen est à une distance au moins égale à ε du feuillet moyen de la précédente.

Je ne me dissimule pas les objections que soulève ce raisonnement ni les difficultés qui se présentent quand la quadrique (1) est un hyperboloïde, mais il m'a paru intéressant d'attirer l'attention sur cette question et d'indiquer un ordre d'idées pouvant peut-être donner la solution du problème.