SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 81-90
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__81_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 AVRIL 1898.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Jahnke : *Sur un théorème relatif aux substitutions orthogonales.*

M. Blutel : *Sur une correspondance entre les lignes asymptotiques des surfaces tétraédrales et les génératrices rectilignes des quadriques.*

M. Duporcq fait la Communication suivante :

Sur un théorème de M. Humbert.

Au moyen des propriétés des fonctions Θ, M. Humbert est, dernièrement, parvenu incidemment au théorème suivant :

Soit 1 2 3 4 5 6 *un hexagone inscrit à une conique et tel que la conique inscrite au pentagone* 2 3 4 5 6 *passe par le point* 1 : *la conique inscrite au pentagone* 1 4 3 6 5 *passera par le point* 2.

Je vais indiquer une démonstration géométrique de cette élégante propriété : elle résulte immédiatement de ce que *si* 1, 2, 3, 1′, 2′, 3′ *désignent six droites tangentes à une même conique, il existe une transformation du second ordre telle que les droites* 1 *et* 1′, 2 *et* 2′, 3 *et* 3′ *soient respectivement réciproques.* Les trois pôles remarquables, dans cette transformation, sont les points (1 1′), (2 2′) et (3 3′), et l'on achève de la déterminer en se donnant les points réciproques (1 2) et (1′ 2′) : les droites 1 et 1′, 2 et 2′ sont bien alors réciproques. Quant aux droites réciproques issues du point (3 3′), elles forment un faisceau involutif, dont on a deux couples de rayons conjugués en joignant le point (3 3′), d'une part aux points (1 1′) et (2 2′) et, d'autre part, aux points (1 2) et (1′ 2′); ce faisceau involutif est donc celui des tangentes menées de (3 3′) aux coniques inscrites au quadrilatère formé par les droites 1, 1′, 2, 2′; la propriété annoncée en résulte.

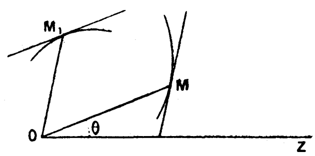
S'il existe une conique tangente à la droite 1 et circonscrite au pentagone 1' 2 2' 3 3', celle-ci se transformera ainsi en une conique tangente à la droite 1' et circonscrite au pentagone 1 2' 2 3' 3. On obtient ainsi le théorème dualistique de celui qu'énonce M. Humbert.

M. Laisant fait la Communication suivante :

Sur la loi de l'hodographe circulaire dans les mouvements dus à une force centrale.

Soit M un point matériel mobile sous l'action d'une force centrale dirigée vers O. Si nous considérons le point correspondant M_1

Fig. 1.



de l'hodographe, la tangente en M_1 est parallèle à OM et l'on a $\frac{ds_1}{dt} = \frac{F}{m}$, en appelant F la force et m la masse.

De plus, en rapportant le mouvement à un axe polaire OZ, nous avons $r^2 \frac{d\theta}{dt} = C$, la constante des aires.

Le rayon de courbure de l'hodographe en M_1 est

$$\rho_1 = \frac{ds_1}{d\theta} = \frac{\frac{ds_1}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \frac{\frac{F}{m}}{\frac{C}{r^2}} = \frac{Fr^2}{mC}.$$

Donc, si Fr^2 est constant, c'est-à-dire si la force est inversement proportionnelle au carré de la distance, l'hodographe est circulaire, et elle n'est circulaire que dans ce cas seulement; c'est-à-dire que la réciproque est vraie.

Cette démonstration est tellement simple que c'est plutôt une *constatation*. Celles qui ont été données jusqu'ici de cette proposition semblent être singulièrement plus compliquées.

SÉANCE DU 14 AVRIL 1898.

PRÉSIDENCE DE M. D'OCAGNE.

Communications :

M. Demoulin : *Démonstration d'un théorème de Ribaucour sur les périsphères.*

M. d'Ocagne : *Sur les méthodes nomographiques.*

SÉANCE DU 4 MAI 1898.

PRÉSIDENCE DE M. LECORNU.

Communications :

M. Bricard : *Note sur une propriété des fonctions elliptiques du second ordre.*

M. Fontené : *Interprétation géométrique des constantes de Cayley, permettant d'exprimer les coefficients d'une substitution orthogonale quaternaire.*

M. Pellet adresse un Mémoire *Sur la théorie des surfaces.*

SÉANCE DU 18 MAI 1898.

PRÉSIDENCE DE M. CARVALLO.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Jarry, présenté par MM. Laisant et Élie Perrin; M. de Montessus de Ballore, présenté par MM. Laisant et d'Ocagne.

Communications :

M. Duporcq : *Sur une correspondance entre deux plans.*

M. Goursat adresse la Communication suivante :

Sur les équations d'une surface rapportée à ses lignes de longueur nulle.

Dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. CXXV, p. 159; 1897), M. E. Cosserat a indiqué des formules très élégantes pour représenter les coordonnées d'un point d'une surface rapportée à ses lignes de longueur nulle. En modifiant un peu les notations, on peut mettre ces formules sous la forme plus symétrique suivante :

Soient α, β les paramètres des deux familles de courbes de longueur nulle, $\lambda(\alpha, \beta)$ une fonction, qui peut être quelconque, de ces deux paramètres, et θ_1, θ_2 deux intégrales particulières distinctes de l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial\alpha}\frac{\partial\theta}{\partial\beta} - \lambda\theta = 0; \tag{1}$$

x, y, z étant les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface considérée, les formules en question peuvent s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} x + iy &= \int \theta_1^2\, d\alpha + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right)^2 d\beta,\\ x - iy &= \int \theta_2^2\, d\alpha + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right)^2 d\beta,\\ z &= i\int \theta_1\theta_2\, d\alpha + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\, d\beta. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

On peut remarquer aussi la formule simple qui donne ds^2 :

$$ds^2 = \frac{1}{\lambda}\left(\theta_1\frac{\partial\theta_2}{\partial\beta} - \theta_2\frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right)^2 d\alpha\, d\beta.$$

SÉANCE DU 1er JUIN 1898.

PRÉSIDENCE DE M. LECORNU.

Communications :

M. Hadamard : *Sur la forme des lignes géodésiques à l'infini et sur les géodésiques des surfaces réglées du second ordre.*

M. Raffy : *Sur les réseaux conjugués et la déformation des surfaces.*

M. de Montcheuil adresse une *Étude des surfaces définies par l'équation* $R + R' = F(u) + F_1(u_1)$.

M. d'Ocagne transmet, de la part de M. Greenhill, une série de figures stéréoscopiques permettant de voir dans l'espace divers exemples de courbes gauches, obtenues par M. Greenhill au cours de ses études sur les intégrales pseudo-elliptiques [1].

M. Lecornu fait la Communication suivante :

Sur les développantes d'une développante de cercle.

Désignons par r le rayon polaire d'un point M d'une courbe (C) et par p la distance de l'origine O à la tangente en M. On sait que le rayon de courbure ρ vérifie la relation $\rho = \frac{r\,dr}{dp}$. Si donc on veut que ρ soit égal à r, on doit poser $dr = dp$; d'où, en appelant a une constante arbitraire, $r = p + a$. On a alors $\rho = p + a$, et cette dernière relation permet de reconnaître que la courbe (C) a pour développée la développante d'un cercle de centre O et de rayon a. Mais, parmi toutes les développantes d'une développante de cercle, une seule jouit de la propriété en question; car, si l'on considère en particulier le point de rebroussement P de la développante de cercle, le point correspondant de la courbe (C) doit se trouver au milieu du rayon OP.

Soit (C′) une autre développante de la même développante de cercle; soient, pour un point M′ de cette courbe, r', p', ρ' les longueurs analogues à r, p, ρ. On a la relation générale $\rho' = p' + a$ que l'on peut écrire $\frac{r'\,dr'}{dp'} = p' + a$; d'où, en intégrant,

$$r'^2 = (p' + a)^2 + \text{const.} \qquad \text{ou bien} \qquad r'^2 = \rho'^2 + \text{const.}$$

Pour avoir la signification géométrique de la constante, faisons correspondre les points M′ et M, de manière qu'ils se trouvent sur une normale commune à (C′) et (C), et désignons par h la distance constante MM′. On a $p' = p + h$ et $\rho' = \rho + h = r + h$. En outre, le triangle OMM′ donne

$$r'^2 = r^2 + h^2 + 2hp = r^2 + h^2 + 2h(r - a) = (r + h)^2 - 2ha = \rho'^2 - 2ha;$$

la constante est donc égale à $-2ha$.

En résumé :

Parmi toutes les développantes d'une même développante de

[1] Le stéréoscope dont M. Greenhill a fait don à la Société lors d'un premier envoi de figures de ce genre est déposé à la bibliothèque de la Société.

cercle, il y en a une dont le rayon de courbure est partout égal au rayon polaire issu du centre du cercle. Pour une autre quelconque de ces courbes, située à la distance h de la première, la différence entre le carré du rayon de courbure et le carré du rayon polaire est constante et égale à deux fois le produit du rayon du cercle par l'écartement h.

SÉANCE DU 15 JUIN 1898.

PRÉSIDENCE DE M. LECORNU.

Communications :

M. Lecornu : *Sur la stabilité de l'équilibre.*

M. Goursat adresse une Note *sur l'existence des fonctions intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles.*

M. Touche fait la Communication suivante :

Sur la résistance des fluides à une sphère.

Nous avons établi, dans des conditions particulières déterminées et pour le cas d'un disque, les courbes trajectoires d'un fluide et les courbes orthogonales aux trajectoires. Les courbes orthogonales aux trajectoires ont pour équation

$$\frac{dx'}{x'} = -\frac{\cos\alpha'}{\sin\alpha'}d\alpha'\left[1+\left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2\right].$$

Si, pour le cas d'un disque, on mène, par le point considéré du fluide dévié, une parallèle au disque, on voit aisément que $\frac{ds_1}{ds}$ a pour valeur $\operatorname{tang}(\alpha+\beta)$, de sorte que l'équation de la courbe devient

$$\frac{dx'}{x'} = -\frac{\cos\alpha'}{\sin\alpha'}d\alpha'[1+\operatorname{tang}^2(\alpha+\beta)].$$

Nous avons calculé, de point en point, la courbe orthogonale représentée par cette équation, ainsi que la courbe trajectoire. Nous avons obtenu, pour un disque indéfini, toutes les courbes trajectoires du fluide et toutes les courbes orthogonales, en traçant les lignes homothétiques directes d'une seule d'entre elles.

Prenons les lignes inverses limites du Tableau ainsi formé; considérons, comme axe des x, une ligne partant du centre O du disque et située dans le plan du disque. La ligne inverse limite de l'axe des x sera une circonférence tangente en O à cet axe des x et dont nous pouvons choisir le rayon égal à l'unité.

Considérons cette circonférence comme un grand cercle d'une sphère et examinons quelles seront, pour le fluide ambiant, les courbes trajectoires et les courbes orthogonales aux trajectoires, autour de cette sphère.

Nous avons vu ([1]) que si, sur notre premier Tableau de lignes trajectoires et de lignes orthogonales, nous traçons des droites passant par le centre O, les lignes inverses limites de ces droites sont des circonférences de rayon égal à l'unité, passant par le point O et dont les tangentes en O sont inclinées, sur l'axe des x, du même angle que les droites correspondantes dans le premier Tableau.

En traçant sur ces circonférences, et en chaque point, des éléments de droite faisant avec la tangente à la circonférence le même angle que la courbe trajectoire, dans le cas du disque, fait avec la droite correspondante dans le premier Tableau et en opérant de même pour la courbe orthogonale, on obtient un second Tableau de courbes trajectoires et de courbes orthogonales autour de la sphère.

Remarquons qu'à peu de distance du point O le second Tableau de courbes trajectoires et de courbes orthogonales coïncide exactement avec le premier Tableau, ce qui doit avoir lieu, si le système de courbes trajectoires et de courbes orthogonales autour de la sphère est bien un système de courbes trajectoires du fluide et de courbes orthogonales et qu'en cette partie les courbes trajectoires et les courbes orthogonales autour de la sphère correspondent exactement aux équations générales de ces courbes pour un fluide, à l'exclusion de toutes autres équations.

Observons que, dans notre Communication sur les figures inverses limites, nous avons indiqué le moyen de déduire d'un premier Tableau de courbes trajectoires et de courbes orthogonales,

---

([1]) *Sur les figures inverses limites* (*Bulletin de la Société mathématique de France,* t. XXVI, n^{os} 1 et 2, p. 3).

un second Tableau de courbes trajectoires et de courbes orthogonales et cela quelle que soit l'équation de la courbe trajectoire qui détermine cette courbe pour le premier Tableau.

En nous appuyant sur cette théorie pour les applications à la résistance d'un fluide à une sphère, nous considérons des courbes orthogonales à une surface plane et qui satisfont aux équations trouvées pour le cas du disque; le second Tableau nous donne des courbes orthogonales à la sphère. Si, comme nous le pensons, sans toutefois pouvoir le démontrer, nous avons trouvé le moyen de déterminer ainsi tous les systèmes de courbes trajectoires et orthogonales qui peuvent exister autour d'une sphère, il s'ensuivra que le second Tableau, obtenu au moyen d'un premier Tableau relatif au cas du disque, sera bien celui du système des courbes trajectoires et des courbes orthogonales d'un fluide autour d'une sphère.

Nous avons fait l'épure des courbes trajectoires et des courbes orthogonales autour de la sphère et voici ce que nous avons remarqué sur le dessin :

L'inflexion brusque a lieu suivant un arc de circonférence c de rayon égal à l'unité, c'est-à-dire de même rayon que la sphère qui limite le corps immergé, cette circonférence partant du point O et sa tangente en O faisant avec l'axe des x un angle de 56°. La longueur de l'arc est de 56°, de sorte que l'inflexion brusque commence en O et se termine sur la parallèle à l'axe des y, distante de cet axe du sinus de 56°. Vers le point O, le fluide, qui se mouvait parallèlement à l'axe des y, s'infléchit brusquement suivant la circonférence c, de manière à faire ensuite avec cet axe un angle de 56°. Si l'on suit la circonférence c, l'inflexion brusque a toujours lieu sur cette circonférence, mais l'angle va en diminuant et devient nul lorsqu'on arrive à l'extrémité d'un arc de 56°. Il n'y a plus d'inflexion brusque en dehors de cet arc; les trajectoires fluides commencent alors à s'infléchir dans l'intérieur de la circonférence c et le font progressivement. La dernière trajectoire, qui donne lieu à une inflexion brusque (très petite), part du point $x = \sin 56°$, $y = 1 - \sin 56°$, et suit une ligne à double courbure, dont l'inclinaison sur l'axe des x part de 90°, arrive à 70° et revient à 85°. La trajectoire, qui part du point $x = 1{,}14$, $y = 1{,}1$, suit une ligne à double courbure, dont l'inclinaison sur l'axe des x part de 90° et s'éloigne peu d'une droite inclinée de 85° sur l'axe des x.

La pression exercée par le fluide sur la sphère est la même que celle exercée sur le disque, aux environs du point O. Nous remarquerons que, dans l'hypothèse envisagée de la densité constante, la vitesse en un point est, pour une même trajectoire, en raison inverse du produit de la distance de cette trajectoire à une trajectoire très voisine, multipliée par la distance du point considéré à l'axe des y.

Le dessin donne ainsi le moyen d'obtenir les vitesses; on en déduit les pressions à l'aide de l'équation

$$v_1^2 - v_0^2 = \frac{2}{\rho}(p_0 - p_1).$$

Nous trouvons ainsi que les pressions sur la sphère vont en diminuant à partir du point O, c'est-à-dire du point correspondant à 0°; qu'elles deviennent nulles pour un point correspondant environ à 65° et que, à partir de ce point, la pression devient inférieure à la pression extérieure.

M. Borel fait la Communication suivante :

Sur les caractéristiques des fonctions θ.

On sait qu'une fonction θ à p variables donne naissance, par l'addition aux arguments de demi-périodes (et multiplication par un facteur exponentiel convenable), à 2^{2p} fonctions associées (y compris la fonction dont on est parti). Chacune de ces fonctions peut être définie par ce que l'on appelle *sa caractéristique,* c'est-à-dire par un système de $2p$ nombres

$$\begin{pmatrix} \lambda_1, & \lambda_2, & \ldots, & \lambda_p \\ \lambda'_1, & \lambda'_2, & \ldots, & \lambda'_p \end{pmatrix}$$

égaux chacun à *zéro* ou à *un*. La caractéristique est dite *paire* ou *impaire,* suivant que la somme

$$\lambda_1\lambda'_1 + \lambda_2\lambda'_2 + \ldots + \lambda_p\lambda'_p = \mathrm{L} \tag{1}$$

est paire ou impaire; d'ailleurs, la fonction θ est paire ou impaire, suivant que sa caractéristique est elle-même paire ou impaire.

La détermination du nombre des caractéristiques paires a de l'importance dans diverses questions; on y parvient ordinairement par voie de récurrence (en passant de p à $p+1$). Il m'a semblé qu'il pouvait y avoir quelque intérêt à y arriver directement.

C'est ce que l'on fait à l'aide des remarques bien simples suivantes. Posons

$$(2) \qquad \mu_1\lambda'_1 + \mu_2\lambda'_2 + \ldots + \mu_p\lambda'_p = \mathrm{M};$$

on aura

$$(3) \qquad (\lambda_1 + \mu_1)\lambda'_1 + \ldots + (\lambda_p + \mu_p)\lambda'_p = \mathrm{L} + \mathrm{M}.$$

Cela étant, groupons ensemble les caractéristiques qui correspondent à des valeurs fixes de $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_p$; leur nombre est 2^p (puisque chacun des nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ peut prendre la valeur zéro ou un). Les équations (1), (2), (3) montrent immédiatement que ces 2^p caractéristiques, ou bien se partagent également en caractéristiques paires et impaires ou bien sont toutes paires (1). Ce dernier cas ne peut d'ailleurs se présenter que si les λ' sont tous nuls.

D'autre part, il est clair qu'il y a 2^p systèmes de valeurs possibles des λ'; à $2^p - 1$ de ces systèmes (ceux dans lesquels les λ' ne sont pas tous nuls) correspondent, pour chacun d'eux, 2^{p-1} caractéristiques paires et 2^{p-1} impaires; au système unique dans lequel les λ' sont tous nuls, 2^p caractéristiques paires. Le nombre total des caractéristiques paires est donc

$$(2^p - 1)2^{p-1} + 2^p = (2^p + 1)2^{p-1},$$

et celui des caractéristiques impaires est $(2^p - 1)2^{p-1}$.

Cette méthode s'étendrait d'ailleurs aisément au cas où l'on considérerait les caractéristiques des fonctions θ obtenues en ajoutant aux arguments, non plus des demi-périodes, mais des $q^{\text{ièmes}}$ parties de périodes.

---

(1) En effet, regardons les λ comme fixes (non tous nuls) et les μ comme variables; si L est impair, $\mathrm{L} + \mathrm{M}$ sera pair si M est impair, et impair si M est pair; d'ailleurs, si les μ prennent tous les systèmes de valeurs différentes (suivant le module 2), il en sera de même des $\lambda + \mu$. Cela suffit pour prouver le résultat énoncé.