SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 49-57
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__49_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 3 MARS 1897.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Communications :

M. Desaint : *Sur les fonctions entières.*

M. Touche : *Sur la vitesse de transmission du mouvement.*

M. Lecornu : *Sur un problème de minimum.*

M. Le Roux adresse un Mémoire *Sur l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre.*

M. Demoulin adresse un Mémoire *Sur les surfaces qui présentent un réseau conjugué formé par des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe tétraédral.*

M. Picard fait une Communication *Sur la théorie des surfaces algébriques,* au point de vue de la Géométrie de situation, et les intégrales de différentielles totales. Il énonce le théorème suivant : *Si p_1 désigne l'ordre de connexion linéaire d'une surface algébrique, celle-ci possédera $p_1 - 1$ intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce.*

M. Andrade adresse la Note suivante :

Sur la stabilité.

Lorsque des corps, soumis à des liaisons, demeurent en équilibre sous l'action de forces données, on sait que l'équilibre subsiste *a fortiori* quand aux liaisons déjà existantes on ajoute des liaisons nouvelles, en d'autres termes quand on *renforce* les liaisons. Ce principe intervient dans la démonstration du principe des vitesses virtuelles, dont il est d'ailleurs une conséquence nécessaire. De plus ce principe est évident.

Mais on tomberait dans une singulière méprise, si, se fiant à l'*évidence* du principe, on voulait, dans l'énoncé précédent, associer à l'idée de l'équilibre l'idée de stabilité. Et pourtant l'évidence apparente n'est-elle pas la même dans les deux cas? J'ai longtemps cru moi-même à la possibilité de généraliser ainsi le principe du renforcement des liaisons. Je me propose, dans cette Note, de démontrer *par un exemple simple* l'impossibilité de cette généralisation.

Un cas très particulier du principe dont il s'agit, étendu de l'équilibre à la stabilité, serait en effet le suivant :

Si deux forces laissent chacune un même corps en une même position d'équilibre STABLE, *leur résultante laissera le corps en la même position d'équilibre* STABLE. Or cette proposition est fausse.

En effet, je vais définir deux forces (fonctions de point) qui, agissant séparément sur un même point matériel, s'annulent chacune en une même position d'équilibre *stable*, et dont la résultante ne jouit pas de la même propriété.

J'envisage à cet effet deux formes quadratiques φ et ψ des coordonnées cartésiennes rectangles x, y, z du mobile. Je suppose de plus que chacune de ces formes est définie et négative. Je désigne par α, β, γ; λ, μ, ν six constantes *positives* dont les trois dernières ne soient pas proportionnelles aux premières, et je considère les forces F et G définies par leurs composantes

$$(F) \qquad 2F_x = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad 2F_y = \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad 2F_z = \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$(G) \qquad 2G_x = \lambda \frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad 2G_y = \mu \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad 2G_z = \nu \frac{\partial \psi}{\partial z};$$

envisageons les mouvements d'un même point matériel sous les actions séparées de ces deux forces. Le premier équilibre est stable autour de l'origine, car en faisant dans les équations de ce mouvement les changements de fonctions

$$x \mid x\sqrt{\alpha}, \qquad y \mid y\sqrt{\beta}, \qquad z \mid z\sqrt{\gamma},$$

on est ramené au cas d'une fonction des forces maxima au point ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$). Pour une raison analogue le second équilibre est encore stable.

Je dis maintenant qu'on peut choisir les formes f et φ, conformément aux hypothèses déjà faites sur elles, de manière à assurer l'instabilité de l'équilibre autour de l'origine du même point matériel sous l'action simultanée des forces F et G.

Si, par exemple, $\alpha\mu - \beta\lambda \neq 0$, je ferai

$$\varphi = -[ax^2 + 2bxy + cy^2] - dz^2 \quad (a, c, d > 0, \quad b^2 - ac < 0),$$
$$\psi = -[a'x^2 + 2b'xy + c'y^2] - d'z^2 \quad (a', c', d' > 0, \quad b'^2 - a'c' < 0).$$

Les équations différentielles *linéaires* du mouvement *estimé dans le plan des xy* auront pour intégrales fondamentales diverses fonctions du temps t

$$x = ge^{rt}, \qquad y = he^{rt},$$

et l'équation *caractéristique* en r sera

$$r^4 + r^2(a\alpha + a'\lambda + c\beta + c'\mu) + (a\alpha + a'\lambda)(c\beta + c'\mu) \\ - (b\alpha + b'\lambda)(b\beta + b'\mu) = 0.$$

Et la stabilité, au sens habituel du mot, *exige* que cette équation en r^2 n'ait que des racines négatives.

Or il est aisé de voir qu'on peut satisfaire à cette équation par des valeurs imaginaires de r^2, car le discriminant est ici

$$\Delta = (a\alpha + a'\lambda - c\beta - c'\mu)^2 + 4(b\alpha + b'\lambda)(b\beta + b'\mu).$$

Or que l'on fasse d'abord

$$a\alpha + a'\lambda = c\beta + c'\mu,$$

ensuite, que l'on choisisse b et b' assez petits en valeur absolue pour satisfaire aux conditions

$$b^2 - ac < 0, \qquad b'^2 - a'c' < 0,$$

mais que l'on choisisse le rapport $\frac{b'}{b}$ intermédiaire entre les nombres $-\frac{\alpha}{\lambda}$ et $-\frac{\beta}{\mu}$ et l'on aura $\Delta < 0$: donc instabilité.

On voit nettement par cet exemple que, hormis le cas où les forces dérivent chacune d'une fonction des forces, on ne peut pas conclure des stabilités partielles à une stabilité résultante.

M. Lémeray adresse la Communication suivante :

Sur la dérivée des fonctions itératives au point limite.

1. Dans les *Annales de Clebsch,* 1870, Schrœder donne un

procédé qui permet, étant donnée une fonction itérable, de former d'autres fonctions itérables. Ce moyen revient, en somme, au suivant : soient Y et z deux fonctions définies par les relations

$$\text{(1)} \qquad Y = \varphi X,$$

$$\text{(2)} \qquad qz = \varphi q x;$$

si l'on sait itérer la première, c'est-à-dire écrire une relation de la forme

$$Y_n = \varphi^n X = \psi(n.X),$$

on saura itérer la seconde, et même l'itérer explicitement, si l'on sait inverser la fonction q; car, éliminant X et Y entre les équations

$$Y = qz, \qquad Y = \varphi X, \qquad X = qx,$$

on aura

$$z = q^{-1}\varphi q x \qquad \text{et} \qquad z_n = q^{-1}\varphi^n q x = q^{-1}\psi(n, qx).$$

2. Soit α un point limite de la substitution x, φx ou plus généralement un point racine de l'équation

$$\text{(1')} \qquad \varphi x - x = 0,$$

le point racine correspondant de l'équation

$$\text{(2')} \qquad \varphi q x - q x = 0$$

sera donné par l'équation $qx = \alpha$ et l'on aura la racine (ou les racines)

$$x = q^{-1}\alpha = \beta.$$

Dérivons l'équation (2); il vient

$$q'(z).z'(x) = \varphi'(q).q'(x).$$

Au point racine de l'équation (2'), on a $z = x$ et, par suite, $q'(z) = q'(x)$; de plus, $\varphi'(q)$ n'est autre que $\varphi'(x)$, où x est remplacé par qx, et, comme au point racine de (2'), $qx = \alpha$, il reste

$$z'(\beta) = Y'(\alpha).$$

Ainsi, aux points racines correspondants des équations (1') et (2') (points distincts, en général), les dérivées des deux fonctions z et Y, par rapport à x, sont égales.

Supposons maintenant que, pour $x = \alpha$, Y' devienne égale à l'unité; dérivons une seconde fois la relation (2). On a

$$q''(z)[z'(x)]^2 + q'(z).z''(x) = \varphi''(q)[q'(x)]^2 + \varphi'(q).q''(x)$$

au point racine β, et, dans notre hypothèse, on a

$$q'(z) = q'(x), \qquad q''(z) = q''(x), \qquad \varphi''(q) = Y''(\alpha),$$
$$z'(\beta) = \varphi'(q\beta) = \varphi'(\alpha) = 1.$$

Il reste donc

$$z''(\beta) = QY''(\alpha),$$

Q désignant la valeur de la dérivée de q par rapport à x, au point racine β.

D'une manière générale, supposons qu'au point racine α de l'équation (1') la dérivée première Y' soit égale à l'unité, et que les dérivées d'indices $2, 3, \ldots, p-1$ soient nulles; autrement dit, que les $p-1$ premières dérivées de la fonction $\varphi x - x$ soient nulles; on aura

$$z^{(p)}(\beta) = Q^{p-1}Y^{(p)}(\alpha). \tag{3}$$

En effet, dérivons p fois l'équation (2), on a

$$q^{(p)}(z)[z'(x)]^p + R + q'(z).z^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(q).[q'(x)]^p + S + \varphi'(q).q^{(p)}(x),$$

R et S désignant respectivement les ensembles de termes contenant des facteurs $\varphi^{(i)}(q)$, $z^{(i)}(x)$ avec $1 < i < p$. Au point racine β, le premier terme du premier membre et le dernier terme du second membre deviennent égaux; S est nul par hypothèse; quant à R, il s'annule si le théorème est démontré pour les valeurs $2, 3, \ldots, p-1$ de p (or il est démontré pour $p = 2$); il reste donc la relation

$$q'(z).z^{(p)}(x) = \varphi^{(p)}(q).[q'(x)]^p,$$

qui se réduit à (3), puisqu'au point racine β on a

$$q'(z) = q'(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi^{(p)}(q\beta) = \varphi^{(p)}(\alpha).$$

SÉANCE DU 17 MARS 1897.

PRÉSIDENCE DE M. PICARD.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Mehmke, présenté par MM. d'Ocagne et Humbert; M. Vitalis (Vassilas), présenté par MM. Hermite et Picard; M. Bricard, présenté par MM. Laisant et Mannheim.

Communications :

M. Touche : *Sur le mouvement des solides dans les fluides.*

MM. Borel et Picard présentent quelques observations sur ce sujet.

M. S. Mangeot adresse la Note suivante :

Sur les conditions pour qu'une courbe plane algébrique ait des axes en nombre donné.

Soient $m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots, m_\lambda$, λ nombres entiers positifs quelconques; d_2 le plus grand commun diviseur de m_1 et m_2, d_3 celui de d_2 et m_3, d_4 celui de d_3 et m_4, ..., d_λ celui de $d_{\lambda-1}$ et m_λ; $\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \frac{p_3}{q_3}, \ldots, \frac{p_{\lambda-1}}{q_{\lambda-1}}$ les avant-dernières réduites des fractions continues égales aux fractions irréductibles qui ont pour valeurs $\frac{m_1}{m_2}, \frac{d_2}{m_3}, \frac{d_3}{m_4}, \ldots, \frac{d_{\lambda-1}}{m_\lambda}$, et $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{\lambda-1}$ les ordres respectifs de ces réduites. On peut démontrer ce résultat :

Pour que les λ équations binômes en z

$$z^{m_n} = \cos\gamma_n + i\sin\gamma_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, \lambda).$$

aient des racines communes, il faut et il suffit que l'on ait, pour $n = 1, 2, \ldots, \lambda$,

$$(\cos\gamma_1 + i\sin\gamma_1)^{\frac{m_n}{d_n}} = (\cos\gamma_n + i\sin\gamma_n)^{\frac{m}{d_n}};$$

et ces racines communes sont les racines de l'équation

$$d \quad = \prod(\cos\gamma_n + i\sin\gamma_n)^{\omega_n},$$

où l'on a

$$\omega_n = p_{n-1} q_n q_{n+1} q_{n+2} \cdots q_{\lambda-1} \times (-1)^{\nu_{n-1}+\nu_n+\nu_{n+1}+\ldots+\nu_{\lambda-1}+n+\lambda}$$

avec $p_0 = 1$, $\nu_0 = 0$, $\omega_\lambda = (-)^{\nu_{\lambda-1}} p_{\lambda-1}$.

Cela étant, je me propose de résoudre la question suivante :

Calculer les conditions pour qu'une courbe C *d'ordre* m, *représentée, en coordonnées rectangulaires, par l'équation entière et à coefficients réels*

$$f(x, y) = 0,$$

ait μ *axes,* μ *étant un nombre donné, et former l'équation de ces axes* (¹).

Je représente par

$$\sum C_m^h a_h x^{m-h} y^h + a_m y^m, \qquad m \sum C_{m-1}^h b^h x^{m-h-1} y^h$$
$$(h = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$$

les groupes des termes de degrés m et $m-1$ du polynôme $f(x, y)$.

Tout axe que peut avoir la courbe C doit être aussi un axe de la conique qui a pour équation

$$\sum C_{m-1}^h \left[\frac{\partial^{m-1} f(x, y)}{\partial x^h \partial y^{m-h-1}}\right]^2 = 0,$$

ou

$$\sum C_{m-1}^h (a_h x + a_{h+1} y + b_h)^2 = 0.$$

Si cette conique est différente d'un cercle, μ ne peut être que l'un des deux nombres 1, 2; or, il est facile d'exprimer qu'un axe de cette conique est axe de la courbe C.

Je suppose que cette conique soit un cercle, et soient $x = \alpha$, $y = \beta$ les coordonnées de son centre.

Si l'on désigne par $F(x, y)$ l'un quelconque des polynômes

(¹) Il ne s'agit ici que d'axes d'ordre pair, c'est-à-dire que de droites qui, prises pour axe des abscisses, font disparaître de l'équation de la courbe les termes de degré impair par rapport à l'ordonnée.

(Voir *Annales de l'École Normale supérieure,* janvier 1897.)

homogènes dont la somme est $f(x+\alpha, y+\beta)$, et par $Mu^k + Nv^k$ les coefficients des diverses puissances de uv dans le développement de $F[u+v, i(u-v)]$, pour que la courbe C ait μ axes, et μ seulement, il est nécessaire et suffisant que toutes celles des équations binômes $Mu^k - Nv^k = 0$, dans lesquelles k n'est pas nul, équations qui sont de la forme

$$\left(\frac{u}{v}\right)^k = \cos\gamma + i\sin\gamma,$$

aient μ racines communes $\frac{u}{v}$, et pas davantage. En remplaçant $\frac{u}{v}$ par $\frac{x-\alpha-i(y-\beta)}{x-\alpha+i(y-\beta)}$ dans l'équation binôme qui a pour racines ces racines communes, on aura l'équation des μ axes.

De ce qui précède, je déduis la méthode suivante, pour résoudre la question proposée lorsque la conique considérée plus haut est un cercle.

Posant

$$\alpha = -\frac{\Sigma\, C_{m-1}^h a_h b_h}{\Sigma\, C_{m-1}^h a_h^2}, \quad \beta = -\frac{\Sigma\, C_{m-1}^h a_{h+1} b_h}{\Sigma\, C_{m-1}^h a_{h+1}^2} \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, m-1),$$

je calcule l'expression

$$\psi(k, l) = \sum \frac{i^\sigma}{\rho!\,\sigma!} \frac{\partial^{k+2l} f(\alpha, \beta)}{\partial\alpha^\rho \partial\beta^\sigma} (C_\rho^l - C_\rho^{l-1} C_\sigma^1 + C_\rho^{l-2} C_\sigma^2 - C_\rho^{l-3} C_\sigma^3 + \ldots)$$
$$(\rho + \sigma = k + 2l),$$

en prenant k successivement égal à 1, 2, 3, ..., m, et en donnant à l successivement les valeurs 1, 2, 3, ... dont la dernière sera $\frac{m-k}{2}$ ou $\frac{m-k-1}{2}$.

Pour que la courbe C ait μ axes sans en avoir davantage, il faut et il suffit que les valeurs de l'expression $\psi(k, l)$, qui correspondent à chaque valeur de k non divisible par μ, soient toutes nulles, sans que les autres le soient toutes, et que, en désignant par μm_1, μm_2, ..., μm_n, ..., μm_λ toutes les valeurs de k multiples de μ auxquelles correspondent pour $\psi(k, l)$ des valeurs V, non nulles d'elles-mêmes, et par

$$A_{1,n} + iB_{1,n}, \qquad A_{2,n} + iB_{2,n}, \qquad A_{3,n} + iB_{3,n}, \qquad \ldots,$$

celles des valeurs V, rangées dans un ordre quelconque, qui répondent à $k = \mu m_n$, on ait

$$\frac{A_{1,n}}{B_{1,n}} = \frac{A_{2,n}}{B_{2,n}} = \frac{A_{3,n}}{B_{3,n}} = \ldots,$$

$$\left(\frac{A_{1,1} + i B_{1,1}}{A_{1,1} - i B_{1,1}}\right)^{\frac{m_n}{d_n}} = \left(\frac{A_{1,n} + i B_{1,n}}{A_{1,n} - i B_{1,n}}\right)^{\frac{m_1}{d_n}}$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots, \lambda).$$

L'équation des μ axes est

$$\left[\frac{x - \alpha + i(y - \beta)}{x - \alpha - i(y - \beta)}\right]^{\mu} = \prod \left(\frac{A_{1,n} + i B_{1,n}}{A_{1,n} - i B_{1,n}}\right)^{\omega_n}.$$

Les nombres d_n, ω_n, p_n, q_n, ν_n sont définis comme plus haut, en partant des nombres m_1, m_2, ..., m_n, ..., m_λ $\left(\text{les exposants } \frac{m_1}{d_n}, \frac{m_n}{d_n} \text{ sont entiers}\right)$.