SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 128-134

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__128_1>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 8 NOVEMBRE 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : M. Henri Fleury, présenté par MM. Delannoy et D. André; M. Lecornu, présenté par MM. Haton de la Goupillière et L. Lévy; M. Gaston Martin et M. Amédée Wagner, présentés par MM. Laisant et d'Ocagne.

Communications :

M. Guyou : *Sur les équations du clapotis.*

M. Kœnigs : *Sur une équation fonctionnelle.*

M. Kœnigs : *Sur les aires des podaires d'une courbe fermée convexe et de sa développée, prises par rapport au même point.*

M. Humbert : *Sur les surfaces représentables point par point sur le plan.*

M. Humbert : *Sur les courbes algébriques tracées sur les surfaces algébriques.*

M. Touche fait la Communication suivante :

Transformation de l'équation de continuité en Hydraulique.

Pour établir l'équation de continuité en Hydraulique, on considère un petit parallélépipède rectangle MCFBAEGD dont le sommet est M.

Soit v_1 la vitesse en M de la trajectoire fluide qui passe par ce point à l'instant t. Appelons P le plan osculateur de cette trajectoire et P' un plan perpendiculaire au plan P et passant par le premier élément de trajectoire.

Appelons s une longueur de trajectoire comptée à partir du point M, s' une longueur comptée à partir du même point, sur la courbe normale à toutes les trajectoires qu'elle rencontre et tangente à leurs plans osculateurs, s'' une longueur comptée sur la courbe normale à toutes les trajectoires qu'elle rencontre et normale à leurs plans osculateurs; ds sera un élément de trajectoire, ds' un élément de normale principale à la trajectoire et ds'' un élément de binormale.

Soient a, a', a'' les cosinus directeurs de ds; b, b', b'' ceux de ds', et c, c', c'' ceux de ds''.

Nous nous proposons de développer les trois derniers termes de l'équation de continuité. Pour cela, nous commençons par y remplacer u, v et w par leurs valeurs en fonction de v_1, a, a', a''. Pour développer le premier terme du trinôme ainsi obtenu, nous considérons le plan P qui contient l'élément ds; nous abaissons, du sommet A du petit parallélépipède, une perpendiculaire sur le plan P. Du pied de cette perpendiculaire, nous abaissons dans le plan P une perpendiculaire sur ds. Nous faisons une transformation de coordonnées; nous avions les axes coordonnés suivant MA, MB, MC; après la transformation, nous les avons suivant ds, ds' et ds''. Alors, en remarquant que l'on a $\frac{ds}{dx} = a$, $\frac{ds'}{dx} = b$, $\frac{ds''}{dx} = c$, nous obtenons

$$a^2 v_1 \frac{d\rho}{ds} + ab v_1 \frac{d\rho}{ds'} + ac v_1 \frac{d\rho}{ds''}$$

pour la dérivée de $\rho a v_1$ par rapport à x en ne faisant varier que ρ. Nous obtenons de même la dérivée de $\rho a v_1$ par rapport à x en ne faisant varier que v_1, puis sa dérivée en ne faisant varier que a. Cette dernière dérivée contient $\frac{da}{ds'}$ et $\frac{da}{ds''}$ que nous allons remplacer par d'autres quantités.

A partir du point M, considérons l'élément ds'; au point M l'élément de trajectoire est ds; soit $d\sigma$ l'élément de trajectoire qui passe par l'autre extrémité de ds'; projetons ce dernier élément sur le plan P; appelons $\delta\alpha$ l'angle formé par cette projection avec l'élément ds et $\delta\beta$ l'angle formé par l'élément $d\sigma$ avec sa projection sur le plan P.

A partir du même point M, considérons l'élément ds''; au point M l'élément de trajectoire est ds; soit $d\sigma'$ l'élément de trajectoire qui passe par l'autre extrémité de ds''; projetons ce dernier élément sur le plan P'; appelons $\delta'\alpha$ l'angle formé par cette projection avec l'élément ds et $\delta'\beta'$ l'angle formé par l'élément $d\sigma'$ avec sa projection sur le plan P'.

La considération de triangles sphériques nous donne

$$\frac{da}{ds'} = -b\frac{\delta\alpha}{ds'} - c\frac{\delta\beta}{ds'},$$

$$\frac{da}{ds''} = -c\frac{\delta'\alpha}{ds''} - b\frac{\delta'\beta'}{ds''}.$$

Nous remplaçons $\frac{da}{ds'}$ et $\frac{da}{ds''}$ par ces valeurs dans la dernière dérivée partielle considérée.

Pour développer le deuxième terme du trinôme, nous considérons toujours le plan P qui contient l'élément ds; mais, au lieu de considérer, comme précédemment, le sommet A du petit parallélépipède, nous considérons le sommet B. De ce sommet, nous abaissons une perpendiculaire sur le plan P; du pied de cette perpendiculaire, nous abaissons dans le plan P une perpendiculaire sur l'élément ds. A la suite d'un changement d'axes coordonnés, nous obtenons la dérivée de $\rho a' v_1$ par rapport à y, en faisant varier successivement ρ, v_1 et a'; la dérivée partielle par rapport à a' contient $\frac{da'}{ds'}$ et $\frac{da'}{ds''}$ que nous remplaçons par des fonctions de $\frac{\delta\alpha}{ds'}$, $\frac{\delta'\alpha}{ds''}$, $\frac{\delta\beta}{ds'}$, $\frac{\delta'\beta'}{ds''}$ par la considération de triangles sphériques.

Pour développer le troisième terme, nous considérons le sommet C du petit parallélépipède.

Le développement du deuxième et celui du troisième peuvent s'obtenir au moyen de celui du premier, en y remplaçant a, b, c, $\frac{da}{ds}$ par a', b', c', $\frac{da'}{ds}$ pour le second et par a'', b'', c'', $\frac{da''}{ds}$ pour le troisième.

Le trinôme ainsi développé a trente-trois termes qui se réduisent à quatre et l'équation de continuité devient

$$\frac{d\rho}{dt} + v_1 \frac{d\rho}{ds} + \rho \frac{dv_1}{ds} - \rho v_1 \frac{\delta\alpha}{ds'} - \rho v_1 \frac{\delta'\alpha}{ds''} = 0.$$

SÉANCE DU 22 NOVEMBRE 1893.

PRÉSIDENCE DE M. HUMBERT.

Élections :

Sont élus à l'unanimité : M. Burkhardt, présenté par MM. J. Tannery et Kœnigs; M. Lancelin, présenté par MM. Laisant et Chailan.

Communications :

M. Fouret : *Sur le théorème des aires dans le mouvement d'un point matériel.*

M. Humbert : *Sur une surface du sixième ordre et sur la fonction thêta à plusieurs variables.*

M. Désiré André communique le théorème suivant : *Sur le nombre des séquences dans les permutations des n premiers nombres.*

Si l'on désigne par σ_n la valeur moyenne des carrés des nombres de séquences, le rapport $\frac{\sigma_n}{n^2}$ a pour limite, lorsque n croît indéfiniment, la fraction $\frac{4}{9}$, c'est-à-dire le carré de la limite du rapport $\frac{s_n}{n}$, où s_n est la valeur moyenne des nombres de séquences.

M. Max Genty adresse la Communication suivante :

Sur les systèmes collinéaires.

1. Étant données deux ponctuelles superposées projectives u

et u_1, au point M de u correspond le point M_1 de u_1 ; au point M_1 de u correspond le point M_2 de u_1 ; et ainsi de suite. On obtient ainsi une suite indéfinie de points M, M_1, M_2, ..., M_i.

M. Émile Weyr a démontré que, lorsque i augmente indéfiniment, le point M_i a pour limite un des points doubles des deux ponctuelles, à la condition que ces points soient réels.

Ce théorème s'étend évidemment aux autres formes de première espèce et, plus généralement, à deux formes élémentaires quelconques supposées et projectives.

Je me propose dans cette Note de l'étendre aux formes projectives de deuxième et de troisième espèce.

2. Soient Σ et Σ_1 deux systèmes plans supposés et collinéaires; ces deux systèmes ont trois points doubles, E, F, G, que nous supposerons réels. Les points homologues des deux plans sur la droite EF forment deux ponctuelles projectives dont les éléments doubles sont les points E et F ; ces ponctuelles seront parfaitement déterminées si nous nous donnons la quantité λ'', valeur constante du rapport anharmonique formé par les points E et F et par deux points de cette droite, homologues dans les deux systèmes plans Σ et Σ_1. Les quantités λ et λ' déterminent de la même façon les deux ponctuelles homologues situées sur les côtés FG et GE du triangle EFG. Ces trois quantités ne sont pas arbitraires; elles sont liées par la relation nécessaire

$$\lambda\lambda'\lambda'' = 1.$$

Si le triangle EFG est donné, ainsi que deux des quantités λ, λ' et λ'' par exemple, la collinéation des deux systèmes plans sera parfaitement déterminée. Soit M, en effet, un point quelconque de Σ; joignons FM et GM qui coupent respectivement les droites GE et EF aux points φ et γ; déterminons sur ces mêmes droites deux points φ_1 et γ_1, par les égalités anharmoniques

$$(\mathrm{GE}\varphi\varphi_1) = \lambda'. \tag{1}$$

$$(\mathrm{EF}\gamma\gamma_1) = \lambda''. \tag{2}$$

Le point M_1, commun aux droites $F\varphi_1$ et $G\gamma_1$ sera évidemment l'homologue de M dans le système Σ_1.

Ceci posé, supposons qu'au point M_1 de Σ corresponde le point M_2 de Σ_1 ; au point M_2 de Σ, le point M_3 de Σ_1 ; et ainsi de suite. On obtient, par ces opérations successives, une suite indéfinie de points $M, M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots$. Proposons-nous de déterminer la position limite du point M_i, lorsque i augmente indéfiniment. Les droites FM_i et GM_i coupant respectivement les côtés GE et EF aux points φ_i et γ_i, nous avons les relations suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} (GE\varphi\varphi_1) & = \lambda', \\ (GE\varphi_1\varphi_2) & = \lambda', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (GE\varphi_{i-1}\varphi_i) & = \lambda'. \end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} (EF\gamma\gamma_1) & = \lambda'', \\ (EF\gamma_1\gamma_2) & = \lambda'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \\ (EF\gamma_{i-1}\gamma_i) & = \lambda''. \end{cases}$$

Multiplions membre à membre toutes les égalités (3) et toutes les égalités (4); nous obtenons ainsi les deux relations suivantes :

$$(GE\varphi\varphi_i) = \lambda'^i, \qquad (EF\gamma\gamma_i) = \lambda''^i.$$

Supposons que les deux quantités λ' et λ'' soient différentes de l'unité; plusieurs cas peuvent alors se présenter.

Premier cas : $\lambda' > 1$, $\lambda'' > 1$. Les deux quantités λ'^i et λ''^i augmentent indéfiniment avec i, les points φ_i et γ_i tendent respectivement vers les points E et F; le point M_i a alors le point F comme limite.

Deuxième cas : $\lambda' < 1$, $\lambda'' < 1$. Les quantités λ'^i et λ''^i tendent vers zéro; les points φ_i et γ_i ayant alors pour positions limites les points G et E, le point M_i tend vers le point G.

Troisième cas : $\lambda' > 1$, $\lambda'' < 1$. Alors φ_i et γ_i tendant vers le même point E, ce point est aussi la limite du point M_i.

Quatrième cas : $\lambda' < 1$, $\lambda'' > 1$. Dans ce cas, le point M_i tendra vers l'un des deux points G ou F, suivant que λ sera plus grand ou plus petit que 1.

Si $\lambda = 1$, on voit immédiatement que les deux systèmes plans Σ et Σ_1 sont homologiques; le point E étant le centre, et FG l'axe d'homologie. La position limite du point M est alors, suivant la valeur de λ', soit le point E, soit le point d'intersection ε de EM avec FG. Un cas particulier correspond aux valeurs $\lambda = 1$, $\lambda' = -1$, $\lambda'' = -1$; les deux systèmes homologiques sont alors en involution, et, deux points homologues M et M_1 se correspondant doublement, la suite indéfinie des points M_i se compose de ces deux points se reproduisant périodiquement.

Enfin il est impossible que deux des quantités λ, λ' et λ'' soient égales à 1 ; car les deux systèmes Σ et Σ_1 coïncideraient dans leur ensemble.

Nous voyons, en résumé, que, si le triangle des points doubles est réel, le point M_i tend toujours vers l'un des sommets de ce triangle.

Ce théorème s'étend immédiatement aux autres formes de seconde espèce, par exemple à deux gerbes concentriques collinéaires, et aux cordes d'une même cubique gauche se correspondant homographiquement.

3. Le théorème analogue pour la forme fondamentale de troisième espèce se démontrerait de la même façon que dans le paragraphe 2. Nous en donnerons seulement l'énoncé : *Soient deux espaces collinéaires* Σ *et* Σ_1 *ayant leurs quatre points doubles réels et formant un tétraèdre* EFGH. *Au point* M *de* Σ *correspond un point* M_1 *de* Σ_1 ; *au point* M_1 *de* Σ *correspond un point* M_2 *de* Σ_1 ; *et ainsi de suite. On forme ainsi une série indéfinie de points* M, M_1, M_2, ..., M_i, ... *Le point* M_i *tend, lorsque i augmente indéfiniment, vers l'un des sommets du tétraèdre* EFGH.