Seconde partie, revue des publications académiques et périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 2 (1884), p. 5-214
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_2_5_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, t. XCVI; 1883 (1).

NOTA. — On a oublié de mettre en tête de la page 221 du numéro de novembre 1883 les mots : *n°* 13; 26 *novembre*.

N° 14; 2 avril.

Séance publique annuelle.

N° 15; 9 avril.

Schwarz. — Sur les surfaces à courbure moyenne nulle sur lesquelles on peut limiter une portion finie de la surface par quatre droites situées sur la surface. (1011).

De telles surfaces sont en général composées d'un nombre infini de parties identiques; il y a exception pour cinq classes de surfaces; pour chacune toutes les lignes droites qu'elles contiennent sont parallèles aux axes de symétrie d'un cube; M. Schwarz a étudié deux de ces surfaces, M. Neovius a étudié la troisième.

Cruls. — Observation du passage de Vénus à Punta-Arenas. (1013).

(1) Voir *Bulletin*, t. VII, p. 187.

Périgaud. — Observations de la comète Swift-Brooks, faites à l'équatorial coudé. (1015).

Appell. — Sur les fonctions uniformes affectées de coupures et sur une classe d'équations différentielles linéaires. (1018).

Si l'on considère une aire limitée par des arcs d'ellipse tournant leur convexité vers l'intérieur de l'aire et ayant pour foyers respectifs les points (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_n, b_n), une fonction holomorphe dans cette aire $\Phi(x)$ y sera développable en une série de la forme

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)} \left(x_k - \sqrt{x_k^2 - 1}\right)^2,$$

$$x_k = \frac{a_k + b_k - 2x}{a_k - b_k},$$

le signe du radical étant déterminé de telle sorte que le module de

$$x_k - \sqrt{x_k^2 - 1}$$

soit moindre que 1.

Si les ellipses s'aplatissent en segments de droites, on aura l'expression la plus générale d'une fonction admettant ces segments de droites pour coupures.

Ces développements sont analogues à ceux relatifs à une aire limitée par des arcs de cercle.

Soit une équation différentielle linéaire

$$\frac{d^m y}{dx^m} = X_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + X_m y,$$

dans laquelle les coefficients X sont des fonctions uniformes avec un nombre fini de points singuliers, et telle que l'intégrale générale soit holomorphe dans le voisinage du point ∞.

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ les points singuliers des X, et joignons ces points dans l'ordre des indices par une ligne polygonale commençant en a_1 et finissant en a_{n-1} ; l'intégrale générale, qui admet cette ligne pour coupure, sera représentée par une série telle que la précédente, où l'on suppose

$$b_1 = a_2, \quad b_2 = a_3, \quad \ldots, \quad b_n = a_{n-1}.$$

De Jonquières. — Loi des périodes. (1020).

Dyck (W.). — Remarques sur la primitivité des groupes. (1024).

Résumé d'un Mémoire inséré dans les *Mathematische Annalen,* où l'auteur définit la primitivité et la non-primitivité d'un groupe sans représenter les substitutions du groupe par des permutations de lettres.

Lucas (É.). — Détermination des progressions arithmétiques dont les termes ne sont connus qu'approximativement. (1026).

On donne une série de n quantités

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

qui représentent approximativement, à des écarts fortuits près, les termes consécutifs d'une progression arithmétique inconnue

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

Il s'agit de déterminer cette progression de façon qu'elle puisse être substituée le plus avantageusement possible à la série donnée.

Cesáro. — Sur un théorème de M. Stieltjes. (1029).

Démonstration de ce théorème, fondée sur la proposition suivante :
Soient

$$Q_p = \left(\frac{n}{1}\right) + \left(\frac{n}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{p}\right),$$

en sorte que

$$Q_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n);$$

on aura

$$Q_\alpha + Q_\beta - Q_n = n,$$

pourvu que $\alpha\beta = n$.

Léauté. — Sur un perfectionnement applicable à la turbine Jonval. (1031).

N° 16; 16 avril.

Jordan. — Note sur les travaux de M. H.-J.-S. Smith, lauréat du grand prix de Mathématiques, décédé le 9 février 1883. (1095).

Bertrand. — Remarques relatives au sujet du prix du concours de Mathématiques pour 1883. (1097).

Lœwy. — Deux méthodes nouvelles pour la détermination des ascensions droites des étoiles polaires et de l'inclinaison de l'axe d'un méridien au-dessus de l'équateur. (1098).

Voici le principe de la méthode proposée par M. Lœwy : avec tout instrument méridien on peut mesurer la hauteur d'un astre au-dessus de l'équateur, trouver son ascension droite en notant l'heure de son passage au méridien et déterminer la distance de cet astre au plan instrumental au moyen du fil mobile en ascension droite placé dans le micromètre.

En dirigeant la lunette vers le pôle, on voit défiler dans une nuit plusieurs centaines d'étoiles entre la 10e et la 2e grandeur, observables toute la nuit; pour l'une ou l'autre d'entre elles, on peut donc déterminer, à chaque instant, la déclinaison et la distance au plan instrumental.

Or, en comparant la variation de ces coordonnées par suite du mouvement diurne de la Terre, la désorientation de la lunette se fait sentir et fournit le moyen d'évaluer l'inclinaison de l'axe instrumental au-dessus de l'équateur.

Trois rapports, en effet, varient avec le temps écoulé : le rapport entre la distance au plan instrumental et la déclinaison, le rapport entre cette distance et le temps, le rapport entre le temps et la déclinaison instrumentale. M. Lœwy a établi, pour ces trois cas, les équations de condition en examinant les variations que subissent ces rapports par la désorientation de l'instrument, et l'analyse des formules montre que l'on peut, par l'observation, déterminer au moyen de deux méthodes l'élément cherché.

La première méthode, qui est la plus précise, repose sur ce que, lorsque le chemin parcouru par l'astre dans une direction perpendiculaire au plan instrumental est égal à la distance polaire apparente de l'astre, on peut avec précision déterminer l'inclinaison de l'arc instrumental par les variations qui se manifestent entre la déclinaison apparente et la distance par rapport au plan instrumental.

Dirigeant la lunette vers le pôle, on choisit à un instant quelconque, parmi les astres qui passent entre le pôle et $1°40'$, celui qui est le plus brillant et se trouve encore à $1^h 46^m$ avant son passage au méridien. On effectue alors simultanément, en ascension droite et en distance polaire, deux séries de dix pointés, séparées par un intervalle de cinq minutes, sans qu'il soit nécessaire de marquer le temps.

Puis, après un intervalle de trois heures et demie, on répète la double série de dix pointés sur la même étoile.

La comparaison des résultats nouveaux avec ceux qu'on a obtenus déjà permet de déterminer l'inclinaison de l'axe instrumental au-dessus de l'équateur; en multipliant le nombre des pointés, on peut porter la précision à $\frac{1}{100}$ de seconde.

Sylvester. — Démonstration graphique d'un théorème d'Euler concernant les partitions des nombres. (1110).

Le nombre de partitions de n en nombres impairs, qui se divisent en i groupes de nombres distincts, est égal au nombre de partitions de n en i suites tout à fait distinctes de nombres consécutifs.

Callandreau. — Calcul d'une intégrale double. (1125).

Quadrature approchée de l'intégrale double

$$\frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos ix \cos jy \, dx \, dy}{\sqrt{1+\alpha^2-2\lambda(\mu\cos x+\nu\cos y)}}.$$

Gonnessiat. — Observations de la comète Swift-Brooks, faites avec l'Équatorial Brunner de l'Observatoire de Lyon. (1128).

De Jonquières. — Loi des périodes. (1129).

Picard (É.). — Sur les groupes de transformation des équations différentielles linéaires. (1131).

L'auteur donne, relativement aux équations différentielles linéaires à coefficients rationnels et à intégrales régulières, un théorème qui correspond au théorème fondamental de Galois sur les équations algébriques : il montre l'existence de substitutions de la forme

$$Y_i = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \ldots + a_{im} y_m,$$

où les y sont un système fondamental d'intégrales, où les a sont des fonctions rationnelles d'un certain nombre de paramètres arbitraires, substitutions dont l'ensemble constitue, au sens de M. Lie (¹), un *groupe* G, et qui jouissent de la propriété suivante :

Toute fonction rationnelle de x et de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ainsi que de leurs dérivées, s'exprimant rationnellement en fonction de x, reste invariable quand on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_m$ les substitutions du groupe G; réciproquement, toute fonction rationnelle de x et de $y_1, y_2, \ldots, y_m$ ainsi que de leurs dérivées, qui reste invariable par les substitutions du groupe G, est une fonction rationnelle de x.

Poincaré. — Sur les fonctions à espace lacunaire. (1134).

Considérons le plan des x comme divisé en deux parties par l'axe des quantités réelles. Soit $f(x)$ une fonction n'existant que dans la partie supérieure et étant partout holomorphe dans cette partie; soit $f_1(x)$ une fonction n'existant que dans la partie inférieure et étant partout holomorphe dans cette partie. On peut trouver deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ jouissant des propriétés suivantes : elles existent dans tout le plan; la somme $\varphi + \psi$ est égale à f dans la moitié supérieure, à f_1 dans la moitié inférieure. La fonction φ admettra pour coupure le segment $(-1, +1)$; la fonction ψ admettra les deux coupures $(-\infty, -1)$, $(+1, +\infty)$.

Picquet. — Sur une généralisation du théorème de Fermat. (1137).

Par des considérations de Géométrie, M. Picquet arrive à la proposition suivante :

L'expression

$$\Sigma_n(x) = x^n - \Sigma x^{\overline{\frac{n}{a}}} + \Sigma x^{\overline{\frac{n}{ab}}} - \ldots \pm \Sigma x^{\overline{\frac{n}{ab\ldots l}}},$$

où $a, b, \ldots, l$ sont les facteurs premiers de n, est divisible par n, quels que soient les entiers n et x.

M. Kantor, qui avait établi ce théorème par d'autres considérations de Géométrie (*Annali di Matematica*, t. X, p. 64; *Bulletin*, 2ᵉ série, t. VI, 2ᵉ Partie, p. 114), adresse, dans une Communication postérieure, une réclamation de priorité.

N° 17; 23 avril.

Tisserand. — Rapport sur les travaux de M. Roche, professeur d'Astronomie à la Faculté des Sciences de Montpellier. (1171).

Lœwy. — Nouvelle méthode pour la détermination des ascensions droites des polaires et de l'inclinaison au-dessus de l'équateur. (Suite). (1179).

Trépied. — Sur une manière de déterminer l'angle de position

(¹) *Transformationen-Gruppen* (*Math. Annalen*, t. XVI).

d'un point de la surface d'un astre à l'aide d'une lunette horizontale. (1198).

Thollon. — Sur l'emploi de la lunette horizontale pour les observations de spectroscopie solaire. (1200).

Darboux. — Détermination d'une classe particulière de surfaces à lignes de courbures planes dans un système et isothermes. (1202).

Cette question fait l'objet de deux Communications (nos 17 et 18) : l'élément linéaire étant pris sous la forme

$$ds^2 = e^{2h}(du^2 + dv^2),$$

la fonction h devra, d'après la nature de la question, satisfaire à deux équations aux dérivées partielles, auxquelles on peut substituer les deux suivantes :

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \mathrm{U} e^h + \mathrm{U}_1 e^{-h},$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial v_1^2} = 0,$$

où U et U_1 sont des fonctions arbitraires de u, où v_1 est une fonction de v définie par l'équation

$$dv_1 = \frac{dv}{\sqrt{1+\mathrm{V}^2}},$$

V désignant une fonction arbitraire de v.

M. Darboux déduit de là qu'on doit prendre

$$\mathrm{U} = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(u+\omega)}{2\Theta(\omega)\Theta(u)}\, e^{-u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

$$\mathrm{U}_1 = \frac{\mathrm{H}'(0)\,\mathrm{H}(u-\omega)}{2\Theta(\omega)\Theta(u)}\, e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

$$e^h = \frac{\Theta\left(\dfrac{u+iv_1-\omega}{2}\right)\Theta\left(\dfrac{u-iv_1-\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\dfrac{u+iv_1+\omega}{2}\right)\mathrm{H}\left(\dfrac{u-iv_1+\omega}{2}\right)}\, e^{u\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

ω étant une constante arbitraire, ainsi que le module k.

Finalement, il parvient à la génération suivante des surfaces cherchées :

« Déterminons dans un plan P les coordonnées rectangulaires x_1, y_1 d'un point quelconque en fonction de u_1, v_1, au moyen de l'équation complexe

$$x_1 + iy_1 = \frac{\Theta^2(\omega)}{\mathrm{H}(2\omega)\mathrm{H}'(0)}\,\frac{\mathrm{H}\left(\dfrac{u+iv_1+3\omega}{2}\right)}{\mathrm{H}\left(\dfrac{u+iv_1+\omega}{2}\right)}\, e^{(u-iv_1)\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}};$$

alors l'équation $v_1 =$ const. représente une famille de courbes isothermes.

Faisons correspondre à chaque courbe (v_1) la droite du plan passant par l'origine et définie par l'équation

$$(x_1 + iy_1)e^{-iv_1}\Theta(iv_1 + \omega) = (x_1 - iy_1)e^{iv_1}\Theta(\omega - iv_1).$$

Faisons rouler le plan sur un cône quelconque ayant pour sommet l'origine des coordonnées. Les différentes droites du plan passant par l'origine viennent successivement s'appliquer sur les génératrices du cône. *La courbe* (v_1), *correspondant dans chaque position du plan à la droite de contact du plan et du cône, engendrera la surface cherchée.*

Minkowski. — Sur la réduction des formes quadratiques positives ternaires. (1205).

Soit

$$\varphi = \sum_1^n a_{ik}\xi_i\xi_k$$

une forme quadratique positive; pour $n = 1, 2, 3, 4$ cette forme est réduite, et elle ne l'est que si elle satisfait aux inégalités

$$a_{11} \leqq a_{22} \leqq a_{33} \leqq \ldots \leqq a_{nn},$$

et à toutes les inégalités

$$\varphi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n) \geqq a_{ii},$$

dans lesquelles $\varepsilon_i = +1$ et où les autres ε sont $+1, 0,$ ou -1.

Ce théorème est le suivant :

Une forme quadratique positive $f = \Sigma a_i x_i x_j$ *n'admet que pour un nombre fini de systèmes numériques* (x_i) *une valeur qui ne surpasse pas une quantité positive donnée, montrant que l'on peut, pour chaque forme positive* f, *determiner, par un nombre fini d'opérations, toutes les formes réduites de sa classe.*

De Jonquières. — Loi des périodes (fin). (1210).

Fouret. — Sur une relation d'involution concernant une figure plane formée de deux courbes algébriques dont l'une a un point multiple d'un ordre de multiplicité inférieur d'une unité à son degré. (1213).

Étant données, sur un même plan, une courbe algébrique quelconque (K_n) de degré n, une seconde courbe algébrique (L_r) de degré r, ayant un point multiple I d'ordre $r-1$, et une droite arbitraire (D), si l'on désigne respectivement par a, b, c les points d'intersection avec (D) : 1° d'une droite joignant le point I à l'un quelconque des nr points d'intersection des deux courbes (K_n) et (L_r); 2° de la courbe (K_n); 3° de l'une quelconque des $r-1$ tangentes en I à (L_r); si l'on désigne en outre par e et f deux quelconques des points d'intersection de (D) avec (L_r), on a la relation d'involution

$$\left(\frac{ac}{af}\right)_{nr} = \left(\frac{bc}{bf}\right)_n \left(\frac{ce}{cf}\right)^n_{r-1},$$

les parenthèses désignant les produits des valeurs multiples des quantités mises entre ces parenthèses.

N° 18; 30 avril.

Faye. — Sur la réduction du baromètre et du pendule au niveau de la mer. (1259).

Sylvester. — Sur un théorème de partitions de nombres complexes contenu dans un théorème de Jacobi. (1276).

Conséquences de l'égalité

$$(1 \mp q^a)(1 \mp q^b)(1 - q^c)(1 \mp q^{a+c})(1 \mp q^{b+c})(1 - q^{2c})\ldots$$
$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} (\mp 1)^i q^{\frac{i^2 c + i(a-b)}{2}}.$$

Baillaud. — Une nouvelle formule pour le développement de la fonction perturbatrice. (1286).

Sur une formule applicable à la théorie de Pallas et pour laquelle l'inclinaison des orbites constitue plutôt un avantage qu'un inconvénient.

Tacchini. — Observations des taches et des facules solaires, faites à l'Observatoire royal du Collège Romain pendant le quatrième trimestre de 1882. (1289).

Tacchini. — Observations des protubérances, facules et taches solaires faites à l'Observatoire du Collège Romain pendant le troisième et le quatrième trimestre de 1882. (1290).

De Teffé. — Observation du passage de Vénus à Saint-Thomas des Antilles. (1291).

Cruls. — Sur l'emploi d'un verre biréfringent dans certaines observations d'analyse spectrale. (1293).

Darboux. — Détermination d'une classe particulière de surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes. (1294).

De Jonquières. — Sur les fonctions continues périodiques dont les numérateurs diffèrent de l'unité. (1297).

Lucas (É.). — Sur la généralisation du théorème de Fermat. (1300).

Pellet. — Sur une généralisation du théorème de Fermat. (1301).

Il s'agit de la proposition communiquée par M. Picquet.

Poincaré. — Sur les groupes des équations linéaires. (1302).

Goursat. — Sur quelques intégrales doubles. (1304).

Étude des fonctions de z définies par une équation de la forme

$$\Phi(z) = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{u_0}^{u_1} du \frac{F(u,t,z)}{G(u,t,z)}.$$

On sait les conséquences si importantes que M. Hermite a tirées de l'étude des fonctions analogues où ne figure qu'une intégrale simple.

Bourguet. — Sur la fonction eulérienne. (1307).

L'équation

$$0 = P(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1.2(x+2)} - \ldots$$

a une infinité de racines réelles.

N° 19; 7 mai.

Lœwy. — Nouvelles méthodes pour la détermination de la portion relative de l'équateur instrumental par rapport à l'équateur réel et des déclinaisons absolues des étoiles et de la latitude absolue. (1329).

D'Abbadie. — Observations relatives à la Communication précédente. (1334).

Schwedoff. — Sur la figure de la grande comète de septembre. (1349).

De Jonquières. — Étude des identités qui se présentent entre les réduites appartenant, respectivement, aux deux modes de fractions continues périodiques. (1351).

Autonne. — Sur la nature des intégrales algébriques de l'équation de Riccati. (1354).

Soit z une solution de l'équation de Riccati

$$\frac{d^2y}{dx^2} + Py^2 + Qy + R = 0. \tag{1}$$

Si z satisfait à une équation algébrique Ω de degré m, l'équation Ω jouira des deux propriétés suivantes :

Par l'adjonction de deux intégrales de (1), l'équation Ω se décomposera en facteurs abéliens.

Toutes les m racines de Ω sont fonctions rationnelles de deux quelconques d'entre elles; si donc le degré m est premier, Ω est une équation de Galois.

Léauté. — Études pratiques pour la substitution, à un arc donné, de certaines courbes fermées, engendrées par les points d'une bielle en mouvement. (1356).

N° 20; 14 mai.

Borrelly. — Planète (233), découverte le 11 mai 1883 à l'Observatoire de Marseille. (1415).

Bigourdan. — Observations de la nouvelle planète (233) Borrelly, faites à l'Observatoire de Paris. (1416).

Cruls. — Sur la détermination du méridien dans les basses latitudes, comme celle de Rio-de-Janeiro. (1416).

Duponchel. — Conservation de l'énergie et périodicité des taches du Soleil. (1417).

De Jonquières. — Lois des coïncidences entre les réduites des fractions périodiques des deux modes. (1420).

Kantor (S.) — Sur une généralisation du théorème de Fermat.

Picquet. — Sur la généralisation du théorème de Fermat, due à M. Serret. (1424).

N° 21; 21 mai.

Lœwy. — Observations des petites planètes, faites au grand instrument méridien de l'Observatoire de Paris, pendant le premier trimestre de l'année 1883. (1445).

Périgaud. — Observations de la planète (16) Psyché. (1463).

Poincaré. — Sur les fonctions fuchsiennes. (1483).

Détermination, avec une approximation indéfinie, du groupe d'une fonction fuchsienne susceptible de prendre toutes les valeurs possibles, sauf n valeurs données rangées sur un cercle de rayon 1 et dont le centre est à l'origine.

Bourguet. — Sur la théorie des intégrales eulériennes. (1487).

Sur les racines imaginaires de l'équation

$$P(z) = 0.$$

De Jonquières. — Lois des identités entre les réduites des fractions périodiques des deux modes. (1490).

N° 22; 28 mai.

Bigourdan. — Observations de la grande comète de septembre 1882 (II, 1882), faites à l'Observatoire de Paris. (1559).

Vaneček (*J.-S.* et *M.-N.*). — Sur les plans tangents et osculateurs des courbes à double courbure et des surfaces. (1563).

Les auteurs poursuivent l'étude des propriétés des courbes et surfaces engendrées par le mode qu'ils ont défini antérieurement (30 janvier 1882).

Stephanos. — Sur les relations qui existent entre les covariants et invariants de la forme binaire du sixième ordre. (1562).

Application de la méthode exposée dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 12 janvier 1882.

Picard (*É.*). — Sur les formes quadratiques binaires à indéterminées conjuguées. (1567).

Étude spéciale de la forme

$$F = axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0,$$

où, a, c sont des quantités réelles, où b et b_0 sont des imaginaires conjuguées, ainsi que x, x_0 et y, y_0, dans le cas où $bb_0 - ac = D$ est une quantité positive. — Réduction d'une telle forme; application à la résolution en nombres entiers de l'équation de Pell généralisée

$$xx_0 - Dyy_0 = 1.$$

De Jonquières. — Lois des identités entre les réduites des deux modes. (1571).

N° 23; 4 juin.

Cornu. — Sur la possibilité d'accroître dans une grande proportion la précision des observations des satellites de Jupiter. (1609).

Lalanne. — Note accompagnant la présentation de deux Notes de M. Ed. Collignon relatives à la « Résolution, au moyen de Tableaux graphiques, de certains problèmes de Cosmographie ».

Bigourdan. — Observations de la comète Brooks-Swift (a, 1883), faites à l'Observatoire de Paris. (1639).

Baillaud. — Sur le développement de la fonction perturbatrice. (1641).

Sur l'application de la formule insérée dans le n° 18 des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.*

Appell. — Sur des fonctions uniformes de deux points analytiques qui sont laissées invariables par une infinité de transformations. (1643).

L'auteur montre, sur un exemple, qu'il existe, pour une courbe du premier genre, des fonctions de deux points analytiques (x, y), (x', y') qui ne changent pas de valeur quand on remplace les deux points (x, y), (x', y') par deux autres points (x_1, y_1), x'_1, y'_1) déduits des premiers à l'aide d'une transformation rationnelle réversible, c'est-à-dire que les deux points (x, y), (x', y') étant supposés connus, les coordonnées des deux autres points (x_1, y_1), (x'_1, y'_1) sont déterminées par des équations du second degré ayant pour coefficients des fonctions rationnelles de (x, y), (x', y') et réciproquement.

Farkas. — Sur les fonctions uniformes. (1647).

Si une fonction uniforme n'admet qu'un nombre fini de discontinuités, il n'y a que deux valeurs qu'elle ne puisse pas prendre.

Barbier (*E.*). — Une correction des formules stéréotypées de la Préface de Callet (tirage de 1879). (1648).

Léauté. — Règles pratiques pour la substitution à un arc donné de certaines courbes fermées engendrées par les points d'une bielle en mouvement. Cas des bielles isoscèles et rectangulaires. (1649).

Application des règles indiquées par l'auteur le 7 mai 1883.

N° 24; 11 juin.

Brioschi. — Sur quelques propriétés d'une forme binaire du huitième ordre. (1689).

Étude de la forme binaire du huitième ordre $f(x_1, x_2)$, pour laquelle on a

$$g_2 = \tfrac{1}{2}(ff)_4 = mf,$$

m étant une constante.

Ledieu. — De l'homogénéité des formules. (1692).

Backlund. — Sur le mouvement de la comète d'Encke dans les années 1871-1881. (1711).

Vaněček (*J.-S.* et *M.-N.*). — Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. (1714).

Étude des coïncidences dans le mode général de transformation qui est l'objet des travaux des auteurs.

Perrin. — Sur la théorie de la forme binaire du sixième ordre. (1717).

Dans diverses Communications antérieures (12, 19, 26 février 1883), l'auteur a donné une méthode générale pour calculer les syzygies entre invariants et covariants des formes binaires, et les résultats de l'application de cette méthode à la forme du cinquième ordre. Il donne maintenant un Tableau de formules analogues pour la forme binaire du sixième ordre.

De Jonquières. — Études sur les fractions continues périodiques. (1721).

N° 25; 25 juin.

Lœwy. — Méthode nouvelle pour la détermination des ascensions droites et déclinaisons absolues des étoiles (suite). (1745).

L'auteur apporte un nouveau perfectionnement à la méthode qu'il a communiquée antérieurement à l'Académie, perfectionnement qui repose sur l'usage des observations simultanées de deux polaires ayant même déclinaison.

Faye. — Sur un dessin de la grande comète de 1882 exécuté à l'Observatoire de M. Bischoffsheim, près de Nice. (1756).

Faye. — Sur les mouvements du sol de l'Observatoire de Neuchâtel. (1757).

Kretz. — Sur la détermination des volants des machines-outils. (1769).

Une machine reçoit le mouvement d'un arbre animé d'une vitesse constante; la résistance éprouve, pendant un temps donné, une augmentation connue et reprend ensuite sa valeur normale. On demande de déterminer le moment d'inertie que doit avoir le volant pour que la variation de tension soit une fraction donnée de la résistance agissant à la même distance de l'axe.

Vaněček (*J.-S.* et *M.-N.*). — Sur un mode de transformation des figures dans l'espace. (1773).

Les auteurs donnent divers énoncés généraux relatifs aux degrés de courbes ou de surfaces décrites par le sommet libre d'un triangle ou d'un tétraèdre polaire par rapport à une quadrique dont les autres sommets décrivent des courbes ou des surfaces données.

Perrin. — Sur la théorie des formes binaires du sixième ordre. (1776).

Suite de la Communication du 11 juin.

Picard (E.). — Sur la réduction continuelle de certaines formes quadratiques.

Suite de la Communication du 28 mai.

L'auteur avait montré comment l'étude des formes binaires indéfinies à indéterminées conjuguées se ramène à la question de la réduction continuelle d'une forme définie renfermant plusieurs paramètres; il indique une représentation géométrique qui simplifie notablement la solution du problème.

Picart (A.). — Sur un nouveau système de bascule. (1782).

Cette bascule repose sur l'extension suivante du principe de Roberval :

Soit un parallélogramme articulé à des sommets et dont deux côtés opposés passent par deux points fixes, divisant ces deux côtés en segments inégaux, respectivement proportionnels, deux forces parallèles aux deux autres côtés, appliquées à des points invariablement liés à ces côtés, se feront équilibre si elles ont des grandeurs inversement proportionnelles aux deux segments.

N° 26; 18 juin.

Lœwy. — Méthodes nouvelles pour la détermination des ascensions droites et des déclinaisons absolues des étoiles. (1813).

Cornu (A.) et *Obrecht (A.).* — Études expérimentales relatives à l'observation photométrique des éclipses des satellites de Jupiter. (1815).

Ledieu. — Réciproque de l'homogénéité, similitude des formules. (1854).

Callandreau. — Sur le calcul des variations séculaires des éléments des orbites. (1841).

Communication relative à un Mémoire de M. Hill : *On Gauss's method of computing secular perturbations.*

Perrin. — Sur la théorie de la forme binaire du sixième ordre. (1842).

Barbier (E.). — Sur une formule de Lagrange déjà généralisée par Cauchy. Nouvelle généralisation. (1845).

Le déterminant du sixième ordre dont les éléments sont les mineurs du second ordre d'un déterminant du quatrième ordre Δ est égal à Δ^3 : extension de cette proposition.

Tome XCVII; 1883.

N° 1; 2 juillet.

Bertrand. — Note sur les travaux de M. de la Gournerie. (6).

Stephanos. — Sur le système complet des combinants de deux formes binaires biquadratiques. (27).

L'auteur donne le tableau complet des combinants de deux formes binaires a_x^4, b_x^4; ce tableau présente une composition semblable à celle du système complet de la forme $\alpha_x^6 = (a_x^4, b_x^4)$, qui est l'un des deux combinants élémentaires des deux formes données : l'auteur indique d'intéressantes relations entre les éléments des deux tableaux.

Goursat. — Sur une classe d'équations linéaires du quatrième ordre. (31).

Si les intégrales d'une équation linéaire du quatrième ordre à coefficients uniformes $F(u) = 0$ vérifient une relation homogène du second degré, et une seule, cette relation pouvant être mise sous la forme $u_1 u_4 = u_2 u_3$, les intégrales de cette équation sont les produits des intégrales de deux équations linéaires du second ordre, dont les coefficients sont uniformes, en racines d'équations quadratiques à coefficients uniformes.

Le Paige. — Sur les surfaces du troisième ordre. (34).

Construction d'une telle surface déterminée par 19 points; le point de départ est la proposition suivante :

« Si, par un point P d'une surface du troisième ordre, on mène trois droites arbitraires ξ, η, ζ, les plans qui joignent tous les points de la surface à trois droites de celle-ci, X, Y, Z, ne se rencontrant pas deux à deux, coupent respectivement ξ, η, ζ en des points ξ_1, η_1, ζ_1 dont les jonctions, c'est-à-dire les plans $\overline{\xi_1\eta_1\zeta_1}$, enveloppent une surface de la seconde classe tangente aux faces du trièdre $\xi\eta\zeta$. »

N° 2; 9 juillet.

Foerster. — Sur les conditions du sous-sol de l'Observatoire de Berlin. (78).

Gourier. — Sur une méthode capable de fournir une valeur approchée de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$. (79).

Cette méthode repose sur la substitution aux polynômes X_n de la méthode de Gauss des polynômes que M. Hermite a déduits de la fonction $e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Barbier (E.). — Généralisation du théorème de Jacobi sur les déterminants partiels du système adjoint. (82).

Pellet (*A.*). — Sur la réduction des équations. (85).

Picart (*A.*). — Sur une bascule, nouveau système de romaine à curseur automatique. (86).

N° 3; 16 juillet.

De Saint-Venant et *Flamant.* — Résistance vive ou dynamique des solides. Représentation graphique des lois du choc longitudinal, subi à une de ses extrémités par une tige ou barre prismatique assujettie à l'extrémité opposée. (127).

I. Solutions anciennes et solution nouvelle de la question. — II. Équation différentielle et conditions définies du problème. III. Solution et valeurs successives de la fonction arbitraire qui y entre. — IV. Vérification et justification des expressions trouvées. — V. Temps de la fin du choc.

André (*C.*). — Sur l'observation faite par M. Gonnessiat de la grande comète de 1882. (150).

Gérillot. — Changements produits sur la durée de l'année julienne par les variations des quantités dont dépend cette durée. (151).

La petite différence qui existe entre le moyen mouvement du Soleil adopté par Bessel et celui qu'ont adopté depuis Hansen et Le Verrier n'a, contrairement à l'opinion émise par M. Stone, qu'une influence très faible sur la durée de l'unité de temps employée dans la construction des Tables astronomiques; l'effet en est presque insensible sur le calcul des positions théoriques des corps célestes, dans les limites de temps où les Tables actuelles sont susceptibles de présenter une précision suffisante.

Boussinesq. — Du choc longitudinal d'une barre prismatique, fixée à un bout et heurtée à l'autre. (174).

Extrait d'un Livre actuellement en cours d'impression : *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et des mouvements des solides élastiques, avec Notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse.*

Radau. — Remarque sur le calcul d'une intégrale définie. (157).

Sur la méthode proposée par M. Gourier. — Cas où les limites sont o et ∞.

Le Paige. — Sur les surfaces du troisième ordre. (159).

N° 4; 25 juillet.

De Saint-Venant et *Flamant.* — Résistance vive ou dynamique des solides. Représentation graphique des lois du choc longitudinal, subi à une de ses extrémités par une tige ou barre prismatique assujettie à l'extrémité opposée (*suite*). (214).

V. Loi des dérivées de la fonction arbitraire. Leurs maxima et minima. — VI. Valeurs de ces dérivées dans l'état de niveau libre. — VII. Loi de la fonction arbitraire elle-même. — VIII. Loi des déplacements des divers points de la barre.

Halphen. — Sur quelques équations différentielles linéaires du quatrième ordre. (247).

Il s'agit des équations signalées précédemment par M. Goursat, et dont les intégrales sont liées par une relation quadratique : l'auteur expose comment on peut reconnaître qu'il en est ainsi et les réduire au second ordre. Pour cela, il fait usage d'une courbe gauche, attachée, pour ainsi dire, à l'équation du quatrième ordre, les coordonnées homogènes d'un point quelconque étant, chacune, une intégrale de l'équation. Il y a identité entre les inconvénients de cette courbe et les inconvénients de l'équation différentielle.

Poincaré. — Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. (251).

Les masses de deux corps étant supposées très petites, l'auteur déduit d'un théorème de M. Kronecker l'existence d'une infinité de solutions particulières jouissant, entre autres, des propriétés suivantes : le mouvement est périodique, c'est-à-dire que, le temps augmentant d'une période constante, les trois corps reprennent la même position initiale relative. A la fin d'une période, les distances des trois corps reprennent leur valeur initiale, ainsi que les vitesses relatives estimées soit dans la direction du rayon vecteur, soit dans la direction perpendiculaire. Le système entier a seulement tourné d'un certain angle autour du centre de gravité, supposé fixe.

Picart (A.). — Nouvelle disposition du segment de bascule romaine à curseur automatique. Troisième Note. (252).

Thollon. — Perturbations solaires nouvellement observées. (252).

N° 5; 30 juillet.

De Saint-Venant et *Flamant.* — Résistance vive ou dynamique des solides. Représentation graphique des lois du choc longitudinal, subi à une de ses extrémités par une tige ou barre prismatique assujettie à l'extrémité opposée (*suite*). (281).

IX. Loi des déplacements des points de la barre dans l'état de détente libre, où la barre et le corps heurtant ont cessé de se toucher. — X. Lois des dilatations ou contractions des divers éléments de la barre rapportées à l'unité de leur longueur. — XI. Plus grands déplacements de l'extrémité heurtée. — XII. Détermination de la plus grande des dilatations ou contractions des divers éléments de la barre, sur l'unité de leurs longueurs. — Conclusion.

Picart (A). — Sur l'intégration d'une certaine classe d'équations différentielles partielles du second ordre à deux variables indépendantes. (303).

L'auteur considère le type d'équations aux dérivées partielles du second ordre obtenu en remplaçant R et R', dans l'équation

$$\psi(\mathrm{R}, \mathrm{R}') = 0,$$

par les racines de l'équation

$$(rt - s^2)\mathrm{R}^2 + \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,[(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t]\,\mathrm{R} + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0.$$

N° 6; 6 août.

Passage de Vénus, du 6 décembre 1882. — *Rapports préliminaires.* (355-443).

Mission de l'île d'Haiti. — *Rapport de M. d'Abbadie, de M. Callandreau, de M. Chappuis. Note de M. de la Beaume-Pluvinel.*

Mission du Mexique. — *Rapport de M. Bouquet de la Grye, de M. Héraud, de M. Arago.*

Mission de la Martinique. — *Rapport de M. Tisserand, de M. Bigourdan, de M. Puiseux; Note de M. Térao.*

Mission de la Floride. — *Rapport de M. Perrier.*

Mission de Santa-Cruz de Patagonie. — *Rapport de M. Fleuriais.*

Mission du Chili. — *Rapport de M. de Bernardières, de M. Barnaud, de M. Favereau.*

Mission de Chubut. — *Rapport de M. Hatt; Notes supplémentaires; observations du passage de Vénus à Montevideo, par M. A. de Penfentenyo.*

Mission du Rio-Negro. — *Rapport de M. Perrotin.*

Mission du Cap Horn. — *Rapport de M. Courcelle-Seneuil.*

Mission de Bragado. — *Lettre de Son Excellence le Dr Dardo-Rocha, gouverneur de la province de Buenos-Ayres, à M. Dumas; Rapport de M. Perrin.*

De Saint-Venant et *Flamant.* — Résistance vive ou dynamique des solides. Représentation graphique des lois du choc longitudinal, subi à une de ses extrémités par une tige ou barre prismatique assujetties à l'extrémité opposée (*suite et fin*). (454.)

N° 7; 13 août.

Stone. — Observations relatives à une Communication précédente de M. Gaillot, sur les changements produits sur la durée de l'année julienne. (484).

L'auteur conteste les résultats obtenus par M. Gaillot et maintient ses propres conclusions.

André (*Ch.*) et *Gonnessiat.* — Sur la détermination des ascensions droites des étoiles circumpolaires. (486).

Sur une méthode analogue à celle que préconise M. Lœwy.

N° 8; 20 août.

Mouchez. — Observation des petites planètes, faites au grand instrument méridien de l'Observatoire de Paris, pendant le deuxième trimestre de l'année 1883. (305).

Faye. — Sur une lettre du général Stebnitski, relative à la figure de la Terre. (308).

N° 9; 27 août.

Gaillot. — Sur la mesure du temps. Réponse aux observations de M. E.-J. Stone. (364).

Lord Rayleigh. — Sur une formule relative à la vitesse des ondes, en réponse à M. Gouy. (365).

Autonne. — Recherches sur les groupes d'ordre fini, contenus dans le groupe des substitutions quadratiques homogènes à trois variables. (367).

L'auteur définit un type de substitutions quadratiques homogènes appartenant à un même groupe; il donne la condition pour que ce groupe soit fini et montre comment l'étude des groupes considérés se ramène à l'étude des groupes linéaires fractionnaires à deux variables.

N° 10; 3 septembre.

Janssen. — Rapport sur la Mission en Océanie, pour l'observation de l'éclipse totale du 9 mai 1883. (586).

Dans le Rapport général sont intercalés des Rapports sommaires, rédigés immédiatement après les observations par MM. Janssen, Tacchini, Palisa et Trouvelot et qui permettent de faire la part de chacun; parmi les importants résultats obtenus par ces éminents observateurs, on notera particulièrement les conclusions négatives auxquelles ils paraissent être arrivés relativement à l'existence de planètes intra-mercurielles.

Bigourdan. — Observations de la planète (234), faites à l'Observatoire de Paris. (610).

N° 11; 10 septembre.

Bigourdan. — Observations de la nouvelle comète découverte par M. Brooks et de la planète (234), faites à l'Observatoire de Paris. (636).

Brassinne. — Proposition sur une question de Mécanique relative à la figure de la Terre. (637).

Si l'on considère un ellipsoïde homogène dont l'équation est

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} - 1 = 0,$$

les composantes de la force exercée sur un point (x', y', z') de la masse intérieure sont de la forme Px', Qy', Rz'; l'auteur en conclut que l'ellipsoïde est, pour une masse fluide, une figure d'équilibre, si l'on a la proportion

$$P:Q:R = \frac{1}{A^2} : \frac{1}{B^2} : \frac{1}{C^2}.$$

N° 12; 17 septembre.

Schulhof et *Bossert.* — Éléments et éphémérides de la comète Pons-Brooks (comète de 1812). (662).

Trouvelot. — Recherche de l'étoile rouge observée pendant l'éclipse totale du 6 mai 1883. (665).

Cette étoile pourrait, d'après l'auteur, être une planète intra-mercurielle.

Perrotin. — Sur l'étoile double $\Sigma 2400$ du Catalogue de Dorpat. (665).

N° 13; 24 septembre.

Bigourdan. — Observations des petites planètes (159), (199) et (218) et de la comète de Pons-Brooks, faites à l'Observatoire de Paris. (701).

Périgaud. — Observations de la planète (113) Amalthæa. (704).

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE ([1]).

Tome XI; 1882.

Gorceix. — Étude géologique des gisements de topazes de la province de Minas-Geraes. (10-31).

Sauvage (*L.*). — Sur les propriétés des fonctions définies par un système d'équations différentielles linéaires et homogènes à une ou plusieurs variables indépendantes. (32-78).

L'objet de l'auteur est l'étude des solutions d'un système d'équations aux différentielles totales de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} dy_i = (a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \ldots + a_{in}y_n)\,dx_1 + \ldots \\ + (l_{i1}y_1 + l_{i2}y_2 + \ldots + l_{in}y_n)\,dx_p, \end{aligned}\right.$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$, dans les régions du plan où les coefficients $a, b, \ldots, l$ sont des fonctions analytiques des p variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Il résulte tout d'abord du théorème de M. Bouquet sur les systèmes d'équations aux différentielles totales (*Bulletin*, 1^re^ série, t. III, p. 265) que, si les coefficients a sont des fonctions régulières (au sens de M. Weierstrass) au point $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$, il existe n fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ satisfaisant aux équations proposées, régulières en ce point $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ et prenant en ce point des valeurs arbitrairement choisies $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. Cette proposition permet de définir une solution du système (1); en partant, avec des valeurs déterminées, d'un point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on peut, par la continuité, en imposant aux variables indépendantes des *chemins* et des *marches* déterminées, aboutir, avec des va-

([1]) Voir *Bulletin*, VI_2, 266.

leurs déterminées, à un autre point $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, en supposant, bien entendu, qu'on ne rencontre aucun point singulier des coefficients a, b, ...; mais il est essentiel d'observer qu'on peut, *entre certaines limites*, altérer les *chemins* et les *marches* des variables, sans cesser d'arriver avec les mêmes valeurs au point $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Une *solution* du système (1) est un groupe de n fonctions y définies par le procédé qui vient d'être expliqué.

Quand on considère simultanément plusieurs solutions, on suppose que les variables ont les mêmes marches sur les mêmes chemins.

Un *système* de solutions est l'ensemble de n solutions des équations proposées.

Un tel système

$$\begin{array}{cccc} y_{11}, & y_{21}, & \ldots, & y_{n1}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ y_{1n}, & y_{2n}, & \ldots, & y_{nn} \end{array}$$

est dit fondamental si le déterminant formé au moyen de ses éléments est différent de zéro; M. Sauvage prouve l'existence de systèmes fondamentaux; toute solution du système (1) peut s'obtenir par des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients constants des éléments d'un système fondamental quelconque de solutions. M. Sauvage poursuit les analogies bien évidentes avec la théorie, due à M. Fuchs, des équations différentielles linéaires et donne, en particulier, un procédé pour construire un système fondamental de solutions, en procédant de proche en proche, par la considération de systèmes contenant un nombre de moins en moins grand d'inconnues.

En supposant ensuite que les variables reviennent au point de départ, on arrive, comme pour les équations différentielles linéaires, à la notion de l'*équation fondamentale*, équation dont les racines sont liées en quelque sorte à un certain système fondamental; l'analogie est complète.

Enfin, dans la dernière partie, l'auteur étudie le cas particulièrement simple où il n'y a qu'une seule variable indépendante.

Elliot. — Propriétés et applications de certaines fonctions analogues à la fonction Θ. (791-118).

Sous ce titre, M. Elliot a publié, dans ce Volume des *Annales*, deux Mémoires dont nous rendons compte simultanément, et dont l'objet essentiel est la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles, analogue à celui qui définit les fonctions abéliennes, mais où figurent des intégrales normales de troisième espèce; cette question avait déjà été traitée, d'une façon toute différente, par MM. Clebsch et Gordan (*Theorie der Abelschen Functionen*, p. 287).

M. Elliot la résout en étudiant directement les fonctions $\Theta^{(q)}$ introduites par ces auteurs, et en faisant entrer dans leur composition des constantes telles qu'on puisse leur appliquer les deux théorèmes de Riemann relatifs à la fonction $\Theta[u^{(1)}(x) - G_i]$; la marche suivie est alors toute pareille à celle que M. Briot a adoptée dans sa *Théorie des fonctions abéliennes*. Ajoutons que MM. Clebsch et Gordan ont seulement considéré le cas où les équations aux dérivées partielles contenaient q intégrales de troisième espèce, tandis que M. Elliot traite le cas où elles contiendraient en outre r intégrales normales de deuxième espèce.

Notations : courbe fondamentale, de genre p, de dègré m :

$$F(x,y)=0.$$

Intégrales normales de première espèce :

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots,\quad u_p.$$

Intégrales normales de troisième et de deuxième espèce :

$$v_1,\quad v_2,\quad \ldots,\quad v_q;$$
$$w_1,\quad w_2,\quad \ldots,\quad w_r.$$

Les périodes normales d'indice pair des intégrales $u^{(i)}$ sont représentées par $2\alpha_{ij}$; quant aux périodes d'ordre pair, l'une est égale à $2\pi\sqrt{-1}$, les autres sont nulles.

Pour les intégrales normales $v^{(k)}$, les périodes normales d'indice impair sont nulles; les périodes normales d'indice pair sont désignées par

$$2A_{ki}=u^{(i)}(\eta^{(k)})-u^{(i)}(\xi^{(k)});$$

$(\xi^{(k)},\xi_1^{(k)}),(\eta^{(k)},\eta_1^{(k)})$ désignent les points analytiques pour lesquels $v^{(k)}$ devient infinie; l'intégrale $u^{(i)}(\xi_k)$ est prise le long du chemin formé par les lacets fondamentaux de deuxième espèce conduisant de la racine initiale y_0 avec laquelle commence le circuit unique qui contient le lacet du point $(\xi^{(k)},\xi_1^{(k)})$, chemin suivi des lacets relatifs aux points critiques algébriques qui entrent dans ce circuit jusqu'à la droite $O\xi^{(k)}$ décrite une seule fois de O vers $\xi^{(k)}$; l'intégrale $u^{(i)}(\eta^{(k)})$ a un sens analogue.

Pour les intégrales normales de deuxième espèce $w^{(h)}$, les périodes normales d'indice impair sont nulles; les périodes normales d'indice impair sont représentées par

$$\varepsilon l_{hi}=\left(\frac{du^{(i)}}{dx}\right)_{\zeta^{(h)}};$$

on les obtient en remplaçant x et y par les coordonnées $\zeta^{(h)},\zeta_1^{(h)}$ du pôle de l'intégrale w_h dans les $\frac{du^{(i)}}{dx}$.

Enfin, en considérant les mêmes chemins d'intégration que ci-dessus, on pose

$$v^{(k)}(\eta^{(k')})-v^{(k)}(\xi^{(k')})=L_{kk'},$$

et l'on a

$$L_{kk'}=L_{k'k}.$$

Désignant ensuite par $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_q$, q quantités égales à ± 1, M. Elliot introduit les constantes H définies par les équations

$$4H_s=\varepsilon_1 L_{s1}+\varepsilon_2 L_{s2}+\ldots+\varepsilon_q L_{sq},$$

où

$$s=1,\ 2,\ \ldots,\ q,$$

et il pose

$$\Theta^{(q)}(u^{(i)},v^{(k)})=\sum_{\varepsilon}\Theta\left(u^{(i)}+\sum_{k=1}^{k=q}\varepsilon_k A_{ki}\right)e^{\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{k=q}\varepsilon_k(v^{(k)}+H_k)};$$

chaque terme est le produit d'une fonction Θ ordinaire par une exponentielle; il y a autant de termes que de groupes distincts de quantités ε, c'est-à-dire 2^q; par exemple, pour $q=1$, on a

$$\Theta^{(1)}(u^{(i)}, v^{(i)}) = \Theta(u^{(i)} + A_{1i})e^{\frac{1}{2}v^{(1)}} + \Theta(u^{(i)} - A_{1i})e^{-\frac{1}{2}v^{(1)}}.$$

Ces fonctions $\Theta^{(q)}$ sont les mêmes fonctions que celles considérées par MM. Clebsch et Gordan. M. Elliot considère en outre les fonctions $\Theta_{(r)}$ et $\Theta^{(q)}_{(r)}$ définies comme il suit :

On a

$$\Theta_{(1)} = w^{(1)}\Theta + D\zeta^{(1)}\Theta,$$

le $D\zeta^{(i)}\Theta$ désignant la dérivée de la fonction Θ par rapport à x, où l'on convient de remplacer les variables x et y par $\zeta^{(1)}, \zeta_1^{(1)}$ *dans les dérivées des intégrales* $u^{(i)}$ *seulement*, en d'autres termes

$$D\zeta^{(1)}\Theta = \sum_{i=1}^{2=p} a_{1i}\frac{\partial\Theta[u^{(i)}(x)]}{\partial u^{(i)}(x)};$$

de même,

$$\Theta_2 = w^{(2)}\Theta_{(1)} + D\zeta^{(1)}\Theta^{(1)}.$$

Le deuxième terme du deuxième membre est la dérivée de $\Theta_{(1)}$ par rapport à x, avec la convention que l'on remplace x et y par $\zeta^{(2)}, \zeta_1^{(2)}$ dans les dérivées des intégrales $u^{(i)}$ et de l'intégrale $w^{(1)}$,

$$\Theta_3 = w^{(3)}\Theta_2 + D\zeta^{(1)}\Theta_{(1)};$$

ici, dans la dérivée, par rapport à x de $\Theta_{(2)}$, on doit remplacer x, y par $\zeta^{(3)}$ $\zeta_1^{(3)}$ dans les dérivées des $u^{(i)}$, de $w^{(1)}$ et $w^{(2)}$, ... : $\Theta_{(r)}$ est symétrique par rapport aux diverses intégrales w.

On a ensuite

$$\Theta^{(q)}_{(1)} = w^{(1)}\Theta^{(q)} - D\zeta^{(s)}\Theta^{(q)}.$$

Le deuxième terme du deuxième membre est la dérivée de $\Theta^{(q)}$ par rapport à x, où l'on remplace x, y par $\zeta^{(1)}, \zeta_1^{(1)}$, mais seulement dans les dérivées des intégrales $u^{(i)}$ et dans celles des intégrales $v^{(k)}$:

$$\Theta^{(q)}_{(r)} = w^{(r)}\Theta^{(q)}_{(r-1)} + D\zeta^{(r)}\Theta^{(q)}_{r-1};$$

ici, il faut faire $x = \zeta^{(r)}, y = \zeta_1^{(r)}$ dans $\dfrac{du^{(i)}}{dx}, \dfrac{dv^{(k)}}{dx}, \dfrac{dw^h}{dx}$.

L'étude de la fonction

$$\Theta^{(q)}_{(r)}(u^{(i)} - G_i, v^{(k)} - g_k, w^{(h)} - \gamma_h),$$

où les G_i, g_k, γ_h désignent des constantes quelconques qui, d'ailleurs, sont susceptibles de prendre une infinité de valeurs, conduit ensuite aux propriétés suivantes :

Cette fonction admet $p+q+r$ zéros satisfaisant aux équations

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) - G_i \equiv C_i,$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} v^{(k)}(x_j) - g_k \equiv D_k,$$

$$\sum_{j=1}^{j=p+q+r} w^{(h)}(x_j) - \gamma_h \equiv E_h.$$

Les deuxièmes membres sont des constantes auxquelles on doit ajouter des multiples quelconques des périodes des intégrales qui figurent dans les premiers membres correspondants; les constantes G, g, γ peuvent être choisies de façon que la fonction considérée admette $p+q+r$ zéros donnés arbitrairement.

La considération des courbes *adjointes* conduit ensuite l'auteur aux propositions suivantes :

La fonction $\Theta\begin{Bmatrix}q\\r\end{Bmatrix}$, dont les arguments sont

$$u^{(i)}(x) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} u^{(i)}(x_j) - u^{(i)}(\alpha) - C_i,$$

$$v^{(k)}(x) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} v^{(k)}(x_j) - v^{(k)}(\alpha) - D_k,$$

$$w^{(h)}(x) + \sum_{j=1}^{j=p+q+r-1} w^{(h)}(x_j) - w^{(h)}(\alpha) - E_h,$$

admet le zéro (α, β) et $p+q+r-1$ autres zéros indépendants du premier.

Soient $\Phi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ les équations de deux courbes données de degré n, (a_e, b_e) les mn points d'intersection de la première, (α_e, β_e) les mn points d'intersection de la seconde avec la courbe fondamentale $F(x, y) = 0$, les deux produits

$$V = \prod_{l=1}^{l=m} \frac{\Theta\begin{Bmatrix}q\\r\end{Bmatrix}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) - u^{(i)}(a_e) - C_i, \ldots\right]}{\Theta\begin{Bmatrix}q\\r\end{Bmatrix}\left[\sum_{j=1}^{j=p+q+r} u^{(i)}(x_j) - u^{(i)}(\alpha_e) - C_i, \ldots\right]}$$

et

$$P = \prod_{l=1}^{l=mn} \frac{\Phi(x_e, y_e)}{\Phi(x_e, y_e)}$$

ne diffèrent que par une constante.

M. Elliot se trouve maintenant en mesure de résoudre le problème posé au début de la même façon que M. Briot a résolu le problème de l'inversion pour les équations abéliennes; d'une façon précise, ce problème, si l'on pose, en employant des notations qui s'expliquent d'elles-mêmes,

$$u^{(i)}(x) = \int_{x_0,y_0}^{x,y} \frac{\varphi_i(x,y)}{F'_y(x,y)}\, dx,$$

$$v^{(k)}(x) = \int_{x_0,y_0}^{x,y} \frac{\psi_k(x,y)}{[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}]\, F'_y(x,y)}\, dx,$$

$$w^{(k)}(x) = \int_{x_0,y_0}^{x,yh} \frac{\chi_h(x,y)}{[\zeta^{(h)}]\, F'_y(x,y)}\, dx,$$

consiste dans la résolution par rapport aux x, les u, v, w étant regardés comme donnés, des $p+q+r$ équations différentielles

$$\sum_{n=1}^{n=p+q+r} \frac{\varphi_i(x_n,y_n)}{F'_y(x_n,y_n)}\, dx_n = du_i \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

$$\sum_{n=1}^{n=p+q+r} \frac{\psi_k(x_n,y_n)}{[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}]_n F'_y(x_n,y_n)}\, dx_n = dv_k \quad (k = 1, 2, \ldots, q),$$

$$\sum_{n=1}^{n=p+q+r} \frac{\chi_h(x_n,y_n)}{[\zeta^{(h)}]_n F'_y(x_n,y_n)}\, dx_n = dw_h \quad (h = 1, 2, \ldots, r);$$

les indices n dont sont affectés les crochets signifient que, dans les fonctions linéaires de x, y que représentent ces crochets, on a remplacé x par x_n, y par y_n.

Cette question, interprétée géométriquement, revient à la suivante :

Trouver les $p+q+r$ points d'intersection avec $F(x,y)=0$ d'une courbe adjointe du degré $m+q+r-2$ passant par $p+q+r+m-2$ points de $F(x,y)=0$ et par $q+r$ points situés respectivement sur chacune des droites $[\xi^{(k)}, \eta^{(k)}]$, $[\zeta^{(h)}]$ en dehors de la courbe.

Charve. — De la réduction des formes quadratiques quaternaires positives. (119-133).

M. Selling (*Journal de Borchardt*, t. LXXVII) a donné une méthode de réduction pour les formes ternaires positives que M. Charve a d'ailleurs exposée dans le t. VII des *Annales;* M. Charve applique cette méthode aux formes quaternaires positives.

On commence par remplacer les variables x, y, z, t de la forme quaternaire donnée par les quantités $x-u$, $y-u$, $z-u$, $t-u$, puis on la met par une transformation facile sous la forme

$$\varphi = a(x-y)^2 + b(x-z)^2 + c(x-t)^2 + d(x-u)^2 + e(y-z)^2$$
$$+ f(y-t)^2 + g(y-u) + h(z-t)^2 + k(z-u)^2 + l(t-u)^2,$$

et c'est cette forme que l'on étudie : il est bien aisé de voir comment on passe des substitutions relatives à la forme donnée (à quatre variables) aux substitutions relatives à la forme φ (à cinq variables) et réciproquement.

La forme φ est dite réduite si elle satisfait à l'*une* des conditions suivantes

1° Ou bien tous les coefficients $a, b, c, \ldots, l$ sont positifs;

2° Ou bien a est seul négatif et il est inférieur en valeur absolue à a, b, c, d, e, f, g;

3° Ou bien a et b sont seuls négatifs, de plus a est inférieur en valeur absolue à b, c, d, e, f, g; en même temps h est inférieur en valeur absolue à b, c, e, f, k, l; enfin $a + h$ est inférieur en valeur absolue à b, c, e, f.

Cette définition est précisée par les propositions suivantes, établies par M. Charve :

1° *Il y a toujours une forme équivalente à la forme donnée et vérifiant les conditions précédentes;*

2° *Il n'y en a qu'une, abstraction faite de celle que l'on peut déduire par la permutation des lettres, c'est-à-dire que si une forme satisfait à quelqu'une des trois conditions, aucune forme équivalente ne satisfera à l'une de ces conditions, quelle que soit cette condition.*

En outre, M. Charve établit que la réduction peut être obtenue par l'emploi répété (un nombre fini de fois) de deux substitutions seulement.

Hioux. — Racines communes à deux équations algébriques entières. (135-136).

Note additionnelle à un Mémoire inséré dans le t. X des *Annales*.

Chappuis. — Étude spectroscopique sur l'ozone. (137-186).

Parmentier. — Sur les silicomolybdates. (187-218).

Kœnigs. — Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé. (219-338).

Le travail de M. Kœnigs a été analysé dans la première partie du *Bulletin*.

Brillouin. — Comparaison des coefficients d'induction. (339-424).

Elliot. — Propriétés et applications de certaines fonctions analogues à la fonction Θ. (425-436).

Voir plus haut.

Nicolas. — Étude sur les fonctions de Fourier. (*Supplément*, 1-90).

Monographie des fonctions connues aussi sous le nom de *fonctions cylindriques* et de *fonctions de Bessel*.

I. Propriétés principales des fonctions de Fourier. — II. De la fonction de deuxième espèce. — III. Autres développements en séries; ces développements sont obtenus en introduisant la fonction exponentielle en facteur. — IV. Représentation des fonctions de Fourier par des intégrales définies. — V. Etude de nouvelles intégrales. — VI. Cas où le paramètre ν est de la forme $n + \frac{1}{2}$, n étant un nombre entier et ν le paramètre qui entre dans l'équation différentielle du second ordre : ce cas correspond à une équation différentielle intégrée par M. Serret en employant la méthode des différentielles et indices quelconques; M Nicolas traite cette équation directement et parvient à quelques propriétés remarquables de la fonction exponentielle, signalées en partie par M. Hermite (*Comptes rendus*, 1873).

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement (¹).

LII^e Cahier. — Tome XXXIII, 1882.

Halphen. — Mémoire sur la classification des courbes gauches algébriques. (1-200.)

Ce Mémoire a été couronné par l'Académie des Sciences de Berlin (Prix Steiner, 1882).

Nous citons en partie le résumé que donne l'auteur des principaux résultats obtenus par lui.

Le problème de la classification des courbes gauches algébriques se pose en ces termes :

Énumérer, définir entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré, de telle sorte qu'aucune famille ne puisse jamais être cas particulier d'une autre plus générale.

...Je me borne d'ailleurs, et d'une manière absolue, aux courbes qui n'ont pas de points singuliers.

En premier lieu, il convient d'examiner quelles sont les familles dont on peut obtenir une définition immédiate. A cet égard, on verra dès le début, et de trois manières différentes, le résultat suivant :

Les courbes de degré d, ayant k points doubles apparents, forment une seule famille si le nombre k est compris entre les deux limites H(1) *et* H(2) *ci-après,*

$$H(1) = \frac{(d-1)(d-2)}{2}, \quad H(2) = \frac{(d-2)(d-3)}{2} + 1.$$

Et voici le caractère distinctif de ces familles :

Toute courbe plane, de degré d, ayant des points doubles en nombre h, compris entre ces deux limites, est la perspective d'une courbe gauche de degré d, ayant h points doubles apparents.

Au contraire, *une courbe plane, de degré d, ayant des points doubles en nombre h inférieur à* H(2), *et d'ailleurs quelconque, n'est pas la perspective d'une courbe gauche de degré d.*

Jusqu'au sixième ordre inclusivement, il n'existe pas d'autres courbes que

(¹) Voir *Bulletin*, VII_2, 165.

celles dont je viens de parler. Dès le septième degré, il en apparaît d'autres. C'est de là que naît toute la difficulté du problème.

Quoique la caractéristique h ne puisse suffire à distinguer les diverses familles de courbes d'un même degré, elle est cependant très propre à séparer les unes des autres la plupart de ces courbes. Aussi est-il essentiel de connaître d'abord quelles sont les diverses valeurs numériques de cette caractéristique :

Le minimum de h est l'entier contenu dans $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$.

Voici maintenant un autre résultat bien saillant :

La caractéristique h n'est pas susceptible de devenir égale à un quelconque des entiers depuis $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$ *jusqu'à* $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$, *mais seulement à quelques-uns d'entre eux.*

Ainsi, pour un même degré d, la suite des nombres h est *discontinue,* elle présente des *lacunes.* Cette circonstance ne s'offre pas avant le neuvième degré.

On a en même temps cette proposition :

Les courbes de degré d qui ont moins de $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$ *points doubles apparents sont situées sur des surfaces du second degré. Les nombres h qui s'y rapportent sont donnés par la formule*

$$h = \frac{d(d-1)}{2} - \lambda(d-\lambda),$$

où λ *est un entier arbitraire.* Le minimum $\left(\frac{d-1}{2}\right)^2$ est atteint pour $\lambda = \left(\frac{d+1}{2}\right)$. Les autres valeurs s'obtiennent quand on fait croître λ.

A chacun de ces nombres h correspond une famille de courbes C_2 *situées sur une surface du second degré. Tant que h n'atteint pas la limite* $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$, *ces familles seules existent. Quand h dépasse cette limite* $H(3)$, *les courbes* C_2 *composent des familles qui coexistent avec d'autres correspondant aux nombres* d, h.

Le nombre $H(3)$ est donné par une formule générale, comprenant aussi $H(1)$ et $H(2)$, et dont il sera parlé plus loin.

A partir de la limite $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$, la suite des nombres h ne présente plus de lacunes.

A chaque nombre entier pris pour h, à partir de $\frac{(d-1)(d-2)}{3}$, *correspond une famille de courbes* C_3, *situées sur des surfaces du troisième degré. Tant que h n'atteint pas la nouvelle limite* $3\left[\frac{(d-2)^2}{8}\right]$, *ces courbes* C_3 *existent seules, conjointement avec les courbes* C_2. *Au delà, elles composent encore des familles distinctes tant que h n'atteint pas une autre limite* $H(4)$. *Au delà, elles ne sont plus que des cas particuliers.*

Cette sélection se poursuit encore :

A chaque nombre entier pris pour h, à partir de $3\left[\frac{(d-2)^2}{8}\right]$, *correspond* *une famille de courbes* C_4 *situées sur des surfaces du quatrième ordre* (*sauf une lacune d'une unité dans les valeurs de* h à partir du minimum, quand le degré est divisible par 4). *Tant que* h *n'atteint pas la limite* $2\left[\frac{(d-2)(d-3)}{5}\right]$ *ou, pour le cas où* d *est divisible par* 5, *la limite* $2\left[\frac{d(d-5)}{5}\right]$, *ces courbes* C_4 *coexistent seules avec les courbes* C_2, C_3. *Au delà, elles composent encore des familles distinctes, tant que* h *n'atteint pas une autre limite* $H(5)$.

La même sélection, qui ne peut être reconnue que sur des exemples où d soit choisi assez grand, se continue, et voici enfin l'énoncé général de la loi qui y préside.

Soit m *un nombre entier égal ou inférieur au plus petit nombre entier* M *pour lequel est satisfaite la condition*

$$\frac{(M+1)(M+2)(M+3)}{3} \geqq M\,d+3.$$

A ce nombre m *correspond une fonction* $\mathfrak{H}(m)$ *jouissant de la propriété suivante :*

I. *Toute courbe du degré* d *qui a moins de* $\mathfrak{H}(m)$ *points doubles apparents est située sur une surface de degré moindre que* m.

La fonction $\mathfrak{H}(m)$ *est toujours croissante avec* m. (On dira dans un instant quelle est cette fonction.)

II. *A tout nombre* h, *égal ou supérieur à* $\mathfrak{H}(m)$, *correspond une famille de courbes* C_m, *du degré* d, *situées sur des surfaces de degré minimum* m (sauf quelques lacunes dans les plus petites valeurs de h et le cas $m=2$). *Tant que* h *reste inférieur à une autre limite* $H(m+1)$, *les courbes* C_m *coexistent conjointement à toutes autres et composent des familles distinctes. Au delà de cette limite, ce ne sont plus que des cas particuliers. La limite* $H(m+1)$ *est donnée par la formule*

$$H(m+1)=\frac{(d-m-1)(d-m-2)}{2}+\frac{m(m+1)(m+2)}{6}.$$

III. *La courbe* C_m, *qui a le plus grand nombre de points doubles apparents* $h=H(m+1)-1$, *comporte dans sa définition* $4d$ *arbitraires. Chacune des autres en comporte davantage, savoir* $4d+H(m+1)-1-h$ (sauf encore quelques exceptions pour les plus petites valeurs de h).

Si, dans la fonction H, on fait varier l'entier m de toutes les manières possibles (*sans tenir compte d'ailleurs de la condition* $m \leqq M$), on reconnaît que cette fonction H a un minimum. Ce minimum donne lieu à une exception pour la proposition précédente. Voici cette exception : *En général, il existe dans le voisinage de* M *un ou plusieurs entiers* m, *pour lesquels la limite* $\mathfrak{H}(m)$ *est supérieure au minimum de* H; *ce n'est d'ailleurs pas pour un de ces nombres que* H *atteint un minimum, et, dans tous les cas, comme l'énoncé* II *l'exige,* $H(m+1)$ *est toujours supérieur à* $\mathfrak{H}(m)$.

Pour un tel nombre, la fonction $\mathfrak{H}(m)$ *jouit toujours des propriétés* II *et* III, *mais non plus de la propriété* I; *à l'égard de cette dernière,* $\mathfrak{H}(m)$ *est remplacé par le minimum de* H.

Pour les nombres m_1 *supérieurs à* M, *il existe une fonction* $H_1(m_1)$ *donnant* *lieu encore à la propriété* I. *Cette fonction a la même définition que* H, *mais appliquée à d'autres valeurs de l'argument*

$$\mathfrak{H}_1(m_1) = \frac{(d-m_1)(d-m_1-1)}{2} + m_1(m_1^2-1).$$

L'enoncé II *subsiste si l'on y remplace* $\mathrm{H}(m+1)$ *par* $\mathfrak{H}(m_1+1)$.

Quant à la proposition III, elle se change en celle-ci :

IV. *Chaque famille générale de courbes du degré d, échappant à la définition des courbes* C_m, *comporte* $4d$ *arbitraires.*

Il reste enfin, pour compléter cet énoncé, à définir la fonction $\mathrm{H}(m)$.

V. *Soit σ le plus petit nombre non négatif qui rende $d+\sigma$ divisible par mt et soit $d+\sigma = m\mu$. Sous la condition formelle $m^2 - m < d$, on a*

$$\mathfrak{H}(m) = \frac{(d-\sigma)(m-1)(\mu-1)}{2}.$$

Mais, pour les nombres m', donnant $m'^2 - m' \geqq d$, il n'y a point de formule simple fournissant l'expression de la fonction $\mathfrak{H}(m')$. Je dois me contenter de dire, dans ce résumé, qu'il existe une méthode certaine pour calculer cette fonction.

Il est assez malaisé de saisir la portée véritable de ces théorèmes autrement que par des exemples. Mais encore faut-il prendre le nombre d assez grand pour que la plus grande partie des propositions se puisse appliquer. C'est pour cette raison qu'après avoir présenté, au Chapitre VI de ce Mémoire, la classification suivie complète des courbes jusqu'au vingtième degré inclusivement, j'ai traité aussi et la classification des courbes de degré 120. On verra, par les résultats de cette classification qui terminent le Mémoire, que les théorèmes précédents résolvent véritablement ces deux parties du problème proposé : *Enumérer et distinguer entre elles les diverses familles de courbes d'un même degré.* Quant à cette autre partie : *définir en courbes,* c'est-à-dire *en donner explicitement une représentation* ou, du moins, le moyen d'y parvenir, la solution n'est pas complète. Mais c'est qu'aussi cette partie du problème ne paraît pas susceptible d'une solution générale, et doit être abordée à part pour chaque cas.

Le problème dont il s'agit se réduit à cet autre, appartenant à la Géométrie plane : *Trouver deux courbes, de degrés donnés, qui se touchent en des points dont le nombre soit égal à un nombre donné.* C'est là un problème dont il ne semble pas qu'on puisse jamais obtenir une solution générale.

Toutefois, et c'est là un des traits principaux du Mémoire actuel, ce problème n'existe, à chaque degré d, que pour une faible minorité des familles de courbes. Effectivement, on a cette proposition :

VI. *Toutes les courbes dénommées tout à l'heure* C_m *sont immédiatement définies et représentées au moyen de courbes de degré moindre.*

Si l'on joint à cette proposition celle que j'ai énoncée au sujet des courbes pour lesquelles h est supérieur à $\mathrm{H}(2)$, on n'a plus à traiter de nouveaux problèmes que pour un nombre fort restreint de courbes. Ainsi, dans l'exemple $d = 120$ que j'ai examiné, où le minimum de h est 3540, le maximum 7021, ce sont seulement les nombres h compris entre les limites 6020 et 6903 qui donnent lieu au problème dont je parle. Il ne se pose pas, d'ailleurs, avant le onzième degré, et jusqu'au treizième degré inclusivement il se résout immédiatement.

Tels sont, en résumé, les principaux résultats de ce Mémoire. Quant à la méthode qui s'y trouve employée et à l'ordonnance des matières, il me reste peu de mots à ajouter. Je me sers principalement, pour représenter les courbes, de deux équations ou coordonnées rectilignes

$$\text{(A)} \qquad \psi(x,y) = 0, \quad z = \frac{\psi(x,y)}{\chi(x,y)},$$

où φ, ψ, χ désignent des polynômes entiers. Les lettres x, y, z sont ou bien des coordonnées cartésiennes, ou bien les rapports de coordonnées homogènes. Ce mode de représentation, tout naturel, a été employé par M. Cayley dans quelques courtes études sur les courbes du quatrième et du cinquième degré (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LIV), et par M. Édouard Weyr, dans un Mémoire auquel j'emprunterai un résultat important.

Après avoir exposé, avec tous les développements nécessaires, les premières notions qui se rattachent immédiatement au mode de représentation (A) et y avoir consacré le Chapitre I, je montre, dans le Chapitre II, comment s'offre cette circonstance si curieuse : la suite des nombres h présente des lacunes à partir du minimum.

Le Chapitre III, le plus long du Mémoire, est aussi celui qui contient la théorie la plus abstraite et la plus importante. J'y expose les propriétés de certaines opérations algébriques, analogues à l'élimination, et qui, appliquées aux trois polynômes φ, ψ, χ, conduisent d'une courbe quelconque à une autre courbe que j'appelle *adjointe*. Cette adjointe n'a pas de définition géométrique, elle dépend essentiellement des éléments de la représentation (A) qui peuvent être variés à l'infini. Néanmoins toutes les propriétés de la courbe envisagée, qui ont de l'intérêt pour la classification, se reflètent dans cette adjointe. C'est par l'intervention de cette dernière que je parviens aux résultats énoncés précédemment.

La partie de ces énoncés relative aux courbes situées sur les surfaces du troisième degré est exposée en détail dans le Chapitre IV; l'extension des résultats aux courbes tracées sur les surfaces du quatrième et du cinquième degré et enfin de degré quelconque fait l'objet du Chapitre V, qui se termine par l'exposé des moyens propres à la classification des courbes d'un degré quelconque.

J'ai déjà dit que le Chapitre VI contient les applications numériques nécessaires à la parfaite intelligence des résultats généraux dont la démonstration termine le Mémoire.

Léauté. — Application de la résistance des matériaux au calcul des pièces des machines. (201-210).

Les formules ordinaires de la résistance des matériaux supposent que les composantes et les moments des forces extérieures peuvent être évalués comme s'il n'y avait pas eu de déformation. Cette hypothèse, qui permet de ramener le problème aux quadratures, n'est plus admissible pour les pièces de machines : alors, en effet, les actions principales proviennent souvent d'efforts élastiques exercés par les pièces en relation avec celle que l'on considère, de telle sorte que ces actions dépendent alors essentiellement des déformations qu'éprouvent ces pièces. Ces déformations elles-mêmes dépendent, par suite des liaisons, de la déformation de même ordre qu'éprouve la pièce étudiée, et les forces extérieures auxquelles cette pièce est soumise se trouvent ainsi fonction de la déformation inconnue qu'elle subit; d'autre part, pour étudier rigoureusement un organe d'une machine, il faut étudier séparément les éléments qui le composent et tenir compte, pour chacun de ces éléments, des forces élastiques qu'exercent sur lui les éléments qui le composent.

Dès lors, le problème change de nature : dans l'hypothèse ordinaire, les forces extérieures que l'on doit considérer sont fonction seulement de l'unique variable qui définit la position de ce point, et l'on est ainsi conduit à de simples quadratures; dans le cas considéré par M. Léauté, les forces qui interviennent dépendent en outre de la déformation au point considéré, les équations contiennent les éléments de la déformation et leurs dérivées : ce sont ces équations différentielles qu'établit M. Léauté, en se bornant toutefois à l'étude des pièces planes à section constante, qui sont les seules employées habituellement.

Baille. — Études sur la résistance de l'air et les mouvements oscillatoires très lents. (211-251).

Ce Mémoire comprend deux Parties : dans la première, l'auteur étudie la résistance que l'air d'une cage plus ou moins grande oppose au mouvement des différents mobiles suspendus au levier de la balance de torsion; la relation des nombreuses expériences et les considérations théoriques développées par M. Baille mettent en évidence l'extrême complication du problème. La seconde Partie contient la critique d'un Mémoire de M. Hirn : « Recherches expérimentales sur la relation qui existe entre la résistance de l'air et sa température. Conséquences physiques et philosophiques qui découlent de ces expériences. » Le Mémoire, dont les conclusions étaient contraires à la théorie des gaz, a eu un grand retentissement. D'après M. Baille, la formule que M. Hirn déduit de cette théorie et les expériences qu'il a faites ne se rapportent pas à la même chose. Enfin l'auteur termine par la relation d'expériences, faites dans la voie ouverte par M. Hirn, et relatives à la variation de la résistance de l'air avec la pression et la température.

LIII^e Cahier. — Tome XXXII, 1883.

Resal. — Solution de quelques questions se rapportant aux ponts suspendus. (1-15).

Formules générales pour déterminer les déformations du tablier produites par les variations de température dans les câbles et les tiges de suspension, et l'élasticité lors de la mise en charge de la construction. — Conditions qui doivent être remplies par l'une des poutres longitudinales auxquelles on peut avoir recours pour donner de la rigidité au tablier du pont ou pour tout autre motif, pour que cette poutre repose dans toute son étendue sur le tablier. — Conditions de résistance des câbles en écheveau.

Resal. — Développement sur un point de la théorie de la rotation des corps solides. (17-30).

Il s'agit du cas où la résultante des forces extérieures passe par un point fixe, le corps étant mobile autour de ce point. M. Resal simplifie et précise l'analyse par laquelle Poinsot est parvenu à l'équation différentielle du cône lieu de l'axe instantané dans l'espace fixe, ou plutôt de la courbe lieu du point de contact de l'ellipsoïde d'inertie avec plan fixe sur lequel roule cet ellipsoïde.

Moutier. — Sur la loi de Dulong et Petit. (31-57).

Léauté. — Sur une famille de courbes que l'on rencontre dans les transmissions de mouvement et sur leur application dans les machines. (59-78).

Il s'agit de ce problème : « Étudier la forme des courbes engendrées par les différents points d'une figure mobile dont deux des points parcourent des cercles fixes. » M. Léauté considère le cas d'une bielle dont la tête parcourt une circonférence de cercle et dont le pied s'appuie sur un cercle de grand rayon. Il forme l'équation de la trajectoire en négligeant, au delà de la seconde, les puissances du rapport du rayon du cercle décrit par la tête à la longueur de la bielle, le rayon du cercle décrit par le pied étant supposé comparable à la longueur de la bielle; les équations approchées définissent des courbes unicursales du quatrième ordre, qu'on peut regarder comme des réciproques de coniques.

Ces équations peuvent être mises sous la forme

$$x = A_0 + e(A\cos\theta + B\sin\theta) + e^2(A_1\cos 2\theta + B_1\sin 2\theta),$$
$$y = B_0 + e(C\cos\theta + D\sin\theta) + e^2(C_1\cos 2\theta + D_1\sin 2\theta),$$

e étant précisément le petit rapport défini plus haut et dont on néglige le cube.

Ces équations s'interprètent immédiatement; elles permettent de discuter les différentes formes des trajectoires : les courbes qui présentent le plus d'intérêt pratique sont celles que l'on obtient en supposant que l'ellipse à laquelle elles se réduiraient en négligeant e^2 est très aplatie; M. Léauté montre comment on peut les substituer à un arc de courbe donné de petite étendue et le degré de précision que l'on peut obtenir ainsi.

Picquet. — Quelques développements sur les équations différentielles linéaires à coefficients constants. (79-134).

Quand on connaît un système fondamental d'intégrales d'une équation linéaire d'ordre n sans second membre, on peut, en se servant d'une formule due à Lagrange, trouver l'intégrale générale de la même équation avec second membre. M. Picquet examine ce que devient la formule de Lagrange lorsqu'on suppose constants les coefficients de l'équation linéaire sans second membre : il insiste en particulier sur le cas où l'équation caractéristique a des racines multiples. Malgré son caractère élémentaire, la question prête, comme le montre l'auteur, à d'assez riches développements analytiques, où, naturellement, la théorie de la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples joue un rôle prépondérant. M. Picquet rencontre, chemin faisant, un grand nombre d'identités algébriques, parmi lesquelles nous signalerons en particulier l'expression des fonctions symétriques e' des racines α d'une équation algébrique $f(x) = 0$, de la forme

$$\sum \frac{\alpha^n}{f'(\alpha)},$$

lorsque n est un entier positif supérieur au degré de l'équation proposée.

Lecornu (*L.*). — Mémoire sur les surfaces enveloppes de sphères. (135-173).

L'auteur montre comment, en partant des formules de Codazzi, on peut parvenir à la détermination explicite des éléments d'une surface enveloppe de sphère : son procédé consiste à exprimer les fonctions cherchées au moyen d'une fonction auxiliaire φ qui vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\,\partial\mu}\left(\log\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right) = -\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\mu},$$

où λ et μ sont les paramètres relatifs aux *parallèles* (cercles de contact avec la sphère) et aux *méridiens* (trajectoires orthogonales des parallèles sur la surface). Cette même équation a été considérée par M. Darboux dans une Communication à l'Académie des Sciences, analysée par le Bulletin, *Sur les surfaces à lignes de courbure planes dans un système et isothermes,* communication faite le 23 avril 1883, à un moment où le travail de M. Lecornu était sous presse. M. Lecornu montre comment cette équation se ramène à une équation différentielle linéaire ordinaire du second ordre et sans second membre. Il interprète aussi la signification géométrique de la fonction φ en introduisant la considération des *lignes d'inflexion,* en chaque point desquelles le méridien présente une inflexion géodésique. Pour un déplacement effectué suivant une ligne d'inflexion, la variation de φ est égale à la torsion de la directrice (lieu des centres des sphères); pour un déplacement effectué suivant un parallèle, cette variation est égale à celle de l'angle au centre. M. Lecornu introduit une fonction α du paramètre λ qui, pour chaque parallèle, mesure la torsion totale correspondante de la directrice à partir d'une valeur initiale : la quantité $\varphi - \alpha$ est ce que l'auteur appelle *longitude* d'un point; la longitude est nulle ou égale à π pour les lignes d'inflexion; M. Lecornu étudie les lignes d'égale longitude. Signalons encore la démonstration de cette proposition : « Lorsqu'une surface est l'enveloppe des sphères osculatrices à une courbe, elle conserve cette propriété pendant le développement de sa directrice considérée comme arête d'une surface développable. »

Cornu (*A.*). — Sur les raies telluriques qu'on observe dans le spectre solaire au voisinage des raies D (175-212).

Brisse. — Exposition analytique de la théorie des surfaces. (213-233).

Ce travail est la V^e Section d'une exposition d'ensemble dont le but a été inséré dans les *Annales de l'École Normale supérieure* (2^e série, t. III, p. 87). Il est relatif aux systèmes les plus simples de coordonnées sur une surface : lignes de courbure, lignes asymptotiques, lignes géodésiques avec leurs trajectoires orthogonales.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et CH. BRISSE [1]. — 3e série.

Tome II; 1883, 2e semestre.

Realis (*S.*). — Sur une équation indéterminée. (289-297).

Il s'agit de la résolution, en nombres entiers, de l'équation

$$x^3 + k = y^2,$$

qui a donné lieu à de nombreux travaux de MM. Catalan, Le Besgue, Gerono et de Jonquières. M. Realis l'étudie au point de vue de la résolution, et il établit d'intéressantes identités, d'où découlent, comme conséquences immédiates, plusieurs propriétés des nombres, très dignes de remarque.

Dewulf (*E.*). — Théorème de Cinématique. (297-300).

Propriété du déplacement d'une figure plane, ayant trait aux centres de courbure des trajectoires.

Kœnigs (*G.*). — Sur les cubiques gauches passant par cinq points donnés. (301-306).

Indication de plusieurs propriétés, concernant surtout les complexes formées par les tangentes; cet article tire son origine d'une question proposée par M. Genty.

Genocchi. — Démonstration d'un théorème de Fermat. (306-310).

Le système d'équations $2y^2 - 1 = x$, $2z^2 - 1 = x^2$ n'admet de solution en nombres entiers que pour $x = 7$. Le savant professeur de l'Université de Turin démontre simplement cette proposition, en complétant les travaux du P. Pepin sur le même sujet.

PROPOSITIONS DE M. LIONNET. — (310).

Cinq énoncés concernant les propriétés des nombres.

Levaire (*E.*). — Solution de la question de Géométrie analytique proposée au Concours d'admission à l'École Centrale; première session, 1882. (311-317).

Problème sur un système de coniques passant par des points déterminés.

BIBLIOGRAPHIE. — *P. Miquel:* Les organismes vivants de l'atmosphère; compte rendu par le Dr Harzé. (317-319).

---

(1) Voir *Bulletin*, VII2, 249.

Publications récentes. — (319-322).

Moret-Blanc. — Solution de la question **1410**. (322-323).

Contour polygonal inscrit dans une parabole.

Fauquembergue (E.). — Solution de la question **1413**. (324).

Propriété d'une sécante commune à deux coniques homothétiques.

Lez. — Solution de la question **1418**. (325-326).

Lieu géométrique relatif à l'ellipse.

De Strékalof (V.). — Solution de la question **1421**. (326-329).

Propriété du triangle.

Romero. — Solution de la question **1422**. (329-330).

Si $N^2 = a^2 + (a+1)^2$, N est égal à la somme des carrés de trois nombres entiers, dont deux au moins sont consécutifs.

Goffart (N.). — Solution de la question **1425**. (331-332).

Propriété de la normale à la parabole.

Giat. — Solution de la question **1434**. (332-333).

L'angle de deux hyperboles équilatères concentriques est double de l'angle de leurs asymptotes.

Questions proposées. — **1451** à **1459**. (333-336).

Antomari (X.). — Relations entre les distances du foyer d'une conique à quatre points ou à quatre tangentes. (337-347, 385-397).

Suite d'une étude dont nous avons analysé le commencement dans le compte rendu du premier semestre.

Ici, l'auteur étudie spécialement les foyers de l'hyperbole et de la parabole, les propriétés de quatre coniques circonscrites à un quadrilatère, les relations entre les distances d'un foyer à quatre tangentes et les propriétés de quatre coniques inscrites dans un quadrilatère.

Laquière. — Détermination et construction nouvelle du cercle qui coupe trois cercles sous trois angles donnés et de la sphère qui coupe quatre sphères sous des angles donnés. (348-352).

Complément et simplification d'un article précédemment publié dans le même Recueil. Théorème remarquable sur l'enveloppe des sphères coupant trois sphères fixes sous des angles constants.

Goffart. — Théorème de Géométrie. (353-354).

Lieu des points de contact des ellipses ayant même foyers avec les droites parallèles à une direction donnée.

Biehler (*Ch.*). — Sur la construction d'une courbe algébrique autour d'un de ses points. (354-368, 397-412).

Simplification d'une méthode précédemment publiée par l'auteur dans le même Recueil ([1]). On considère l'équation qui donne les coordonnées des points d'intersection de la courbe et d'une transversale passant par le point considéré.

Dans les présents articles, M. Biehler recherche, non plus les expressions des racines infiniment petites de cette équation, mais certaines fonctions symétriques desdites racines.

Le Mémoire se termine par une étude des asymptotes et des branches paraboliques.

Dostor (*G.*). — Distances du centre de gravité aux points remarquables du triangle. (368-370).

Cette Note donne l'expression des distances : aux sommets, au centre du cercle circonscrit; au point de concours des hauteurs; et enfin au centre des cercles inscrit et exinscrit.

Propositions de M. Realis. — (370-371).

Énoncés de cinq propriétés sur les racines entières d'équations du quatrième degré.

Correspondance. — *M. d'Ocagne :* A propos du centre de courbure de l'ellipse. (371-372).

Fauquembergue (*E.*). — Solution de la question **1281**. (372-373).

Solution d'une équation exponentielle indéterminée.

Rebuffel. — Solution de la question **1420**. (374-375).

Détermination de deux intégrales.

Goffart (*N.*). — Solution de la question **1421**. (375-376).

Propriété d'une conique.

Moret-Blanc. — Solution de la question **1424**. (376-377).

Lieu géométrique relatif à l'ellipsoïde.

Chabanel (*Ch.*). — Solution de la question **1427**. (378-380).

Détermination d'une intégrale.

Cesáro (*E.*). — Solution de la question **1428**. (380-381).

Nombre des solutions entières des équations

$$x + 2y = n - 1, \quad 2x + 3y = n - 3, \quad 3x + 4y = n - 5, \quad \ldots.$$

([1]) Voir *Bulletin*, IV_2, 265; V_2, 134 et VI_2, 157.

QUESTIONS PROPOSÉES. — **1460** à **1468**. (382-384).

Fauquembergue (*E.*). — Question d'Astronomie. (413-415).

Connaissant les durées des quatre saisons, trouver l'excentricité de l'orbite terrestre. La question est extraite de la *Nouvelle Correspondance mathématique*.

Barisien (*E.*). — Solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École Centrale, 2ᵉ session, 1882. (415-420).

Problème sur un système de paraboles.

Cartier (*H.*). — Solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École Polytechnique, 1881. (420-422).

Lieu géométrique relatif à l'hyperbole.

PUBLICATIONS RÉCENTES. — (422-424).

D'Ocagne (*M.*). — Solution de la question **1391**. (425).

Propriété de l'enveloppe d'une droite de longueur constante.

Borletti (*F.*). — Solution de la question **1396**. (426-427).

Intégration d'une équation différentielle.

Chabanel (*Ch.*). — Solution de la question **1417**. (427-429).

Propriété de deux systèmes de résidus par rapport à un module premier.

L. B. — Solution de la question **1429** (429-430).

Démonstration de la formule

$$\left[\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}\right]^2 = 8\,\frac{9}{8}\,\frac{24}{25}\,\frac{49}{48}\,\frac{80}{81}\,\frac{121}{120}\cdots$$

Fauquembergue (*E.*). — Solution de la question **1459**. (430-431).

L'équation indéterminée

$$y^3 = x^2 + (x+1)^2$$

n'admet comme solution que $y = 1$, $x = 0$.

QUESTIONS PROPOSÉES. — **1469** à **1472**. (431-432).

Bourget (*J.*). — Note sur les permutations de n objets et sur leur classement. (433-450).

L'auteur a déjà traité le même sujet dans le même Recueil, en 1871, et dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* (1881). Il recherche ici la formule du rang occupé par un élément déterminé dans une permutation de rang donné.

A cet effet, il propose un nouveau mode de classification, qui consiste essentiellement dans le partage des permutations en groupes de permutations circulaires. Cela le conduit à des résultats nouveaux et fort intéressants.

D'Ocagne (*M.*). — Sur un élément du triangle rectiligne; symédiane. (450-464).

La *symédiane* est la symétrique de la médiane par rapport à la bissectrice issue du même sommet. L'auteur établit plusieurs propriétés relatives à cet élément qu'il croit nouveau, mais qui a déjà été étudié, à plusieurs reprises, par M. E. Lemoine; puis il en fait application à des problèmes divers, notamment sur la parabole, la lemniscate, la spirale d'Archimède et les coniques. L'article se termine par les énoncés d'un certain nombre d'exercices. [*Voir* sur le même sujet une Note de l'auteur *Sur une ligne considérée dans le triangle rectiligne* (*Journ. de Math. élémentaires,* t. IV, p. 539; 1880)].

Moret-Blanc. — Solution de la question proposée au Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1882. (464-469).

Problème sur le cercle-calcul logarithmique.

Dostor (*G.*). — Les moments d'inertie polaires du triangle, par rapport à ses points remarquables. (469-471).

Moments par rapport au centre de gravité; aux sommets; au centre du cercle circonscrit; au point de concours des hauteurs; aux centres des cercles inscrit et exinscrit.

Moret-Blanc. — Solution de la question 1399. (471-474).

Lieu géométrique relatif aux coniques.

Chabanel (*Ch.*). — Solutions de la question 1401 (474-475).

Proposition d'Arithmétique.

Fauquembergue (*E.*). — Solution de la question 1453. (476).

Le nombre $\dfrac{(\sqrt{2}+1)^{2n-1}+(\sqrt{2}-1)^{2n-1}}{2\sqrt{2}}$ est la somme de deux carrés entiers.

Chambon (*J.*). — Solution de la question 1463. (477-478).

Propriété de l'ellipse.

Raclot (*M.*). — Solution de la question 1466. (478-479).

Propriété du trapèze.

Questions proposées. — 1473 à 1480. (479-480).

Resal (*H.*). — Sur la théorie des tautochrones. (481-493).

Cet article, extrait du *Cours de Mécanique* de l'auteur, présente l'application et le développement d'une méthode d'Analyse due à M. Puiseux (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* t. IX, 1844). M. Resal considère, après un exposé d'ordre général, le cas de la pesanteur, celui d'une force centrale attractive ou répulsive, proportionnelle à la distance; il termine enfin en considérant un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse.

Realis (*S.*). — Résolution d'une équation indéterminée. (494-497).

L'équation dont il s'agit est

$$x^2 + nxy - ny^2 = 1.$$

D'Ocagne (*M.*). — Sur les propriétés segmentaires du triangle. Solution du problème général : « Mener par le sommet d'un triangle une droite qui divise le côté opposé en segments proportionnels aux puissances $n^{\text{ièmes}}$ des côtés adjacents ». (497-500).

Cet article se rattache à celui qui a été publié dans le même Recueil, p. 450 (*voir* ci-dessus).

Chambeau (*A.*). — Solution de la composition du Concours d'admission à l'École Centrale en 1881; seconde session. (500-504).

Sur les normales menées d'un point à une parabole.

Hilaire (*A.*). — Solution analytique de la composition du Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1882. (504-511).

Sur les coniques passant par les points d'intersection de deux circonférences et tangentes à ces circonférences.

Kien (*L.*). — Solution de la composition du Concours d'admission à l'École Normale en 1852. (511-515).

Roulement d'une tangente mobile sur une conique.

Correspondance. — *M. d'Ocagne :* A propos de la question **1463**, concernant le centre de courbure de l'ellipse. (515).

Bibliographie. — Exercices de Géométrie comprenant l'exposé des méthodes géométriques et deux mille questions résolues, par F. I. C; compte rendu par M. H. Faure. (516-518).

Publications récentes. — (518-520).

Goffart (*N.*). — Solution de la question **1462**. (521-522).

Sur le triangle isoscèle.

Moret-Blanc. — Solution de la question **1465**. (522-523).

Tangentes à une conique.

Moret-Blanc. — Solution de la question **1468**. (523-525).

Problème relatif aux aiguilles d'une montre.

Lemoine (*E.*). — Solution de la question **1472**. (525-526).

Propriété du triangle.

ANONYME. — Solution de la question **1474**. (527).

Propriété du triangle rectangle.

QUESTIONS PROPOSÉES. — **1481** à **1483**. (528).

Catalan (*E.*). — Sur quelques développements de $\sin nx \cos nx$. (529-535).

La grande simplification obtenue par M. Catalan consiste dans l'introduction de $2 \sin x$, $2 \cos x$ au lieu de $\sin x$, $\cos x$. Il expose la remarquable méthode de M. Yvon Villarceau avec de légères modifications; puis il y ajoute quelques applications et plusieurs remarques très intéressantes. (*Voir*, du même auteur, une Note dans la *Nouv. Corr. Math.*, t. VI, p. 100).

Realis (*S.*). — Résolution d'une équation indéterminée par formules directes. (535-542).

L'équation proposée est

$$(n+4)x^2 - ny = 4,$$

avec n entier > 0 ou < -4. M. Realis donne deux formules très curieuses, un peu analogues à celle du binôme, pour x_a et y_a; il donne ensuite les relations de récurrence, et présente, par de faciles transformations, de curieuses applications de ces résultats.

De Saint-Germain (*A.*). — Étude sur le mouvement d'un point pesant. (542-554).

L'auteur fait une analyse aussi attentive que possible, et très rigoureuse, de cette question : application naturelle de la théorie du mouvement relatif. Il discute un point qui a divisé jadis Bour et M. Resal, sur la forme de la trajectoire apparente. Il étudie enfin la question des déviations en assimilant la Terre à un ellipsoïde homogène, et donne, dans ce cas, les équations différentielles du mouvement.

Saltel (*L.*). — Nouveaux développements sur une méthode d'élimination. (554-566).

Suite du travail publié dans le même Recueil, t. XX, 2e série. La méthode employée permet d'éliminer successivement $k-1$ inconnues entre k équations par la résolution de l'équation $ax^n + b = 0$. Ici l'auteur ajoute à sa précédente étude un certain nombre de remarques et d'applications.

BIBLIOGRAPHIE. — Cours de Mathématiques spéciales; Ire Partie, Algèbre, par M. *G. de Longchamps*. (566). A. L.

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS (¹).

Tome XVII; 1881.

Hill (*J.-M.*). — Sur quelques propriétés des équations de l'Hydrodynamique. (1).

Soient u, v, w les composantes de la vitesse d'une particule de matière appartenant à un fluide incompressible, soumis à l'action de forces extérieures admettant un potentiel; soient x, y, z les coordonnées, à l'époque t, de la particule considérée; u, v, w pourront être regardées comme des fonctions de x, y, z, t. Ceci posé, soient P, Q, R trois intégrales indépendantes de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

il existera trois fonctions f_1, f_2, f_3 de P, Q, R, telles que

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz - (f_1\,d\mathrm{P} + f_2\,d\mathrm{Q} + f_3\,d\mathrm{R})$$

soit une différentielle exacte $d\mathrm{K}$, les différentielles $d\mathrm{P}$, $d\mathrm{Q}$, $d\mathrm{R}$, $d\mathrm{K}$ étant relatives à dx, dy, dz. Les équations des lignes de vortex seront de la forme

$$\mathrm{F}_1(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) = \mathrm{C}_1,$$
$$\mathrm{F}_2(\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{R}) = \mathrm{C}_2,$$

C_1, C_2 étant des constantes. Si par la limite d'une aire infiniment petite on mène des lignes obtenues par l'intersection de deux surfaces, telles que les premiers membres de leurs équations satisfassent à l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

on formera un filament liquide contenant toujours les mêmes particules, fermé ou limité à la surface du fluide, tel qu'à chaque point corresponde un vecteur tangent au filament, et qui, multiplié par la section normale, donne un produit constant pendant le mouvement.

Cockle (*J.*). — Sur les relations entre certains symboles. (20-37).

L'auteur apprend à effectuer, sur les équations différentielles linéaires, certaines opérations symboliques, analogues à celles qui conduisent à la décomposition du premier membre d une telle équation en facteurs symboliques : son travail fait suite à un Mémoire antérieur inséré dans le même Recueil, en 1877 : *On linear differential equations of the third order.*

(¹) Voir *Bulletin*, VI_2, 48.

Forsyth. — Sur quelques intégrales (37-46).

Il s'agit des intégrales

$$\int_{-1}^{+1} P_i \mu^m \, d\mu, \quad \int_{-1}^{+1} P_i \cos m\theta \, d\mu,$$

$$\int_{-1}^{+1} P_i \nu^m \, d\mu, \quad \int_{-1}^{+1} P_i \sin m\theta \, d\mu,$$

P_i est le $i^{\text{ème}}$ polynôme de Legendre où $\mu = \cos\theta$ est la variable.

Prost. — Sur le potentiel et l'attraction sur un point extérieur d'une couche ellipsoïdale. (46-50).

Le calcul est fait d'après une indication de M. Cayley (*Proceedings of the London Mathematical Society*, t. VI, p. 58), en décomposant la couche en petits éléments obtenus au moyen de cônes ayant pour sommet commun le point où la normale à l'ellipsoïde homofocal à l'ellipsoïde qui limite extérieurement la couche, et passant par le point attiré, perce le plan polaire de ce dernier point; la méthode est une conséquence de la démonstration bien connue de Steiner relative à la direction de l'attraction.

Glaisher. — Un chapitre de la théorie des fonctions elliptiques. (50-65).

Allen. — Sur quelques problèmes relatifs à la conductibilité électrique. (65-86).

Le cas qui a été le plus étudié, soit théoriquement, soit expérimentalement, depuis les célèbres travaux de Kirchhoff, est celui d'une surface conductrice plane dont certains points sont mis en communication électrique avec une source au moyen de fils métalliques très fins.

L'auteur traite les problèmes analogues en remplaçant la surface plane par une surface sphérique.

Greenhill. — Sur le mouvement constant d'une toupie ou d'un solide de révolution dans un liquide indéfini. Démonstration élémentaire. (86-89).

Stearn. — Sur quelques cas du mouvement d'un liquide visqueux. (90-104).

L'auteur examine le cas où le mouvement se produit suivant des anneaux circulaires concentriques; il parvient ainsi à l'équation par laquelle Fourier a résolu le problème du mouvement de la chaleur dans un cylindre; M. Stearn examine diverses conditions initiales, par exemple le cas où le liquide est contenu dans un vase cylindrique fixe, en admettant, avec M. Stokes, que le fluide en contact est aussi au repos.

Jeffery. — Sur les courbes sphériques de troisième classe avec trois foyers. (104-129).

Discussion de ces courbes d'après la position des foyers.

Scott. — Note relative à un théorème de M. Glaisher sur les déterminants. (129-132).

La déterminant

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{vmatrix}$$

est égal au produit

$$\Pi(a_1 + a_2\omega + \ldots + a_n\omega^{n-1}),$$

où ω désigne une racine de l'équation

$$x^n - 1 = 0;$$

le déterminant qu'on déduit du précédent en changeant les signes de tous les termes situés en dessous de la diagonale est égal à un pareil produit, en faisant représenter à ω une racine de l'équation

$$x^n + 1 = 0.$$

La combinaison de ces deux propositions presque évidentes montre que le déterminant analogue à (1), où n est remplacé par $2n$, se décompose en un produit de deux déterminants de l'ordre n; c'est le produit de ces deux déterminants qui figurait dans le théorème de M. Glaisher.

Sharp. — Sur l'équation de Fourier. (132-133).

Taylor. — Sur les propriétés de l'orthocycle, d'après Gaskin et Plücker. (134-137).

Démonstration géométrique simple de ces propriétés : le cercle circonscrit à un triangle conjugué par rapport à une conique est orthogonal à l'orthocycle de cette conique (lieu des sommes d'un angle droit circonscrit); les cercles décrits sur les diagonales d'un quadrilatère circonscrit à une conique et l'orthocycle de cette dernière ont même axe radical; les orthosphères des quadriques tangentes à huit plans ont même axe radical.

Cayley. — Sur ce théorème : « Le nombre de covariants d'un quantic binaire est fini. » (137-147).

La seule preuve connue de cette proposition a été déduite, par M. Gordan, de la règle de la formation des covariants par dérivation : c'est à un point de vue tout différent que se place M. Cayley : considérant un quantic d'ordre n mis sous la forme $(x-\alpha)(x-\beta), \ldots$, la forme *monomiale* générale d'un covariant est

$$(\alpha-\beta)^m(\alpha-\gamma)^n(\beta-\gamma)^p\ldots(x-\alpha)^q(x-\beta)^r\ldots,$$

où la somme des exposants de tous les facteurs qui contiennent une racine α est constante. Par exemple, les covariants monomiaux de

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

sont

$$(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma),\quad (\beta-\gamma)(x-\alpha),\quad (\alpha-\gamma)(x-\beta),$$
$$(\alpha-\beta)(x-\gamma),\quad (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma).$$

Cela posé, deux théorèmes se présentent :

A. *Le nombre des covariants monomiaux irréductibles d'un quantic décomposé en facteurs linéaires est fini;*

C. *Le nombre des covariants, dans le sens ordinaire, d'un quantic mis sous la forme habituelle est fini.*

Ces deux propositions se trouvent reliées par le lemme suivant :

B. *Le système infini dont les termes* X *sont des fonctions rationnelles entières d'un nombre fini de lettres* $(a, b, c, \ldots)$ *qui restent inaltérées par les substitutions* G $(a, b, c, \ldots)$ *d'un certain groupe, renferme toujours un système fini de termes* P, *tels que tout terme* X *soit une fonction rationnelle entière des termes* P.

M. Cayley donne une démonstration du théorème A et montre comment le lemme B permettrait d'en déduire le théorème C; mais il n'est pas en possession d'une démonstration complète du lemme B, bien évident quand le groupe G est le groupe symétrique ou le groupe alterné des lettres $a, b, c, \ldots$.

Mannheim. — Construction de la normale à la surface de Glaisher. (147-149).

Cette surface est le lieu des milieux des cordes de longueur constante dont les extrémités se déplacent sur un ellipsoïde donné, chacune de ces cordes étant telle que les normales à l'ellipsoïde, tirées de ses extrémités, se rencontrent : en joignant le point de rencontre au milieu de la corde, on obtient la normale.

Roberts (S.). — Un théorème utile dans la théorie de l'attraction. (149-153).

Soit V_n le potentiel exprimé en coordonnées cartésiennes relatif à un point (x, y, z) attiré par une plaque située dans le plan des x, y, l'attraction étant en raison inverse de la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance; on a

$$\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2}+\frac{n-2}{z}\frac{\partial V_n}{\partial z}=0.$$

Wargen. — Étude élémentaire du théorème de Legendre concernant l'attraction d'un ellipsoïde sur un point extérieur. (154-164).

Prost. — Sur le potentiel électrique de deux sphères conductrices chargées situées à une distance donnée. (164-168).

Hill. — Quelques propriétés des équations de l'Hydrodynamique. (168-174)

Mc Alister. — Sur la loi de la moyenne géométrique dans la théorie des erreurs. (175-194).

Greenhill. — Sur l'équation différentielle aux excentricités des couches dans la théorie de la figure de la Terre. (203-207).

Discussion de l'équation

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2}(\mathrm{M}\varepsilon) - \left[i(i+1) + \frac{4\pi r^2}{\mathrm{M}}\frac{d\rho}{dr}\right]\mathrm{M}\varepsilon = 0,$$

où

$$\frac{d\mathrm{M}}{dr} = 4\pi\rho r^2,$$

ρ étant la densité pour la couche de rayon r, dans diverses hypothèses relatives à la loi suivant laquelle ρ varie avec r.

Cockle. — Addition aux relations entre certains symboles. (208-210).

Glaisher. — Démonstration algébrique des développements en somme de fractions pour la cotangente et la cosécante. (211-226).

Les formules sont obtenues en partant des expressions $\cot x$ et cosécx, lorsqu'on remplace $\cos x$ et $\sin x$ par les produits infinis équivalents et en décomposant ces expressions en fractions simples.

Ferrers. — Sur le mouvement de l'eau contenue dans certains vases cylindriques et sur certaines expressions analytiques qui se rencontrent dans cette recherche. (227-244).

L'auteur détermine la fonction de courant pour un liquide contenu dans un vase cylindrique tournant uniformément autour d'un axe, en supposant que la base du cylindre est limitée par des arcs d'ellipse et d'hyperbole homofocales ou des arcs de paraboles confocales.

Cayley. — Sur la méthode de Schubert pour le contact d'une ligne et d'une surface. (244-258).

Analyse de la méthode suivie par M. Schubert dans son *Calcul der abzählenden Geometrie*, faite d'ailleurs à un point de vue différent de celui de M. Schubert; application de cette méthode.

Cayley. — Sur le théorème des deux, quatre, huit et seize carrés. (258-276).

On sait que le produit de la somme de deux carrés par la somme de deux carrés est une somme de deux carrés; le théorème a été étendu par Euler à la somme de quatre carrés, il s'étend aussi à une somme de huit carrés; mais, d'après M. Young (*Trans. R. I. A.*, t. XXI; 1848), l'identité d'Euler ne peut pas s'étendre à une somme de seize carrés ; M. Roberts a repris la question dans le Volume précédent du *Quarterly Journal;* M. Cayley critique les démonstrations précédentes; l'identité d'Euler relative à la décomposition en trois carrés de l'expression

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2$$

repose en dernière analyse sur l'identité symbolique

$$12.34-13.24+14.23=0,$$

où $12=x_1y_2-x_2y_1$, ... On a, pour l'étendre à une somme de huit carrés ou de seize carrés, à considérer des arrangements analogues de couples symboliques formés au moyen des huit ou des seize premiers nombres et à déterminer les signes dont on doit affecter ces couples pour parvenir à l'identité généralisée; or le problème ainsi posé conduit dans le cas de huit quantités à un seul mode de groupement, et, dans le cas de seize quantités, à quatre modes de groupement; d'après M. Cayley, un seul de ces groupements avait été considéré jusqu'ici et l'impossibilité de déterminer les signes n'avait été établie que pour ce cas; la preuve donnée serait donc incomplète; dans son Mémoire, il la poursuit avec détail pour les quatre groupements possibles.

Roberts. — Note additionnelle sur l'impossibilité d'une extension générale du théorème d'Euler. (276-280).

M. Roberts, mis en cause dans le précédent Mémoire, en conteste les assertions. D'après lui, les quatre groupements de M. Cayley peuvent être obtenus par le procédé qu'il a exposé dans son Mémoire antérieur (t. XVI, p. 159-170), en sorte que sa démonstration demeure entière.

Roberts. — Note sur un lieu dans l'espace. (280-283).

La normale au lieu décrit par un point quelconque d'une corde de longueur constante dont les extrémités restent sur un ellipsoïde et qui est perpendiculaire à sa polaire passe par le point d'intersection des normales à ses extrémités. Démonstration analytique.

Greenhill. — Solution au moyen des fonctions elliptiques de quelques problèmes sur la conductibilité électrique ou calorifique pour des surfaces planes. (284-292).

Cockle. — Sur une équation de Schwarz. (293-301).

Il s'agit d'un cas particulier de l'équation à laquelle satisfait la série hypergéométrique et dont les intégrales sont algébriques,

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{2}{3}-\frac{7}{6}x\right)\frac{dy}{dx}+\frac{1}{48}y=0;$$

en désignant par C_1, C_2, C_3 trois constantes liées entre elles par la relation

$$C_3^4+\alpha^2C_1^4+\alpha C_2^4=0,$$

où α est une racine cubique imaginaire de l'unité, la solution générale de cette équation est donnée par la formule

$$y = \sqrt{C_1\left((1 - \alpha x^{\frac{1}{3}}\right)} + \sqrt{C_2\left(1 - \alpha^2 x^{\frac{1}{3}}\right)} + \sqrt{C_3\left(1 - x^{\frac{1}{3}}\right)}.$$

Ce résultat avait été indiqué par M. Cayley (t. XVI, p. 263).

Hirst. — Sur la transformation quadratique. (301-311).

Le Mémoire de M. Hirst, communiqué par l'auteur à l'Association britannique en 1865, contient des résultats qui ont été retrouvés indépendamment par M. Cantor (*Annali di Matematica,* t. X; voir *Bulletin,* 2e série, t. VI, 2e Partie, p. 103).

Ce résultat avait été indiqué par M. Cayley. (T. XVI, p. 263.)

Jeffery. — Sur l'inversion dualistique des coordonnées de Descartes et de Booth. (311-319).

Roberts. — Sur quelques formes de l'équation de la surface des ondes. (319-328).

L'auteur établit analytiquement diverses propositions démontrées par M. Mannheim; il étudie aussi le complexe des cordes d'un ellipsoïde vues du centre sous un angle droit.

Hicks. — Sur les images fonctionnelles dans les ellipses. (327-351).

Illustrations de la méthode de Sir W. Thomson.

Harley. — Note sur une équation différentielle. (352-353).

Glaisher. — Sur la connexion entre les fonctions elliptiques et la Trigonométrie sphérique.

Dans un triangle sphérique dont les angles sont A, B, C, les côtés a, b, c, on peut faire

$$\begin{array}{ll}
\sin a = \operatorname{sn} u, & \cos a = \operatorname{cn} u, \\
\sin b = \operatorname{sn} v, & \cos b = \operatorname{cn} v, \\
\sin c = \operatorname{sn}(u+v); & \cos c = \operatorname{cn}(u+v); \\
\sin A = k \operatorname{sn} u, & \cos A = \operatorname{dn} u, \\
\sin B = k \operatorname{sn} v, & \cos B = \operatorname{dn} v, \\
\sin C = k \operatorname{sn}(u+v); & \cos C = -\operatorname{dn}(u+v).
\end{array}$$

Partant de là, M. Glaisher calcule les éléments des triangles sphériques obtenus en menant par un sommet un grand cercle perpendiculaire au côté opposé et retrouve ainsi plusieurs formules de la théorie élémentaire des fonctions elliptiques.

Tome XVIII; 1882.

Jeffery. — Sur les courbes planes de quatrième classe à foyers quadruples. (1-40).

Harley. — Notes supplémentaires sur une équation différentielle. (41-46).

Les solutions d'une équation algébrique entre y et x satisfont à une équation différentielle linéaire.

Muir. — Sur un théorème du professeur Cayley relatif aux déterminants symétriques gauches bordés. (46-49).

Le théorème a été donné par M. Cayley dans le *Journal de Crelle* (t. LV, p. 277), il concerne le déterminant que l'on déduit d'un déterminant symétrique gauche d'ordre pair en conservant la loi de tous les éléments, sauf des éléments de la première ligne et de la première colonne; toutefois le premier élément est toujours o; un pareil déterminant n'est plus un carré, mais le produit de deux *pfaffiens,* en entendant par *pfaffien* la racine carrée d'un déterminant symétrique gauche; M. Muir donne une élégante démonstration de ce théorème.

Taylor. — Sur les coniques circonscrites harmoniquement. (50-52).

Cayley. — Sur l'équation du sixième degré de Jacobi. (52-65).

Cette équation se ramène à la forme

$$(a,\ b,\ 0,\ d,\ 0,\ f,\ g)(z,\ 1)^6 = 0,$$

où

$$ag + 9bf - 20d^2 = 0;$$

sa résolution se ramène à la résolution d'une équation du cinquième degré. Son groupe est le sous-groupe des 60 substitutions positives qui fait partie du groupe de 120 substitutions (découvert par M. Serret) qui laissent invariable une fonction de six lettres. En effectuant sur l'équation la transformation de Tschirnhausen

$$X = -az^3 - 6bz^2 - 10d,$$

on obtient une équation du sixième degré en X qui n'est autre que la résolvante du sixième degré de l'équation du cinquième degré

$$(1,\ 0,\ c',\ 0,\ e',\ f')(x,\ 1)^5,$$

où

$$c' = 2d,\quad e' = -9bf + 36d^2,\quad f' = \sqrt{216h},$$

$$h = -a^2f^3 + b^3g^2 + 60b^2df^2 - 240bd^3f + 256d^5 = \frac{1}{5^2\sqrt{5}}\sqrt{-\Delta},$$

Δ étant le discriminant de l'équation de Jacobi.

Greenhill. — Réduction des intégrales elliptiques

$$\int \frac{dz}{(z^3-1)\sqrt{z^3-b^3}},\quad \int \frac{z\,dz}{(z^3-1)\sqrt{z^3-b^3}}$$

aux fonctions de Jacobi. (66-72).

Ferrers. — Propriété de courbes du quatrième ordre à trois points doubles. (73-74).

Les tangentes aux six points d'inflexion touchent une conique.

Hudson. — Formules pour la théorie des équations. (74-89).

L'auteur donne, entre autres formules, l'expression du quotient par $(x-a)^m$ d'un polynôme en x de degré $n > m$, et l'expression générale d'une racine d'ordre de multiplicité m d'une équation entière de degré n, m étant un entier satisfaisant aux inégalités

$$n \geqq m \geqq \tfrac{1}{2}(n+1).$$

Prost. — Sur les vingt-sept droites, les quarante-cinq plans tangents triples, les trente-six double-six d'une surface du troisième degré; moyen de construire un modèle où sont figurées les droites supposées réelles. (89-96).

L'équation de la surface est supposée mise sous la forme

$$uvw + u'v'w' = 0,$$

$u, v, \ldots, w'$ étant des fonctions linéaires des coordonnées qui sont supposées satisfaire à des identités de la forme

$$au + bv + cw + a'u' + b'v' + c'w' = 0,$$
$$\alpha u + \beta v + \gamma w + \alpha' u' + \beta' v' + \gamma' w' = 0,$$

à coefficients $a, \ldots, \gamma$ numériques. L'auteur donne des nombres pour la construction du modèle.

Ferrers. — Sur la distribution de l'électricité sur une calotte. (97-109).

Muir. — Liste de travaux sur les déterminants. (110-149).

Genese. — Sur les coordonnées biangulaires. (150-154).

Cayley. — Un cas résoluble de l'équation du cinquième degré. (154-157).

Les cinq racines d'une équation du cinquième degré, où le second terme manque, peuvent être mises sous la forme

$$\alpha_1 B + \alpha_2 C + \alpha_3 D + \alpha_4 E,$$

les α étant des puissances convenables d'une racine cinquième imaginaire de l'unité; M. Cayley montre qu'en supposant nulle une des quantités B, C, D, E, ce qui revient à établir une relation entre les coefficients de l'équation proposée la résolution de celle-ci dépend de la résolution d'une équation du troisième degré.

Jeffery. — Sur les *stapetes-points* des courbes de quatrième classe à foyers singuliers. (158-186).

Muir. — Sur quelques propriétés récemment découvertes de certains déterminants symétriques. (166-177).

Il s'agit principalement dans ce travail des circulants, c'est-à-dire des déterminants de la forme

$$C(a, b, c, d) = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix},$$

et d'autres déterminants dont toutes les ligness ont aussi des permutations d'un même système de lettres, en particulier de tels déterminants d'ordre 2^n, symétriques par rapport à leur centre et décomposables, d'après une proposition due à M. Puchta, en facteurs linéaires; nous noterons aussi les propositions suivantes: *Un pfafien symétrique gauche d'ordre impair est nul, un pfafien symétrique gauche d'ordre pair est une différence de deux carrés.*

Cox. — Coordonnées homogènes dans la Géométrie imaginaire: application aux systèmes de forces. (178-215).

Hudson. — Sur les racines égales des équations. (213-230).

Nouvelle expression d'une racine multiple d'ordre de multiplicité supérieure à la moitié du degré de l'équation. M. Cayley a ajouté une petite Note au travail de M. Hudson.

Greenhill. — Sur le mouvement régulier d'un solide de révolution roulant sur une surface de révolution sous l'influence de la gravité. (229-231).

Greenhill. — Sur les images fonctionnelles dans les ovales de Descartes. (231-245).

Application à ces courbes de la méthode employée par M. Hill pour l'ellipse.

Stuart. — Réduction des intégrales de la forme

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{(z^n - c^n)}\sqrt{z^n - b^n}}.$$

(245-260).

Cette réduction repose sur la remarque suivante : Si $\varphi(x)$ est une solution de l'équation

$$\frac{dz}{f(z^n)} = dx,$$

cette solution jouit de la propriété

$$\omega\varphi(x) = \varphi(\omega x + C),$$

C étant une constante et ω une racine quelconque de l'équation

$$\omega^n - 1 = 0;$$

il suit de là que les facteurs de $z^n - c^n$ sont de la forme

$$\varphi(x) - \varphi(\omega\alpha + C),$$

en supposant que pour $z = c$ on ait $x = \alpha$; ensuite on a

$$\int \frac{z^{m-1}\,dz}{(z^n - c^n)\,f(z^n)} = \frac{1}{nc^{n-m}} \sum \int \frac{\omega^n\,dx}{z - \omega c} = \frac{1}{nc^{n-m}} \sum \frac{\omega^n\,dx}{\varphi(x) - \varphi(\omega\alpha + C)};$$

pour $n = 1, 2, 3, 4$,

$$f(z^n) = \sqrt{z^n - b^n},$$

la fonction φ se calcule aisément et le calcul s'achève sans peine.

Muir. — Sur les circulants d'ordre impair. (261-265).

Un tel déterminant est divisible par la somme des éléments d'une colonne; M. Muir montre comment on peut obtenir le quotient sous forme d'un déterminant persymétrique d'ordre moindre d'une unité que le circulant proposé.

Niven. — Sur une méthode pour résoudre approximativement les problèmes d'électrostatique. (266-270).

Effet d'une légère courbure sur la distribution de l'électricité sur les deux faces d'un accumulateur presque plan.

Jeffery. — Sur les courbes sphériques de quatrième classe à foyers quadruples. (270-310).

Tucker. — Sur le radial de l'ellipse. (310-312).

Forsyth. — Sur un théorème de Jacobi. (313-327).

Il s'agit de la fonction symétrique

$$\sum \frac{U}{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

des mn solutions des deux équations

$$f(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Jacobi a démontré que cette somme était nulle quand le degré du polynôme U ne dépassait pas $m + n - 3$; l'auteur évalue cette somme pour un degré non supérieur à $m + n - 1$; il y parvient en généralisant la méthode par laquelle Abel a prouvé le théorème analogue dans le cas d'une seule variable.

Hudson. — Sur les racines égales des équations; résultats additionnels. (327-338).

Sthinthal. — Sur la solution de l'équation

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0.$$

(327-345).

Les solutions de cette équation regardées comme fonctions de n sont discutées en partant d'une intégrale définie qui est un cas particulier de l'intégrale définie (d'Euler) bien connue qui satisfait à l'équation hypergéométrique.

Greenhill. — Images fonctionnelles dans les ovales de Descartes; détermination des images. (346-362).

Hart. — Sur le cercle qui coupe orthogonalement les quatre cercles tangents aux côtés d'un triangle. (363-365).

Équation de ce cercle en coordonnées aréolaires.

Johnson. — Sur la preuve, au moyen du triangle sphérique, du théorème sur l'addition des fonctions elliptiques. (365-370).

Glaisher. — Sur une intégrale définie renfermant l'intégrale exponentielle. (370-377).

Détermination des intégrales

$$\int_0^\infty e^{-ax^n}\mathrm{E}i(ax^n)\,dx,\quad \int_0^\infty e^{ax^n}\mathrm{E}i(ax^n)\,dx,$$

où n est une quantité réelle plus grande que 1 et où

$$\mathrm{E}i(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^u}{u}\,du;$$

ces intégrales sont respectivement égales à

$$-\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{a^{\frac{1}{n}}}\,\frac{\frac{\pi}{n}}{\operatorname{tang}\frac{\pi}{n}}\quad\text{et}\quad\frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{a^{\frac{1}{n}}}\,\frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Thomson (J.). — Note sur $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos sx}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}(2p+1)}}\,dx$. (377-381).

On a

$$\int_0^\infty\frac{\cos sx}{(a^2+x^2)^{p+\frac{1}{2}}}\,\frac{dx}{p+\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{2\pi}\,\frac{s^p}{a^p}\,\frac{1}{1.3\ldots 2p-1}\,\frac{e^{-as}}{(as)^{\frac{1}{2}}}\left[1+\frac{p^2-\frac{1}{2^2}}{2as}+\frac{\left(p^2-\frac{1}{2^2}\right)\left(p^2-\frac{3^2}{2^2}\right)}{(2as)^2}+\ldots\right].$$

Hart. — Sur la développée de la bicirculaire quartique symétrique. (382-384).

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAITRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE (¹).

Tome XII; 1883. 2ᵉ série.

Appell (P.). — Sur une classe d'équations différentielles linéaires binômes à coefficients algébriques. (9-46).

Le Mémoire de M. Appell a pour objet l'étude des équations différentielles linéaires de la forme

$$\frac{d^k z}{dx^k} = \psi(x, y) z,$$

où $\psi(x, y)$ est une fonction rationnelle des deux variables x et y, liées par une relation algébrique. L'auteur indique le moyen de reconnaître si une pareille équation admet une intégrale de la forme

$$z = e^{\int \varphi(x, y) dx},$$

$\varphi(x, y)$ étant une fonction rationnelle de x et y, et de trouver cette intégrale si elle existe. Il examine plus particulièrement l'équation du second ordre

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \psi(x, y) z,$$

à laquelle se ramène toute équation différentielle du second ordre à coefficients rationnels en x et y.

M. Appell commence par traiter le cas simple où les fonctions ψ et φ ne dépendent que de la variable x. Par un changement de variables il ramène l'équation à une autre de la même forme $\frac{d^2 z}{dt^2} = z f(t)$, dans laquelle le point ∞ est un pôle ou un point ordinaire de l'intégrale. Il est ramené du même coup à chercher les intégrales de la forme $z = e^{\int \varpi(t) dt}$, où la fonction rationnelle $\varpi(t)$ s'annule pour $t = \infty$. Voici les conclusions auxquelles il est conduit. Pour qu'il existe de pareilles intégrales, les infinis de $f(t)$ doivent être d'ordre pair, excepté certains d'entre eux qui peuvent être du premier ordre. Les pôles d'ordre pair, au nombre de n, sont pôles d'ordre moitié moindre de la fonction inconnue $\varpi(t)$; ils donnent lieu à des fractions simples dont les numérateurs sont fournis par des équations qui admettent deux systèmes de solutions. Les pôles simples de $f(t)$, au nombre de n', sont aussi pôles simples de $\varpi(t)$; les résidus correspondants sont toujours égaux à l'unité. Enfin $\varpi(t)$ peut devenir infini du premier ordre en n'' points, autres que les infinis de $f(t)$; ces infinis ont tous pour résidu 1. Si l'on appelle A_1 l'un des résidus correspondant aux n pôles dont nous avons parlé en premier lieu, la

(¹) Voir *Bulletin*, V_2, 25.

somme $\Sigma A_1 + n'$ doit être égale à $-n''$ ou à $1 - n''$; il faut donc que cette somme compte, parmi les 2^n déterminations dont elle est susceptible, des valeurs entières négatives ou nulles. Si cette condition est réalisée, on formera les fonctions $\varpi(t)$ correspondantes, contenant n'' fractions simples dont les infinis sont encore indéterminés, et l'on essayera chacune de ces fonctions $\varpi(t)$ pour vérifier l'équation $\varpi^2 + \frac{d\varpi}{dt} = f(t)$.

Cette analyse détaillée nous dispense d'insister sur le cas plus général de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = z\,\psi(x, y),$$

où les variables x et y sont liées par une relation algébrique $F(x, y) = 0$ de degré m et de genre p. Tous les points critiques sont supposés du second ordre : on sait que l'on peut, par une substitution rationnelle, ramener le cas général à ce cas particulier. On trouvera, dans le Mémoire de M. Appell, les résultats d'un calcul analogue à celui du cas précédent, mais nécessairement plus compliqué. La démonstration repose sur l'expression analytique d'une fonction rationnelle de deux variables x et y, dont on connaît les infinis et la valeur en un point, expression que M. Lindemann a déduite de la formule de Roch.

Dans ce qui précède, le genre de la courbe F est supposé plus grand que zéro. Lorsque la courbe est unicursale, on ramène l'équation différentielle à la forme précédemment étudiée $\frac{d^2 z}{dt^2} = z\,f(t)$, en remplaçant x et y par leurs valeurs en fonction rationnelle d'un paramètre. Lorsque le genre est égal à 1, on peut la ramener à une équation différentiellè du second ordre à coefficients uniformes doublement périodiques. La méthode de M. Appell conduit dans ce cas à l'intégration d'une classe nouvelle d'équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients doublement périodiques, qui donnent comme cas particulier celles de M. Fuchs (*Journal de Liouville,* 1878), et les équations du second ordre comprises dans la classe étudiée par M. Picard.

L'auteur passe ensuite à l'équation d'ordre quelconque

$$\frac{d^k z}{dx^k} = \psi(x, y)\,z.$$

Après avoir indiqué sommairement la marche à suivre dans le cas général, il applique sa méthode, avec tous les développements qu'elle comporte, à l'équation du troisième ordre $\frac{d^3 y}{dx^3} = y\,\psi(x)$.

Le Mémoire se termine par une remarque générale sur les équations différentielles à coefficients algébriques

$$\Psi(x, y) = \frac{d^n z}{dx^n} + \varphi_1(x, y)\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \varphi_2(x, y)\frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \ldots + \varphi_n(x, y)\,z = 0,$$

où les coefficients $\varphi_i(x, y)$ sont des fonctions rationnelles des variables x et y liées par une relation algébrique $F(x, y) = 0$, de degré m et de genre p.

Si p est égal à 1, x et y sont des fonctions elliptiques d'un paramètre θ, et l'on transforme l'équation différentielle en une autre, dont les coefficients sont des fonctions uniformes doublement périodiques de θ. M. Appell montre comment ce résultat peut être étendu au cas où p est plus grand que l'unité. Le principe de la transformation qu'il effectue consiste à remplacer l'équation différentielle unique $\Psi = 0$ par un système de p équations simultanées définissant z comme fonction des p variables $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_p, y_p)$ liées par les p relations

$$F(x_1, y_1) = 0, \quad F(x_2, y_2) = 0, \quad \ldots, \quad F(x_p, y_p) = 0,$$

puis à prendre comme nouvelles variables indépendantes les intégrales abéliennes $u_1, u_2, \ldots, u_p$ dont sont fonctions les p points analytiques (x_i, y_i), $(i = 1, 2, \ldots, p)$.

Floquet (*G.*). — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. (47-88).

Le Mémoire de M. Floquet a pour objet l'intégration des équations différentielles linéaires homogènes à coefficients uniformes et périodiques, de même période ω. Les idées dont s'inspire l'auteur sont empruntées au célèbre Mémoire de M. Fuchs; la méthode est identique à celle qu'a suivie le géomètre allemand dans l'étude des intégrales autour d'un point singulier.

Soient $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)$ m solutions distinctes de l'équation considérée

$$P(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \ldots + p_m y = 0,$$

dont l'intégrale générale est supposée uniforme. A cause de la périodicité des coefficients, on obtient un nouveau système évidemment fondamental en changeant dans les fonctions susdites x en $x + \omega$. On peut donc poser

$$\begin{aligned}
f_1(x+\omega) &= A_{11} f_1(x) + A_{12} f_2(x) + \ldots + A_{1m} f_m(x),\\
f_2(x+\omega) &= A_{21} f_1(x) + A_{22} f_2(x) + \ldots + A_{2m} f_m(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_m(x+\omega) &= A_{m1} f_1(x) + A_{m2} f_2(x) + \ldots + A_{mm} f_m(x),
\end{aligned}$$

le déterminant des m^2 quantités A étant différent de zéro. Les coefficients A définis par ces relations figurent dans une équation de degré m par rapport à l'inconnue ε :

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} - \varepsilon & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} - \varepsilon & \ldots & A_{2m} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm} - \varepsilon \end{vmatrix} = 0,$$

que, par analogie avec l'équation fondamentale de M. Fuchs, M. Floquet a nommée l'*équation fondamentale relative à la période* ω. Les racines de cette équation sont indépendantes du choix du système fondamental.

Afin de simplifier les énoncés, l'auteur reprend la dénomination de *fonctions périodiques de seconde espèce,* pour désigner des fonctions qui se reproduisent multipliées par un facteur constant, lorsqu'on augmente la variable d'une certaine quantité.

Il s'agit de reconnaître si l'équation $P = 0$ admet pour intégrales des fonctions périodiques de seconde espèce et de période ω, et de déterminer dans ce cas les multiplicateurs ε correspondant à ces fonctions. Voici les conclusions de la première Partie du Mémoire.

Le multiplicateur ε doit être racine de l'équation fondamentale. Lorsque cette équation n'a que des racines simples, $P = 0$ admet comme intégrales distinctes m fonctions périodiques de seconde espèce et de période ω. Lorsque l'équation fondamentale a des racines multiples, n étant le nombre des racines distinctes, $P = 0$ admet comme intégrales indépendantes au moins n fonctions périodiques de seconde espèce, ayant pour multiplicateurs ces racines. Ces intégrales concourent à former un système fondamental, que M. Floquet nous apprend à compléter : les autres éléments de ce système ne sont plus des fonctions périodiques; mais chacun d'eux affecte la forme d'un polynôme en x, ayant pour coefficients des fonctions périodiques de seconde espèce de même multiplicateur; les multiplicateurs sont les racines de l'équation fondamentale. Chaque racine distincte donne ainsi naissance à un groupe comprenant autant d'intégrales qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité.

Dans la dernière partie de son travail, l'auteur s'attache à préciser le nombre des intégrales périodiques de seconde espèce : il utilise le procédé qui a servi à M. Hamburger pour compléter l'étude de M. Fuchs, relativement aux intégrales des équations linéaires homogènes, à coefficients uniformes, autour d'un point singulier. L'application de ce procédé, qui permet à M. Floquet de distinguer les groupes d'intégrales dont nous venons de parler en sous-groupes indépendants les uns des autres, le conduit à des résultats très nets que nous allons faire connaître. Le nombre exact des fonctions périodiques de seconde espèce, linéairement indépendantes, qui satisfont à l'équation $P = 0$, est égal à la somme des ordres des premiers déterminants mineurs de Δ qui ne s'annulent pas, lorsqu'on y remplace ε, successivement par chaque racine de l'équation fondamentale. La condition nécessaire et suffisante pour que $P = 0$ admette comme intégrales distinctes m fonctions périodiques de seconde espèce est que chaque racine de l'équation fondamentale annule tous les mineurs de Δ, jusqu'à l'ordre égal au degré de multiplicité de cette racine exclusivement.

Dans le type $P = 0$ rentrent les équations linéaires à coefficients constants, dont la méthode de M. Floquet permet de retrouver les intégrales bien connues, l'équation de Lamé, et les équations à coefficients doublement périodiques récemment étudiées par M. Picard.

Méray. — Solution du problème général de l'Analyse indéterminée du premier degré. (89-104).

Les problèmes les plus simples de l'analyse indéterminée du premier degré sont résolus depuis longtemps : M. Méray est le premier qui ait traité le cas général.

Il s'agit de trouver toutes les solutions en nombres entiers d'un système de m équations du premier degré à n inconnues et à coefficients entiers. On doit supposer le système algébriquement indéterminé; car, s'il était indéterminé, l'application des formules de Cramer révélerait immédiatement sa possibilité ou son impossibilité arithmétique.

Considérant un système de m formes linéaires à n indéterminées ($n \geq m$), l'auteur appelle *déterminant* de ce système par rapport à m de ces indéterminées le déterminant des m^2 coefficients qui leur correspondent. Cela posé, voici la condition nécessaire et suffisante pour que m équations linéaires à coefficients entiers admettent des solutions entières. Les déterminants des formes linéaires, auxquelles les premiers membres de ces équations se réduisent par la suppression des termes connus, doivent admettre pour plus grand commun diviseur un nombre d, divisant tous les déterminants d'ordre m, obtenus en remplaçant dans les premiers une colonne quelconque par la suite des termes connus.

Reste à trouver les solutions entières, une fois leur existence reconnue; elles sont comprises dans des formules générales, pour lesquelles nous renvoyons au Mémoire de M. Méray.

Raffy (*L.*). — Recherches algébriques sur les intégrales abéliennes. (105-190).

Ce travail a été analysé dans une autre Partie du Bulletin.

André (*D.*). — Troisième Mémoire sur la sommation des séries. (191-198).

Ce travail contient la suite des recherches de M. André sur la sommation de toutes les séries convergentes dont le terme général affecte une forme donnée. Il concerne celles pour lesquelles ce terme U_n est de la forme

$$U_n = \frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)}{1.2.3\dots n} u_n x^n,$$

n étant un entier quelconque non négatif, p un nombre quelconque positif ou négatif, mais non pas entier; u_n représente le terme général d'une série récurrente proprement dite quelconque.

L'auteur montre que toutes ces séries peuvent se sommer à l'aide de fonctions algébriques rationnelles et d'irrationnelles de la forme $(1-ax)^p$.

Il commence par donner à l'expression de u_n une forme nouvelle appropriée à son objet et qui s'obtient en partant d'une identité due à J.-F.-W. Herschel. Grâce à cette transformation, il arrive à l'expression suivante de la somme cherchée :

$$S = \sum \sum_{h=0}^{h=\alpha-1} Q_{a,h} a^h x^h (1-ax)^{-p-h}.$$

Dans cette formule, la première sommation s'étend à toutes les racines a, b, ... d'ordre de multiplicité α, β, ... de l'équation génératrice de la série récurrente proprement dite dont u_n est le terme général; $Q_{a,h}$ est un polynôme dont M. André a donné la formation. Ainsi le problème se trouve résolu de la manière annoncée.

L'auteur montre ensuite que beaucoup de séries différentes de celles qu'il vient d'étudier peuvent ou s'y ramener ou s'en déduire. Le Mémoire se termine par une application à la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}+1\right)\left(\frac{1}{3}+2\right)\dots\left(\frac{1}{3}+n-1\right)}{1.2.3\dots n} n^3 x^n,$$

dont la somme est

$$S = \frac{x(9+18x+x^2)}{27(1-x^3)\sqrt[3]{1-x}}.$$

Brunel (*G.*). — Étude sur les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques de genre 3. (199-260).

Ce travail a été analysé dans une autre partie du *Bulletin*.

Goursat. — Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. (261-286).

Le Mémoire de M. Goursat a pour objet les séries ordonnées suivant les puissances ascendantes et positives d'une variable, dans lesquelles le rapport de deux coefficients consécutifs est une fonction rationnelle du rang de l'un d'eux. Il commence par la démonstration d'un théorème général sur les intégrales régulières de l'équation differentielle linéaire à coefficients uniformes. Pour qu'une équation linéaire admette une intégrale holomorphe dans le domaine du point singulier $x = a$, et que cette intégrale ainsi que ses $p-1$ premières dérivées puissent être prises arbitrairement pour $x = a$, il faut que cette équation soit de la forme

$$(x-a)^{m-p}\frac{d^m y}{dx^m} = Q_1(x)(x-a)^{m-p-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \dots \\ + (x-a)Q_{m-p-1}(x)\frac{d^{p+1}y}{dx^{p+1}} + Q_{m-p}(x)\frac{d^p y}{dx^p} + \dots + Q_m(x)y.$$

Réciproquement, toute équation de cette forme admettra une intégrale holomorphe dans le domaine du point a, et les valeurs de cette intégrale, ainsi que de ses $p-1$ premières dérivées pourront être prises arbitrairement pour $x = a$, si l'équation

$$\varphi(s) = (r-p)\dots(r-m+1) \\ - Q_1(a)(r-p)\dots(r-m+2) - \dots - Q_{m-p}(a) = 0$$

n'a aucune racine entière supérieure à $p-1$. Si dans le théorème de M. Goursat on fait successivement $p = m$ et $p = 1$, on trouve les deux propositions sur lesquelles M. Fuchs a fondé la théorie des équations différentielles linéaires. Ce théorème donne en outre un moyen de reconnaître dans quels cas tous les logarithmiques disparaissent des intégrales, bien que l'équation déterminante relative à un point critique admette un groupe de racines telles que les différences de deux d'entre elles soient des nombres entiers.

Dans la seconde partie de son travail, l'auteur prouve que, étant données $2n-1$ quantités constantes $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$, telles qu'aucune des quantités b_i, $b_i - b_h$, $a_i - a_h$, $\sum_{i=1}^{n-1} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i$ ne soit un nombre entier, il existe une fonction multiforme de la variable x, jouissant des propriétés suivantes. Entre $n+1$ déterminations de la fonction il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Chaque branche de la fonction est holomorphe pour toute valeur de x différente de 0, 1, ∞. Dans le voisinage du point $x = 0$, on a les n déterminations linéairement indépendantes

$$P_1(x),\ x^{1-b_1}P_2(x),\ \dots,\ x^{1-b_{n-1}}P_n(x),$$

$P_1, P_2, \dots, P_n$ étant holomorphes pour $x = 0$. Dans le domaine du point $x = 1$, on a les n déterminations linéairement indépendantes

$$Q_1(x),\ Q_2(x),\ \ldots,\ Q_{n-1}(x),\ (1-x)^{b_1+b_2+\ldots+b_{n-1}-a_1-a_2-\ldots-a_n}Q_n(x),$$

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ étant holomorphes dans le domaine de ce point. Enfin, pour $x = \frac{1}{x'} = \infty$, on a les n déterminations linéairement indépendantes

$$x'^{a_1}R_1(x'),\ x'^{a_2}R_2(x'),\ \ldots,\ x'^{a_n}R(x'),$$

$R_1, R_2, \ldots, R_n$ désignant des fonctions holomorphes dans le voisinage du point critique $x' = 0$. Cette proposition revient à dire que toute fonction jouissant des propriétés énoncées satisfait à une équation différentielle qui est complètement déterminée, savoir

$$x^{n-1}(x-1)\frac{d^n y}{dx^n} + (Ax - B)x^{n-2}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + (Cx - D)x^{n-3}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots$$
$$+ (Hx - K)x\frac{d^2y}{dx^2} + (Lx - M)\frac{dy}{dx} + Ny = 0,$$

A, B, C, D, ..., L, M, N étant $m - 1$ constantes, dont les valeurs sont toujours données effectivement par un système d'équations du premier degré. Ces constantes étant en même nombre que les paramètres a et b, l'équation précédente est la plus générale de son espèce. Mais, pour qu'une équation de cette forme admette un système d'intégrales jouissant des propriétés énoncées, il faut que ses coefficients vérifient les conditions d'inégalité imposées précédemment aux paramètres a et b.

M. Goursat signale ensuite les analogies de l'équation qu'il vient d'obtenir avec l'équation différentielle d'Euler que vérifie la série hypergéométrique. Ces analogies résident dans la forme de la nouvelle équation qui, pour $n = 2$, se réduit à l'équation d'Euler, et dans la forme de ses intégrales qui sont les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. Dans la série entière qui représente aux environs de l'origine l'intégrale holomorphe, le rapport du terme en x^{m+1} au terme en x^m est, comme dans la série de Gauss, une fraction rationnelle dont les deux termes sont du même degré en m. De plus, par les transformations bien connues qu'admet l'équation d'Euler, on déduit ici encore l'intégrale générale de la connaissance d'une seule intégrale particulière. Enfin les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur satisfont à des relations analogues à celles que Gauss et Kummer ont données pour la série hypergéométrique ordinaire, et elles peuvent s'exprimer par des intégrales définies multiples.

Comme application de ce qui précède, on retrouve les résultats obtenus par Clausen (*Journal de Crelle*, t. 3) relativement à la série hypergéométrique. Le Mémoire de M. Goursat se termine par quelques indications sur une classe de fonctions qui se rattachent aux fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur de la même manière que la fonction exponentielle à la série du binôme, et les transcendantes de Bessel et de Fourier aux fonctions de Gauss.

André (*D.*). — Sur les séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable. (287-300).

Connaissant la somme $f(x)$ de la série

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots,$$

Il s'agit d'en déduire la somme $G(x)$ de la série

$$u_0 v_0 x + u_1 v_1 x + u_2 v_2 x^2 + u_3 v_3 x^3 + \ldots$$

obtenue en multipliant les termes successifs de la première par les termes de même rang d'une série récurrente proprement dite. M. André avait déjà résolu ce problème dans trois cas particuliers par des moyens plus ou moins compliqués. Un procédé plus simple et plus puissant à la fois lui permet aujourd'hui de le résoudre dans sa pleine généralité.

Si l'on désigne par r l'une quelconque des racines de l'équation génératrice de la série réccurente, par ρ son degré de multiplicité, $G(x)$ sera la somme de plusieurs séries $G_r(x)$, en nombre égal à celui des racines distinctes, et définies par la formule générale

$$G_r(x) = Q_{r,0} f(rx) + Q_{r,1} rx f'(rx) + \ldots + Q_{r,\rho-1} r^{\rho-1} x^{\rho-1} f^{(\rho-1)}(rx).$$

Les coefficients Q_n se déterminent de la manière suivante : le terme général v_n de la série récurrente est un polynôme entièrement connu, du degré $\rho - 1$ par rapport à n. En appliquant une remarquable formule du calcul des différences finies, qui est due à J.-F.-W. Herschel, on peut mettre ce polynôme sous la forme

$$v_n = Q_{r,0} + Q_{r,1} n + Q_{r,2} n(n-1) + \ldots + Q_{r,\rho-1} n(n-1)(n-2)\ldots(n-\rho+2).$$

Ce développement fait connaître les coefficients Q_r.

Cette ingénieuse solution ramène l'étude générale des séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable à celle d'un nombre relativement restreint de séries particulières.

Guichard (*C.*). — Théorie des points singuliers essentiels. (300-394).

Ce travail a été analysé dans une autre Partie du *Bulletin*.

Goursat. — Mémoire sur les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur; 2e Partie. (395-430).

Ce travail fait suite au Mémoire que l'auteur a publié sous le même titre dans le même Volume des *Annales* (p. 261-286) et contient la généralisation de ses premières recherches. Il débute par quelques principes relatifs à la théorie des équations linéaires. Après avoir défini les équations différentielles linéaires *ramifiées de la même manière*, M. Goursat démontre que, si deux équations sont ramifiées de la même manière, l'intégrale de la seconde est

$$z = P_0 y + P_1 \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}},$$

y désignant l'intégrale générale de la première et $P_0, P_1, \ldots, P_{m-1}$ des fonctions uniformes de la variable. A cet énoncé, il ajoute quelques remarques sur les systèmes fondamentaux de deux équations ramifiées de la même manière (ou *de même classe*), et il fait connaître le moyen de décider si deux équations données sont ou non de même classe. Si ces deux équations ont leurs coefficients rationnels et toutes leurs intégrales régulières, la réponse à cette question dépend d'opérations en nombre limité, compliquées sans doute, mais qui reviennent dans tous les cas à des calculs algébriques.

Deux équations linéaires à coefficients uniformes et de même ordre sont dites *transformées* l'une de l'autre si le quotient de leurs intégales générales est une fonction de la seule variable indépendante. On reconnaît facilement si deux équations linéaires sont transformées l'une de l'autre. Les équations de même classe et les équations transformées rentrent dans la catégorie plus générale des équations de même *famille*, établie par M. Poincaré.

Ces principes posés, l'auteur définit les nouvelles fonctions hypergéométriques dont il va s'occuper. Ce sont des fonctions multiformes de la variable x jouissant des propriétés suivantes. Entre $n+1$ branches de la fonction il existe une relation linéaire et homogène à coefficients constants. Chaque branche de la fonction est uniforme pour toute valeur de x différente de $0, 1, \infty$; dans le voisinage du point $x=0$, on a les n déterminations linéairement indépendantes $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, dont la première est uniforme pour $x=0$ et dont les autres sont multipliées respectivement par les $n-1$ facteurs constants différents $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$, lorsque x décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x=0$. Dans le voisinage du point $x=1$, on a les n branches linéairement indépendantes $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ dont la première ψ_1 est multipliée par le facteur constant ω_1, lorsque x décrit un lacet dans le sens direct autour du point $x=1$, et dont les $n-1$ autres sont uniformes dans le voisinage de ce point. Enfin, dans le domaine du point $x=\frac{1}{x'}=\infty$, on a n déterminations linéairement indépendantes $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$, qui sont respectivement multipliées par n facteurs constants différents $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$, lorsque la variable x décrit sur la sphère un petit lacet dans le sens inverse autour du point $x'=0$. De cette définition résulte que toutes les fonctions de cette nature admettant les mêmes multiplicateurs ω et ω' sont, en général, ramifiées de la même manière. Ces nouvelles fonctions comprennent, comme cas particulier, les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur que M. Goursat a définies dans son premier Mémoire. On peut généraliser la propriété de ces fonctions hypergéométriques. Soit, comme plus haut, z une fonction multiforme de x jouissant des propriétés déjà énoncées. Dans le voisinage des points critiques, on a n branches qui ont respectivement les formes suivantes :

$$\begin{array}{llllll}
\text{Pour } x=0, & \varphi_1(x), & x^{r_1}\varphi_2(x), & \ldots, & & x^{r_{n-1}}\varphi_n(x), \\
\text{Pour } x=1, & \psi_1(x), & \psi_2(x), & \ldots, & \psi_{n-1}(x) & (1-x)^{R}\psi_n(x), \\
\text{Pour } x=\frac{1}{x'}=\infty, & x'^{r'_1}\pi'_1(x'), & x'^{r'_2}\pi(x'), & \ldots, & & x'^{r'_n}\pi_n(x'),
\end{array}$$

les fonctions, φ_i, ψ_i, π_i étant holomorphes dans le domaine du point correspondant. Supposons, de plus, qu'aucun des nombres R, $r_i - r_h$, $r'_i - r'_h$ ne soit entier. L'équation hypergéométrique correspond au cas où les nombres R, r, r' vérifient la relation

$$\Sigma r + \Sigma r' + R = n-1.$$

M. Goursat démontre que l'intégrale générale d'une pareille équation s'exprime toujours au moyen de séries hypergéométriques d'ordre supérieur.

Il applique ensuite ces résultats aux séries hypergéométriques de Gauss dont le carré est une série hypergéométrique d'ordre supérieur et arrive à ce théorème : « Pour que le carré d'une série hypergéométrique ordinaire $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$

soit une série hypergéométrique d'ordre supérieur, il faut et il suffit que $2(\gamma - \alpha - \beta)$ soit un nombre entier positif impair ».

Le problème qui vient d'être traité n'est qu'un cas particulier de celui-ci : « Dans quels cas le produit de deux séries hypergéométriques de Gauss est-il une série hypergéométrique d'ordre supérieur ». M. Goursat aborde cette question générale et en donne la solution complète : le produit

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \times F(\alpha', \beta', \gamma', x)$$

est une série hypergéométrique d'ordre supérieur dans les deux cas suivants et dans ces cas seulement :

1° Lorsque l'on a les relations

$$\alpha' = \alpha + 1 - \gamma, \quad \beta' = \beta + 1 - \gamma, \quad \gamma' = 2 - \gamma, \quad \gamma - \alpha - \beta = \frac{2n+1}{2},$$

n étant nul ou égal à un nombre entier positif;

2° Lorsque les différences $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$ sont des nombres entiers et lorsque l'on a

$$\gamma + \gamma' - \alpha - \alpha' - \beta - \beta' = n,$$

n étant nul ou égal à un nombre entier positif.

Pour terminer, l'auteur signale une nouvelle généralisation qu'on peut donner au théorème de Riemann : étant données deux équations linéaires d'ordre m ayant un même point singulier $x = a$, on dira que les équations *sont de même forme* dans le voisinage de ce point lorsqu'on pourra trouver deux systèmes fondamentaux d'intégrales des deux équations appartenant aux mêmes exposants et se comportant de la même manière dans le domaine de ce point. Deux équations ayant les mêmes points critiques et la même forme dans le voisinage de chacun de ces points, ainsi que pour le point $x = \infty$, auront un certain nombre de coefficients identiques, et, en général, elles auront en outre un certain nombre de coefficients tout à fait arbitraires. Ces derniers ne pourront intervenir que dans les relations linéaires entre les divers groupes d'intégrales. M. Goursat montre que ces relations ne peuvent être les mêmes pour les deux équations à moins que ces équations se confondent.

ANNALES DES MINES (¹).

8e série. — Tome II; 2e semestre 1882.

Olry. — Note sur une soupape de sûreté imaginée par M. Codron, de Lille. (107-114, 1 pl.).

Dans la pratique, les soupapes des divers types employés jusqu'ici ne se soulèvent guère que de 1^{mm}; mais, aussitôt que la vapeur a trouvé une issue, la pression décroît rapidement, la charge de la soupape redevient prédominante,

---

(¹) Voir *Bulletin*, I_2, 317; II_2, 105; IV_2, 204, et VII_2, 83.

et, pour obtenir une sensibilité suffisante, il faudrait donner à la soupape un diamètre énorme et généralement irréalisable.

Le nouveau règlement sur les appareils à vapeur spécifie que, pour être complètement efficaces, les soupapes doivent être manœuvrées artificiellement.

Dans le type de soupape imaginé par M. Adams, de Manchester, la levée est augmentée par l'action de la vapeur qui, en s'échappant, vient frapper contre un rebord disposé autour de l'obturateur.

Le système présenté par M. Codron paraît plus satisfaisant encore; il donne une solution tout à fait complète du problème, en permettant d'obtenir des levées aussi grandes qu'on le juge utile.

Vicaire. — Rapport de la Commission chargée d'examiner le frein à air comprimé de M. Wenger. (115-134, 1 pl.).

Ce rapport est suivi d'une Note complémentaire indiquant les conditions du fonctionnement du nouveau frein.

Seguela. — Étude sur l'action des freins. (361-392, 1 pl.).

L'auteur examine successivement l'influence d'une action tangentielle motrice et d'un effet de traction résistant, puis d'un effort de traction moteur et d'un effet tangentiel résistant; puis il discute les résultats des expériences entreprises en Angleterre par M. le capitaine Galton.

Cas particuliers. Arrêt d'une voiture non soumise à toute la puissance de frein. Freins continus. Examen d'un attirail de frein. Examen du moteur. Systèmes automatiques et non automatiques. Considérations générales sur l'arrêt d'un train soumis à l'action d'un frein continu.

Tome III; 1er semestre 1883.

Sartiaux et *Banderali.* — Matériel des chemins de fer de la Corse. (307-396, 10 pl.).

Description du matériel, présentée sous forme de rapport au Comité de l'exploitation technique des chemins de fer.

Ce document est accompagné d'annexes dans lesquelles on a indiqué, entre autres particularités, les conditions de résistance du type de rail et d'éclisse, des traverses, les charges que les machines peuvent remorquer sur des rampes continues de différentes inclinaisons; enfin, les données d'expérience pour le fonctionnement des locomotives du type adopté.

Thiré. — Note complémentaire sur le planimètre d'Amsler. (401-484, 1 pl.).

Dans une précédente Notice (t. I, p. 487-500; 1882), l'auteur a donné la théorie du planimètre d'Amsler, en décomposant la surface plane à mesurer au moyen d'un double réseau de lignes qu'il a appelées *cercles de roulement* et *courbes de glissement*.

Le même principe de démonstration pourrait être conservé avec d'autres modes de décomposition de la surface à mesurer. Par exemple, on pourrait avoir recours à des cercles concentriques au pôle et à des rayons passant par le pôle. Ce mode de décomposition a l'avantage de ne donner lieu qu'à un calcul très élémentaire.

Haton de la Goupillière. — Formules analytiques relatives aux lois de la richesse des filons. (405-421, 1 pl.).

Certaines de ces lois, d'un ordre purement géométrique, se rapportent à la disposition relative de la stratification du terrain et des fractures qui l'ont affecté. Dans les variations d'allure de ces dernières, il y a lieu de distinguer leur direction, leur inclinaison et l'orientation de leur intersection par le plan des strates. Ces trois éléments ont donné lieu à d'importantes remarques énoncées par divers ingénieurs et minéralogistes, R. Thomas, Hellot, R. Tregaskis et M. Moissenet.

Ces lois ne sont pas, du reste, isolées les unes des autres. Elles se trouvent, au contraire, étroitement reliées par une coordination rationnelle qui a été développée avec beaucoup de jugement, de prudence et de sagacité par M. Moissenet.

On peut suivre, pour cette recherche, une marche graphique ou la voie du calcul. Les procédés de la Géométrie descriptive ont été déjà employés par M. Moissenet dans ses études sur le Cornwall, et, d'après sa méthode, par M. Barthe pour les filons aurifères de Gondo (Valais). C'est, au contraire, à la méthode analytique que se rapporte le présent travail. Jusqu'à présent, les relations qui font connaître les variations de direction et d'inclinaison n'ont été données que pour le cas particulier du plan vertical; celle qui exprime la puissance en fonction du glissement du toit ne l'a été que pour le cas spécial du mouvement, suivant la ligne de la plus grande pente, et seulement d'une manière approximative; enfin, celle qui détermine le sens des colonnes métallifères n'a pas encore été formulée. « Je me propose », dit l'auteur, « de traiter ces trois problèmes d'une manière à la fois générale et rigoureuse. Si les calculs qui m'en ont fourni les solutions restent un peu compliqués, malgré les simplifications que j'ai réussi à y apporter, il est nécessaire de remarquer que, les formules finales étant maintenant établies, leur application numérique à chaque cas particulier sera, au contraire, simple et rapide. »

Voici la subdivision du travail : orientation des colonnes métallifères; déviation de la direction; déviation de l'inclinaison; relation de la puissance au glissement.

Haton de la Goupillière. — Note sur le profil d'équilibre des tractions mécaniques en rampe. (422-428, 1 pl.).

Quand on envisage une traction mécanique destinée à remonter sur une rampe, par l'action d'un moteur, les matières fournies par une exploitation en vallée, la perturbation apportée dans le jeu du moteur par la variation du poids du câble devient trop importante pour que l'on ne cherche pas à en atténuer l'effet.

On peut se proposer d'adopter une voie en courbe, et d'un profil d'équilibre tellement choisi, que les variations de poids du câble soient compensées par des variations correspondantes dans la pente, et, par suite, dans les composantes tangentielles du poids mort et du poids utile à chaque instant.

M. J. von Hauer a donné de ce problème une solution complète, et est arrivé à ce résultat remarquable, que la courbe cherchée n'est autre que la cycloïde.

L'auteur du présent travail s'est proposé de donner une démonstration simple et directe de cette propriété. H. B.

ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES (¹)

5ᵉ série. — Tome XX, 2ᵉ semestre 1880.

Lévy-Lambert. — Tableaux graphiques pour le calcul des ressorts. (59-65, 1 pl.).

Le calcul des ressorts, au moyen des formules établies par M. Phillips, exige un certain nombre de tâtonnements de la part du constructeur. Il paraît donc utile et commode d'appliquer à ces calculs les méthodes d'anamorphose créées par M. Léon Lalanne.

Bloch (R.). — Note sur la recherche des dépenses d'eau par infiltration et imbibition dans un canal après un changement de sa section mouillée. (66-70, 1 fig.).

Mocquery (C.). — Largeur à donner aux canaux dans les courbes. (118-124, 1 pl.).

Lorsque deux bateaux ont à se croiser dans une courbe, un bateau stationnant peut se trouver, tantôt sur la rive convexe, tantôt sur la rive concave. On démontre aisément que toute largeur qui conviendra à l'un de ces cas conviendra nécessairement à l'autre.

Désignant par x la largeur cherchée, R le rayon de la courbe convexe, l la largeur des bateaux, L leur longueur, j le jeu, on trouve

$$(x+\mathrm{R})^2 = \frac{\mathrm{L}^2}{4} + \left[l + j + \sqrt{(\mathrm{R}+l)^2 + \frac{\mathrm{L}^2}{4}}\right]^2.$$

La discussion de cette formule fait l'objet de la présente Notice.

Cuny. — Vérification de la stabilité des voûtes. (145-156, 1 pl.).

Dans un travail paru aux *Annales*, en 1867 et 1868, M. A. Durand-Claye a précisé le rôle des courbes des pressions, et indiqué, par des constructions géométriques, quelles sont toutes les courbes des pressions compatibles avec l'équilibre et avec la résistance d'une voûte donnée.

(¹) Voir *Bulletin*, t. XI, 209, II_2, 106 et IV_2, 211.

L'auteur de ce Mémoire s'est proposé d'indiquer des constructions extrêmement simples et d'une exécution très rapide, pour la pratique de la méthode de M. Durand-Claye, et de faire connaître une autre méthode de vérification, dans laquelle les conditions d'équilibre sont nettement accusées par les positions relatives de lignes droites et de courbes-contours déduites de la voûte à étudier au moyen d'une très simple transformation.

Willotte (*H.*). — Note sur la détermination, à l'aide de tableaux graphiques, des surfaces des profils de terrassements. (303-311, 1 pl.).

L'emploi des méthodes graphiques pour résoudre les problèmes de construction tend à se généraliser de plus en plus. Chaque jour les méthodes nouvelles se créent ou se perfectionnent, et les progrès accomplis ne font qu'appeler plus vivement sur ce sujet l'attention des ingénieurs.

L'auteur se propose d'examiner deux problèmes particuliers que l'on peut avoir à résoudre quand il s'agit d'évaluer, d'une manière expéditive, la surface d'un profil en travers.

Boulangier. — Méthode de calcul des terrasses par réduction à l'horizontale. (312-316, 1 pl.).

Exposé d'une méthode très rapide et très exacte, qui s'applique aux avant-projets comme aux projets définitifs de routes, de canaux et de chemins de fer, et dont l'auteur a fait usage dans l'avant-projet du canal direct de Dunkerque à Lille, qui comporte 16 millions de mètres cubes de déblais.

Dupuy (*C.*). — Note sur les raccordements des courbes avec les alignements droits dans le tracé des chemins de fer. (544-552. 4 fig.).

Discussion en faveur de l'adoption de la courbe de raccordement due à M. Nordling

$$y = m x^3,$$

tangente à l'alignement droit et au cercle, de manière à avoir un rayon de courbure infini au contact avec la droite, et un rayon de courbure égal à celui du cercle au contact avec cette dernière courbe.

La courbe proposée par M. Michel, et qui a pour équation

$$y = m x^3 - n x,$$

présente le défaut de ne pas se raccorder avec l'alignement droit, et de ne pas différer essentiellement de la courbe de Nordling. Il paraît donc avantageux de s'en tenir à celle-ci.

6e série. — Tome I; 1er semestre 1881.

Flamant. — Remplissage des écluses. (81-91).

Note sur l'économie d'eau à réaliser par l'emploi d'une colonne liquide pour le remplissage et la vidange des écluses de navigation. Influence du frottement de l'eau contre les parois de l'aqueduc. Évaluation plus approchée des pertes dues à quelques autres causes.

Siegler. — Procédé rapide de détermination des surfaces de profils en travers. (98-108, 1 pl.).

Question qui préoccupe à juste titre un grand nombre d'ingénieurs dans la préparation des projets de routes et le calcul des cubatures des terrasses.

Le procédé exposé ici n'exige pas le dessin des profils en travers, et ne demande que la construction d'un graphique ou de quelques graduations métriques qu'un dessinateur peut exécuter en deux ou trois heures de travail.

Ce procédé permet, avec le même graphique, de passer rapidement d'un gabarit de voie à un autre. Il donne en même temps les surfaces d'emprise et de talus.

L'emploi du graphique est très simple et peu fatigant, de sorte que les erreurs matérielles se produisent rarement.

Crépin (A.). — Étude sur le desséchement des pays watringués du nord de la France pour l'écoulement des eaux nuisibles à la mer. (137-196, 4 pl.).

Jusqu'à présent, l'empirisme et le tâtonnement ont régné en maîtres dans les rédactions des projets de watringues. On procède par à peu près et l'on déduit les conclusions de prémisses contestables.

L'État va exécuter des projets et faire des dépenses considérables pour des travaux d'ouvrages à la mer devant servir aux desséchements. Quand ces travaux seront finis, ou ces dépenses seront absolument inutiles, ou il faudra que les watringues procurent des améliorations à leurs canaux en rapport avec les ouvrages de débouché.

Or avec les formules ordinaires de l'hydraulique, le problème est des plus complexes et on ne sait quelquefois par quel bout l'aborder.

L'auteur a pensé qu'il ne serait pas inutile d'étudier un instrument de calcul qui apporte la clarté dans cette étude d'un abord si épineux.

L'emploi des méthodes se prête avec avantage à cette recherche; les tableaux ainsi construits ne gardent rien de la complication relative des calculs qu'il est nécessaire de développer pour justifier leur tracé.

Yvon Villarceau. — Sur l'emploi des fonctions hyperboliques dans les calculs de résistance des matériaux. (207-212).

Cette courte Note, rédigée à la demande de M. Lalanne, a pour objet de faire bien nettement ressortir l'avantage que présente l'emploi des fonctions hyperboliques dans la solution de certains problèmes de la pratique industrielle, par exemple, les calculs de résistance des matériaux.

Appliquant ces formules à l'étude de trois questions traitées par Navier, l'auteur montre qu'elles conduisent à des réductions nouvelles, que les notations de la Trigonométrie ordinaire ne permettaient pas d'apercevoir facilement.

Flamant. — Calcul de l'effort nécessaire pour mouvoir un bateau dans un canal courbe. (213-224, 2 fig.).

Si l'effort nécessaire pour faire mouvoir un bateau (rectangulaire de longueur a et de largeur b) dans un canal rectiligne, avec une certaine vitesse, est représenté par l'unité, celui qu'il faudra exercer pour donner au bateau la même vitesse dans une courbe de rayon R sera

$$1+\frac{a^4}{8b^2R^2}.$$

Établissement et discussion de cette formule.

Decœur (*P.*). — Emploi de bassins d'épargne pour réduire la dépense d'eau dans les canaux éclusés. (428-454, 1 fig.)

La circulation sur les voies navigables devenant de plus en plus active, il arrivera un moment où l'alimentation des canaux éclusés sera à la fois très difficile et dispendieuse.

L'auteur se propose d'établir qu'en abandonnant complètement l'idée de l'utilisation de la force vive de l'eau par les mouvements intermittents ou le système des coups de bélier, on peut obtenir, au moyen de plusieurs bassins d'épargne, une économie d'eau aussi grande qu'on voudra, et arriver facilement à un rendement de plus de 60 pour 100 en n'employant qu'un seul bassin d'épargne, relié au sas par un conduit de peu de longueur, mais de grande section.

Blum. — Calcul rapide des terrassements. (455-461, 2 pl.).

Description d'un instrument destiné à faciliter ce calcul. Antérieurement, M. Toulon avait eu l'idée d'ajouter une règle glissant le long d'une règle fixe, toutes deux étant convenablement graduées, au lieu d'un tableau graphique à double entrée.

L'auteur a ainsi mis en évidence l'équivalence des propriétés de la règle logarithmique ou règle à calcul et de l'abaque.

Cornaglia (*P.-A.*). — Du flot de fond dans les liquides en état d'ondulation. (587-695, 1 pl.).

Préliminaires et question. Détermination du flot de fond. Particularités du flot. Effets du flot. Applications et conclusions. Réfutation de la théorie d'Emy sur le flot de fond.

Tome II; 2e semestre 1881.

Fontaine et *Desmur*. — Durée de l'éclusage au canal du centre des bateaux chargés à 300 tonnes. (139-161, 1 pl.).

La loi a fixé à 2m la profondeur d'eau minimum, et une circulaire ministérielle a prescrit de fixer, d'après cette donnée, la position des seuils des écluses. Il semblerait donc que les seuils devraient être placés simplement à 2m en contre-bas de la tenue d'eau normale des biefs.

L'auteur se propose de montrer que, si on les établissait ainsi, sans se préoccuper sérieusement de donner beaucoup plus de facilité au dégagement de l'eau dans les écluses, on irait au-devant de graves mécomptes et qu'on serait loin de permettre pratiquement le passage de bateaux chargés à 300 tonnes.

Les résultats auxquels il parvient trouvent une vérification très satisfaisante.

Mocquery (*C.*). — Courbes de raccordement des canaux. (198-219, 5 fig.).

Suite et complément à une Note antérieure. La formule donnée dans le premier travail peut se réduire très simplement à

$$x = 10^m + \frac{380^m}{R},$$

qui a été consacrée par une circulaire ministérielle.

Il reste à examiner les conditions du raccordement des parties courbes élargies suivant la formule, avec les parties droites contiguës dont la largeur est normale.

C'est là l'objet de la présente Note où l'on étudie successivement trois cas : 1° l'élargissement symétrique; 2° l'élargissement total par la rive concave; 3° l'élargissement total par la rive convexe.

Dans la suite de ses recherches, l'auteur est conduit à étudier l'enveloppe d'une droite de longueur constante L dont les extrémités s'appuient sur une circonférence (de rayon R) et l'une de ses tangentes OY.

Il faudrait, pour en avoir l'équation, éliminer α entre l'équation

$$[L^2 + (\alpha x - y)^2]\sqrt{1 + \alpha^2} = 2L(\alpha^2 x - \alpha y + R)$$

et sa dérivée par rapport à α. Il est plus simple de recourir à la détermination graphique des principales singularités de cette enveloppe, qui présente 1 point double, 2 points d'inflexion et 4 points de rebroussement.

Enfin, dans le cas particulier du raccordement de deux courbes contiguës et de rayons différents, on aurait à chercher l'enveloppe d'une droite de longueur constante L dont les extrémités s'appuieraient sur deux circonférences (de rayons R et R') tangentes entre elles.

Si l'on se décide, toujours dans le même cas, à porter tout l'excédent de largeur du côté convexe, les rives circulaires convexes seront seules à raccorder. La courbe de raccordement à employer sera alors une parabole du second degré, tangente aux deux cercles.

De Lagrené (*H.*). — Sur la poussée des terres avec ou sans surcharges. (441-471, 11 fig.).

Les nombreux travaux insérés dans les *Annales des Ponts et Chaussées*, sur la poussée des terres et sur le calcul des murs de soutènement, semblent montrer que les solutions indiquées n'ont pas encore atteint le degré de clarté qui permet de les graver dans la mémoire et de les appliquer sans hésitation.

Dans plus d'une circonstance, l'auteur de ce travail a dû recommencer des recherches assez longues pour calculer un bajoyer d'écluse ou un mur de quai, et il aurait été heureux d'avoir sous la main un résumé des principes utiles dans la pratique et une indication claire et simple des calculs ou des épures nécessaires.

De 1773 à 1820, Coulomb, de Prony et Français ont produit divers Mémoires sur la question, en négligeant le frottement de la terre contre la paroi du mur de soutènement. Ce nouvel élément, introduit par Poncelet en 1840, est venu compliquer le problème, mais Rankine indique comment on peut l'éluder, quand l'angle de frottement de la terre sur la maçonnerie n'est pas moindre que celui de la terre sur elle-même, ce que l'on peut généralement admettre. (*Annales*, 1874, et *Bulletin*, t. XI, p. 264.)

Le problème peut être ramené à trouver en grandeur et en position la poussée exercée sur le plan vertical passant par l'arête intérieure de la base du mur.

On simplifie en ne tenant pas compte de la cohésion des terres et en supposant que le remblai est limité à sa partie supérieure par un plan unique faisant un angle θ avec l'horizon.

En désignant par φ le talus naturel des terres coulantes, ρ leur densité, h la hauteur de la section verticale définie précédemment, on trouve que la poussée a pour expression

$$\frac{1}{2}\rho h^2 \cos\theta \frac{\cos\theta - \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\varphi}}{\cos\theta + \sqrt{\cos^2\theta - \cos^2\varphi}}.$$

Pour $\theta = 0$, elle devient

$$\frac{1}{2}\rho h^2 \frac{1 - \sin\varphi}{1 + \sin\varphi},$$

et la direction de cette poussée est horizontale.

Le Mémoire se termine par une comparaison entre la poussée de la terre et la poussée de l'eau; une étude de la poussée d'un terre-plein uniformément surchargé et une application numérique à un bajoyer de l'écluse de Saint-Aubin.

Tome III; 1er semestre 1882.

Dubret. — Généralisation des tableaux construits d'après la méthode de M. Willotte. (90-100, 1 pl.).

La méthode précitée repose sur la construction de courbes d'égales surfaces, formant un système d'hyperboles homothétiques faciles à tracer, dès que l'une d'elles a été bien exactement construite au moyen de quelques-unes de ses tangentes.

Il a paru avantageux de pouvoir opérer au moyen d'un tableau unique, ou de deux tableaux au plus, dressés l'un pour les déblais, l'autre pour les remblais. Préparés sur carton fort, ces tableaux ne seraient pas soumis aux causes d'altération (retrait du papier, etc), qui agissent sur les feuilles gravées et nuisent à l'exactitude des résultats. On pourrait construire les épures à grande échelle, multiplier par suite le nombre des hyperboles, donner enfin au procédé une précision des plus grandes.

L'auteur propose l'emploi d'un rapporteur transparent, formé d'un cadre trapézoïdal, en bois ou plus simplement en carton, dans l'évidement duquel on tend une toile à calquer, où l'on a au préalable représenté toutes les inclinaisons du terrain naturel.

Perron. — Instrument pour tracer par points les courbes de niveau sur un plan coté. (103-105, 2 fig.).

La détermination d'un point d'une courbe de niveau revient par le fait à la construction de deux triangles semblables, dont les côtés sont proportionnels aux différences entre la cote du point cherché et celle des deux points qui servent à le déterminer.

Pour éviter la surcharge du dessin par un nombre considérable de triangles, l'auteur propose d'effectuer mécaniquement les constructions dont nous venons de parler.

D'après l'inventeur, cet instrument permet de faire en deux jours un travail auquel il faut consacrer cinq jours quand on emploie la méthode ordinaire.

Huléwicz (*M.*). — Calcul de résistance des poutres droites à plusieurs travées. (141-218, 12 fig.).

Ce travail est divisé en deux parties.

Dans la première partie, l'auteur rappelle d'une manière succincte les équations générales servant de base aux développements ultérieurs, dans le cas où le nombre et l'ouverture des travées sont quelconques. Cette partie est basée sur les formules générales de MM. Collignon et Bresse.

La deuxième partie donne les expressions des moments fléchissants maximum sur les appuis et les équations de la courbe enveloppe définitive de ces moments dans les principaux tronçons de chaque travée. Toutes ces quantités sont exprimées en fonction des charges, de l'ouverture de la première travée l et du rapport des ouvertures δ. Elle contient, en outre, les expressions en fonction de ces mêmes quantités, des abscisses qui limitent les tronçons de chaque travée, et enfin les équations de la courbe enveloppe des efforts tranchants.

Le nombre des travées considéré s'étend de trois à huit, appartenant à une poutre symétrique, c'est-à-dire ayant ses travées intermédiaires égales entre elles, et les travées de rive présentent également la même longueur, mais différente de celle des travées intermédiaires.

Lévy (*M.*). — Mémoire sur le transport électrique de l'énergie. (225-242).

Le problème du transport d'une quantité donnée d'énergie, à une distance quelconque, avec un rendement donné, ne trouve aucune solution dans les lois qu'on pourrait appeler les lois de similitude énoncées jusqu'ici. Ces lois, scientifiquement exactes, sont illusoires dans la pratique, parce que leur application exigerait ou un accroissement sans limite de la force électromotrice, ce qui rendrait tout isolement impossible, ou le décroissement indéfini de la quantité d'énergie transportée, ce qui rendrait l'opération inutile.

Le problème peut être résolu par l'emploi de machines de dimensions courantes établies de façon à pouvoir fournir, sans vitesse exagérée de leurs anneaux, la tension maximum que peut subir, en toute saison, une ligne aérienne ou souterraine.

Du Bois (*P.*). — De l'effet des endiguements sur le profil en long d'une rivière à fond mobile. (324-337).

Quand on endigue une rivière à fond mobile, on modifie les conditions de l'écoulement. Il peut donc arriver qu'on détruise l'équilibre préexistant entre la force du courant et la résistance du fond. De là, des changements dans le profil en long, dont on néglige ordinairement de tenir compte dans les prévisions, et dont les effets peuvent surprendre d'une façon funeste.

Les formules ordinaires de l'hydraulique sont impuissantes pour les calculer, car elles supposent que le fond reste fixe, ou bien, si l'on prévoit une modification du fond, on la détermine arbitrairement.

L'auteur a pensé que ses formules établies dans son Mémoire sur le Rhône et les rivières à lit affouillable (*Annales*, 1879, et *Bulletin*, IV$_2$, p. 213) pourraient trouver un utile emploi dans ce genre de recherche.

Jacquier. — Détermination graphique de la poussée des terres. (463-472, 5 fig.).

Le but de la présente Note est de faire connaître, pour l'application de la théorie exposée par M. Considère, un autre procédé graphique, qui paraît beaucoup plus simple et qui a l'avantage d'éviter toute ambiguïté pour le tracé des réactions, lorsque celles-ci ne sont pas normales aux plans auxquels elles s'appliquent. Ce procédé est en outre plus général, car on peut opérer sur un plan quelconque, au lieu d'être obligé de s'en tenir au plan à frottement nul ou maximum mené par la base de la paroi.

M. Considère fait observer que sa théorie est, sinon identique, au moins parfaitement conforme à celle que M. Maurice Lévy a présentée à l'Institut en juin 1869; mais il n'est peut-être pas sans intérêt de faire remarquer que cette même théorie est au fond identique à celle qui a été donnée par M. Rankine, dès 1856, dans les *Philosophical Transactions*. L'autorité du célèbre ingénieur anglais contribuera sans doute à rassurer les ingénieurs qui voudront faire usage de cette théorie.

Curie (*J.*). — Note sur la brochure de M. B. Baker, relative à la poussée latérale réelle des remblais. (558-592, 9 fig.).

L'auteur s'élève contre une assertion formulée par M. Baker, qui affirme le manque de données expérimentales précises et l'indifférence des constructeurs sur ce sujet. Il estime que M. Baker aurait pu vérifier, d'une façon plus attentive, l'accord de l'expérience avec la théorie qu'il a exposée dans un Ouvrage publié en 1870, puis dans des Communications à l'Académie des Sciences en 1873, et enfin dans le *Mémorial de l'Officier du Génie* en 1875 (Voir *Bulletin*, II, p. 212; VI, p. 87; XI, p. 254).

La théorie de la poussée des terres, en tenant compte du frottement des terres sur la paroi postérieure du mur, a été donnée en dernier lieu par M. Boussinesq, dans un *Essai théorique sur l'équilibre des massifs pulvérisants*, publié en 1876 par l'Académie royale de Belgique. A la suite de la discussion du Mémoire de M. Baker, M. Boussinesq, sur la demande de M. J. Forrest, secrétaire de la Société des ingénieurs civils, a adressé à cette Société une Note dans laquelle il établit, d'une manière élémentaire et simple, les résultats principaux de cet *Essai*, pour le cas assez ordinaire d'un massif horizontal soutenu par un mur vertical, et où il donne des formules susceptibles d'une application pratique immédiate. Dans cette Note, M. Boussinesq montre que le rapport de l'épaisseur du mur à la hauteur est un minimum lorsqu'on s'en tient aux résultats du calcul, mais que l'on peut lui assigner aussi une limite supérieure, de manière qu'en réalité les expériences décrites par M. Baker conduiraient à un accord constant de cette théorie et des faits observés. M. Baker ne s'est peut être pas assez préoccupé des causes de la divergence qu'il avait constatée entre les résultats de la théorie et ceux de ses observations pratiques. Il eût pu ainsi se montrer moins sévère à l'égard de la plupart des auteurs qui ont écrit sur la poussée des terres.

Flamant (A.). — Note sur la poussée des terres. (616-624).

Reflexions et remarques au sujet du Mémoire précité de M. Baker. Objections qui infirment quelques conclusions de la théorie de Rankine.

Boussinesq (J.). — Note sur la poussée des terres (625-643, 1 fig.).

Cette Note, indiquée à propos des deux articles précédents, a pour objet la détermination de l'épaisseur minimum que doit avoir un mur vertical, d'une hauteur et d'une densité données, pour contenir un massif terreux, sans cohésion, dont la surface supérieure est horizontale.

Lavollée. — Notice sur les portes de l'écluse d'Ablon. (644-658, 2 fig., 2 pl.).

Les notes annexées à ce travail renferment le calcul de la force qui fait équilibre à la pression de l'eau en un point du vantail et les calculs de résistance d'un vantail.

H. B.

REVUE D'ARTILLERIE (¹)

Tome XXII, avril-septembre 1883.

Duguet. — Résistance des corps solides. (132-153; 185-221; 411-441, 25 fig.).

Mémoire circonstancié dans lequel l'auteur n'a fait intervenir que les notions

(¹) Voir *Bulletin*, XI, 74; II_2, 127, IV_2, 206, V_2, 231 et VII_2, 86.

Errata. — T. $VIII_2$, 2ᵉ Partie, p. 5, *au lieu de* 26 novembre, *lisez* 26 mars. T. VII_2, 2ᵉ Partie, p. 14, ligne 11 en remontant, *au lieu de* n° 3, *lisez* n° 13; p. 79, lignes 12, 13, 14 et 15 en remontant, les titres énoncés doivent être en grands caractères; p. 84, ligne 11 en remontant, *au lieu de* septembre, *lisez* semestre. T. $VIII_2$, 1ʳᵉ Partie, p. 21, *au lieu de* $\mu^2 b^i$, *lisez* $\mu^2 - b^2$; p. 29, ligne 1, *ajoutez* Juillet, 1877; ligne 2, *au lieu de* coordonnées, par, *lisez* coordonnées polaires, par; p. 51, ligne 10 en remontant, *au lieu de* génératrice, *lisez* génération; p. 55 et 56, les énoncés de la p. 52 ont été reproduits par erreur; p. 185, ligne 6, on a omis l'indication qui correspond à (*). T. VI_2, 2ᵉ Partie, p. 110, ligne 7 en remontant, *au lieu de* on peut regarder, dans, *lisez* on peut dans, etc.; p. 157, *au lieu de* huit racines, *lisez* huit veines; p. 211-212, les titres des travaux cités de Cayley, Spottiswoode, Harley et Russel doivent être indiqués en petits caractères; p. 235, ligne 13 en remontant, *au lieu de* par, *lisez* pour.

analytiques les plus indispensables, de manière à laisser aux faits d'observations toute leur importance et à donner, autant que possible, des interprétations fondées sur des considérations géométriques.

Voici les subdivisions des articles publiés dans ce Volume :

CHAPITRE I. *Théorie mathématique de l'élasticité.* — Forces élastiques. Ellipsoïde d'élasticité. Composantes normales et tangentielles des forces élastiques. Coefficient d'élasticité. Considérations sur les hypothèses ou principes des théories mathématiques de l'élasticité.

CHAPITRE II. *Résistance à la rupture. Cassure. Cohésion.* — Position de la question. Torsion simple. Compression simple. Hypothèse fondamentale et ses conséquences immédiates. Résistance au glissement, à la traction et à la compression simples. Relations générales entre les forces principales de rupture. Traces des cassures sur la surface libre. Cassures en général. Cohésion. Cristaux. Fibres. Grains. Talus.

CHAPITRE III. *Limite d'élasticité. Écrouissage.* — Limite d'élasticité. Efforts simultanés. Forces principales limites. Limite d'élasticité d'un corps primitivement déformé. Efforts successifs. Écrouissage.

CHAPITRE IV. *Énervement.* — Efforts agissant successivement en sens contraires. Énervement.

CHAPITRE V. *Déformations. Densité. Stabilité.* — Déformations et déplacements des éléments. Forces et couples intérieurs. Déformations élémentaires. Glissement et densité. Équation d'équilibre et coefficient d'élasticité, dans l'hypothèse de l'indépendance des petits effets des forces élastiques. Stabilité des déformations. Considérations sur les recherches expérimentales relatives au développement des forces élastiques.

Canet (*G.*). — Étude d'un frein hydraulique pour affût de 155^{mm}, modèle 1877. (289-298, 1 pl.).

L'auteur décrit un système de frein hydraulique dont l'adoption présenterait, d'après lui, les avantages suivants :

1° Protection mieux assurée des servants et du matériel, par suite de la modération du recul;

2° Rapidité du tir, par suite de la remise automatique de la pièce en batterie;

3° Facilité de manœuvre;

4° Diminution du nombre des servants.

Or, il a établi, dans un travail précédent (*Revue*, 1879; *Bulletin*, IV_2, p. 208), que le seul frein qu'on puisse disposer pour obtenir ces résultats est le frein hydraulique à orifices d'écoulement variable.

Dans ces conditions, le problème paraît pouvoir être résolu d'une manière satisfaisante par l'emploi d'un frein hydraulique limitant le recul à $0^m,75$ et calculé pour une pression totale de 13 tonnes.

L'aire variable y des orifices d'écoulement, lorsque l'affût a reculé d'une longueur x, est représentée, pour la pièce en question, par l'expression

$$y = 0^m,0068\sqrt{1-\frac{x}{l}},$$

l étant le recul total.

Siacci. — Sur les axes des groupements. (521-544).

Discussion de plusieurs passages d'un précédent Mémoire de M. P. Bréger au sujet des ellipses d'égale probabilité (*Revue*, 1877; *Bulletin* II_2, p. 130).

La fonction qui représente la probabilité simple d'une erreur donnée est étroitement liée à la règle d'après laquelle on détermine le centre d'un groupement, de sorte que, si ce point est le centre de gravité ou le point par rapport auquel la somme des carrés des écarts est un minimum, cette adoption renferme nécessairement la formule de la probabilité simple, c'est-à-dire celle de Laplace, ainsi que Gauss l'a démontré. Gauss, en effet, a établi que, si l'on admet comme valeur la plus probable d'une quantité la moyenne arithmétique de toutes les quantités observées, la fonction qui exprime la probabilité d'une erreur donnée est celle de Laplace. Et la démonstration est rigoureuse, au moins si l'on admet que la fonction cherchée a une dérivée.

D'accord avec le principe à l'aide duquel on détermine le centre du groupement, l'auteur adopte la formule connue de Laplace et, sur cette base, il se propose d'établir le théorème suivant :

Quels que soient le nombre et la direction des causes déviatrices, elles peuvent toujours être réduites à deux causes indépendantes et perpendiculaires entre elles; et les directions de ces dernières coincident avec les deux axes principaux d'inertie passant par le centre du groupement.

Ce théorème étant démontré, il n'y a plus à douter que les groupements admettent des axes. Ces axes existent, quels que soient les projectiles; il y en a deux, et leurs directions sont celles indiquées ci-dessus; le théorème lui-même permet de les trouver, puisqu'il donne le moyen de les déterminer par l'expérience.

Pour les projectiles sphériques, où tout est symétrique par rapport au plan vertical passant par l'axe de la bouche à feu, l'expérience n'est pas nécessaire; l'un des deux axes est certainement vertical, l'autre est, par conséquent, horizontal; par suite, cette proposition, qui auparavant était une simple hypothèse, s'élève désormais au rang de théorème.

Pour les canons rayés, des expériences faites avec soin pourront, en s'appuyant sur ce théorème, déterminer les directions des deux axes. Il est vraisemblable que l'un d'eux se trouve dans le plan osculateur de la trajectoire, et si cela se vérifie, comme ce plan est vertical, on aura une justification de la méthode actuellement en usage pour déterminer la probabilité d'atteindre une surface donnée. Sinon, non.

Telle est la base du présent article, dont voici maintenant les subdivisions : composition de plusieurs causes agissant suivant une même direction. Transformation de deux causes agissant dans deux directions quelconques en deux autres agissant dans des directions perpendiculaires. Composition de trois causes agissant dans un plan suivant des directions quelconques. Composition de n causes agissant dans un plan. Axes d'inertie. Groupements dans l'espace. Sur la composition des écarts. Sur le mode d'agir des causes déviatrices.

H. B.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, t. XCVII (suite); 1883 [1].

N° 14; 1er octobre.

Coggia. — Observations de la planète (234) et de la comète Brooks, faites à l'Observatoire de Marseille. (738).

Stieltjes. — Sur l'évaluation approchée des intégrales. (740).

Évaluation approchée d'une intégrale $S_b^a f(x)$, $G(x)\,dx$, où $f(x)$ est une fonction positive et $G(x)$ une fonction continue à nombre fini de maxima et minima, sous la forme approchée $\sum_1^n A_k G(x_k)$, où les A sont des constantes positives et les x_k des racines d'une équation algébrique.

Dutordoir. — Démonstration nouvelle du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. (742).

Picard (E.). — Sur les formes binaires indéfinies à indéterminées conjuguées. (745).

N° 15; 8 octobre.

Bigourdan. — Observations de la comète Pons-Brooks et des planètes (142), (185), (221) et (234), faites à l'Observatoire de Paris. Remarquable changement d'éclat de la comète Pons-Brooks. (794).

Cruls. — Sur une particularité remarquable présentée par la queue de la grande comète australe de 1882. (797).

Stieltjes. — Sur l'évaluation approchée des intégrales. (798).

N° 16; 15 octobre.

Tisserand. — Note sur une formule de Hansen. Première Partie. (816).

---

(1) Voir *Bulletin*, VI_2, 51 et 19.

Partant des formules

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{r'^2 + r'^2 - 2rr'\cos V}} = \sum_0^\infty \frac{r^n}{r'^{n+1}} P^{(n)}(z),$$

où $P^{(n)}$ est le polynôme de Legendre, si l'on remplace $z = \cos V$ par

$$\cos u \cos u' + \sin u \sin u' \cos J,$$

et que l'on ordonne les résultats suivant les cosinus des multiples de u et de u', on obtient une formule due à Hansen, que M. Tisserand obtient fort simplement, comme il suit.

Posant

$$P^n(z) = 4\Sigma \mu^i \nu^i A_{i,j}^{(n)} \cos ix \cos jy,$$

où $u' - u = x$, $u' + u = y$, $\cos^2\frac{J}{2} = \mu$, $\sin^2\frac{J}{2} = \nu$, il déduit de l'équation différentielle auxquelles satisfont les P la relation

$$\frac{d^2 A_{i,j}^{(n)}}{dJ^2} + \frac{1}{\sin J}[(2j + 2i + 1)\cos J + 2j + 2i]\frac{dA_{i,j}^{(n)}}{dJ}$$
$$+ (n - i - j)(n + i + j + 1)A_{i,j}^{(n)} = 0;$$

en remplaçant ensuite la variable J par la variable ν, on retombe sur l'équation hypergéométrique; on en déduit

$$A_{i,j}^{(n)} = k_{i,j}^{(n)} F(i + j - n, i + j + n + 1, 2j + 1, \nu),$$

F se réduisant ici à un polynôme; quant à $k_{i,j}^{(n)}$, c'est une constante, pour laquelle l'auteur trouve la valeur

$$k_{i,j}^{(n)} = \frac{1}{2^{2n}\Pi(2j)} \frac{\Pi(n + i + j)\Pi(n - i + j)}{\Pi\left(\frac{n-i-j}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-i+j}{2}\right)\Pi\left(\frac{n+i-j}{2}\right)}.$$

Liouville (*R.*). — Sur une transformation des équations aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes, et sur quelques intégrations qui s'en déduisent. (838).

L'auteur signale, comme l'un des résultats de son travail, la définition de la classe des équations du type

$$F(r, s, t) = 0$$

qui, transformées par ces méthodes, admettent des intégrales intermédiaires.

Boussinesq. — Résistance d'un anneau à la flexion, quand sa surface extérieure supporte une pression normale, constante par unité de la longueur de sa fibre moyenne. (843).

Solution pratique d'une question posée par M. M. Lévy : « Étant donné un manchon cylindrique ou plutôt un anneau mince de rayon moyen R, à section rectangulaire, soumis extérieurement à une pression normale et constante p, par unité de longueur, on demande de désigner les valeurs de la pression p qui seront capables de le faire fléchir ou, autrement dit, de lui faire perdre la forme circulaire. »

Picard (*E.*). — Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies à indéterminées conjuguées et sur les groupes discontinus correspondants. (845).

Darboux. — Sur les surfaces dont la courbure totale est constante. (848).

N° 17; 22 octobre.

Tisserand. — Note sur une formule de Hansen. Deuxième Partie. (880).

On conserve ci-dessous les notations qui ont été expliquées en rendant compte de la première Partie de la Communication de M. Tisserand.

On déduit aisément d'un résultat établi par l'auteur, dans le t. XV des *Annales de l'Observatoire* et de la Communication précédemment analysée, que le coefficient de $\cos 2ix \cos 2jy$ dans la fonction

$$\frac{\sin(2n+1)V}{\sin V}$$

est à un facteur près le carré du coefficient de $\cos ix \cos jy$, dans la fonction $P\{{n \atop z}\}$ quand on y remplace z par $\mu \cos x + \nu \cos y$.

La raison de cette analogie se trouve dans ce fait que, en posant

$$Z^{(n)} = \frac{\sin(n+1)V}{\sin V},$$

où $\cos V = z$, on a, pour $\theta < 1$,

$$\frac{1}{1-2\theta z+\theta^2} = \sum_0^\infty \theta^n Z^{(n)},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\theta z+\theta^2}} = \sum_0^\infty \theta^2 P^{(n)}.$$

On est ensuite conduit à la question suivante :

Posant

$$\frac{1}{(1-2\theta z+\theta^2)^{\frac{p-1}{2}}} = \sum_0^\infty \theta^n P^{(n)}(p, z),$$

où $p \geqq 2$, trouver une formule générale qui donne le développement du polynôme $P^n(p, z)$, quand on y remplace z par $\mu \cos x + \nu \cos y$. Ces polynômes P sont les fonctions sphériques d'ordre supérieur de M. Heine.

Ce qui précède résout la question pour $p = 2, 3$. M. Tisserand indique comment on peut, pour $p = 2q + 3$, q étant un entier positif, trouver le coefficient $B_{i,i}^{(2n,q)}$ de $4 \cos ix \cos iy$ dans le développement de $P^{2n}(2q + 3, z)$; on a alors

$$B_{i,i}^{(2n,q)} = \frac{\Pi(n+q)\,\Pi(n+q+i)\,(\mu\nu)^i}{\Pi(n)\,\Pi(q)\,\Pi(q+i)\,\Pi(i)\,\Pi(n-i)}\,F_i,$$

où

$$F_i = F(\alpha, \beta, \gamma; \delta, \varepsilon, \sin^2 J)$$

est un polynôme hypergéométrique du second ordre, défini par les éléments

$$\alpha = i - n, \qquad \delta = 2i + 1,$$
$$\beta = i + \tfrac{1}{2}, \qquad \varepsilon = i + q + 1.$$
$$\gamma = i + n + q + 1,$$

Stieltjes. — Sur quelques théorèmes arithmétiques. (889).

Si $f(n)$ désigne le nombre des solutions entières de l'équation

$$n = x^2 + y^2,$$

on a, pour $n = 4t + 1$,

$$f(2.1) + f(2.5) + \ldots + f(2.n)$$
$$= 8\left[E\left(\frac{n-1}{4}\right) + \left(\frac{n-3^2}{3.4}\right) + E\left(\frac{n-5^2}{5.4}\right) - \ldots\right] + 4\cos^2\left(\frac{\mu-1}{4}\right)\Pi,$$

μ étant l'entier impair immédiatement au-dessus de $\sqrt{n}$ ou égal à $\sqrt{n}$.

L'auteur donne des théorèmes analogues pour diverses formes de l'entier n, ou relatives à la somme des diviseurs impairs de n, ou encore à la fonction numérique qui désigne le nombre de solutions de l'équation $n = x^2 + 2y^2$.

Darboux. — Sur les surfaces à courbure constante. (892).

Après avoir rappelé, dans une Communication antérieure, divers travaux (Bonnet, Lie, Bäcklund) relatifs à ces surfaces, M. Darboux établit, comme il suit, une importante proposition due à M. Bianchi.

Soit (C) un système de courbes parallèles sur une surface (Σ); soit (g) le système des lignes géodésiques trajectoires orthogonales des courbes (C). Les tangentes aux lignes (g) sont normales à une certaine surface (S) et touchent une seconde surface (Σ'); (Σ) et (Σ') sont les deux nappes de la surface des centres de courbure de (S). En outre, (Σ') est le lieu des centres de courbure géodésique des courbes parallèles (C) tracées sur (Σ). La relation est d'ailleurs réciproque.

Cherchons s'il existe une surface (Σ) sur laquelle on puisse tracer des courbes parallèles (C) ayant en chacun de leurs points un rayon de courbure géodésique égal à 1. En rapportant (E) aux courbes (C) et aux lignes (g), l'élément linéaire prendra la forme

$$ds^2 = du^2 + C^2 dv^2,$$

où $C = e^{\pm u}$; la courbure totale de la surface sera donc constamment égale à

-1. Si maintenant on considère la surface (Σ') associée à (Σ), comme il a été expliqué, à cause de la réciprocité, les lignes géodésiques (g') de (Σ') tangentes aux normales de (S) auront pour trajectoires orthogonales des courbes parallèles (C') dont les centres de courbure géodésique seront sur Σ et dont les rayons de courbure géodésique sont égaux à 1; par conséquent, (Σ') sera comme (Σ) une surface à courbure constante -1, et les éléments linéaires, sur les surfaces (Σ) et (Σ'), sont donnés par les formules

$$ds^2 = du^2 + e^{2u}dv^2, \tag{1}$$

$$ds'^2 = du^2 + e^{-2u}dw^2. \tag{2}$$

Tel est le théorème de M. Bianchi; il en déduit la méthode suivante : considérons une surface (Σ) à courbure -1; on obtiendra, comme il suit, un système simplement infini de systèmes coordonnés donnant à l'élément linéaire la forme (1); il suffit d'associer, en effet, aux lignes géodésiques passant par un point à l'infini de la surface leurs trajectoires orthogonales. Ainsi on déduira de (Σ) une surface (Σ') contenant dans son équation une constante arbitraire; de même de (Σ') on déduira une équation contenant deux constantes arbitraires, etc.; l'application de ce procédé n'exigera, comme M. Lie en a fait la remarque, que des quadratures.

D'un autre côté, M. Darboux établit une élégante proposition due à M. Ribaucour, et qui comprend la proposition de M. Bianchi : elle consiste en ce que, étant donnée une surface (Σ) à courbure -1, si l'on trace dans chaque plan tangent un cercle de rayon 1 ayant son centre au point de contact, tous les cercles ainsi obtenus sont orthogonaux à une famille de surfaces toutes à courbure constante de -1, et, en outre, ces surfaces font partie d'un système orthogonal triple, dont les deux autres familles sont composées de surfaces enveloppes de sphères.

Si, en effet, on rapporte la surface (Σ) à ses lignes de courbure, l'élément linéaire prendra la forme

$$ds^2 = \cos^2\omega\, du^2 + \sin^2\omega\, dv^2, \tag{3}$$

où ω vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} - \frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \sin\omega\cos\omega = 0. \tag{4}$$

Si, dans le plan tangent en M, on mène une ligne MM' de longueur 1 faisant avec la courbe $u = \text{const.}$ l'angle θ et si l'on écrit que M' décrit une surface dont le plan tangent passe en M et est normal au plan tangent à Σ, on obtient les équations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial u} + \frac{\partial\omega}{\partial v} &= \sin\theta\cos\omega, \\ \frac{\partial\theta}{\partial v} + \frac{\partial\omega}{\partial u} &= -\cos\theta\sin\omega, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

compatibles sous la condition (u), comme on le voit, en éliminant θ; inversement elles donnent une valeur de θ contenant, outre u, v, une constante arbitraire α, lorsqu'on se donne la fonction ω vérifiant l'équation (u).

On en déduit, si u, v, α sont les coordonnées curvilignes du point M', l'expression du déplacement dS de ce point, savoir,

$$dS^2 = \cos^2\theta\, du^2 + \sin^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha}\right)^2 d\alpha^2,$$

qui met en évidence le système triple orthogonal. Dans une Communication postérieure, M. Darboux discute le système (5). La valeur de θ trouvée comme il a été expliqué plus haut est aussi une solution de l'équation (u); donc, de toute solution de l'équation (u) on peut déduire une solution nouvelle contenant une constante arbitraire : c'est la valeur de θ la plus générale satisfaisant aux équations (5).

D'une solution particulière quelconque θ des équations (5), on peut déduire cette solution θ' la plus générale; pour cela, on effectue les quadratures définies par les formules

$$(6)\qquad \begin{cases} d\alpha &= \cos\theta\cos\omega\, du + \sin\omega\,\sin\theta\, dv,\\ e^{-\alpha} d\beta &= \cos\omega\sin\theta\, du - \sin\omega\cos\theta\; dv,\\ e^{\alpha} d\gamma &= \cos\theta\;\sin\omega\, du + \sin\omega\cos\theta\, dv;\end{cases}$$

la solution θ' est alors donnée par la formule

$$(7)\qquad \cot\frac{\theta'-\theta}{2} = \beta e^{-\alpha}.$$

En remplaçant dans (6) θ par θ', on obtient immédiatement les nouvelles valeurs α' et β' de α, β; γ' s'obtient par une quadrature. On arrive à des résultats analogues en regardant θ comme donné et cherchant la solution la plus générale de ω qui vérifie les équations (5).

En appliquant successivement ces deux opérations, on déduit de tout système de solutions des équations (5) un nombre illimité de systèmes nouveaux contenant autant de constantes qu'on le voudra et la détermination de chaque système nouveau n'exige qu'une nouvelle quadrature. Enfin l'auteur établit la curieuse proposition que voici, qui forme la conclusion de ses recherches : « Il suffira d'effectuer au début, en dehors de α, β, γ, un certain nombre de quadratures (inférieur d'une unité au nombre de solutions nouvelles que l'on veut obtenir), portant sur des fonctions parfaitement déterminées u et de v, et, ces quadratures une fois effectuées, l'application de la méthode n'exigera plus que des calculs algébriques les plus élémentaires.

Léauté. — Sur la loi de répartition des tensions dans une lame élastique de forme primitive arbitraire, enroulée sur un cylindre de section droite quelconque, lorsque le glissement est uniforme. (894).

Cette loi est donnée par la formule

$$L = e^{f\int\frac{ds}{\rho}}\left[e - \int\left(\frac{1}{\rho}\frac{dM}{ds} + f\frac{d^2M}{ds^2}\right)e^{-f\int\frac{ds}{\rho}}ds\right],$$

L et M étant les efforts élastiques, résultant de l'allongement et de la flexion, ρ étant le rayon de courbure en un point de l'élément ds et f le coefficient de frottement.

L'auteur en déduit la proposition suivante : « Dans un frein à lame métallique, lorsque la lame est circulaire ou rectiligné avant l'enroulement, la loi de répartition des tensions pendant le glissement uniforme est la même, que l'on tienne compte de l'élasticité ou que l'on n'en tienne pas compte. »

Boussinesq. — Sur le mouvement d'une charge roulante, le long d'une barre élastique horizontale appuyée à ses deux bouts et dont la masse est beaucoup plus petite que la sienne. (897).

Cette question a été traitée par MM. Willis et Stokes; M. Boussinesq montre comment la solution donnée par ce dernier peut être considérablement simplifiée.

N° 18; 29 octobre.

Tresca. — Étude sur les déformations géométriques déterminées par l'écrasement d'un parallélépipède rectangle, avec allongement dans une seule direction. (928).

Darboux. — Sur l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure constante. (946).

Voir plus haut.

Poincaré. — Sur la reproduction des formes. (949).

Il s'agit de trouver toutes les formes qui sont reproductibles par deux ou plusieurs substitutions linéaires infinitésimales *non permutables* : ce problème a été résolu par l'auteur pour quatre variables et deux substitutions (L^e Cahier du *Journal de l'École Polytechnique*); depuis, M. Lie a étendu la solution au cas de trois substitutions et de quatre variables; M. Poincaré l'étend aux cas de deux substitutions et de n variables.

N° 19; 5 novembre.

Gonnessiat. — Sur l'une des méthodes données par M. Lœwy, pour déterminer les ascensions droites des étoiles circumpolaires. (977).

Lévy (M.). — Sur une Communication de M. Boussinesq, relative à l'équilibre d'un anneau circulaire. (979).

Stieltjes. — Sur la décomposition d'un nombre en cinq carrés. (981).

Soit $N \equiv f \pmod 8$; le nombre de décompositions de N en cinq carrés impairs positifs est égal à

$$\varphi\left(\frac{N-1^2}{4}\right)+\varphi\left(\frac{N-3^2}{4}\right)+\varphi\left(\frac{N-5^2}{4}\right)+\ldots,$$

ou à

$$f(N)+2f(N-8\times 1^2)+2f(N-8\times 2^2)+2f(N-8\times 3^2)+\ldots,$$

$\varphi(m)$ désignant, en général, la somme des diviseurs du nombre m et $f(m)$ étant égal à

$$-\tfrac{1}{4}\Sigma(-1)^{\frac{d^2-1}{2}}d,$$

d représentant successivement tous les diviseurs de m. M. Hermite indique en note une proposition aussi relative à la décomposition en cinq carrés impairs et positifs et fournie par la théorie des fonctions elliptiques. Soit $n\equiv 1 \pmod 4$; que l'on pose de toutes les manières possibles $n=dd'$ sous la condition $d'>3d$; la fonction

$$\chi(n)=\Sigma\tfrac{1}{4}(3d+d')$$

peut être définie par le développement

$$\chi(sq)+\ldots+\chi(4m+1)q^m+\ldots$$
$$=\frac{q}{1-q}+\ldots+\frac{(3m-2)q^{m(3m-2)}}{1-q^{4m-1}}+\ldots+\frac{q}{(1-q)^2}+\ldots+\frac{q^{m(3m-2)}}{(1-q^{4m-1})^2}+\ldots.$$

Si maintenant on a $N\equiv f \pmod 8$, le nombre de décomposition sera

$$\tfrac{1}{2}\chi(N)+\chi(N-2^2)+\chi(N-4^2)+\chi(N-6^2)+\ldots.$$

André (D.). — Probabilité pour qu'une permutation donnée de n lettres soit une permutation alternée. (983).

Une permutation des n lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est alternée, lorsque les $n-1$ différences qu'on obtient, en y retranchant chaque indice du suivant, sont alternativement positives et négatives : cette probabilité est le double du coefficient de x^n dans le développement de $\operatorname{séc} x$ ou de $\operatorname{tang} x$: une expression asymptotique de cette probabilité est $4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1}$.

Poincaré. — Sur l'intégration algébrique des équations linéaires. (984).

M. Jordan a montré (*Journal de Crelle*, t. LXXXIV) comment on peut former les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire. M. Poincaré a démontré qu'à tout groupe fini Γ on peut faire correspondre d'une infinité de manières un groupe G auquel Γ est mériédriquement isomorphe, qu'à ces deux groupes correspond toujours une équation linéaire à intégrales algébriques et que, si l'on pose $x=f(z)$, $f(z)$ étant une fonction fuchsienne engendrée par le groupe G, les intégrales de cette équation sont des fonctions fuchsiennes engendrées par un sous-groupe g de G. Ainsi à un groupe d'ordre fini correspond une infinité d'équations à intégrales algébriques dont on peut choisir arbitrairement les points singuliers. Les fonctions fuchsiennes engendrées par g

sont des fonctions rationnelles de x et de y, x et y étant liés par la relation algébrique

$$(1) \qquad \theta(x, y) = 0,$$

de degré m, de genre p_0; le groupe γ de cette équation algébrique est une seule fois transitif; tous les sous-groupes g de genre p rentrent dans un nombre fini de types.

Relativement aux intégrales abéliennes de première espèce engendrées par la relation (1), on a cette proposition : « On peut choisir un système fondamental de p intégrales telles que leurs périodes normales soient des combinaisons linéaires à coefficients entiers des périodes normales de l'une d'entre elles. » Enfin, voici la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une fonction $F(x, y)$, rationnelle en x et en y et satisfaisant à une équation linéaire d'ordre k : il faut qu'on puisse trouver m quantités

$$a_1, a_2, \ldots, a_m,$$

telles que, si l'on permute ces m lettres d'après les m substitutions du groupe γ et qu'on forme avec ces m permutations un déterminant Δ, tous les mineurs d'ordre $m - k - 1$ soient nuls à la fois.

Lévy (L.). — Sur une famille de surfaces développables passant par une courbe gauche donnée (986).

Ces surfaces sont telles que leurs génératrices coupent une courbe gauche donnée suivant un angle qui ne dépend que des coordonnées du point d'intersection. La détermination de ces surfaces dépend d'une équation de Riccati.

Humbert. — Sur les courbes de genre 1. (989).

Les coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3 d'une courbe de genre 1 et de degré n s'expriment de la façon suivante :

$$x_i = A_i P_1(t) + B_i P_2(t) + \ldots + L_i P_n(t),$$

$$P_{j+1}(t) = \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} e^{\mu^2 i\pi \frac{\omega'}{\omega} + 2\mu \frac{t\pi}{\omega}\left(i + j\frac{\omega}{n}\right)}.$$

Les A, B, ... sont des constantes; M. Humbert montre comment, inversement, une courbe étant donnée par une telle représentation, on peut déterminer son degré, son genre et former son équation.

Quet. — Sur le potentiel de la force d'induction due à un solénoïde fermé, dont le courant varie d'intensité. Analogie avec un théorème d'électromagnétisme. (992).

N° 20; 12 novembre.

De Saint-Venant et *Flamant.* — Des vitesses que prennent dans l'intérieur d'un vase les divers éléments d'un liquide pendant son écoulement par un orifice inférieur, et des moyens simples qui peuvent être employés pour déterminer très approximativement les restes numériques de séries doubles peu convergentes. (1027).

Perrotin. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'observatoire de Nice. (1035).

Appell. — Sur certaines formules de Hansen et de M. Tisserand. (1036).

Soient

$$z = \mu \cos x + \nu \cos y,$$

$$\varphi(z) = \frac{1}{(1 - 2\theta z + \theta^2)^{\frac{p-1}{2}}} \sum_0^\infty \theta^N P^{(N)}(p, z);$$

si l'on fait

$$\varphi(z) = 4 \sum_0^\infty \lambda_{ij} \cos ix \cos jy,$$

on aura

$$\lambda_{ij} = \frac{\mu^i \nu^j (k, i+j)\theta^{i+j}}{(1, i)(1, j)(1+\theta^2)^q} \sum_0^\infty \frac{(q, 2m+2n)}{(i+1, m)(j+1, n)} \frac{\theta^{2m+2n}}{(1+\theta^2)^{2m+2n}} \frac{\mu^{2m}\nu^{2n}}{(1, m)(1, n)},$$

où la sommation est relative aux nombres m, n, où $k = \frac{p-1}{2}$, $q = k + i + j$, et où enfin le symbole (α, m) est mis à la place de $\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)$, $(\alpha, 0)$ étant égal à 1.

Si l'on fait

$$P^N(z, p) = 4 \sum_{i,j} B_{i,j}^{N,p} \cos ix \cos jy,$$

on a

$$B_{i,j}^{N,p} = (-1)^{N'} \frac{\mu^i \nu^j (k, N'+i+j)}{(1, N')(1, i)(1, j)} F_4(q+N', -N', i+1, j+1, \mu^2, \nu^2).$$

N' est égal à $\frac{N-i-j}{2}$; F_4 est un polynôme hypergéométrique de deux variables, formé avec la fonction que M. Appell désigne par F_n et dont, ici, le développement est limité, puisque le second élément $-N'$ est un entier négatif.

Darboux. — Sur les lignes asymptotiques de la surface des ondes. (1039).

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque M d'une surface, p, q, r des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de la normale et telles que l'on ait

$$px + qy + rz = 1,$$

soient enfin

$$p' = qz - ry, \quad q' = rx - pz, \quad r' = py - qx,$$

les équations des lignes asymptotiques et des lignes de courbure sont respectivement

$$\begin{aligned} dp\,dx + dq\,dy + dr\,dz &= 0, \\ dp\,dp' + dq\,dq' + dr\,dr' &= 0. \end{aligned}$$

Supposons qu'on ait affaire à une surface des ondes. Le rayon qui joint le point M au centre O de la surface coupe celle-ci en un second point M'.

Soient $\overline{\mathrm{OM}}^2 = \beta$, $\overline{\mathrm{OM}'}^2 = \alpha'$; soient α et β' les carrés des distances du centre aux plans tangents aux points M et M'. Ces quatre variables seront liées par les deux relations contenues dans l'identité

$$x(x-\beta)(x-\beta') - (x-a)(x-b)(x-c) = \frac{abc}{\alpha\alpha'}(x-\alpha)(x-\alpha'),$$

qui doit avoir lieu, quel que soit x.

Dès lors les formules

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{C}\left(\frac{a-\alpha}{\alpha}\right)^{m_1}\left(\frac{a-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m_2}(a-\beta)^{n_1}(a-\beta')^{n_2}, \\ y &= \mathrm{C}'\left(\frac{b-\alpha}{\alpha}\right)^{m_1}\left(\frac{b-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m_2}(b-\beta)^{n_1}(b-\beta')^{n_2}, \\ z &= \mathrm{C}''\left(\frac{c-\alpha}{\alpha}\right)^{m_1}\left(\frac{c-\alpha'}{\alpha'}\right)^{m_2}(c-\beta)^{n_1}(c-\beta')^{n_2}, \end{aligned}$$

pour des valeurs convenables des constantes C, m_1, m_2, n_1, n_2, représentent la surface des ondes. Pour toutes les surfaces représentées par de telles équations, l'équation différentielle des lignes asymptotiques sera

$$\frac{d\beta^2}{(\beta-a)(\beta-b)(\beta-c)} = \frac{d\beta'^2}{(\beta'-a)(\beta'-b)(\beta'-c)}.$$

On en déduit le théorème suivant : « Considérons chacun des complexes de Chasles, qui sont formés des droites coupant les trois plans coordonnés et le plan de l'infini en quatre points de rapport anharmonique constant. Le lieu des points de la surface où le cône du complexe est tangent à cette surface est une ligne asymptotique. Quand on fera varier la valeur du rapport anharmonique constant, on aura une infinité de complexes qui donneront toutes les lignes asymptotiques. » Les surfaces jouissant de la propriété exprimée par ce théorème sont, d'une part, les surfaces x de Lamé

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m + \left(\frac{z}{c}\right)^m = 1,$$

de l'autre les surfaces satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$xyz(rt - s^2) + pq(z - px - qy) = 0.$$

Quant aux lignes de courbure de la surface des ondes, M. Darboux, après avoir signalé un important résultat relatif à la forme des lignes de courbures, sur une surface quelconque, dans le voisinage d'un ombilic, résultat d'où l'on peut tirer des conditions nécessaires pour que les lignes de courbure d'une surface soient algébriques, montre que ces conditions sont vérifiées pour la surface des ondes et que, au voisinage d'un ombilic, les lignes de courbure d'une telle surface sont semblables à des courbes algébriques du dixième ordre; la suite de ses recherches prouve toutefois que ces lignes de courbure ne peuvent être des courbes algébriques d'un degré déterminé. L'équation différentielle de ces lignes, déjà donnée par M. Combescure, est

$$f(\alpha)\,d\beta^2 + f(\beta)\,d\alpha^2 - d\alpha\,d\beta\left\{2f(\alpha) + (\beta-\alpha)\left[f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{\alpha}\right]\right\} = 0,$$

en posant

$$f(\alpha) = (\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c);$$

l'auteur montre que cette équation s'intégrerait si $f(\alpha)$ n'était que du second degré en α. Il en conclut que les lignes de courbure de la surface des ondes peuvent être regardées comme connuès dans certains cas limites, en particulier dans le cas où cette surface est très voisine d'une sphère.

Humbert. — Sur les courbes de genre 1. (1042).

Voir plus baut.

Picard (E.). — Sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par les substitutions d'un groupe discontinu. (1045).

Dans une Communication antérieure, M. Picard a considéré une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires entre les deux variables indépendantes ξ, η. Soit

$$\left(\xi, \eta, \frac{A\xi + A'\eta + A''}{C\xi + C'\eta + C''}, \frac{B\xi + B'\eta + B''}{C\xi + C'\eta + C''}\right)$$

une substitution d'un de ces groupes G. On peut obtenir des fonctions uniformes et continues des variables complexes ξ, η, $\Theta(\xi, \eta)$ définies dans le domaine S que détermine l'inégalité $\xi\xi_0 + \eta\eta_0 < 1$, où ξ_0, η_0 sont les conjuguées de ξ, η, et telles que la substitution précédente du groupe change $\Theta(\xi, \eta)$ en $(C\xi + C'\eta + C'')^{2m}\Theta(\xi, \eta)$, m étant un entier plus grand que 1. Au groupe G correspond dans S un domaine δ, tel qu'à tout point de S corresponde dans δ un point et un seul par une substitution du groupe. Le domaine δ a un ou plusieurs points communs avec la limite de S.

M. Picard étudie la forme de la fonction Θ dans le voisinage d'un tel point.

Dans la seconde Partie de sa Communication, il donne, pour tous les groupes discontinus de deux variables indépendantes, analogues à G, l'extension de la notion de *genre*, donnée par M. Poincaré pour les groupes fuchsiens; pour les groupes de M. Picard, cette notion comprend *trois* nombres.

Goursat. — Sur le genre d'une relation algébrique entre deux fonctions uniformes d'un point analytique (x, y). (1048).

Cette Communication est relative à un Mémoire de M. Picard, inséré dans le *Bulletin* (1883). M. Goursat remarque d'abord que le théorème de M. Picard peut être généralisé dans les termes suivants : Étant données deux fonctions $u = P(z)$, $v = Q(z)$ uniformes dans le voisinage d'un point singulier essentiel $z = a$, telles qu'elles n'aient pas une infinité d'autres points singuliers essentiels dans le voisinage de ce point, si ces fonctions sont liées par une relation algébrique, le genre de cette relation doit être o ou 1. Il s'occupe ensuite de ce problème : Étant données une relation algébrique $f(x, y) = 0$ de degré m et de genre p, deux fonctions uniformes u, v du point analytique (x, y) liées par une relation algébrique $F(u, v)$ de genre q, dans quel cas le nombre q peut-il être supérieur à p? Sous certaines restrictions, M. Goursat montre que le genre ne peut s'élever que si $p = 0$; il indique ensuite comment on pourra obtenir les expressions générales de deux fonctions uniformes du point analytique (x, y), ayant n points singuliers essentiels, et liées par la relation algébrique

$$F(u, v) = 0,$$

de genre o ou de genre 1.

Stéphanos (*C.*). — Sur un problème de la théorie de l'élimination. (1051).

Étant données trois formes binaires α, β, γ dont les ordres l, m, n ont pour somme un nombre impair $2p+1$ et sont, de plus, tels qu'aucune des différences

$$l' = p - l, \quad m' = p - m, \quad n' = p - n$$

ne soit négative, déterminer trois autres formes binaires L, M, N, dont les ordres soient respectivement égaux à l', m', n', de telle manière qu'on ait

$$L\alpha + M\beta + N\gamma = 0.$$

N° 21; 19 novembre.

De Saint-Venant et *Flamant*. — Des vitesses que prennent, dans l'intérieur d'un vase, les divers éléments d'un liquide pendant son écoulement par un orifice inférieur. (1105).

Cette Communication se rapporte à des séries doubles rencontrées par les auteurs dans leurs recherches et qui convergeraient, mais très lentement; M. Boussinesq leur a communiqué des expressions pour le reste de ces séries, obtenues au moyen de raisonnements très « hardis », mais qui se sont trouvées justifiées par les vérifications numériques des savants auteurs.

Liouville (*R.*). — Sur certaines transformations que peuvent subir les équations aux différences partielles du second ordre. (1122).

Bigourdan. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'observatoire de Paris. (1126).

Coggia. — Observation de la comète Pons-Brooks et de la planète (234), Barbara, faites à l'observatoire de Marseille. (1128).

Obrecht. — Observation photométrique d'une éclipse du premier satellite de Jupiter. (1129).

Radau. — Remarque sur une formule de M. Tisserand. (1130).

Boussinesq. — Sur la résistance d'un anneau à la flexion. (1131).

Darboux. — Sur les lignes de courbure de la surface des ondes. (1133).

Voir plus haut.

Humbert. — Sur les courbes de genre 1. (1136).

Brassinne. — Application d'une proposition de Mécanique à un problème relatif à la surface de la Terre. (1139).

N° 22; 26 novembre.

De Jonquières. — Considérations théoriques sur les flotteurs remorqués en divergence. (1175).

Bigourdan. — Observations des planètes (233) et (234), faites à l'observatoire de Paris. (1185).

Callandreau. — Sur une formule de M. Tisserand. (1187).

Si l'on fait

$$P^n(p\,z) = 4\,\Sigma\,\mu^i\nu^j A_{ij} \cos ix \cos jy$$

(*voir* le compte rendu de la Communication de M. Appell sur le même sujet), le coefficient A_{ij} considéré comme fonction de ν seulement vérifie une équation différentielle linéaire de troisième ordre.

Poincaré. — Sur l'intégration algébrique des équations linéaires. (1189).

Lorsqu'il y a, entre la variable et l'intégrale générale d'une équation linéaire à coefficients rationnels, une relation algébrique et que l'on forme, à l'aide de cette relation, des intégrales abéliennes de première espèce, les périodes de ces intégrales satisfont à certaines équations algébriques. M. Poincaré étudie ces relations dans un cas particulier, relatif à la résolvante de Gallois de l'équation modulaire que l'on rencontre dans la transformation du septième ordre des fonctions elliptiques; il rencontre, chemin faisant, un système d'intégrales abéliennes où il existe une infinité d'intégrales réductibles aux intégrales abéliennes. M. Picard avait déjà donné deux exemples de pareils systèmes.

N° 23; 3 décembre.

Faye. — Sur l'heure universelle proposée par la Conférence de Rome. (1234).

Resal. — Remarques relatives au problème dit des deux chaînes, proposé par M. Piarron de Mondésir. (1239).

Ce problème ne peut être résolu sans faire d'hypothèse sur le mouvement du système qu'on étudie. M. Resal retrouve la conclusion de M. de Mondésir, en partant d'une hypothèse différente.

Radau (R.). — Addition à une Note précédente sur une formule de M. Tisserand. (1275).

Les fonctions $P^{n,k}$ sont définies par l'équation

$$(1-2\theta z-\theta^2)^{-k}=\Sigma\,\theta^n P^{n,k},$$

où k est un nombre quelconque. Si l'on pose, avec M. Tisserand,

$$z=\mu\cos x+\nu\cos y,\quad \mu+\nu=1,$$

on introduit de nouvelles fonctions $A_{i,j}^{n,k}$, définies par l'équation

$$P^{n,k}=\Sigma A_{i,j}^{n,k}\mu^i\nu^j\cos ix\cos jy.$$

M. Radau, dans une Note précédente (p. 1130), avait exprimé les coefficients $A_{i,j}^{n,k}$ au moyen des séries hypergéométriques à deux variables de M. Appell : les deux arguments étaient μ et ν. Ayant reconnu depuis qu'il est possible de les exprimer par des fonctions hypergéométriques de la seule variable ν, il donne sans démonstration ses nouveaux résultats.

Lindstedt (A.). — Sur la forme des expressions des distances mutuelles dans le problème des trois corps. (1276 et 1353).

Dans son célèbre *Essai sur le problème des trois corps*, Lagrange a fait dépendre les distances r, r', Δ de trois masses M, m, m' de l'intégration de quatre équations linéaires. Partant des formules de Lagrange, M. Lindstedt introduit, outre la quatrième inconnue qu'elles contiennent, trois nouvelles inconnues auxiliaires,

$$u=\frac{dr^2}{dt},\quad u'=\frac{dr'^2}{dt},\quad v=\frac{d\Delta^2}{dt}.$$

Il est ainsi ramené à effectuer trois quadratures et à intégrer quatre équations linéaires formant un système de huitième ordre. Les huit constantes provenant de cette dernière intégration se partagent en deux groupes de quatre, η, η', ζ, $\varkappa$ et π, π', ω, ω'. L'auteur se propose de développer ses sept inconnues suivant les puissances des constantes η, η', ζ, $\varkappa$, en se restreignant au cas (seul important) où les excentricités des orbites de m et m' autour de M sont petites, et où le rapport $\frac{r}{r'}$ reste constamment supérieur ou constamment inférieur à l'unité.

A cet effet, il opère par approximations successives : chaque opération consiste alors a intégrer un système d'équations linéaires à coefficients constants. Mais, en appliquant sans les modifier les méthodes connues, on obtiendrait dans les intégrales des termes contenant en facteur des puissances du temps. Cet inconvénient n'étant plus inhérent à la nature du problème, on doit pouvoir l'éviter; et c'est ce que M. Lindstedt réussit à faire, grâce à un artifice dont il a déjà usé antérieurement. On introduit dans les deux membres des équations à intégrer des constantes indéterminées, en nombre convenable, et l'on peut ensuite choisir leurs valeurs de manière à faire disparaître des seconds membres les termes qui donneraient naissance aux termes affectés du temps.

L'auteur arrive à ce résultat remarquable que le nombre des arguments dans les intégrales demandées est de *quatre*. Il fait connaître, en outre, l'ordre de chaque terme de ses développements.

Supposant ensuite m et m' petits par rapport à M, il a pu s'assurer que des deux groupes de termes qui, dans le développement de r, par exemple, ont leurs arguments proportionnels au temps, les uns sont au moins du premier ordre, et les autres au moins du second ordre par rapport aux excentricités et à l'inclinaison mutuelle.

En terminant, il indique les deux relations qui lient les onze constantes d'intégration introduites dans son analyse et ajoute que ses résultats s'étendent au cas d'une loi quelconque d'attraction fonction de la distance. M. Lindstedt a démontré aussi que le nombre des arguments dans les expressions analytiques des distances mutuelles de n corps est égal à $(n-1)^2$.

De Jonquières. — Sur le ricochet des projectiles sphériques à la surface de l'eau. (1278).

Goursat (*E.*). — Sur la théorie des intégrales abéliennes. (1281).

L'auteur se propose d'obtenir l'expression analytique des intégrales abéliennes de seconde espèce dont un point de discontinuité est en même temps point de ramification. Les fonctions qu'il est conduit à prendre comme éléments essentiels de ces intégrales jouissent de propriétés qu'on déduit de leur expression au moyen des fonctions Θ. Elles jouent absolument le même rôle que les intégrales normales où le pôle est un point ordinaire, soit dans le théorème de Riemann-Roch, soit dans la théorie générale des fonctions uniformes d'un point analytique; en particulier, elles interviennent dans l'expression des fonctions rationnelles qui sont les dérivées des intégrales de première espèce.

Poincaré et *Picard*. — Sur un théorème de Riemann relatif aux fonctions de n variables indépendantes admettant $2n$ systèmes de périodes. (1284).

Ce théorème, que M. Hermite a énoncé, d'après Riemann, dans une Note faisant suite à la sixième édition du *Traité* de Lacroix, est le suivant : « Les $2n$ systèmes de périodes de *toute* fonction uniforme de n variables, $2n$ fois périodique, vérifient, tout au moins après une transformation convenable, les $\frac{n(n-1)}{2}$ relations bien connues qui existent entre les périodes des fonctions analogues formées au moyen des fonctions Θ de n variables indépendantes. » Il n'a été jusqu'ici publié aucune démonstration de ce théorème. La Note de MM. Poincaré et Picard comble cette lacune. On y trouve, en outre, signalée cette conséquence importante de la proposition de Riemann : toute fonction $2n$ fois périodique de n variables indépendantes peut être exprimée au moyen des fonctions Θ.

Humbert. — Sur la courbe du quatrième degré à deux points doubles. (1287).

Les coordonnées des points d'une courbe S du quatrième degré, de genre 1, peuvent se mettre sous la forme

$$X_i = A_i P_1(t) + B_i P_2(t) + C_i P_3(t) + D_i P_4(t) \qquad (i = 1, 2, 3),$$

en posant

$$P_{i+1}(t) = \theta_3\left(t + j\frac{\omega}{n}, \omega, \omega'\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{m^2 i\pi\frac{\omega}{\omega} + 2mi\frac{\pi t}{\omega}} e^{mi\frac{\pi}{2}} \qquad (j = 0, 1, 2, 3).$$

Les arguments t, $t+\omega$, $t+4\omega'$ donnent le même point de la courbe.

Appelons *points conjugués* dans un système σ deux points de la courbe S, dont les arguments ont pour somme σ, *systèmes principaux* les quatre systèmes $0, \frac{\omega}{2}, 2\omega', 2\omega'+\frac{\omega}{2}$; *systèmes semi-principaux* les douze systèmes obtenus en ajoutant à l'une des quantités $\frac{\omega}{4}, \omega', \omega'+\frac{\omega}{4}$ l'une des quantités $0, \frac{\omega}{2}, 2\omega', 2\omega'+\frac{\omega}{2}$. Les droites joignant deux points conjugués dans le système σ enveloppent une conique tangente à S en quatre points situés sur une conique passant par les deux points doubles. Les droites joignant deux points conjugués dans un des systèmes principaux passant par un point fixe qui sera dit un centre A chaque système semi-principal correspond un point O, tel que les quatre conjugués dans ce système des points où S est coupée par une droite quelconque A, issue de O, sont sur une droite B, passant par O (O sera dit un semi-centre). Les droites A et B sont en involution. Le segment déterminé par deux points conjugués dans un système semi-principal est partagé harmoniquement par deux droites fixes, concourant au semi-centre correspondant. Les coordonnées des centres et semi-centres ne dépendent nullement de la quantité $q = e^{i\pi\frac{\omega'}{\omega}}$ qui figure dans les formules posées au début : par suite, toutes les courbes représentées par ces équations ont mêmes centres et semi-centres, si $A_i, \ldots, D_i$ ont toujours les mêmes valeurs, q étant quelconque. La même conclusion subsiste pour les courbes du quatrième degré représentées par les équations

$$X_i = \text{fonction rationnelle}\left[t, \sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}\right] \quad (i = 1, 2, 3),$$

où le module k varie d'une courbe à l'autre. La proposition inverse est également vraie.

Stephanos (*C.*). — Sur l'intégration d'une fonction rationnelle homogène. (1290).

L'auteur commence par résoudre les deux problèmes suivants :

1° Étant données deux formes binaires $\varphi = \varphi_x^{m_1+m-1}$ et $f = f_x^{m+1}$ (où $m_1 \geqq m$), dont la seconde a son discriminant D différent de zéro, trouver l'expression générale des formes binaires $s = s_x^{m_1}$ et $t = t_x^{m_1-2}$ satisfaisant à la relation

$$D\varphi = (f, s)_1 + ft.$$

2° Étant données deux formes binaires φ et f, dont les ordres $m_1 + m - 1$ et $m + 1$ soient tels que

$$(m_1 + m - 1) \geqq (m + 1)(n + 1) - 3,$$

trouver l'expression générale des formes S et T, d'ordres respectifs m_1 et $m_1 - (n + 1)$, satisfaisant à la relation

$$D^n\varphi = (f, S)_1 + f^n T,$$

où D désigne le discriminant f, supposé différent de zéro.

Ce dernier problème, une fois traité, permet d'obtenir la solution de cette question : étant données deux formes binaires φ et f, dont les ordres k et $m + 1$ sont tels que $k + 2 = (m + 1)(n + 1)$, et dont la seconde f n'admet que des facteurs linéaires simples, calculer directement la partie algébrique et la partie transcendante de l'intégrale

$$\int \frac{\varphi}{f^{n+1}}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1),$$

sans recourir à la décomposition en fractions simples de $\frac{\varphi}{f^{n+1}}$.

On trouve

$$D^n \int \frac{\varphi}{f^{n+1}}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1) = \frac{1}{(m+1)n^2}\frac{S}{f},+\int \frac{T}{f}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1),$$

S et T étant deux covariants simultanés des formes φ et f que l'auteur enseigne à calculer.

N° 24; 10 décembre.

Sylvester (*J.*). — Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton. (1336).

Bigourdan (*G.*). — Observations de la nouvelle planète (225) faites à l'Observatoire de Paris. (1351).

Henry (*MM.*). — Observations de la comète de Pons-Brooks faites à l'équatorial ouest du jardin. (1352).

Rayet (*G.*). — Observations du spectre de la comète Pons 1812-Brooks, faites à l'Observatoire de Bordeaux. (1352).

Lindstedt (*A.*). — Sur la forme des expressions des distances mutuelles dans le problème des trois corps. (1353).

André (*D.*). — Sur le nombre des permutations de n éléments qui présentent s séquences. (1356).

En désignant ce nombre par $P_{n,s}$, l'auteur établit la relation

$$P_{n,s} = s P_{n-1,s} + 2 P_{n-1,s-1} + (n-s) P_{n-1,s-2},$$

qui, associée aux identités évidentes,

$$P_{n,1} = 2, \quad P_{n,2} = 2 P_{n-1,2} + P_{n-1,1},$$

permet de calculer de proche en proche, d'une manière régulière les diverses valeurs de $P_{n,s}$. On est conduit à disposer les valeurs trouvées en un triangle, analogue à celui de Pascal, et dans lequel le nombre $P_{n,s}$ est à l'intersection de la colonne de rang s et de la ligne de rang $n-1$. On peut démontrer que le nombre des permutations de n éléments qui présentent s séquences est toujours pair, et que, parmi les permutations de n éléments ($n > 3$), il y a autant de permutations ayant un nombre pair de séquences que de permutations en ayant un nombre impair.

Stieltjes. — Sur un théorème de Liouville. (1358 et 1415).

Dans sa première Note, l'auteur indique trois théorèmes nouveaux, analogues au théorème de Liouville sur les nombres de classes de formes quadratiques. Dans sa seconde Note, il montre comment ce théorème se déduit du développement des intégrales elliptiques complètes de première et de seconde espèce, et il énonce trois autres propositions similaires.

Bonnet (*G.-Ossian.*). — Démonstration nouvelle de deux théorèmes de M. Bertrand. (1360).

Si d'un point A d'une surface donnée S on trace sur celle-ci des lignes géodésiques dans toutes les directions, et si l'on porte sur chacune de celles à partir de A un arc AM de longueur constante r, le lieu de M sera appelé circonférence géodésique, et la portion de surface qu'il enferme sera dite géodésique. En considérant r comme un infiniment petit principal, on a pour la circonférence et le cercle géodésiques les expressions suivantes :

$$C = 2\pi r - \frac{\pi r^3}{3 R_0 R'_0}, \quad A = \pi r^2 - \frac{\pi r^4}{12 R_0 R'_0},$$

où R_0 et R'_0 désignent les rayons de courbure principaux de la surface C au point A.

N° 25; 17 décembre.

Fontaneau (*E.*). — Sur la détermination des forces élastiques. (1402).

Périgaud. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'Observatoire de Paris (1407).

Henry (MM.). — Observations de la planète (235) Carolina et de la comète Pons-Brooks, faites à l'Observatoire de Paris (1408).

Halphen. — Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires (1408 et 1541).

Si, entre diverses solutions inconnues d'une même équation différentielle linéaire, il existe une relation connue, quel parti peut-on en tirer pour l'intégration? Telle est la question dont s'occupe l'auteur. Il examine le cas où cette relation est algébrique et donne pour valeur d'un polynôme entier et homogène par rapport aux solutions inconnues une fonction connue de la variable indépendante. Dans une première Note, M. Halphen démontre la proposition suivante : Si, en fonction de la variable indépendante, on connaît l'expression d'un polynôme à coefficients constants, homogène et du degré m par rapport aux solutions d'une équation différentielle linéaire, cette équation s'intègre complètement, pourvu que : 1° le polynôme ait une forme réduite déterminée contenant des variables effectives en nombre égal à l'ordre de l'équation ; et que 2° entre les solutions, il n'existe aucune relation homogène, à coefficients constants, d'un degré égal à celui du polynôme.

Les applications se simplifient beaucoup quand on considère, au lieu des intégrales, les multiplicateurs qui les fournissent. L'auteur enseigne à calculer ces multiplicateurs ; et, dans une seconde Note, il applique les principes précédents à l'intégration effective d'une équation du troisième ordre pour laquelle on connaît, en fonction de la variable indépendante, l'expression d'un polynôme homogène du troisième degré, composé avec les solutions inconnues. La méthode de M. Halphen fournit explicitement les solutions cherchées par des calculs algébriques.

Lipschitz. — Sur un point de la théorie des fonctions elliptiques. (1411).

De la formule bien connue de Jacobi (*Fundamenta*)

$$\vartheta_3^4(o) = 1 + 8\left(\frac{q}{1-q} + \frac{2q^2}{1+q^2} + \frac{3q^3}{1-q^3} + \frac{4q^4}{1+q^4} + \cdots\right),$$

qui conduit à la représentation d'un nombre quelconque par une somme de quatre carrés, l'auteur déduit les trois équations différentielles

$$\vartheta_3^4(o) = -4\,\frac{d\log}{d\log q}\left[\frac{\vartheta_0(o)}{\vartheta_2(o)}\right],$$

$$\vartheta_0^4(o) = 4\,\frac{d\log}{d\log q}\left[\frac{\vartheta_2(o)}{\vartheta_3(o)}\right], \quad \vartheta_2^4(o) = 4\,\frac{d\log}{d\log q}\left[\frac{\vartheta_3(o)}{\vartheta_0(o)}\right].$$

obtenues par Jacobi dans un Mémoire inséré au *Journal de Crelle*, t. 36, p. 97.

A la suite de la Note de M. Lipschitz, se trouvent quelques lignes dans lesquelles M. Hermite montre que ces trois équations différentielles résultent aussi de la formule fondamentale

$$\int_0^x k^2 \sin^2 x \, dx = \frac{Jx}{K} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$

due également à Jacobi.

Stieltjes. — Sur un théorème de M. Liouville. (1415).

Poincaré (*H.*). — Sur les équations algébriques. (1418).

Démonstration de ce théorème :

Si $F(x) = 0$ *est une equation algébrique admettant p racines positives, on peut toujours trouver un polynôme* $\Phi(x)$, *tel que le produit* $F(x)$, $\Phi(x)$ *n'ait que p variations.*

Appell. — Décomposition en éléments simples des fonctions doublement périodiques de troisième espèce. (1419).

Les fonctions que M. Hermite a appelées *fonctions doublement périodiques* de troisième espèce sont définies par deux relations qu'on peut mettre sous la forme

$$F(x+2K) = F(x), \quad F(x+2iK') = e^{-\frac{mi\pi x}{K}} F(x),$$

m désignant un entier positif ou négatif, mais différent de zéro.

M. Appell suppose que la fonction $F(x)$ n'a d'autres points singuliers à distance finie que des pôles du premier ordre; et il exprime $F(x)$ par une somme d'éléments simples n'ayant chacun qu'un seul pôle dans un parallélogramme des périodes $2K$, $2iK'$, plus une partie entière s'il y a lieu. D'ailleurs, ses méthodes s'appliquent encore quand la fonction $F(x)$ admet des pôles d'ordre quelconque ou des points essentiels isolés.

Soit d'abord $m > 0$: l'élément de décomposition choisi est la fonction

$$\psi_m(x, \alpha) = e^{mi\pi\frac{x-\alpha}{2K}} \frac{H'(0)}{H(x-\alpha)} \frac{H(x-a_1)H(x-a_2)\ldots H(x-a_{m+1})}{H(\alpha-a_1)H(x-\alpha_2)\ldots H(\alpha-\alpha_{m+1})},$$

où les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ désignent des constantes arbitraires, et a_{m+1} est définie par la relation

$$a_{m+1} = \alpha + mK - (a_1 + a_2 + \ldots + a_m).$$

La décomposition cherchée est fournie par la formule

$$F(x) = R_1\psi_m(x, \alpha_1) + R_2\psi_m(x, \alpha_2) + \ldots + R_p\psi_m(x, \alpha_p) + G(x),$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont les p pôles simples de $F(x)$ dans un parallélogramme des périodes, et $R_1, R_2, \ldots, R_p$ les résidus correspondants. Enfin, $G(x)$ est une *fonction entière* vérifiant les équations qui définissent $F(x)$: elle est composée linéairement à l'aide de m fonctions entières connues.

Pour m négatif, l'auteur s'en tient au cas où $m = -1$. Il convient alors de prendre pour élément de décomposition la fonction

$$\chi(x, \alpha) = \frac{\pi i}{2\mathrm{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{e^{\frac{i\pi(x-\alpha)}{\mathrm{K}}} + q^{2n}}{e^{\frac{i\pi(x-\alpha)}{\mathrm{K}}} - q^{2n}} e^{\frac{ni\pi\alpha}{\mathrm{K}}} q^{n(n-1)} \quad \left(q = e^{-\pi\frac{\mathrm{K}'}{\mathrm{K}}}\right).$$

Soient dans un parallélogramme des périodes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ les pôles supposés simples de la fonction $\mathrm{F}(x)$, et $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2, \ldots, \mathrm{R}_p$ les résidus correspondants. La formule de décomposition est

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{R}_1\chi(x, \alpha_1) + \mathrm{R}_2\chi(x, \alpha_2) + \ldots + \mathrm{R}_p\chi(x, \alpha_p).$$

Bonnet (*G.-Ossian*). — Démonstration des propriétés fondamentales du système de coordonnées polaires géodésiques. (1424).

Démonstration de ces deux théorèmes de Gauss :

1° Les deux systèmes de lignes coordonnées se coupent partout à angles droit.

2° Si l'on désigne par c l'axe de la circonférence géodésique de rayon r, compris entre la ligne géodésique initiale $\omega = 0$ à la ligne geodésique quelconque qui coupe la première sous l'angle ω, on a

$$\frac{\partial^3 c}{\partial r^2 \partial\omega} = -\frac{1}{\mathrm{RR}'}\frac{\partial c}{\partial\omega},$$

R et R′ étant les rayons de courbure principaux de la surface au point pris pour origine des coordonnées.

D'Ocagne (*M.*). — Sur un mode de génération des ovales de Descartes, proposé par Chasles. (1424).

Une transformation indiquée par Chasles pour obtenir les ovales de Descartes donne seulement des limaçons de Pascal. La remarque est juste, mais M. Cayley l'avait déjà publiée en 1850 dans le *Journal de Liouville*. M. Genocchi est revenu sur ce sujet dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (année 1855, p. 206).

N° 26; 24 décembre.

Trépied et *Rambaud*. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'observatoire d'Alger. (1466).

Périgaud. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'observatoire de Paris. (1468).

Gonnessiat. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'observatoire de Lyon. (1469).

Backlund (*O.*). — Sur un développement particulier de la fonction perturbatrice. (1470).

Poincaré (H.) — Sur les séries trigonométriques. (1471).

Dans cette Note, l'auteur applique une proposition qu'il a antérieurement démontrée à l'étude des développements en série par lesquels M. Lindstedt a récemment exprimé les distances mutuelles dans le problème des trois corps. Il fait voir : 1° que si les séries de M. Lindstedt convergent pendant un intervalle de temps, si petit qu'il soit, elles convergeront toujours; 2° qu'il n'est pas sûr qu'on puisse choisir les constantes de telle façon que les séries convergent; 3° que les séries, même lorsqu'elles ne convergent pas, peuvent donner une solution du problème avec une approximation indéfinie.

J.-S. et *M.-N. Vaněček.* — Sur la génération des surfaces. (1473 et 1548).

Gouy. — Sur la vitesse de propagation de la lumière, en réponse à une Note de lord Rayleigh. (1476).

N° 27; 31 décembre.

Perrotin. — Observations de la comète Pons-Brooks, faites à l'observatoire de Nice. (1539).

Trépied (Ch.). — Étude spectroscopique de la comète Pons-Brooks, faite à l'observatoire d'Alger. (1540).

Halphen. — Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires. (1541).

Maximovitch (W.). — Sur un moyen de déterminer le facteur d'intégrabilité. (1544).

Le premier membre d'une équation différentielle étant décomposé en deux parties distinctes

$$(M_1\,dx + N_1\,dy) + (M_2\,dx + N_2\,dy) = 0, \quad M_1N_2 - M_2N_1 \gtrless 0,$$

la condition nécessaire et suffisante pour qu'elles admettent un facteur d'intégrabilité commun est que P dx + G dy soit une différentielle exacte, en posant

$$P = \frac{M_1R_2 - M_2R_1}{M_1N_2 - M_2N_1}, \quad Q = \frac{N_1R_2 - N_2R_1}{M_1N_2 - M_2N_1},$$

$$R_1 = \frac{\partial M_1}{\partial y} - \frac{\partial N_1}{\partial x}, \quad R_2 = \frac{\partial M_2}{\partial y} - \frac{\partial N_2}{\partial x}.$$

Le facteur d'intégrabilité est alors $\mu = e^{\int P(dx + Q\,dy)}$.

Stieltjes. — Sur le nombre de décompositions d'un entier en cinq carrés. (1545).

Soient $\varphi(n)$ la somme des diviseurs impairs de n; $F(n)$ le nombre total des décompositions de n en cinq carrés. Si l'on pose

$$A(n) = \varphi(n) + 2\varphi(n-4) + 2\varphi(n-16) + 2\varphi(n-36 + \ldots,$$
$$B(n) = \varphi(n-1) + \varphi(n-9) + \varphi(n-25) + \varphi(n-49) + \ldots,$$

on a

$$F(n) = 24\,A(n) + 16\,B(n) \qquad (n \text{ pair}),$$
$$F(n) = 8\,A(n) + 48\,B(n) \qquad (n \text{ impair}).$$

En faisant usage de la relation suivante :

$$q + 4q^4 + 9q^9 + 16q^{16} + \ldots = (1 + 2q + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)$$
$$\times\left[\frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2} + \ldots\right],$$

qui lui a été communiquée par M. Hermite, l'auteur montre que l'on peut toujours exprimer les deux fonctions $A(n)$ et $B(n)$ l'une par l'autre. Il prouve aussi qu'on peut dans tous les cas exprimer $F(4n)$ au moyen de $F(n)$. En terminant, il signale deux résultats d'induction, traduits par les formules

$$B(p^2) = \frac{p^3 - p + 1}{24}, \quad B(p^4) = \frac{p(p^2-1)(p^3+1)+1}{24},$$

d'où se déduiraient les relations

$$F(p^2) = 10(p^3 - p + 1), \quad F(p^4) = 10[p(p^2-1)(p^3+1)+1].$$

Radau. — Remarque au sujet d'une Note de M. Backlund, sur un développement de la fonction perturbatrice. (1548).

J.-S. et *M.-N. Vaněček.* — Sur la génération des surfaces. (1548).

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK. — Historisch-Literarische Abtheilung.

20^e année, 1875.

Günther (S.). — Contribution à l'histoire des Mathématiques allemandes au xv^e siècle. (1-14).

Steinschneider. — Pseudo-Trithemius et Camillo Leonardi. (25-27).

Curtze. — Remarques sur le précédent travail de Günther. (57-60).

Curtze. — Copernic a-t-il supprimé, oui ou non, la Préface de son Ouvrage *de Revolutionibus?*

Günther. — Supplément à son travail et remarques sur la précédente Note de Curtze. (113-120).

Nother. — Article nécrologique sur Otto Hesse. (77-88).

Cantor. — Article nécrologique sur Gottfried Friedlein. (109-113).

Année 1876.

Zech. — Article nécrologique sur C.-G. Reuschle. (1-4).

Günther. — Mélanges d'histoire des Mathématiques : 1° les progressions géométriques chez les Arabes; 2° les carrés magiques chez Gauss. (57-64).

Hipler. — La chorographie de Joachim Rheticus. (125-150).

Günther. — Adolphe Zeising comme mathématicien. (157-165).

Année 1877.

Cantor. — Études gréco-indiennes. (1-24).

Weber (*H.*). — Pour l'histoire du problème de la propagation des ondes planes d'une amplitude finie. (71).

Korteweg. — Sur les recherches d'Arwed Walter sur la mécanique moléculaire. (93-106).

Hultsch (*F.*). — Sur la sphère céleste d'Archimède. (106-107).

Supplément.

Treutlein. — Le calcul au XVI^e siècle. (1-100).

Schiaparelli. — Les sphères homocentriques d'Eudoxe, de Callippe et d'Aristote. (Trad. W. Horn). (101).

Année 1878.

Cantor. — La correspondance de Lagrange et d'Euler. (1-21).

Zetzsche. — Sur la part de Petřina au perfectionnement du télégraphe. (37-45).

Junghans (*F.*). — Article nécrologique sur Hermann Grassmann. (69-75).

Heiberg (*J.-L.*). — Sur un passage de Pappus. (117-120).

Lorsch (*Ad.*). — Sur un problème de maximum. (120).

Année 1879.

Wohlwill (*E.*). — L'original textuel du jugement pontifical contre Galilée. (1-26).

Hultsch (*F.*). — Contribution à la terminologie des mathématiciens grecs. (41-42).

Bretschneider (*Alfred*). — Charles-Antoine Bretschneider : Souvenir pour ses amis et élèves. (73-91).

Wiedemann (*Eilhard*). — Contribution à l'histoire d'Aboul-Wefa. (121-122).

Rothig (*O.*). — Sur l'expérience du pendule de Foucault. (153-159).

Heiberg. — Quelques propositions élémentaires supposées par Archimède. (177-182).

Cantor. — Trois lettres de Lagrange. (182-184).

Supplément.

Treutlein. — La *Coss* allemande. (1-124).

Treutlein. — Le Traité de Jordanus Nemorarius : *De numeris datis.* (125-166).

Weissenborn. — Le trapèze dans Euclide, Héron, Brahmegupta. (167-184).

Weissenborn. — La question de Boèce. (185-241).

Année 1880.

Wernicke. — La découverte de la vitesse finie de la lumière, par Olaf Roemer. (1-10).

Heiberg. — Les connaissances d'Archimède sur les sections coniques. (41-67)

Krumbiegel (*B.*) et *Amthor* (*A.*). — Le problème des bœufs d'Archimède. (121-136, 153-171).

Wohlwill (*E.*). — Éclaircissement et défense (de son précédent travail sur Galilée). (185-190).

Supplément.

Schapira (*Herm.*). — Manuscrit hébreu publié et traduit. (1-54).

Steinschneider. — Abraham ibn Ezra. (55-128).

Henry (*Charles*). — Prologus N. O'Creati in Helceph. (129-139).

Weissenborn (*H.*). — La traduction d'Euclide d'après l'arabe, par Adelhard de Bath. (141-166).

Peiper (*R.*). — Fortolfi Rhytmimachia. (167-227).

Sachse (*Arnold*). — Essai d'une histoire de la représentation de fonctions arbitraires d'une variable par des séries trigonométriques. (227-226).

Année 1881.

Isenkrahe (*C.*). — Théorie d'Euler sur la cause de la gravitation. (1-19).

Günther (*S.*). — La correspondance de Gauss et de Sophie Germain. (19-25).

Mathiessen (*L.*). — La méthode Tà jàn. (33-38).

Hultsch (*F.*). — Mélanges. (38-39).

Lehmann. — Une résolution algébrique du cas irréductible de l'équation du troisième degré. (39-42).

Heilermann. — Remarques sur les approximations d'Archimède pour les racines carrées irrationnelles. (121-126).

Favaro (A.). — Justus Bellavitis. (153-169).

Année 1882.

Forti (Angelo). — Essai d'une nouvelle Table de fonctions hyperboliques. (1-11).

Hultsch (Frédéric). — Le nombre géométrique dans le huitième Livre de la *République* de Platon. (41-60).

M. Hultsch reprend la question du nombre géométrique de Platon. Depuis longtemps ce nombre mystérieux, qui, d'après le philosophe grec, devait présider aux mariages et dont il parle en un langage plein de réticences, hante l'imagination des mathématiciens. Les derniers travaux sont de MM. Tannery et Dupuis, et c'est sur les résultats obtenus par les deux savants français que M. Hultsch cherche à édifier son hypothèse. Il s'accorde parfaitement avec M. Dupuis sur l'interprétation du commencement du passage en question. Comme lui, il pense que le facteur indiqué serait $2^3.3^3 = 216$. Mais M. Dupuis s'était contenté de multiplier ce nombre par 100; M. Hultsch pense que le nombre final deviendrait ainsi trop petit et qu'il ne satisferait pas aux conditions mentionnées dans le texte. En suivant pas à pas l'auteur grec et en cherchant à élucider chacune de ses expressions, M. Hultsch arrive au nombre $36^2.100^2 = 3600^2 = 12960000$.

(Cette interprétation, M. Dupuis ne l'a pas admise : il a abandonné toutefois sa première hypothèse; dans sa seconde interprétation, il donne le nombre 760000).

Suter (Henry). — Un écrit inconnu jusqu'ici de Nicolas Oresme. (121-125).

Le manuscrit est assez volumineux (175 feuillets); écrit en 1459 par une main inconnue, il est très difficile à lire à cause des abréviations. C'est un Commentaire de la Météorologie d'Aristote, divisé en demandes et réponses, ces dernières appuyées par des arguments d'un caractère presque exclusivement scolastique. Ce nouveau Traité n'ajoutera rien à la gloire de l'auteur de l'*Algorismus proportionum.* Dans la forme de ses preuves et de ses conclusions, Oresme suit entièrement Duns-Scot. Beaucoup de questions lui sont même empruntées. M. Suter en donne quelques-unes ainsi que deux arguments propres à caractériser la manière des auteurs. Dans le troisième Livre, on trouve une question de haut intérêt : il s'agit du mouvement de la Terre. Oresme connaissait les opinions pythagoriciennes; il reste cependant parfaitement soumis aux idées d'Aristote. La dix-huitième question du premier Livre traite des comètes; Oresme y expose, d'après Aristote, Pline, Ptolémée et d'autres, que les comètes prédisent des orages, des tremblements de terre, des inondations, des maladies, des guerres, etc. Ceci pourrait étonner de la part d'un adversaire aussi prononcé de l'Astrologie que l'était Oresme, et cette contradiction pourrait inspirer des doutes à l'égard de l'authenticité du Traité. M. Suter fait remarquer que l'Astrologie du moyen âge était divisée en deux parties : l'Astrologie positive, qui tirait des phénomènes astronomiques des conclusions sur des phénomènes naturels (orages), et l'Astrologie judiciaire qui essayait de lire le sort de l'homme dans le mouvement des astres. C'est cette dernière Astrologie qu'Oresme a combattue. Aussi essaye-t-il de prouver que les maladies, les guerres, etc., proviennent des comètes par l'enchaînement des causes naturelles.

Noether. — Remarques sur un petit écrit de F. Klein touchant la *Théorie des fonctions algébriques* de Riemann (201-207).

Mahler (Édouard). — Sur un point d'histoire des Mathématiques. (207-210).

M. Cantor ayant appelé l'attention des savants sur les connaissances mathématiques contenues dans le Talmud, M. Édouard Malher cherche à combler cette lacune dans une certaine limite. Le premier résultat de ses recherches a été la confirmation complète de l'opinion de M. Cantor quant à l'origine orientale de la valeur $\pi = 3$. Cette valeur semble avoir été universellement acceptée par les talmudistes. Ils paraissent admettre, en outre, que les rapports de l'aire du carré circonscrit à l'aire du cercle et l'aire du carré inscrit sont $\frac{4}{3}$ et $\frac{2}{1}$. Ce sont les Balch Tosfeth, commentateurs du Talmud, du XII^e au XIV^e siècle après J.-C., qui semblent avoir les premiers nettement distingué les aires d'avec la mesure des lignes déterminantes. Les Balch Tosfeth essayent aussi de donner une preuve du rapport précédemment cité entre l'aire du cercle et celle du carré circonscrit. Cette démonstration consiste à supposer le cercle d'une palme de diamètre décomposé en une infinité de zones concentriques que l'on rectifie et additionne. On a ainsi un triangle équilatéral, dont la base est égale à 3 palmes et la hauteur à une demi-palme. Ce triangle étant coupé à la moitié de la base, les deux moitiés composent un rectangle d'une base égale à $1\frac{1}{2}$ palme et d'une hauteur d'une demi-palme. Enfin ce rectangle est décomposé en trois carrés d'une demi-palme. M. Mahler voit dans cette décomposition du cercle un commencement de Calcul intégral; c'est beaucoup dire. On trouve encore dans le Talmud la valeur de $\frac{7}{5}$ pour $\sqrt{2}$; le passage qui la contient provient du II^e siècle après J.-C. Les Balch Tosfeth font remarquer que cette valeur n'est pas exacte.

Supplément.

Günther (S.). — Les racines carrées irrationnelles des anciens et leurs méthodes de développement.

Le but de l'auteur n'est pas d'augmenter le nombre considérable des hypothèses auxquelles ce problème a donné lieu; il se propose de présenter au lecteur toutes les méthodes indiquées jusqu'ici, de les examiner, d'en faire ressortir le principe et de nous mettre ainsi en état de choisir le procédé le plus naturel et le plus probable.

Le travail est divisé en trois Chapitres. Dans le premier, M. Günther expose tout ce que l'antiquité nous a laissé sur les racines carrées irrationnelles ou, plus justement, incommensurables. Il suppose, comme M. Cantor, que la première irrationnelle découverte fut $\sqrt{2}$, et que cette découverte est de Pythagore. Théodore de Cyrène prouva ensuite l'irrationnalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ et $\sqrt{17}$. En général, les Grecs se sont appliqués beaucoup moins à rechercher la valeur de ces nombres qu'à les éviter; les méthodes de Pythagore et de Platon pour la solution de l'équation $x^2+y^2=z^2$ en nombres entiers en font foi. Cependant un passage de Platon, malheureusement très corrompu, paraît prouver qu'il connaissait pour la $\sqrt{2}$ la valeur approximative $\frac{7}{5}$. Euclide, dans son dixième Livre, un des plus admirables des *Élements*, donne une théorie de l'irrationnel qu'il traite, bien entendu, tout à fait géométriquement. Ses recherches ont été, à ce qu'il paraît, continuées par Apollonius de Perge; mais le travail de ce dernier est perdu et l'essai de restitution fait par Woepcke n'offre pas de résultats sûrs. C'est Archimède qui, le premier, fait entrer des valeurs approximatives de racines carrées dans ses calculs. Elles lui étaient indispensables, car il employait, pour mesurer la circonférence, la méthode des périmètres des polygones inscrits et circonscrits. Archimède cite huit racines irrationnelles. Pour l'une d'elles, il donne même deux valeurs :

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}.$$

La $\sqrt{2}$ ne se trouve pas dans Archimède. Aristarque de Samos, dans la septième proposition du Livre *Sur les grandeurs et les distances du Soleil et de la Lune*, lui assigne la valeur $\frac{7}{5}$.

Différant ici encore de tous ses compatriotes, Héron d'Alexandrie emploie beaucoup les racines irrationnelles; on en trouve plus de trente chez lui; elles ne l'embarrassent nullement. Il est très probable qu'il était en possession d'une méthode qui lui permettait de les extraire très rapidement; c'est M. Paul Tannery qui, le premier, l'a prouvé en faisant remarquer que, voulant transformer la formule pour l'aire F d'un segment de cercle en fonction de la corde s et de la flèche h,

$$(1)\qquad F = \frac{(s+h)h}{2} + \frac{1}{14}\frac{s^2}{4}$$

en une formule pour l'arc b du segment en fonction des mêmes variables, Héron pose

$$(2)\qquad b = \frac{h}{4} + \sqrt{s^2+4h^2},$$

ou bien

$$(3)\qquad b = \sqrt{s^2+4h^2} + \frac{h}{s}\left(\sqrt{s^2+4h^2}-s\right),$$

et non

$$(4)\qquad b = s + h + \frac{h\left(1-\frac{5}{28}\frac{s^2}{h^2}\right)}{1+\frac{1}{4}\frac{s^2}{h^2}},$$

qui présente cependant une approximation satisfaisante. Les formules (2) et (3) devaient donc être pour les Grecs, comme elles le sont pour nous, plus rapides à calculer que la formule (4). L'auteur divise, d'après M. Tannery, les racines de Héron en deux groupes, le groupe géométrique et le groupe trigonométrique, chacun d'eux en plusieurs classes. Quelques-unes de ces expressions sont d'une exactitude remarquable. Cependant on en trouve aussi d'erronées, ce qui s'accorde d'ailleurs avec le caractère général du Livre de Héron.

Les écrits de Ptolémée nous fournissent peu de chose. On y trouve, il est vrai, nombre de racines irrationnelles. Mais ces valeurs ont été trouvées par une méthode toute différente de celle d'Archimède et de Héron, quelle qu'elle soit. C'est un astronome du IVe siècle après J.-C., Théon d'Alexandrie, qui nous a renseigné complètement sur la méthode des astronomes. Elle était fondée sur l'emploi des fractions sexagésimales : on y appliquait la formule d'Euclide

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

et l'on calculait à peu près comme nous le faisons.

Les écrits byzantins ne fournissent pas d'indications nouvelles. La plupart se contentent de rapporter simplement la méthode de Théon d'Alexandrie. Maxime Planude donne comme nouvelle une méthode qui en diffère très peu.

Les mathématiciens romains copient presque tous Héron. C'est ainsi que nous retrouvons dans Columelle, Frontin, Hygin, etc., les valeurs que nous connaissons déjà.

M. Günther recherche aussi les indications que nous fournissent sur les racines irrationnelles les œuvres de Gerbert, des rabbins juifs, des Hindous et des Arabes, et il consacre quelques mots aux expressions numériques que présentent les proportions des édifices grecs; c'est aux recherches de M. Hultsch que nous devons la plupart de ces dernières données; malheureusement, ce champ d'études si intéressant n'offre que peu de résultats certains.

Avant de passer à l'examen des hypothèses, l'auteur mentionne l'opinion émise par Nesselmann et Friedlein, d'après lesquels les racines en question auraient été trouvées par tâtonnements. Il va sans dire qu'il la rejette complètement. Nous avons d'ailleurs rapporté plus haut la preuve que M. Tannery a donnée de l'existence d'un procédé chez Héron. En dehors de cette hypothèse purement négative, M. Günther compte quatorze procédés différents. Il les divise en deux groupes. Le premier embrasse tous les procédés qui ont pour fondement les fractions continues. C'est à ce groupe qu'appartient l'hypothèse la plus ancienne; elle a été proposée en 1723 par de Lagny. L'auteur la trouve élégante et expéditive. Mais elle n'est qu'une application de la formule de formation des réduites d'une fraction continue. La méthode de Mollweide, pour trouver la valeur d'Archimède

$$\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153},$$

n'emploie que des transformations connues des Grecs; mais ces transformations ne pouvaient être exécutées que par quelqu'un qui connaissait parfaitement d'avance le résultat à obtenir. D'ailleurs cette méthode repose au fond sur des fractions continues, malgré son extérieur géométrique. Un autre reproche lui a été adressé par Gauss : le procédé de Mollweide donne les valeurs

$$\frac{2}{1} > \frac{7}{4} > \frac{26}{15} > \frac{97}{56} > \frac{362}{209} > \frac{1351}{780}$$
$$> \sqrt{3} > \frac{989}{571} > \frac{265}{153} > \frac{71}{41} > \frac{19}{11} > \frac{5}{3} > \frac{1}{1}.$$

En supposant qu'Archimède ait pris cette voie, pourquoi a-t-il choisi deux valeurs qui ne se suivent pas? C'est là une grosse difficulté qu'aucun des procédés proposés jusqu'ici n'a pu résoudre définitivement.

Les deux méthodes citées ne s'attaquent qu'à la $\sqrt{3}$. Hauber, au contraire, a tâché d'atteindre, avec la sienne, toutes les irrationnelles d'Archimède. M. Günther prouve que cette méthode est absolument identique aux fractions continues de Lagrange.

Buzengeiger a proposé deux méthodes. La première consiste dans le développement d'une construction géométrique prise dans le *Commentaire d'Archimède*, de Commandin; elle est encore le déguisement d'une fraction continue. La deuxième, qui se déduit de la première, se distingue par une convergence très rapide; elle est la seule qui mène immédiatement aux nombres d'Archimède donnant comme valeurs approchées $\frac{26}{15}$ et $\frac{1351}{780}$. Cependant il faut alors supposer que le nombre $\frac{265}{153}$ a été trouvé autrement. D'ailleurs, l'invention de cette méthode n'appartient pas à Buzengeiger. Elle avait été employée par Luca Pacioli, Ghaligai, Francesco di Lazisio, Cardan, Tartaglia et Unicorno. Elle a été remise en lumière par M. Joseph Bertrand.

M. Oppermann et M. Alexéief ont proposé successivement des méthodes très approchées, fondées sur ce théorème, que la moyenne géométrique de deux quantités a et b $(\sqrt{ab})$ est moyenne proportionnelle entre la moyenne arithmétique $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ et la moyenne harmonique $\left(\frac{2ab}{a+b}\right)$. M. Charles Henry a proposé ensuite des modifications à cette méthode qu'il a appuyée sur des considérations géométriques et rapprochée de la méthode d'interpolation des parties proportionnelles appliquée par Hipparque. M. Günther ne croit pas néanmoins qu'elle soit celle d'Archimède; elle revient d'ailleurs encore aux fractions continues.

M. Paul Tannery a, d'après l'auteur, le mieux creusé la question. Archimède, suivant l'opinion du savant français, connaissait un mode d'extraction reposant sur les relations

$$\sqrt{a^2+b} \backsim a+\frac{b}{2a}, \quad \sqrt{a^2+b} \backsim a+\frac{b}{2a+1},$$

dans lesquelles $\backsim$ signifie *à peu près égal*. Très souvent il se contentait des valeurs assez peu approchées qu'il obtenait; dans le cas de la $\sqrt{3}$, il a employé cette méthode seulement pour avoir une première solution des équations

$$p^2-3q^2=1, \quad p^2-3q^2=-2;$$

puis, à l'aide d'une méthode indépendante, il a trouvé un nombre indéfini d'autres solutions. Quelle était cette méthode? M. Tannery a proposé deux hypothèses. La première, qui affirmerait une ressemblance avec la méthode des Hindous, exposée par Hankel, est rejetée par M. Günther. Dans la seconde, M. Tannery s'est efforcé de reconstituer par analogie le chemin qu'aurait probablement suivi Diophante en voulant résoudre l'équation $p^2-aq^2=1$. Nous ne développerons pas cette méthode, d'ailleurs simple, qui séduit M. Günther. M. Zeuthen avait proposé quelque chose d'analogue pour la $\sqrt{3}$. Nous passons sous silence son procédé, ainsi que celui de M. Heilermann, que l'auteur juge plein d'esprit, mais en somme peu conforme aux habitudes grecques. La manière de M. Hultsch a été imaginée dans un tout autre but, pour développer la $\sqrt{5}$, dont il avait cru trouver les valeurs approximatives en des proportions architecturales.

Dans son troisième Chapitre, M. Günther traite de la résolution des racines carrées par le développement en séries des fractions. Une méthode imaginée par M. Éd. Lucas, d'ailleurs très rapide, ne peut pas un seul instant être supposée conforme à celle des anciens. Elle repose, en effet, sur le binôme entièrement inconnu aux Grecs.

La méthode de M. Radicke est entièrement nouvelle, en ce qu'elle est publiée ici pour la première fois. Elle est assez simple; malheureusement elle ne s'accorde qu'en partie avec les valeurs rencontrées chez les auteurs grecs. La même observation s'applique à un procédé de même genre, proposé par M. von Pessl.

M. Rodet a proposé, pour expliquer les valeurs approchées que l'on trouve dans les Livres religieux des Hindous et dans Archimède, deux méthodes : elles sont remarquables, mais trop laborieuses. Celle par laquelle il retrouve $\frac{1351}{780}$ d'Archimède est empruntée à un géomètre français du XVI^e siècle; elle repose sur ce principe : « Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ désignent deux fractions à termes positifs, la fraction $\frac{a+c}{b+d}$ est comprise entre les deux. » M. Günther la passe sous silence. L'autre repose sur ce principe : « Si l'on désigne par a la racine a une unité près, par r le reste de l'opération, par ε le complément de la racine, on a

$$r = (2a + \varepsilon)\varepsilon \quad \text{ou} \quad \varepsilon = \frac{r}{2a+\varepsilon},$$

et comme toujours $\varepsilon < 1$, on aura une approximation par défaut de sa valeur en le remplaçant par 1 au dénominateur de la fraction, c'est-à-dire en posant

$$\varepsilon_1 = \frac{r}{2a+1}. \text{ »}$$

Conclusions. — 1° Pour obtenir les racines carrées irrationnelles, les anciens partaient toujours de la relation $\sqrt{a^2 \pm b} \backsim a \pm \frac{b}{2a}$, et ils amélioraient la valeur obtenue d'une manière presque empirique. Héron a toujours procédé ainsi, et Archimède, au moins quand il avait de très grands nombres.

2° En possession d'une première approximation plus ou moins satisfaisante, ils en obtenaient de meilleures par des considérations analogues à celles que nous employons pour la résolution de l'équation de Pell : témoin Archimède dans sa détermination de la $\sqrt{3}$ et Théon de Smyrne.

3° Un procédé de fractions continues, analogue à l'algorithme moderne, n'a pas existé dans l'antiquité; on ignorait aussi toute résolution consciente d'une racine carrée en une série de fractions, excepté toutefois le schéma

$$\sqrt{A} = \backsim a + b.60^{-1} + c.60^{-2}\ldots$$

familier aux astronomes.

4° Au commencement du moyen âge, au contraire, les trois ou quatre premières réduites de la fraction continue

$$\sqrt{a^2 \pm b} = a \pm \cfrac{b}{2a \pm \cfrac{b}{2a \pm \ldots}}$$

paraissent avoir été connues des Hindous, des Arabes, des Juifs et, par leur intermédiaire, des Occidentaux, bien entendu sans que la vraie nature de la fraction continue ait été reconnue. Chez les Hindous et les Arabes, on rencontre aussi des traces de l'équation

$$\sqrt{A} \backsim a + b.10^{-1} + c.10^{-2} + \ldots$$

Il est probable qu'on a entrepris aussi au moyen âge des interpolations entre chaque terme de cette série.

Winterberg. — Le Traité de Franco, de Liège, sur la quadrature du cercle.

Le manuscrit provient du Vatican; son auteur a été peu remarqué jusqu'ici par les historiens. Le manuscrit paraît être du XIIe siècle; aussi est-il très pauvre en bonnes Mathématiques. Franco suppose que la fraction $\frac{22}{7}$ exprime exactement le rapport de la circonférence au diamètre. Il n'a aucune difficulté de convertir le cercle de diamètre $= 14$ en un rectangle, dont les côtés sont 11 et 14. Mais c'est alors que l'on aurait supposé tout fini que commence pour lui la vraie difficulté. Il n'a aucun moyen géométrique de transformer un rectangle en un carré et il est forcé de se contenter d'une construction assez peu approchée. Le Traité est divisé en six Livres; le septième n'a, paraît-il, qu'une connexion très faible avec ce qui précède. Dans le premier Livre, on trouve des essais de représentation de nombres irrationnels sous forme de progressions; mais les termes de ces progressions sont en nombre fini.

Geleich (Eugène). — Étude sur la découverte de la Géométrie analytique et examen d'un Ouvrage de Marino Ghetaldi, patricien de Raguse (1630).

Marino Ghetaldi naquit en 1566, à Raguse, en Dalmatie. En 1603, il publia *Archimedes promotus seu de variis corporum generibus gravitate et magnitudine comparatis,* puis bientôt après *Nonnullæ propositiones de parabola nunc primum inventæ et in lucem editæ;* en 1607, l'*Apollonius redivivus* et *Variorum problematum collectio.* Ghetaldi visita presque toute l'Europe et se lia avec des savants comme Michel Coignet, Christophe Clavius et François Viète. Les plus célèbres Universités, entre autres celle de Leyde, lui offrirent des chaires. Il préféra cependant retourner dans sa patrie, où il mourut en 1627. Il avait rédigé encore quelques Traités sur l'Optique, qui semblent perdus; mais son principal Ouvrage ne parut que trois ans après sa mort; il porte le titre *Marini Ghetaldi Patritii Ragusini mathematici præstantissimi de resolutione et compositione mathematica libri quinque, Opus posthumum.* Romæ, 1630. C'est là que Riccati, Wolf et plusieurs autres ont cru trouver les principes de la Géométrie analytique : même à ce propos, Vincenzo Monti, professeur à Pavie, n'a pas craint d'accuser Descartes de plagiat. Sans doute que les jalousies nationales n'ont pas été étrangères à ce débat.

M. Geleich commence par donner une analyse très complète de l'Ouvrage; puis vient une courte histoire des méthodes analytiques antérieures. Le résultat de cette étude n'est pas très favorable au savant italien. En supposant que Ghetaldi ait eu connaissance des travaux de Tartaglia, Cardan, Viète et Cataldi (*Algebra discorsiva e lineare*. Bologna, 1618), on est forcé de reconnaître qu'il a eu peu à faire pour composer son Ouvrage : il s'en faut de beaucoup qu'il ait le premier appliqué l'Algèbre à la Géométrie. Son mérite est plutôt d'avoir recueilli les connaissances qu'on avait de son temps dans cette matière et d'en avoir fait pour la première fois un Ouvrage spécial. La solution de l'équation du quatrième degré, qu'on lui a attribuée quelquefois, lui était inconnue; il la compte même parmi les choses qui ne sont pas du domaine de l'Algèbre. Le premier Livre de la Géométrie de Descartes ne contient, il est vrai, rien qui n'ait été trouvé avant lui et qui ne soit dans Ghetaldi; mais on ne peut contester au grand géomètre français le reste de son œuvre. Ghetaldi a parfaitement ignoré l'usage des coordonnées. Il est vrai encore que, d'après M. Cantor, elles étaient connues déjà des Babyloniens; les Arabes s'en sont servis et Nicolas Oresme les a exposées dans son *Tractatus de latitudinibus formarum*. Mais il est improbable que Descartes ait connu ces travaux et il restera toujours l'inventeur et le fondateur de la Géométrie analytique.

Les conclusions de M. Geleich ont d'autant plus de poids qu'elles émanent d'un homme dont l'impartialité ne peut être mise en doute. La grandeur de la ville de Raguse excite son enthousiasme, et il est si peu disposé à être le panégyriste de Descartes qu'il répète les accusations qu'on a soulevées contre ses découvertes optiques. Heureusement, ces accusations sont mises à néant dans le travail suivant.

Kramer (*P.*). — Descartes et la loi de réfraction de la lumière.

Cette loi est formulée dans la *Dioptrique* parue en 1637; elle ne donna lieu à aucune contestation du vivant de Descartes. C'est en 1663, douze ans après sa mort, que Isaac Voss l'accusa d'avoir puisé sa découverte dans les écrits de Snell. Willibrod Snell avait été professeur à Leyde; il était mort en 1626, laissant un Ouvrage inachevé et aujourd'hui perdu. Mais tous ceux qui l'ont vu, entre autres Huygens, déclarent qu'il contenait la loi de réfraction, sous une forme différente de celle de Descartes. Ce dernier avait considéré les sinus, comme nous le faisons aujourd'hui, Snell se servait des cosécantes. Mais cette différence n'arrête pas les adversaires de Descartes. La découverte de Snell, nous disent-ils, a été répandue par ses élèves et Descartes en aurait eu connaissance. C'était aussi l'opinion de Leibnitz. Appuyée par de telles autorités, cette hypothèse devient bientôt un fait certain dans la bouche de Priestley, Wilde, Fischer, Poggendorff. Delambre, après quelques hésitations, se déclare contre Descartes; pour Montucla la chose reste indécise.

Voici les cinq points sur lesquels repose l'accusation :

1° Descartes a vécu plus de vingt ans en Hollande et a compté beaucoup d'amis parmi les savants de ce pays (Voss, Poggendorff);

2° La découverte de Snell a été enseignée dans des cours privés et publics par Hortensius (Voss);

3° Descartes ne cite presque jamais ses sources (Leibnitz, Poggendorff);

4° Il ne cite aucune expérience qui aurait pu lui faire découvrir sa loi (Poggendorff);

5° Il s'est embrouillé, en voulant donner la preuve de la loi de la réfraction (Leibnitz).

La question du séjour de Descartes en Hollande est de la plus haute importance. Il y a été trois fois : de 1617 à 1619 à Bréda, avec l'armée du prince Maurice d'Orange; en 1621-1622 à La Haye, et enfin en 1629. Ce dernier séjour a duré vingt ans, jusqu'à son passage en Suède (1649). C'est probablement de ce séjour que parlent Voss, Leibnitz et Poggendorff. Mais ceci n'a rien à faire dans le litige. L'auteur prouve, sans réplique, que Descartes était déjà en possession de sa découverte en 1629.

La loi de la réfraction avait en effet pour lui une valeur non seulement théorique, mais aussi pratique. Elle lui était indispensable pour construire les courbes anaclastiques (celles des lentilles qui rassemblent tous les rayons en un point). Ces courbes vainement cherchées par Kepler, il les trouva dans l'hyperbole et l'ellipse, en s'aidant de cette supposition que les vitesses de la lumière dans l'un et dans l'autre milieu, devaient avoir entre elles un certain rapport. Il fallait connaître ce rapport pour déterminer celui du grand axe à l'excentricité de la courbe; donc, pour construire ses lentilles, Descartes devait savoir mesurer l'indice de réfraction du verre. Or il n'y a aucun doute qu'il ait construit une lentille de ce genre en 1628, avec l'aide du mécanicien Ferrier. Ce dernier, fort habile homme, mais évidemment faible en théorie, fort embarrassé quand Descartes, en 1629, se rendit en Hollande, eut à lui demander des éclaircissements. Descartes les lui fournit, en lui expliquant entre autres choses une méthode pour déterminer l'indice de réfraction. La tournure de sa lettre suffirait à prouver qu'il ne s'agit là nullement d'une chose qu'il a apprise en Hollande, mais bien d'une application de principes possédés depuis longtemps. L'auteur croit que l'année 1627 peut être regardée comme la date la plus rapprochée de nous de la découverte de Descartes; à en juger par une lettre à Beckmann, cette date pourrait être reculée jusqu'en 1617-1619. Pour Snell, il existe bien une assertion du P. Reis, qui assigne à sa découverte la date de 1620. Mais c'est chose impossible à prouver. Il est extrêmement probable qu'il n'a guère trouvé sa loi qu'en 1627 ou 1628.

Ces observations répondent en même temps au second chef d'accusation. Lors du second séjour de Descartes en Hollande, Hortensius (qui d'ailleurs n'a jamais été élève de Snell) n'avait que seize ou dix-sept ans. Il ne devint professeur, à Amsterdam, qu'en 1634. Or, à cette date, Descartes était déjà depuis longtemps en possession de sa loi.

La troisième assertion des adversaires de Descartes vise son caractère. L'auteur reprend une à une les allégations les plus graves qu'on a lancées contre lui. Il n'en trouve aucune qui soit vraiment fondée. Descartes aimait profondément la vérité et était entièrement incapable d'une bassesse. Sa conduite dans l'affaire de Beckmann est un témoignage des principes qui le guidaient en pareille occasion.

L'absence d'une expérience ne prouve rien non plus. Snell était parvenu à sa loi par l'induction; mais Descartes avait procédé tout à fait différemment. Il avait commencé par étudier les propriétés des sections coniques; il avait vu que l'ellipse et l'hyperbole rassemblent dans leur foyer tous les rayons parallèles à leur axe. Il avait remarqué que ce fait devait encore avoir lieu si les vitesses de la lumière dans les deux milieux, tout en étant différentes, avaient entre elles un certain rapport. De cette idée à la vérification il n'y avait qu'un pas. Et quelle pouvait être cette vérification? Évidemment la construction d'une lentille elliptique ou hyperbolique. L'essai réussit; la lentille rassemblait en effet tous les rayons. Il n'avait pas dû faire, comme Snell, d'innombrables observations.

Enfin est-il possible de supposer, comme l'a fait Huygens, que Descartes avait vu le manuscrit de Snell. Il donne une preuve beaucoup plus compliquée que celle du savant hollandais. D'ailleurs, en l'examinant de près, l'auteur ne trouve pas que cette preuve soit si embrouillée qu'on l'a prétendu. Leibnitz n'a pas tenu suffisamment compte des nombreuses découvertes qu'on avait faites depuis Descartes, surtout sur la décomposition des forces.

Année 1883.

Curtze (Maximilien). — Sur un manuscrit de la Bibliothèque de Dresde. (1-14).

Ce manuscrit, qui, dans le Catalogue de M. Schnorr von Carolsfeld, porte la signature D. *b*. 86, date du commencement du XIV^e siècle; il a appartenu à Valentin Thaw, dont la veuve l'a vendu. Il contient, d'après M. Curtze, 38 Traités au lieu de 24 signalés par l'index; M. Schnorr en indique 26. Ces Traités sont tous mathématiques; plusieurs sont d'une très grande importance. En voici l'inventaire :

Il y a cinq Traités ou fragments d'Euclide. Celui que M. Curtze désigne par le n° 2 est la *Géométrie* traduite par Adelard de Bath. Cette version est identique avec celle dont M. Weissenborn a parlé dans un numéro précédent du recueil; elle s'éloigne beaucoup plus de l'original que celle publiée par Campano. Le n° 5 contient une version latine de l'*Optique*, faite directement sur la version grecque que nous connaissons par l'édition de Heiberg et que le savant danois croit être le texte primitif. Le compilateur du manuscrit de Dresde connaît les traductions faites sur l'arabe; il en cite des extraits. La *Catoptrique* d'Euclide, que nous trouvons dans le n° 6, est remarquable en ce que la figure du VI^e théorème s'y accorde pleinement avec celle qu'a restituée M. Heiberg. Le n° 26 contient les *Données*. Les n^{os} 8 et 17 sont identiques; ils présentent le fragment bien connu du livre *de Gravi et Levi* d'Euclide. Un autre fragment du même Traité inconnu jusqu'ici serait présenté, d'après M. Curtze, par le n° 37. Cet écrit est intitulé par Thaw *de Insidentibus aquæ;* les trois derniers théorèmes de ce fragment montrent une concordance parfaite avec trois théorèmes du premier fragment. Une remarque de la main de Thaw, qui se trouve sous le titre, prouve qu'il y avait à Cologne à la fin du XVI^e siècle un exemplaire du Traité d'Archimède sur la même matière. Il n'est donc pas impossible que cet écrit précieux soit retrouvé un jour. D'après M. Curtze ce ne serait pas l'original, mais une vieille traduction latine, la même dont s'est servi Tartaglia, d'après M. Heiberg.

Le n° 12 est la *mesure du cercle* d'Archimède, traduction faite de l'arabe, ce qui est prouvé par la forme « Archimenides ». Dans le n° 22, nous trouvons un commentaire sur quelques théorèmes du livre *de la Sphère et du Cylindre.* Le commentateur se nomme ici Joannes de Tlñ; un manuscrit florentin le nomme Joannes de Thiss. Ce Traité a été publié par M. Heiberg dans le troisième Volume de son édition d'Archimède comme provenant d'un anonyme. Le n° 39, portant le titre *Liber de speculis comburentibus,* avait été attribué a Archimède par M. Schnorr. D'après M. Curtze, il appartiendrait à un certain *Tideus filius Theódori.*

Une partie notable du manuscrit est occupée par les écrits de Jordan. Il y a là d'abord, sous le n° 3, un Traité *de Triangulis,* entièrement inédit, que M. Curtze se propose de publier le plus tôt possible. Il est divisé en quatre Livres. Dans le quatrième on trouve deux problèmes identiques à ceux du *Liber trium fratrum.* Le premier de ces problèmes traite de la trisection de l'angle; il est résolu à l'aide de la conchoïde; le second est celui de la duplication du cube. Le n° 4 contient l'*Arithmétique* de Jordan. Le manuscrit prouve que Jean Le Fèvre d'Étaples a pris de grandes libertés en éditant cet Ouvrage. C'est ainsi que le manuscrit a trois *petitiones,* tandis que Le Fèvre en compte 6; 8 *communes animi conceptiones;* il y en a 20 chez Le Fèvre, etc. Le Traité *de Ponderibus* de Jordan, édité par Apianus en 1533, se trouve deux fois dans le manuscrit sous les n^{os} 21 et 35; c'est le n° 35 qui est le plus complet. De la plus grande importance est le n° 34. Nous y trouvons un exemplaire du Livre *de Numeris datis* de Jordan, qui vient très heureusement corriger l'édition donnée par M. Treutlein d'après un manuscrit de Bâle. Tout en rétablissant le vrai sens de quelques théorèmes, entièrement incompréhensibles dans l'édition de M. Treutlein, M. Curtze promet de revenir plus longuement sur ce sujet. Enfin le n° 31 contient un fragment intitulé : *Liber qui dicitur demonstracio Jordani de forma spere in plano.*

Parmi les autres écrits du manuscrit, en grande partie anonymes, nous mentionnerons encore trois Traîtés de Théodose *de Speris, de Locis habitabilibus* et *de plana sphaera lana* (n^{os} 7, 23, 29); un Traité publié par M. Hultsch dans le troisième Volume de son édition de Pappus comme provenant d'un anonyme et qui contient sept théorèmes sur des figures isopérimétriques (n° 16), et enfin deux théorèmes d'un certain Cratilius, inconnu d'ailleurs, dont le second surtout est intéressant; il donne de la formule de l'aire du triangle par les trois côtés une démonstration dont rien jusqu'ici n'avait pu faire soupçonner l'existence au moyen âge.

Teige (Joseph). — Biographie de maître Jean de Praga. (41-44).

Le vrai nom de ce mathématicien est Schindel, cependant il se faisait appeler indifféremment Szindelius ou Syndelius; il est plus connu sous le nom de Joannes de Praga, qui lui est commun toutefois avec plusieurs de ses contemporains. Il est né à Königsgrätz, en Bohême, en 1370 ou 1375. Il fit ses études à l'université de Prague, où il semble avoir professé en 1399. Nous le retrouvons, en 1406, directeur de l'école de Saint-Nicolas. A partir de cette année et jusqu'en 1409, il enseigna avec beaucoup de succès l'Astronomie et les Mathématiques à l'Université de Vienne. En 1410, il revint à Prague, où il fut élu recteur de l'Université; comme tel il s'opposa à la destruction des œuvres de Wiklef, demandée par l'archevêque Zbynek. Dès lors, Schindel semble être resté à Prague en qualité de *lector ordinarius.* Toutes les données que nous avons sur les années suivantes de sa vie sont malheureusement obscurcies par la confusion des noms. D'après M. Balbin, Schindel aurait été aussi médecin et historien; il aurait légué 200 manuscrits au Grand Collège. Il est mort vers 1450.

Weissenborn (H.). — Remarques sur les valeurs approchées d'Archimède pour les racines carrées irrationnelles. (81-99).

Théon de Smyrne (IIe siècle après J.-C.) forme une série de nombres qu'il appelle « nombres latéraux » (πλευραί) et « nombres diamétraux » (διαμέτροι). Si nous appelons le $n^{\text{ième}}$ nombre latéral a_n, et le $n^{\text{ième}}$ diamétral d_n, nous avons les équations suivantes :

$$a_{n+1} = a_n + d_n, \quad d_{n+1} = 2a_n + d_n.$$

En partant de 1 et 1 comme premiers nombres, nous aurons les valeurs

$$a_2 = 2, \quad d_2 = 3, \quad a_3 = 5, \quad d_3 = 7, \quad a_4 = 12, \quad d_4 = 17, \quad a_5 = 29, \quad d_5 = 41, \quad \ldots,$$

d'où l'on tire

$$d_n^2 = 2a_n^2 \pm 1,$$

formule établie par Théon sans démonstration; il est cependant très probable qu'il l'a connue. M. Weissenborn développe et explique la méthode proposée par M. Heilermann, qui se fonde précisément sur ce théorème de Théon. Les calculs refaits par M. Weissenborn montrent que les résultats s'adaptent bien aux nombres d'Archimède et de Héron. Quant à Gerbert, l'auteur renonce à trouver une explication de ses étranges valeurs de $\sqrt{3}$.

Heiberg (*L.*). — Sur le fragment mathématique de Bobbio. (121-129).

Le manuscrit L. 99 supp. de la Bibliothèque Ambrosienne provenant de Bobbio présente, à la suite du texte des Étymologies d'Isidore, quelques fragments d'un Ouvrage mathématique grec ; c'est à l'interprétation d'une des pages de ce manuscrit publiée par M. Belger, qu'est consacré ce travail. Le théorème démontré serait la convergence de tous les rayons parallèles à l'axe dans les miroirs paraboliques, propriété fondamentale dont on trouverait ici la première mention. Le texte grec est certainement original et il se place tout naturellement à la suite d'un fragment d'Anthemius précédemment édité : il est donc très probablement de ce géomètre.

Gelcich (*Eugen*). — Sur l'essai de détermination du diamètre de la Terre, par Marino Ghetaldi. (130-133).

Cet essai ne pouvait être susceptible d'aucune exactitude : il repose sur la dépression présentée par la surface de la mer observée d'un point très élevé.

Poske (*Fr.*). — L'éclaircissement de l'arc-en-ciel d'Aristote. (134-138).

La partie géométrique de ce passage obscur serait une démonstration un peu lourde de ce théorème : tous les points d'une sphère également distants d'un point donné de la sphère sont situés sur un cercle dont le centre est sur le diamètre de la sphère passant par le point donné. Quant à l'application de ce théorème au phénomène en question, elle présente des difficultés insurmontables : mais Aristote ne se serait-il pas contenté de vagues analogies?

Schoenborn (*W.*). — Sur la méthode par laquelle les anciens

Grecs (notamment Archimède et Héron) ont calculé les racines carrées. (169-179).

M. Schoenborn procède en comparant, dans des triangles de plus en plus petits, l'hypoténuse à l'un des côtés de l'angle droit. Les formules qui en ressortent sont un peu compliquées. Aussi M. Schoenborn pense-t-il que les anciens les ont appliquées pour ainsi dire inconsciemment, en s'aidant de constructions chaque fois répétées. Les valeurs obtenues par ce procédé s'accordent, il faut bien le dire, d'une façon assez complète avec les valeurs d'Archimède et de Héron. Ce n'est, il est vrai, que par quelque effort que l'on obtient pour la célèbre racine de 349450 le chiffre $591\frac{1}{8}$ au lieu de $591\frac{1}{7}$; mais pour la $\sqrt{3}$ nous avons comme troisième valeur $\frac{26}{15}$ et les deux valeurs d'Archimède $\frac{265}{153}$ et $\frac{1351}{780}$ sont en effet des valeurs qui se suivent immédiatement. Pour les racines de Héron, la théorie se vérifie aussi facilement. Dans un post-scriptum l'auteur s'occupe de Gerbert; ce serait à l'aide de la méthode qu'il propose que le mathématicien du moyen âge est arrivé à concevoir la valeur de $\frac{12}{7}$ pour la $\sqrt{3}$ comme plus exacte que celle de $\frac{26}{15}$.

Ce qui donne de la probabilité à l'hypothèse de M. Schoenborn, c'est que les anciens, d'après M. Cantor, sont arrivés à concevoir l'irrationnel à propos de l'hypoténuse du triangle rectangle.

Treutlein (P.). — Contribution à l'histoire de la Géométrie grecque. (209-227).

« Nous avons tous », dit l'auteur, « éprouvé une sorte d'étonnement, pour ne pas dire d'éblouissement, en voyant surgir le fameux théorème de Pythagore et sa démonstration telle qu'elle nous est apportée par Euclide. Or ce sentiment semble prouver que cette démonstration, si belle qu'elle soit, n'a rien de vraiment historique, et que c'est par une autre méthode qu'on a dû avoir connaissance de ce théorème ». Cette méthode, on l'a recherchée : MM. Röth, Günther, Cantor, Bretschneider ont émis différentes hypothèses à cet égard. C'est M. Cantor qui, le premier, a essayé de restituer les liens de ce théorème avec la Mathématique pythagoricienne, fondée, comme on sait, surtout sur les propriétés des nombres. D'après lui, les pythagoriciens auraient trouvé leurs théorèmes en faisant des essais sur les chiffres. C'est ici que nous voyons surgir la nouvelle hypothèse de M. Treutlein.

Il croit qu'on s'est servi de petites pièces en bois ou en pierre, rondes ou carrées, à l'aide desquelles on pouvait composer des triangles rectangles, des triangles équilatéraux, des rectangles ou des carrés; puis on aurait découpé différentes figures, par exemple : des carrés ayant les côtés 1, 2, 3, 4, ... Or, en composant un carré de 16 pièces et en l'agrandissant pour en faire un de 25, on devait bien s'apercevoir que la différence (le gnomon) était elle-même un carré, le carré de 3. En rapprochant les carrés de 3, 4 et 5, découpés en bois, on a dû voir qu'il se forme un triangle rectangle. Telle serait l'origine des trois nombres 3, 4, 5 pour le triangle de Pythagore et c'est en élargissant cette observation que le philosophe serait arrivé à généraliser son théorème.

Les mêmes carrés composés de petites pièces rondes pouvaient d'ailleurs, comme le montre l'auteur, servir à découvrir d'autres théorèmes; on les aurait employés par exemple pour établir la formule que Proclus attribue à Pythagore et qui servait à résoudre en nombres entiers les triangles rectangles. Voici la règle de Pythagore : « Un nombre impair étant pris comme le plus petit des côtés, le carré de ce nombre moins 1, divisé par 2, donne l'autre côté; celui-ci plus 1 donne l'hypoténuse ». Quelle est l'origine de cette règle? M. Arneth croit qu'elle est venue d'Orient; d'après M. Röth, elle serait bien grecque. De $b^2+c^2=a^2$ on aurait tiré

$$c^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

c'est-à-dire que $(a+b)$ et $(a-b)$ doivent être tous deux pairs ou tous deux impairs; et comme leur produit doit être un carré, ils auront la forme $\frac{\alpha^2}{\gamma}$ et $\frac{\beta^2}{\gamma}$, alors

$$a=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\gamma},\quad b=\frac{\alpha^2-\beta^2}{2\gamma}\quad \text{et}\quad c=\frac{\alpha\beta}{\gamma};$$

si l'on fait alors $\beta=\gamma=1$, on aura la règle de Pythagore

$$c=\alpha,\quad a=\frac{\alpha^2+1}{2},\quad b=\frac{\alpha^2-1}{2}.$$

Cette hypothèse a été acceptée par M. Cantor, avec une petite modification, qui devait la rendre un peu moins moderne et dès lors plus acceptable. Elle n'a cependant pas paru satisfaisante à Bretschneider qui en a proposé une autre. « Pythagore pouvait, nous dit Bretschneider, trouver cette règle d'une manière bien simple, s'il avait connaissance du théorème, d'après lequel la somme des nombres impairs consécutifs donne la série des nombres carrés. Il n'avait qu'à écrire sur une première ligne la série des nombres naturels, sur une deuxième la série de leurs carrés, sur une troisième les différences entre deux carrés consécutifs :

$$\begin{array}{l}
1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ \ldots,\\
1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ \ldots,\\
3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ 15,\ 17,\ 19,\ 21,\ 23,\ \ldots.
\end{array}$$

et la règle était évidente, s'il cherchait dans la série des différences les nombres qui sont eux-mêmes des carrés. »

D'après M. Günther, la chose se serait passée un peu autrement. En écrivant plusieurs fois la série des nombres carrés, par exemple :

$$\begin{array}{l}
1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ 169,\ 196,\ 225,\ \ldots,\\
\qquad 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ 169,\ \ldots,\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ \ldots.
\end{array}$$

et en faisant des essais d'addition, on aurait remarqué que $25+144=169$, $36+64=100$, ..., et l'on aurait augmenté le nombre de ces relations d'une manière tout empirique. Les hypothèses de MM. Brestchneider et Günther ont ceci de commun qu'elles supposent des essais faits sur de longues rangées de chiffres.

M. Treutlein, lui aussi, suppose une origine expérimentale à ces théorèmes; mais les essais auraient été faits avec les éléments en bois dont nous avons déjà parlé. Ayant reconnu au cas de 3, 4 et 5 que le *gnomon* est parfois lui-même un carré, Pythagore n'avait qu'à se demander si ce cas pouvait se répéter. C'était d'ailleurs évident, le gnomon prenant successivement la valeur de tous les chiffres impairs. Dans ce cas, un côté du triangle était la racine du gnomon, c'est-à-dire un nombre impair quelconque. Mais quels étaient alors l'hypoténuse et l'autre côté? On n'avait qu'à regarder la figure pour le voir. Le côté — 1 du gnomon (c'est-à-dire le carré du chiffre donné — 1 divisé par 2) était le grand côté et celui-ci + 1 donnait l'hypoténuse.

Nous trouvons dans Proclus encore une règle conduisant au même résultat, cette fois attribuée à Platon. « On prend un nombre pair pour l'un des côtés; si l'on élève sa moitié au carré et si l'on augmente le carré de 1, on aura l'hypoténuse; si l'on soustrait du carré 1, on aura l'autre côté. » Cette règle aurait la même origine, d'après M. Treutlein. On n'a en effet qu'à prendre un gnomon large de deux éléments au lieu de celui que nous avons considéré jusqu'ici pour la voir sortir par le même raisonnement.

Enfin la même manière de composer et de décomposer des figures avec des pièces de bois aurait été l'origine des théorèmes et problèmes contenus dans le IIe livre des *Éléments* d'Euclide. Cette partie du célèbre Ouvrage serait donc de beaucoup antérieure à Euclide et même à Hippocrate; elle serait presque « pythagoricienne », opinion d'ailleurs conforme à celle qui a été émise autrefois par Bretschneider.

Nous ne pouvons reproduire ici les déductions de M. Treutlein; d'ailleurs, faute de figures, nous parviendrions difficilement à les expliquer. Toutefois les hypothèses de l'auteur nous ont paru bien s'adapter aux démonstrations d'Euclide. Pour les IXe et Xe théorèmes, tout en reconnaissant que les énoncés apparaissent naturellement, M. Treutlein croit que les démonstrations d'Euclide ne sont pas les premières trouvées et il s'est efforcé de reconstruire ces dernières d'une manière plus conforme aux autres et en partant de sa théorie.

Nous avons insisté un peu sur ce travail, parce que nous n'y voyons pas seulement un intérêt historique, mais aussi un intérêt pédagogique; il y aurait dans ces petits morceaux de bois un moyen facile d'apprendre aux enfants d'une manière récréative nombre de propositions arithmétiques importantes. L'observation joue d'ailleurs dans les découvertes mathématiques un rôle considérable.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

Tome XIX; 1882.

Voss (*L.*). — Sur une nouvelle méthode de représentation des surfaces courbes. (1-26).

Par une transformation quelconque, le carré de l'élément de longueur $ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2$ devient $e'\,du'^2 + 2f'\,du'\,dv' + g'\,dv'^2$, et l'on peut supposer que la transformation soit telle que les fonctions e' et g' soient des fonctions choisies une fois pour toutes, en sorte que la fonction f' caractérise les surfaces individuelles; de cette façon, la mesure des longueurs le long des courbes u et v est la même pour toutes les surfaces. Qu'on imagine maintenant, sur une surface quelconque, le réseau des courbes $u=$ const., $v=$ const., dessiné au moyen de fils flexibles et inextensibles, ces fils étant noués aux points de croisement; ce réseau pourra être appliqué, au moins en partie, sur une autre surface quelconque. On peut ainsi *représenter* (*abbilden*) cette surface sur une surface déterminée, par exemple sur un plan, et la déformation qui permet de passer d'une surface à l'autre jouit de cette propriété que les longueurs sont conservées dans deux directions déterminées. M. Voss s'occupe principalement du cas où l'on a $e=g=1$; les courbes $u=$ const., $v=$ const. forment alors un réseau de courbes équidistantes; il traite des propriétés générales d'un tel réseau sur une surface quelconque, et plus particulièrement sur une surface à courbure constante; sur les surfaces à courbure négative constante, les lignes asymptotiques constituent un pareil réseau; on en obtient encore immédiatement un sur les surfaces engendrées par la translation d'une ligne courbe qui s'appuie constamment sur une autre ligne courbe. Le problème qui consiste à trouver sur une surface donnée tous les systèmes de courbes équidistantes dépend d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, pour laquelle l'Auteur donne des intégrales particulières.

Markoff (*A.*). — Sur une question de Jean Bernoulli. (27-35).

« Cette question est la suivante : Pour les quantités réelles a et b données, on demande de former la suite de nombres entiers

$$F(b),\ F(a+b),\ F(2a+b),\ F(3a+b),\ \ldots,$$

respectivement les plus approchés de

$$b,\ a+b,\ 2a+b,\ 3a+b,\ \ldots;$$

Jean Bernoulli remarque que, dans le cas où a est un nombre rationnel, la suite des différences

$$F(a+b)-F(b),\ F(2a+b)-F(a+b),\ F(3a+b)-F(2a+b),\ \ldots$$

est périodique et donne des règles très remarquables pour composer la période de cette suite. Si a est irrationnel, cette suite ne peut être périodique. Cependant, même dans ce dernier cas, on peut parler de ses périodes, si seulement on s'arrête à un nombre limité de termes. Nous chercherons, pour les quantités réelles a et b et le nombre entier N, la période la plus courte du système de N termes

$$F(a+b)-F(a),\ F(2a+b)-F(a+b),\ \ldots,\ F(Na+b)-F[(N-1)a+b].$$

Le cas de $b=0$ a été discuté par moi en détail, et, pour le cas général, j'ai démontré un théorème que je considère comme fondamental. »

Brunel (*G.*). — Sur les propriétés métriques des courbes gauches dans un espace linéaire à n dimensions. (37-55).

Hurwitz (A.). — Sur l'application des fonctions elliptiques à un problème de Géométrie. (56-66).

L'auteur considère les équations entre λ_1, λ_2 de la forme

$$A_1\lambda_2^2 + 2B_1\lambda_2 + C_1 = A_2\lambda_1^2 + 2B_2\lambda_1 + C_2 = 0,$$

où A_i, B_i, C_i sont des fonctions entières et du second degré de λ_i; une telle équation peut être regardée comme traduisant une relation deux fois bivoque entre deux multiplicités rationnelles à une dimension et se présente dans des problèmes qui peuvent être traités à l'aide des fonctions elliptiques; il établit la proposition fondamentale que voici : Soient deux multiplicités rationnelles à une dimension liées entre elles par une relation algébrique deux fois bivoque; par un choix convenable de paramètres, on peut faire en sorte que, à un élément $\lambda_1 = \operatorname{sn} u$ d'une multiplicité, correspondent les éléments $\lambda_2' = \operatorname{sn}(u + C)$, $\lambda_2'' = \operatorname{sn}(u - C)$ de l'autre multiplicité. C désigne une constante qui dépend de la relation; les paramètres doivent être tels que les éléments doubles, dans chacune des multiplicités, soient déterminés par les valeurs suivantes du paramètre : $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$. La fécondité de ce principe et de sa réciproque est mise en évidence par des exemples intéressants et nouveaux.

Hurwitz (A.). — Sur la transformation des fonctions elliptiques. (67-71).

Preuve de ce théorème : Si l'on considère le module k d'une intégrale elliptique de première espèce comme fonction du rapport ω des périodes, il ne peut y avoir de relation algébrique entre deux fonctions moléculaires $k(\omega)$, $k(\omega_1)$ que s'il y a entre ω_1, ω_2 une relation bilinéaire à coefficients entiers, avec un déterminant positif.

Enneper. — Sur la théorie des courbes à double courbure. (72-83).

M. Bertrand a montré que, pour une hélice tracée sur un cylindre quelconque, le rapport des courbures est constant; M. Enneper généralise cette proposition; il établit une relation entre les courbures d'une ligne géodésique tracée sur une surface développable, dont l'arête de rebroussement jouit de certaines propriétés. Il résout aussi cette question : Quelle courbe peut être en même temps hélice sur un cône et sur un cylindre?

Appell. — Sur une classe de fonctions analogues aux fonctions eulériennes. (84-102).

« En généralisant la série hypergéométrique de Gauss, M. Heine a découvert des fonctions nouvelles qui ont, avec les fonctions Θ, les mêmes rapports que les intégrales eulériennes avec la fonction *sinus*. Les fonctions de Heine sont formées avec la moitié des facteurs qui constituent les fonctions Θ, de même que la fonction $\Gamma(x)$ est formée avec la moitié des facteurs qui constituent la fonction $\sin\pi x$. On a ainsi une double série de fonctions : d'un côté, les fonctions simplement périodiques et les fonctions doublement périodiques, et de l'autre les fonctions eulériennes et les fonctions O et Φ de M. Heine. Mais, tandis qu'il n'existe pas de fonctions uniformes de plus de deux périodes, il existe des fonctions qui sont semblables à la fonction eulérienne Γ et à la fonction O de M. Heine, et qui sont formées à l'aide de plusieurs quantités imaginaires ω, ω_1, ..., ω_n, comme la fonction O est formée avec deux quantités ω, ω_1.

» Dans le présent Mémoire, je m'occupe d'abord de l'étude des principales propriétés de ces fonctions, puis j'applique les plus simples d'entre elles à différents problèmes du calcul fonctionnel et à l'évaluation de la limite de certaines séries et de certains produits infinis.

» Quelques-uns des résultats exposés dans ce Mémoire ont fait l'objet de trois Notes présentées à l'Académie des Sciences et insérées dans les *Comptes rendus*, t. LXXXVI, p. 953; t. LXXXIX, p. 841 et 1031. »

Krause. — Les équations modulaires des fonctions hyperelliptiques du premier ordre pour la transformation du troisième degré. (103-109).

Simony. — Sur une suite de faits nouveaux dans le domaine de la Topologie. (110-130).

Ces recherches concernent les figures obtenues au moyen de surfaces en forme de croix, dont on réunit les extrémités deux par deux et sur lesquelles on pratique certaines coupures qui reviennent sur elles-mêmes; l'auteur classe les nœuds et les entrelacements auxquels on parvient ainsi.

Hers. — Sur le gyroscope. (121-154).

En suivant la voie ouverte par Poinsot pour représenter géométriquement le mouvement d'un corps solide autour de son centre de gravité, l'auteur traite du mouvement d'un solide de révolution pesant, sur lequel n'agit aucune percussion oblique, et qui tourne autour d'un point de son axe; il développe les formules analytiques et en expose clairement la signification géométrique.

Pasch. — Sur l'inversion des intégrales elliptiques. (155-158).

Klein (F.). — Sur la représentation conforme des surfaces. (159-160).

L'auteur montre comment on peut classer parmi les surfaces dites *symétriques* les surfaces limitées par un contour et les surfaces doubles.

Veronese (G.). — Des relations projectives entre les espaces de diverses dimensions étudiées au moyen des principes de projection et d'intersection. (161-234).

Ce Mémoire contient les fondements de la Géométrie projective de l'espace à *n* dimensions; il conduit aussi à des méthodes pour la Géométrie du plan de l'espace ordinaire considéré comme les projections d'espaces à un plus grand nombre de dimensions.

Harnack (A.). — Simplification des démonstrations dans la théorie des séries de Fourier. (255-279).

Harnack. — Correction au Mémoire précédent. (524-528).

Voir le *Bulletin*, t. VI, 2e série.

Christoffel (E.-B.). — Remarque sur la théorie des invariants. (280-290).

Béla (Tötössy). — Sur les surfaces du quatrième ordre à conique cuspidale. (291-322).

Lindemann. — Développement des fonctions d'une variable complexe en séries procédant suivant les fonctions de Lamé ou suivant les fonctions subordonnées aux fonctions sphériques. (323-386).

§ I. *Des fonctions de Lamé de première et de seconde espèce.*

§ II. *Un problème de représentation.* — Au moyen des fonctions de Lamé du second ordre, le faisceau de droites passant par l'origine et le faisceau de cercles concentriques à l'origine se changent en un système de courbes du quatrième ordre qui, pour les développements suivant les fonctions de Lamé, jouent le rôle des ellipses homofocales dans les développements suivant les fonctions sphériques. Ces courbes ont la plus grande analogie avec les ovales de Cassini, sans toutefois être identiques avec elles; elles se divisent en deux classes : les courbes de la première classe sont formées d'un seul trait; celles de la seconde classe sont composées de deux ovales.

§ III. *Les fonctions de seconde espèce et de première classe, en tant que fonctions d'une variable complexe.*

§ IV. *Valeurs asymptotiques des fonctions pour des valeurs infinies de n.*

§ V. *Développement de* $(z_1 - z)^{-1}$ *suivant les fonctions de Lamé.*

§ VI. *Développement d'une fonction à argument complexe suivant les fonctions de Lamé.* — On voit dans ce paragraphe le rôle essentiel joué par les courbes de quatrième ordre dont on a parlé plus haut : il y a lieu de distinguer plusieurs cas, suivant que le domaine de convergence se compose d'une aire simplement connexe, d'une aire doublement connexe (anneau), d'une aire triplement connexe (limitée par une courbe et deux ovales situés à l'intérieur de cette courbe).

§ VII. *Développements de zéro.* — Il est bien remarquable qu'on puisse développer zéro, d'une infinité de façons, en séries, en procédant suivant les fonctions de première espèce ou de seconde espèce; pour ces dernières fonctions, il n'y a qu'une classe de développements; il y en a trois pour les fonctions de première espèce : le développement peut être valable dans tout le plan, ou à l'intérieur d'une courbe du quatrième degré en forme de lemniscate, ou encore à l'intérieur d'un ovale du système précédemment décrit.

§ VII. Ce paragraphe concerne un cas limite, dans lequel les fonctions de Lamé deviennent des fonctions sphériques.

Bäcklund (*A.*). — Sur la théorie des transformations de surfaces. (387-422.)

Il s'agit, dans ce travail, des transformations qui dépendent de quatre équations entre x, y, z, p, q et x', y', z', p', q', équations dont deux ont la forme $x = x'$, $y = y'$; l'auteur applique la théorie qu'il a développée à la déduction de surfaces à courbure constante d'une surface donnée de cette nature.

Krause. — Sur les équations modulaires des fonctions hyperelliptiques du premier ordre. (423-428; 489-496).

Schur. — Sur une position particulière de deux tétraèdres. (429-432).

Nagel (*K.*). — Détermination des points doubles d'une courbe rationnelle du quatrième ordre. (533-434.)

Jürgens. — L'intégrale $\int_\alpha^\beta \frac{y\,dz}{x-z}$ et les équations différentielles linéaires. (435-460).

Voici le théorème général qui est la base des recherches de l'auteur :
« Si, dans l'équation différentielle

$$\varphi(x)y + \varphi_1(x)\frac{dy}{dx} + \ldots + \varphi_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} = 0,$$

où les fonctions φ sont des fonctions entières, on substitue à la place de y l'expression $\int_\alpha^\beta \frac{y\,dz}{x-z}$, où y est une intégrale de l'équation différentielle

$$\varphi(z)y + \varphi(z)\frac{dy}{dz} + \ldots + \varphi_n(z)\frac{d^n y}{dz^n} = 0,$$

le résultat est une fonction rationnelle de x ». M. Jürgens cherche sous quelles conditions ce résultat se réduit à zéro ou à une fraction simple $\frac{1}{x-a}$; il donne ensuite les équations différentielles linéaires (telles que celle qui est vérifiée par les fonctions sphériques) pour lesquelles ce procédé permet de déduire une seconde intégrale d'une première; enfin il indique, pour une classe étendue d'équations différentielles linéaires, un procédé facile d'intégration quand le second membre est une fonction rationnelle de x.

Sturm (*R.*). — Sur la transformation réciproque et sur certaines transformations qui lui sont intimement liées. (461-488).

Sturm (*R.*). — Sur l'espèce des courbes et des cônes. (489-490).

Krey. — Sur un système d'équations avec certaines particularités. (497-516).

Lindemann. — Sur la façon de se comporter des séries de Fourier aux points de discontinuité. (517-523).

Gordan (*P.*). — Sur les faisceaux de coniques. (529-552).

Ce Mémoire se relie aux précédents travaux de l'auteur sur la théorie des équations du septième degré avec un groupe de 168 substitutions; il contient d'abord la théorie de deux formes quadratriques ternaires. Dans la première Section, l'auteur traite du système complet des formes correspondantes et développe une suite de relations entre ces dernières. Dans la seconde Section, il s'occupe de la représentation canonique connue (*irrationale Typik*) qui est rendue possible par l'existence du triangle conjugué par rapport aux deux coniques. Deux formes quadratiques ternaires n'ont pas de covariant rationnel linéaire; mais, si l'on veut leur donner une représentation rationnelle typique, il faut leur adjoindre une forme linéaire; cette représentation est effectuée en particulier dans le cas où la forme linéaire est donnée comme un covariant simultané des deux coniques et d'une troisième conique ou d'une courbe du quatrième ordre; la représentation typique de ces courbes est alors ramenée aux figures les plus simples possibles.

Poincaré. — Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires. (552-564).

Ce travail contient le résumé des résultats auxquels l'auteur est parvenu dans la théorie de ces fonctions; il classe les substitutions linéaires et, sur cette base, il fait reposer la classification et la représentation analytique des fonctions elles-mêmes; il montre aussi l'application qu'on peut faire de ces fonctions à l'expression des coordonnées d'une courbe algébrique quelconque et des intégrales d'une équation différentielle linéaire quelconque à coefficients algébriques.

Klein (*E.*). — Sur les fonctions uniformes à transformations linéaires. (565-568).

Le point essentiel de cette Note consiste dans la discussion de ce théorème: A toute surface de Riemann d'espèce quelconque répond une fonction η et une seule qui se reproduit par une substitution linéaire et qui permet de représenter ladite surface sur une portion de surface $2p$ fois connexe, et ne présentant en tout point qu'un seul feuillet. L'auteur donne en même temps une méthode qui permet de former indépendamment toutes les équations qui répondent à un nombre p donné.

Picard. — Sur un théorème relatif aux surfaces pour lesquelles

les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions abéliennes de deux paramètres. (569-577).

L'objet de ce Mémoire est de montrer que le genre d'une surface n'ayant d'autre singularité que des courbes doubles avec deux plans tangents distincts pour tous les points est au plus égal à l'unité.

Leonhardt. — Propriétés intégrales des fonctions coniques adjointes. (570-587).

Cantor (*G.*). — Sur un principe de condensation des singularités des fonctions, nouveau et général. (588-594).

Le principe introduit par Hankel et par lequel on peut construire une fonction qui présente en une infinité de points une singularité déterminée peut être simplifié et amélioré, comme il résulte d'une Communication de M. Weierstrass, en se servant de la notion d'une *multiplicité énumérable* (abzählsam Menge). Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\nu$ une telle multiplicité (par exemple l'ensemble des nombres rationnels convenablement ordonnés), et soit $\varphi(x)$ une fonction qui, pour $x=0$, présente une singularité déterminée. La série

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} C_\nu \varphi(x-\omega_\nu),$$

en choisissant convenablement les coefficients, représentera une fonction qui admettra, pour chaque valeur $x=\omega$, la singularité considérée. M. Cantor développe deux exemples que lui a communiqués M. Weierstrass; en posant

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{x},$$

on obtient une infinité de fonctions finies et continues qui, pour toutes les valeurs $x=\omega_\nu$ admettent un quotient différentiel infini; en posant

$$\varphi(x) = x - \tfrac{1}{2}x\sin\left(\tfrac{1}{2}\log x^2\right),$$

on obtient une fonction qui, pour toutes les valeurs $x=\omega_\nu$, admet un quotient différentiel fini et indéterminé.

A. H.

BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. BONCOMPAGNI.

Tome XV; 1882.

Favaro (*Antonio*). — Sur la vie et les œuvres de Bartholomeo Sovero. (1-48).

Professeur de Mathématiques à l'Université de Padoue, Sovero avait succédé à Gloriosi, lui-même successeur immédiat de Galilée. Tenu en grande estime par beaucoup de ses contemporains, il serait tombé depuis dans un oubli complet, que l'auteur croit immérité. Quoi qu'il en soit, M. Favaro est parvenu à compléter en plusieurs points la biographie de son héros par l'évêque Tomasini et à élucider à peu près tous les détails obscurs.

Bartholomée Soverus ou Sovero naquit vers 1577, à Corbières, dans le canton de Fribourg, d'une famille dont le nom original paraît être Souvey. Il fit ses études au Collegio Elvetico que le cardinal Charles Borromée venait d'instituer à Milan et dans un Collège de Fribourg tenu par les pères jésuites. En 1616, il se fixa à Turin, où il eut bientôt une place à l'Université; il paraît qu'il y a enseigné les langues orientales (hébreu, chaldéen, syriaque et grec). En 1624, l'Université de Turin déclinant de plus en plus à cause des guerres continuelles auxquelles la Savoie était mêlée, Sovero quitta Turin et vint à Rome; au cours de l'année il fut nommé professeur de Mathématiques à Padoue, chaire qu'il occupa jusqu'à sa mort, survenue le 20 juillet 1629.

Sovero a laissé un Ouvrage achevé qui fut publié un an après sa mort sous le titre : *Curvi ac recti proportio.* M. Favaro nous en donne un aperçu. Il lui semble que Sovero a fait un pas vers le Calcul intégral. Kästner, dans sa *Geschichte der Mathematik,* est moins favorable. C'est cependant de ce livre que Paul Guldin accusa Cavalieri d'avoir tiré les principes fondamentaux de sa Géométrie des indivisibles. Cavalieri riposta et la discussion se prolongea longtemps. Nous avons maintenant des données suffisantes pour résoudre la question. Non seulement Cavalieri avait montré son travail en 1629 à plusieurs mathématiciens bolonais, mais dès 1626 il avait indiqué, dans ses lettres à Galilée, les traits principaux de son calcul.

Henry (Charles). — Sur les deux plus anciens Traités français d'Algorisme et de Géométrie : Traité d'Algorisme; Traité de Géométrie. (49-70).

Notre système de numération, dont l'existence a été signalée pour la première fois dans la Géométrie de Boèce par Chasles, se retrouve ensuite au x^e siècle dans de nombreux Ouvrages, le Traité *de Arte numerandi* de Sacrobosco, la poésie *de Algorismo* d'Alexandre de Villedieu, les écrits de Léonard de Pise, le *Grand calcul suivant les Indiens* de Planude. Il reste encore plusieurs Ouvrages inédits dans lesquels on a remarqué ce système et quelques-uns sont réputés perdus. De ce nombre était un Algorisme écrit en français par un anonyme sous Philippe le Hardi, vers 1275, que Chasles avait inutilement recherché à Sainte-Geneviève. M. Charles Henry l'a retrouvé et le publie avec notice et glossaire en même temps qu'un Traité de Géométrie; ces deux Traités, les plus anciens textes mathématiques français que l'on connaisse, proviennent sans doute du même auteur. L'Algorisme débute par l'indication des neuf chiffres écrits de droite à gauche à la manière arabe; la valeur de position est exposée, puis la distinction des *digiti, articuli, compositi,* conformément à Boèce; suivent l'indication des opérations de l'Arithmétique, les principales règles très rapidement exposées, enfin l'extraction de la racine cubique. La Géométrie comprend la mesure de quelques surfaces et de quelques volumes et se termine par des problèmes de conversions monétaires et des calculs numériques.

Narducci (E.). — Sur deux Traités inédits d'Abacus contenus

dans deux manuscrits vaticans du XII^e siècle; deux Traités d'Abacus. (111-162).

Le premier de ces Traités, intitulé par l'éditeur : « TURCHILL, *Règles sur l'Abacus* », commence par ces mots : « *Socio suo Simoni de Rotol... Turchillus compotista salutem* ». Ce Simon de Rotol... que l'inventaire des manuscrits du Vatican appelle Simon de Rotolis, n'est mentionné par aucun historien. M. Narducci pense qu'il faut lire : « *Simoni de Rotolandia* », c'est-à-dire de Rutland, en Angleterre : il nous montre que le nom Turchill est d'origine danoise et que l'auteur devait vivre dans la première moitié du XII^e siècle : on lit en effet dans un passage de ce Traité : « *ut ait Hugo de Bocholandia* », lequel est sans doute le même que le Hugo de Buckland, un des favoris de Henri I^{er} d'Angleterre.

Le second Traité est anonyme : il est mentionné ainsi dans l'inventaire : « *Tabula Abaci seu Pythagorica mensa* » ; mais l'intéressante publication de M. Narducci servira sans doute à en faire découvrir l'auteur.

Perott (Joseph). — Sur une Arithmétique espagnole du XVI^e siècle. (163-169).

Il s'agit d'une Arithmétique de Juan de Ortega, de l'ordre des frères prêcheurs, dont il y a eu sept éditions de 1512 à 1552. Dans l'édition italienne de 1515, on trouve quelques extractions de racine carrée obtenues par la formule

$$\sqrt{a} = \mathrm{E}(\sqrt{a}) - \frac{a-(\mathrm{E}\sqrt{a})^2}{2\mathrm{E}(\sqrt{a})+1},$$

méthode identique à celle d'Alkarkhi. Quoi qu'il en soit, dans l'édition de 1542, on trouve une partie des racines seulement traitées de cette façon; une autre partie (douze racines d'après M. Perott) a été obtenue par la résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^2 - \mathrm{D}y^2 = 1.$$

La concordance parfaite des valeurs de Juan d'Ortega avec les solutions de l'équation ne peut laisser aucun doute à cet égard. Il n'y a qu'une treizième valeur dont le procédé de calcul ne paraît pas absolument identique. Ortega pose

$$\sqrt{2000} = 44\,\frac{2079}{2582};$$

mais ici encore M. Perott croit que nous sommes en présence de la réduite $44\,\frac{1719}{2383}$, aux fautes d'impression près.

Steinschneider (Maurice). — Supplément à la Notice des Tables astronomiques attribuées à Pierre III d'Aragon. (170-174).

Dans une Notice sur les Tables astronomiques attribuées à Pierre III d'Aragon, M. Maurice Steinschneider avait émis l'opinion que le roi Pierre, nommé dans la préface des Tables, était Pierre IV d'Aragon, c'est-à-dire Pierre III de

Catalogne, qui régna de 1336 à 1387, et que Jacob Carzi était identique avec Jacob Carsono, qui vécut en ce temps. Cette hypothèse a été pleinement confirmée par un article de M. Andrew Balaguer y Merino, membre de l'Académie de Barcelone, qui prouva par trois documents que Dalmacius Planes traduisit par ordre de Pierre IV quelques œuvres d'Astrologie et qu'il reçut une récompense. Ce Dalmacius Planes est un personnage mentionné dans les Tables; la question se trouve donc tranchée. L'article de M. Balaguer étant inaccessible pour la plupart des lecteurs, M. Steinschneider le reproduit ainsi que les trois documents tirés des archives de la couronne d'Aragon et des archives d'un notaire de cette ville, Guillem de San Hilari. Le premier de ces documents contient l'ordre du roi à son conseiller et trésorier Raymond de Villanova de payer à Dalmacius 300 florins d'or d'Aragon pour une traduction : il est daté du 6 janvier 1367. Le second est une quittance de Dalmacius pour les 300 florins; elle porte la date du 24 janvier 1367. Ces deux documents sont en latin. Le troisième, du dernier décembre 1387, est en espagnol.

Günther (*Sigismond*). — La correspondance entre Gauss et Sophie Germain : traduction d'Alphonse Sparagna (174-180).

Récension de deux publications photolithographiques du prince Boncompagni publiée dans la *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XXVI, p. 19-25.

Bierens de Haan. — Bibliographie néerlandaise historico-scientifique des Ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux XVI^e^, XVII^e^ et XVIII^e^ siècles sur les Sciences mathématiques et physiques avec leurs applications (*suite*). (225-315), (355-440).

Riccardi (*Pietro*). — Récension de l'Ouvrage de Giacomo Manzoni intitulé : *Studi di bibliografia analitica; studio secondo*... Bologna, 1882. (441-447).

Boncompagni (*B.*). — Sur les actes de naissance et de mort de Pierre-Simon Laplace : Actes de naissance et de mort de Pierre-Simon Laplace. (447-465).

Le célèbre géomètre est né le 23 mars 1749 à Beaumont-en-Auge; il est décédé le 5 mars 1827.

Narducci (*E.*). — Sur un commentaire inédit de Rémi, d'Auxerre, au Satyricon de Martianus Capella et autres commentaires au même Satyricon. (505-580).

Ce travail se termine par un extrait de l'*Arithmétique* de M. Capella et le commentaire de Rémi, d'Auxerre, sur ce Livre, publiés d'après deux manuscrits du Vatican que l'auteur a découverts. Le manuscrit de M. Capella est très important : il a été constitué par un certain Hadoardus, évêque de Minden au IX^e^ siècle : l'auteur se propose d'y revenir. En attendant, il nous donne, sur divers commentaires, tous inédits et la plupart inconnus, des renseignements précieux.

Favaro (Antonio). — Les autographes de Galilée dans les archives Marsigli à Bologne. (581-593).

Ce sont des lettres adressées par le grand savant florentin au marquis César de Marsigli et à Cavalieri. Quelques-unes ont été publiées par Albéri, d'après des copies envoyées à Viviani par un membre de la famille Marsigli; d'autres ont été publiées par Predieri. Cette dernière publication a été faite contre le gré de la famille Marsigli, qui depuis veille sur ses archives avec une méfiance extrême. Aussi M. Favaro n'en a-t-il obtenu l'accès qu'avec les plus grandes difficultés et encore ne lui a-t-on pas permis de copier les documents ou de les lire, mais seulement de vérifier les dates. M. Favaro constate que, sur les vingt-quatre lettres, six seulement sont inédites; mais, comme les éditeurs précédents ont sans doute souvent manqué de l'exactitude nécessaire, il serait utile de publier toute la correspondance.

Genocchi (A.). — Sur quelques écrits touchant les déviations du pendule et l'expérience de Foucault. (631-637).

En 1669, le marquis Giovanni Poleni, en parlant d'un Mémoire de Huygens, ajoute que, vu le mouvement diurne de la Terre, le pendule ne pourrait pas rester pendant deux oscillations consécutives dans le même plan. En 1782, Poinsinet de Sivry, dans sa traduction de Pline, fait observer que l'on pourrait employer le pendule au lieu d'une boussole; « le vaisseau, en tournant sur lui-même, ne dérangerait pas pour cela cette déviation une fois donnée au pendule ». Après quelques aperçus sur les idées de Galilée et Huygens, l'auteur passe aux explications données à l'expérience de Foucault. Il nous fait remarquer qu'en 1837 Poisson, tout en admettant l'influence déviatoire du mouvement diurne de la Terre sur un projectile, nie la possibilité d'une déviation quelconque du pendule; pour soutenir son opinion, il cherche à prouver mathématiquement que la composante perpendiculaire au plan oscillatoire serait trop petite pour écarter sensiblement le pendule de son plan et avoir aucune influence appréciable sur son mouvement. Cette opinion de Poisson est réfutée en 1851 par Binet et par Plana. Dans la même année encore, Mossotti et Chelini s'occupent des formules relatives à l'expérience de Foucault; Schaar combat l'opinion que le phénomène puisse s'expliquer à l'aide de la Géométrie pure, sans l'intervention de la Dynamique. Parmi les travaux plus récents, mentionnons ceux publiés par Poncelet en 1860, qui établit que le phénomène est beaucoup plus compliqué qu'on ne l'avait cru généralement, et enfin ceux de W. Dumas et de Serret, qui s'efforcent de donner une théorie complète de l'expérience.

Henry (Charles). — Les connaissances mathématiques de Jacques Casanova de Seingalt. (637-670).

Il s'agit de quelques opuscules scientifiques, rarissimes ou inédits, du célèbre aventurier. L'auteur commence par résumer la biographie de ce singulier savant, la rectifiant et la complétant en plusieurs points. Il est bien certain, par exemple, que Casanova est né le 2 juillet 1725. M. Henry a retrouvé, dans les archives paroissiales de l'église Saint-Étienne, à Venise, son acte de baptême; mais la date de sa mort, donnée par MM. Brockhaus, Baschet et d'Ancona (4 juin 1798), n'est pas exacte, puisqu'il existe une lettre autographe de Casanova au comte de Waldstein datée du 18 février 1803. Ajoutons que cette lettre fait actuellement partie de la collection Morrisson, de Londres. M. Henry prouve que Casanova n'a très probablement pas été, comme il le dit, docteur en droit de l'Université de Padoue; toutefois plusieurs documents des Archives nationales viennent confirmer les *Mémoires* et ajouter de nouvelles preuves de vérité à toutes celles qu'a rassemblées la critique contemporaine.

Les trois écrits mathématiques de Casanova traitent du problème de la duplication du cube : le premier, intitulé *Solution du problème déliaque*, parut à Dresde en 1790; les deux autres ne sont que des corollaires publiés dans la même année. D'abord Casanova crut avoir donné une solution exacte du fameux problème; dans la suite, il reconnut la vérité; il ne pouvait en donner qu'une solution approchée. D'après l'énoncé du problème, le rapport du cube cherché au cube donné doit être 2; donc le rapport du côté du cube cherché au côté du cube donné doit être $\sqrt[3]{2}$. Pour Casanova, le rapport de ces deux côtés est égal à $\frac{364+94}{364} = 1,2582417$, qui, élevé au cube, donne $1,991414$, valeur assez éloignée de 2. La *Solution du problème déliaque* renferme des idées philosophiques remarquables. Il en est de même de l'*Essai de critique sur les mœurs, sur les sciences et sur les arts,* des *Rêveries sur la mesure moyenne de notre année,* deux manuscrits inédits communiqués à M. Henry. L'*Isocameron,* un roman de cinq Volumes, renferme, entre mille idées bizarres, une conception précise du télégraphe électrique (1787). L'auteur termine son étude par la promesse de revenir plus longuement sur toutes ces productions rarissimes et par la publication de quelques lettres inédites.

Boncompagni (B.). — Sur la vie et les travaux d'Antoine-Charles Marcelin Poullet-Delisle (670-679).

Il s'agit du traducteur des *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss, né le 17 janvier 1778 à Janville (Eure-et-Loir), mort le 23 août 1849.

Marre (Aristide). — Sur huit lettres inédites du P. Claude Jaquemet : Huit lettres inédites du P. Claude Jaquemet (679-698).

Communiquées à l'éditeur par le P. Ingold, bibliothécaire de l'Oratoire. La première est adressée au P. de Byzance, la sixième au marquis de l'Hospital, les autres au P. Reyneau, toutes sur l'Algèbre et l'Arithmétique.

C. H.

ACTA MATHEMATICA, Journal rédigé par G. MITTAG-LEFFLER. Stockholm.

Tome I; 1882.

Poincaré. — Théorie des groupes fuchsiens. (1-62).

Le Mémoire de M. Poincaré a été analysé dans la première Partie du *Bulletin.*

Malmsten. — Sur la théorie des rentes viagères. (63-76).

Solution de ce problème : Déterminer la valeur d'une pension annuelle de 1^{fr} assurée à un groupe donné de n personnes, tant que ν, au moins, d'entre elles restent en vie.

Gyldén (*H.*). — Une méthode d'approximation pour le problème des trois corps. (77-92).

Le problème des trois corps a fait, au fond, peu de progrès depuis Lagrange et Laplace. M. Gyldén, dans ce Mémoire, dit être depuis quelque temps en possession d'une méthode pour trouver une solution de ce problème qui, au moins dans l'application au système solaire, satisfasse aux deux conditions suivantes : que la suite des approximations soit convergente, que jamais le temps ni des arcs croissant indéfiniment avec le temps ne se rencontrent hors des signes de fonctions périodiques. Il ajoute, cependant, que si les excentricités des orbites étaient plus grandes, ou les actions mutuelles moins inégales, cette méthode deviendrait d'une application de plus en plus difficile. Il pense qu'il faut renoncer, pour le moment, à obtenir une solution absolue, c'est-à-dire satisfaisant dans tous les cas, et pour une période illimitée, aux deux conditions ci-dessus énoncées, et se contenter d'une solution applicable à un intervalle de temps limité.

M. Gyldén se borne, dans le présent Mémoire, à faire connaître quelques-uns des principes sur lesquels sa méthode est fondée.

« Il s'agit de déterminer certaines quantités par des équations différentielles, sans que dans les résultats la variable indépendante soit en facteur, quoiqu'elle s'y introduise ainsi, quand, dans une première approximation, on annule toutes les quantités qui sont multipliées par les secondes puissances des masses perturbatrices. Dans les équations différentielles dont l'intégration donnera des valeurs approchées des inconnues, on devra avant tout conserver certaines quantités du second ordre. La plupart des équations qui se succèdent dans notre recherche sont linéaires, du second ordre, et les fonctions connues qui entrent dans ces équations peuvent être, dans une certaine mesure, choisies arbitrairement. Soit

$$\frac{d^2y}{dx^2} + X_1 y = X_0 \tag{1}$$

une de ces équations. La fonction X_1 est connue et se compose de deux parties : l'une indépendante de la masse perturbatrice, l'autre s'annulant avec cette masse. La fonction X_0 peut aussi être regardée comme connue, dans une première approximation, car elle est de la forme

$$\Phi_0 + \Phi_2 y^2 + \Phi_3 y^3 + \ldots;$$

y est une quantité de premier ordre, de même que les fonctions Φ_0, Φ_2, ..., de sorte que, en réduisant X_0 à Φ_0, nous ne négligerons que des quantités du troisième ordre. Et, si nous ajoutons à cette suite un terme $\Phi_1 y$, alors Φ_1, qui n'est multiplié que par la première puissance de la masse perturbatrice, est tellement petit, pour d'autres motifs, que le produit $\Phi_1 y$ doit être regardé comme étant lui-même du troisième ordre.

» Comme la fonction Φ_1 est, en quelque sorte, détachée de X_1, on peut, dans une certaine mesure, choisir arbitrairement X_1. Je cherche à déterminer cette fonction de telle manière que l'intégrale de l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + X_1 y = 0$$

soit de la forme

$$y = C_1 P + C_2 (Q + lxP),$$

C_1 et C_2 étant des constantes d'intégration, P et Q des fonctions de x ne renfermant que des termes périodiques, l une constante qui restera à ma disposition. »

M. Gyldén remarque que Q et P ne peuvent être arbitraires, exprime Q en fonction de P, et montre que l'on peut disposer de l, de telle sorte que, P n'ayant que des termes périodiques, Q ait la même propriété. Il donne ensuite l'intégrale de l'équation (1)

$$y = C_1 P + C_2 (Q + lxP) - P\int X_0 Q\, dx + Q\int X_0 P\, dx + lP\int dx \int X_0 P\, dx.$$

L'examen de cette formule montre pourquoi on choisit les diverses formes employées.

S'il y a dans $X_0 Q$ ou dans $\int X_0 P\, dx$ un terme constant, le résultat renfermera un terme de $\gamma x P$. On fera disparaître ce terme en choisissant convenablement C_2, et cela sera toujours possible dans l'application au problème des trois corps.

Le produit $X_0 P$ ne renferme pas de terme constant, ou, s'il en renferme un, ce terme est d'ordre élevé et n'intervient pas dans la première approximation.

Donc $y = C_1 P + C_2 Q +$ des termes périodiques.

Si l'on calcule ensuite $X_0 P$ en conservant les termes du troisième ordre, on peut déterminer C_1 de manière à faire disparaître le terme constant; cela est toujours possible dans l'application au mouvement des planètes.

M. Gyldén donne des exemples d'équations de la forme (2) satisfaisant aux conditions imposées. Il donne successivement à P les valeurs

$$\operatorname{sn} x,\ \operatorname{cn} x,\ \operatorname{dn} x,\ \frac{d \operatorname{sn} x}{dx},\ -\frac{d \operatorname{cn} x}{dx},\ -\frac{1}{k^2}\frac{d \operatorname{dn} x}{dx},$$

et obtient les valeurs correspondantes de Q_1 et de X_1; les six équations qu'il obtient appartiennent à la classe des équations de Lamé.

Il donne un autre exemple indépendant des fonctions elliptiques en faisant

$P = e^{\lambda \sin x}$, et trouve

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\lambda \sin x - \lambda^2 \cos^2 x)y = 0.$$

Enfin, il traite avec détails l'équation

$$\frac{d^2y}{dv^2} + \alpha^2 \cos\lambda v . y = X_0,$$

où α et λ sont des constantes, et X_0 de la forme

$$\Phi_0 + \Phi_1 y + \Phi_2 y^2 + \ldots.$$

En posant $\lambda v = 2\frac{\pi}{2K}x$, il met cette équation sous la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (2k^2 \sin^2 x - k^2)y = X,$$

dont le premier membre est identique à celui de l'équation qui correspond à $P = \operatorname{dn} x$. Il montre que l'on peut disposer des constantes de façon à éviter les termes qui renfermeraient x hors des signes de fonctions périodiques.

Le Mémoire se termine par une remarque faisant rentrer les équations étudiées dans des équations intégrées par M. Hermite, et par des considérations générales sur la portée de l'application de la méthode.

Reye. — Le problème des configurations. (93-96).

Une configuration n_i dans le plan est une figure composée de n points et de n droites, tels que chaque droite contienne i des n points et que, par chaque point, passe i des n droites. Une configuration (n_i, g_k) dans l'espace est une figure composée de n points et de n plans, tels que chacun des plans contienne i points, et que, par chaque point, passe i plans; de plus, elle contient g droites sur lesquelles sont situés k points et par lesquelles passent k plans; ainsi les plans radicaux, les points radicaux, les axes radicaux de six sphères constituent une configuration $(15_6, 20_3)$. Étudier toutes les configurations qui répondent à des nombres donnés, tel est le problème de M. Reye.

Reye. — Les configurations de l'hexaèdre et de l'octaèdre $(12_6, 16_3)$. (97-108).

Appell. — Sur les fonctions uniformes d'un point analytique (x, y).

Soit $f(x)$ une fonction uniforme admettant un nombre fini de points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Si l'on a, dans le domaine de a_l,

$$f(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu^{(k)}(x - a_k)^\nu, \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

et dans le domaine du point ∞

$$f(x)=\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu\left(\frac{1}{x}\right)^\nu,$$

on aura

$$A_1=\sum_{k=1}^{k=n} A_{-1}^{(k)}.$$

Une fonction $\varphi(x)$ uniforme dans l'espace E, extérieur à des cercles arbitraires décrits des points $a_1, \ldots, a_n$ comme centre, et n'ayant pas de point singulier dans cet espace, est développable, dans l'espace E, en une série de la forme

$$\varphi(x)=A+\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)}\frac{1}{(x-a_k)^\nu}.$$

Une fonction $\varphi(x)$ holomorphe dans l'espace extérieur à des cercles ayant pour centres les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et intérieur à des cercles ayant pour centres les points $b_1, b_2, \ldots, b_m$, est, dans cet espace, développable en une série de la forme

$$\varphi(x)=C+\sum_{k=1}^{k=m}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} B_\nu^{(k)}(x-b_k)^\nu+\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu^{(k)}(x-a_k)^\nu.$$

Soit

$$F(x, y)=0$$

une équation algébrique irréductible définissant une courbe d'ordre m, de genre p, pour laquelle le point $x=\infty$ n'est pas critique; un point analytique (x, y) est l'ensemble de valeurs (x, y) vérifiant l'équation précédente; une fonction d'un point analytique est, au fond, une fonction de x; elle est uniforme si elle reprend la même valeur quand le point analytique (x, y) décrit un cycle quelconque; si (a, b) est un point analytique non critique, le domaine δ de ce point est l'ensemble des points analytiques que peut atteindre le point (x, y) en partant de (a, b), pour lesquels on a

$$|x-a|\leqq\delta;$$

si (a, b) est un point critique, les valeurs de y qui deviennent égales à b pour $x=a$ se partagent en systèmes circulaires; le domaine δ du point (a, b) relatif à l'un de ces systèmes circulaires est l'ensemble des points analytiques que peut atteindre le point (x, y) en partant de (a, b), avec une des valeurs de y appartenant à ce système circulaire, pour lesquels on a

$$|x-a|\leqq\delta.$$

Si la fonction $f(x, y)$ est *régulière* au point (a, b), on a, dans un certain domaine $\delta'<\delta$ de ce point,

$$f(x, y)=\sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} A_\nu(x-a)^\nu.$$

Si (a, b) est un *pôle* de $f(x, y)$, on a, dans un certain domaine, $\delta' < \delta$ de ce point

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-n}^{\nu=\infty} A_\nu (x-a)^\nu;$$

$-n$ est le *degré* du pôle, A_{-1} en est le résidu. La notion de point singulier essentiel s'étend de même aux fonctions de point analytique. Tout ceci suppose que (a, b) n'est pas un point critique. Si (a, b) est un point critique, une substitution de la forme

$$x = a + x'^q$$

conduit, pour les q valeurs de y d'un système circulaire, à un développement de la forme

$$y = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \lambda_\nu x'^\nu;$$

en substituant dans $f(x, y)$, on est amené à distinguer les *branches* de la fonction en branches régulières, en branches admettant un pôle, en branches admettant un point singulier essentiel en (a, b); par exemple, un développement de la forme

$$\sum_{\nu=-n}^{\nu=\infty} A_\nu x'^\nu$$

correspond à un pôle de degré ν et dont le résidu est qA_{-1}; un développement de la forme

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu x'^\nu,$$

valable dans un certain domaine, correspond à un point singulier essentiel *isolé*, dont le résidu est encore qA_{-1}.

Ces définitions conduisent l'auteur aux propositions suivantes :

Une fonction uniforme du point analytique (x, y) et qui n'a pas d'autres points singuliers que des pôles est une fonction rationnelle de x et y.

Soit $f(x, y)$ une fonction uniforme du point analytique (x, y) ayant un nombre fini de points singuliers essentiels $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)$; soient $B_1, B_2, \ldots, B_n$ les résidus relatifs à ces points; soit de plus, dans un certain domaine du point analytique $\left(x = \infty, \lim \frac{x}{y} = C_k\right)$,

$$f(x, y) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} A_\nu^{(k)} \frac{1}{x^\nu} \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

on a

$$A_1^{(1)} + A_1^{(2)} + \ldots + A_1^{(m)} = R_1 + B_1 + \ldots + B_n. \tag{1}$$

Si, maintenant, on désigne par

$$u^{(i)}(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y} \varphi_i(x, y)\, dz \quad (i = 1, 2, \ldots, p)$$

les p intégrales abéliennes normales de première espèce et par $\Theta(u_i)$ une des fonctions Θ correspondantes, pour que l'on fasse

$$X(\xi, \eta) = -\frac{d}{d\xi}\log\frac{\Theta[u^{(i)}(x,y) - u^{(i)}(\xi, \eta) + h_i]}{\Theta[-u^i(\xi, \eta) + h_i]},$$

où

$$h_i = C_i - \sum_{k=1}^{k=p-1} u^{(i)}(x_k, y_k), \quad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

la fonction Z [intégrale abélienne normale de la seconde espèce, infinie du premier ordre au seul point (ξ, η)], qui ne dépend pas des points arbitraires (x_k, y_k), est une fonction rationnelle du paramètre (ξ, η) ayant pour pôles les points critiques et les points (x, y), (x_0, y_0), ces derniers avec les résidus -1 et $+1$. Cette fonction $Z(\xi, \eta)$ joue dans les recherches sur les fonctions du point analytique (x, y) le même rôle que la fonction

$$\frac{1}{z-\xi} - \frac{1}{x_0-\xi},$$

dans les recherches sur les fonctions uniformes de x; si l'on désigne par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ les m valeurs de η qui correspondent à une valeur attribuée à ξ, on a

$$Z(\xi, \eta_1) + Z(\xi, \eta_2) + \ldots + Z(\xi, \eta_m) = \frac{1}{x-\xi} - \frac{1}{x_0-\xi}.$$

Le théorème de M. Roch (*Journal de Crelle*, t. LXXXIV, p. 294) relatif à la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle $R(x, y)$ est une conséquence immédiate de l'égalité (1).

Une fonction uniforme $f(x,y)$ partout régulière, sauf au point essentiel (a, b), peut se mettre sous la forme

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots(\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a, b),$$

la série étant convergente tant que le point analytique (x, y) est différent du point analytique (a, b). De même, une fonction analytique admettant les n points singuliers (a_1, b_1), (a_2, b_2) $\ldots$, (a_n, b_n) situés à une distance finie et ne coïncidant pas avec quelque point critique peut se mettre sous la forme

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu^{(k)}}{1.2\ldots(\nu-1)} Z^{(\nu-1)}(a_k, b_k).$$

Soit (a, b) un point non critique et δ un nombre positif, tel que dans le domaine δ du point (a, b) il n'y ait pas de point critique; soit de plus $f(x,y)$ une fonction du point analytique (x, y) uniforme et régulière en tous les points analytiques situés en dehors du domaine δ du point (a, b). Cette fonction est développable en une série de la forme

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} A_\nu Z^{(\nu-1)}(a, b),$$

convergente en tous les points analytiques extérieurs au domaine δ.

Soit une suite de points analytiques tous différents

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_\nu, b_\nu),\ \ldots,$$

tels que

$$\lim(a_\nu, b_\nu) = (a, b) \quad (\nu = \infty);$$

soit, d'autre part,

$$f_1(x,y),\ f_2(x,y),\ \ldots,\ f_\nu(x,y),\ \ldots$$

une suite de fonctions rationnelles de x et y, ne devenant infinies respectivement qu'aux deux points (a_ν, b_ν) et (a, b); il existe une fonction uniforme $\Phi(x,y)$ du point analytique (x, y) n'ayant d'autre point singulier essentiel que le point (a, b) et admettant pour pôles les points (a_ν, b_ν), de telle façon que la différence $\Phi(x, y) - f(x, y)$ soit régulière au point (a_ν, b_ν).

Soit une suite de points analytiques tous différents

$$(a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_\nu, b_\nu),\ \ldots,$$

tels que l'on ait

$$\lim(a_\nu, b_\nu) = (a, b) \quad \text{pour } \nu = \infty,$$

et une suite de nombres entiers positifs

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_\nu,\ \ldots,$$

on peut former une fonction uniforme du point analytique (x, y) admettant pour point singulier essentiel le point (a, b), et pour zéros les points (a_ν, b_ν), aux degrés de multiplicité m_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, \infty$).

Toute cette théorie, qui constitue l'extension aux fonctions uniformes d'un point analytique de propositions bien connues de la théorie des fonctions uniformes ordinaires, conduit, dans le cas où le genre p de l'équation qui lie x et y est égal à un, à des propositions relatives aux fonctions uniformes doublement périodiques; en désignant par $\theta_1(u)$ la fonction θ_1 formée avec ces deux périodes et en posant

$$Z(u) = \frac{d \log \theta_1(u)}{du}, \quad Z^{(i)}(u) = \frac{d^i \log \theta_1(u)}{du^i},$$

on pourra, au moyen de la fonction Z, former l'expression générale d'une fonction uniforme doublement périodique $f(x)$, n'ayant, dans un parallélogramme des périodes, qu'un point singulier a. Cette expression sera

$$f(x) = C + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{A_\nu}{1.2\ldots\nu} Z^{(\nu)}(a - x).$$

On peut aussi, pour ces fonctions, généraliser le théorème de M. Mittag-Leffler et le théorème de M. Weierstrass sur la décomposition en facteurs primaires.

Appell. — Développements en série dans une aire limitée par des arcs de cercle. (145-152).

Exemples simples de séries dont les termes sont des fonctions rationnelles de x et qui ont des valeurs constantes et distinctes dans diverses régions du plan.

Schering (*E.*). — Sur la théorie des restes quadratiques. (153-170).

Le Mémoire de M. Schering, d'un caractère très élémentaire, a pour but de combler une lacune des *Disquisitiones arithmeticæ;* l'auteur y établit avec détail la théorie des résidus quadratiques pour un module composé; soit m un tel module qui, décomposé en facteurs premiers, soit égal à

$$2^{\pi_0} p_1^{\pi_1} p_2^{\pi_2} \ldots p_\mu^{\pi_\mu},$$

les p étant des nombres premiers impairs; la congruence $x^2 \equiv a (\text{mod}.\, m)$ admet zéro ou $\theta(m)$ solutions suivant que a est résidu quadratique ou non-résidu quadratique de m, $\theta(m)$ est égal à 2^μ, $2^{\mu+1}$, $2^{\mu+2}$ suivant que π_0 est inférieur, égal ou supérieur à deux; soit maintenant $\varphi(m)$ le nombre de nombres premiers à m et au plus égaux à m; le produit de ces nombres est congru à $(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(m)}$ suivant le module m; suivant que le nombre a, premier à m, est ou non résidu quadratique de m, on a

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv +1 \quad (\text{mod}.\, m),$$

ou

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\theta(m)} \quad (\text{mod}.\, m).$$

Considérons le nombre de solutions de la congruence bilinéaire

$$a \equiv yz \,(\text{mod}.\, m),$$

composées d'entiers positifs y, z inférieurs au module m (premier à a), et tels que l'on ait $y < z$; si ce nombre est $\frac{1}{2}\varphi(m)$, a est un non-résidu quadratique de m; si le nombre est moindre que $\frac{1}{2}\varphi(m)$, a est résidu quadratique, et le nombre de solutions est $\frac{1}{2}\varphi(m) - \frac{1}{2}\theta(m)$; si, a étant toujours premier à m, on désigne par $\eta(a, m)$ le nombre de solutions de la congruence

$$au + v \equiv 0 \,(\text{mod}.\, m)$$

composées de nombre, u, v positifs, premiers à m et inférieurs à $\frac{m}{2}$, on aura

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv +1 \equiv (-1)^{\eta(a, m)} \quad (\text{mod}.\, m),$$

ou

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(m)} \equiv (-1)^{\frac{1}{2}\theta(m)} \equiv (-1)^{\eta(a, m)} \quad (\text{mod}.\, m),$$

selon que a sera ou non résidu quadratique de m. Soit $M = m\delta$, δ étant un entier positif, et soit a un entier premier à M, soit $H(a, M)$ le nombre des restes, pris par rapport au diviseur M, des nombres

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ \left(\frac{M-1}{2}\right)a \quad (\text{M impair}),$$

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ \left(\frac{M}{2}-1\right)a \quad (\text{M pair}),$$

qui sont supérieurs à $\frac{M}{2}$, on aura

$$H(a, M) = \sum_{\delta} \eta\left(a, \frac{M}{\delta}\right) = \sum_{m} \eta(a, m),$$

la première sommation étant relative aux divers diviseurs δ du nombre M inférieurs à $\frac{M}{2}$, la seconde à tous les diviseurs m du même nombre supérieurs à 2.

En supposant M pair et a impair, on a $H(a, M) \equiv 0 \pmod{2}$ si $M \equiv 2 \pmod{4}$, ou si l'on a simultanément $M \equiv 0$, $a \equiv 1 \pmod{4}$; autrement $H(a, M)$ est impair. Si M est impair, $H(a, M)$ est pair ou impair, en même temps que le nombre des facteurs premiers égaux ou inégaux de M par rapport auxquels a est non résidu. C'est sur le cas particulier de ce dernier théorème où l'on suppose M premier que Gauss a fondé sa troisième preuve de la loi de réciprocité; le cas général paraît lui avoir échappé; M. Schering a communiqué le théorème général à l'Académie des Sciences de Berlin, en 1876; M. Kronecker y était arrivé de son côté, sans l'avoir publié.

Zeuthen. — Sur un groupe de théorèmes et formules de la Géométrie énumérative. (171-188).

Quand on veut déterminer le nombre de solutions d'une question algébrique, la principale difficulté que l'on rencontre se trouve dans la détermination de la multiplicité des solutions de différente nature.

Toute méthode qui permet d'éviter la considération des développements en séries qui représentent les branches de courbes auxquelles on a affaire est particulièrement précieuse. C'est une méthode de cette nature que développe M. Zeuthen; elle a pour point de départ une proposition due à M. Halphen : « Soit donné un point singulier d'une courbe algébrique où toutes les branches ont la même tangente, et désignons par ν le degré de multiplicité ponctuelle de la courbe en ce point, c'est-à-dire le nombre de points d'intersection confondus de la courbe avec une droite quelconque passant par lui, et par ν' le degré de multiplicité tangentielle, c'est-à-dire le nombre de tangentes confondues qui passent par un point quelconque de la tangente donnée, alors $\nu + \nu'$ des points d'intersection de la tangente coïncident avec le point donné, et $\nu + \nu'$ des tangentes qui passent par le point coïncident avec la tangente donnée.

M. Zeuthen transforme cette proposition de manière à lui donner une forme purement algébrique. Soit $f(x, y) = 0$ une équation homogène et du degré m_1 en x_1, x_2, homogène et du degré m_2 en y_1, y_2. Si l'on détermine par les valeurs de $\frac{x_1}{x_2}$ et de $\frac{y_1}{y_2}$ qui satisfont à cette équation les droites de deux faisceaux de centres P, Q, et si l'on choisit les droites $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, de telle façon que la droite PQ ne se corresponde pas à elle-même, l'équation proposée définit une courbe d'ordre $n = m_1 + m_2$ ayant un point m_1^{uple} en P, un point m_2^{uple} en Q; les ordres des deux discriminants $\varphi(x)$, $\psi(y)$ de l'équation $f(x, y) = 0$, par rapport à y et par rapport à x, sont respectivement

$$2m_1(m_2 - 1) \quad \text{et} \quad 2m_2(m_1 - 1).$$

Si maintenant on considère un point M de la courbe et si l'on désigne par ν_1 et ν_2 le nombre des points d'intersection, confondus avec M, de la courbe et des droites PM, QM, on a, par l'application du théorème de M. Halphen,

$$2(m_2 - m_1) = \Sigma(\nu_2 - \nu_1),$$

la sommation du second membre étant étendue à tous les points de la courbe. Pour chaque point M, la différence $\nu_2 - \nu_1$ est égale à la différence $\xi - \eta$ des degrés de multiplicité, dans les discriminants $\varphi(x)$, $\psi(y)$, des facteurs

$$a_2 x_1 - a_1 x_2, \quad b_2 x_1 = b_1 x_2$$

qui déterminent respectivement les droites PM, QM. L'auteur déduit de ces propositions que les deux discriminants de $\varphi(x)$ et de $\psi(y)$ sont égaux au facteur ± 1 près. Dans le cas particulier d'une forme binaire du second ordre, à deux couples de variables, les deux discriminants ont les mêmes invariants. M. Zeuthen donne diverses applications qui montrent le parti que l'on peut tirer du théorème général que l'on vient d'exposer.

Goursat. — Sur un théorème de M. Hermite. (189-192).

Démonstration, au moyen de l'intégrale de Cauchy, du théorème de M. Hermite concernant les intégrales définies affectées de coupures.

Poincaré. — Mémoire sur les fonctions fuchsiennes. (193-294).

Dans un Mémoire antérieur, l'auteur a fait une étude approfondie des groupes discontinus formés par des substitutions de la forme

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right),$$

dont les coefficients sont réels, qui laissent inaltéré un cercle *fondamental* dont on peut supposer que l'équation est

$$|z| = 1;$$

à un tel groupe correspond une décomposition du cercle fondamental en polygones curvilignes *normaux* R tous congruents entre eux; cette décomposition est, comme on sait, l'analogue de la décomposition du plan en parallélogrammes qui est le fondement de la théorie des fonctions doublement périodiques : le but de l'auteur est maintenant de former des fonctions analogues aux fonctions Θ, c'est-à-dire des transcendantes qui se reproduisent multipliées par un facteur simple, toutes les fois qu'on fait subir à la variable z une transformation du groupe.

Les séries de la forme

$$(1) \qquad \Theta(z) = \Sigma \mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

répondent à la question, en supposant que $\mathrm{H}(z)$ représente une fonction rationnelle de z dont aucun infini n'est situé sur le cercle fondamental, mais d'ailleurs quelconque, que le nombre m soit un entier positif plus grand que 1 et enfin que la sommation s'étende à toutes les substitutions du groupe G : si l'on désigne par $a_1, a_2, \ldots, a_p$ les infinis de $H(z)$, il est clair que la série (1) n'est pas convergente pour toutes les valeurs de z contenues dans la formule

$$(2) \qquad \frac{\alpha_i a_k + \beta_i}{\gamma_i a_k + \delta_i};$$

pour toute autre valeur de z, la série est absolument convergente : elle définit une fonction que M. Poincaré appelle *thêtafuchsienne*. La propriété fondamentale d'une telle fonction, qui la rapproche des fonctions Θ, est exprimée par l'équation

$$\Theta\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \Theta(z)(\gamma_i z + \delta_i)^{2m};$$

ses points singuliers sont : 1° les points (2), transformés des infinis de $H(z)$: ces points sont des pôles; 2° les points $\frac{-\delta_i}{\gamma_i}$, qui eux aussi sont des pôles; 3° les points singuliers essentiels du groupe G, points situés sur le cercle fondamental et définis dans le premier Mémoire de l'auteur; ces points sont des points singuliers essentiels pour la fonction $\Theta(z)$. La classification des fonctions thêtafuchsiennes repose sur la classification des groupes fuchsiens, qui dépend elle-même des propriétés du polygone normal R_0; M. Poincaré est amené à distinguer *sept* familles de fonctions thêtafuchsiennes. Pour certaines familles, le cercle fondamental est une ligne singulière, en sorte que, alors, le développement (1) représente deux fonctions distinctes dont l'une n'existe qu'à l'intérieur du cercle fondamental, dont l'autre n'existe qu'à l'extérieur; il suffit de considérer la première. Une telle fonction est dite de première ou de seconde espèce, suivant qu'elle a des infinis ou qu'elle n'en a pas. Pour les autres familles, les points du cercle fondamental ne sont pas tous des points singuliers essentiels; la série (1) représente alors une même transcendante dans tout le plan, partout holomorphe sauf en une infinité de points, pôles et points singuliers essentiels : ces derniers sont situés sur le cercle fondamental et constituent, sur ce cercle, un *ensemble* du second genre, c'est-à-dire tel que, en formant les *dérivés* successifs, on ne tombe jamais sur un ensemble fini. De telles fonctions ont évidemment, en général, des pôles; toutefois, M. Poincaré montre que l'on peut s'arranger de manière que les infinis se détruisent en quelque sorte et à obtenir, dans ce cas, encore des fonctions thêtafuchsiennes de seconde espèce.

Pour une fonction thêtafuchsienne, les zéros et les infinis seront connus partout, lorsqu'ils seront connus à l'intérieur du polygone R_0, si la fonction n'existe que dans l'intérieur du cercle fondamental, et dans le cas où la fonction existe dans tout le plan, s'ils sont connus à l'intérieur de l'espace $R_0 + R'_0$, R'_0 étant le polygone symétrique de R_0 par rapport au cercle fondamental. Dans le premier cas, le nombre des infinis distincts de Θ est égal au nombre des infinis de H, intérieurs au cercle fondamental; dans le second cas, le nombre des infinis distincts est égal au nombre des infinis de H augmenté de $2m$; le nombre de zéros est évalué au moyen de l'intégrale $\int \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)} dz$: un résultat essentiel consiste en ce que le nombre des zéros et des infinis distincts est toujours fini.

De même que les fonctions Θ ordinaires conduisent immédiatement à l'expression de fonctions doublement périodiques, de même les fonctions thêtafuchsiennes conduisent à l'expression de fonctions uniformes qui se reproduisent par toutes les substitutions d'un groupe fuchsien : de telles fonctions sont celles que M. Poincaré a appelées *fuchsiennes*. On obtient évidemment une fonction fuchsienne en faisant le quotient de deux fonctions thêtafuchsiennes qui correspondent à un même degré m; réciproquement, M. Poincaré établit que toute fonction fuchsienne peut être construite ainsi, et cela d'une infinité de façons.

Les singularités d'une fonction fuchsienne sont les mêmes que celles des fonctions thêtafuchsiennes au moyen desquelles on l'engendre; ainsi, il y aura des fonctions fuchsiennes qui n'existent qu'à l'intérieur du cercle fondamental; pour ces fonctions, la circonférence de ce cercle sera une ligne singulière essentielle; d'autres existent dans tout le plan; leurs points singuliers essentiels, en nombre infini, sont situés sur la circonférence du cercle fondamental; ils ne forment pas une ligne, mais en un certain sens ils ne sont pas isolés : on ne peut pas, autour de chacun d'eux comme centre, décrire un cercle assez petit pour ne pas contenir d'autres points singuliers : ils constituent une *perfecte Menge*.

Le nombre des zéros distincts d'une fonction fuchsienne est égal à celui de ses infinis distincts; il est égal au nombre des points distincts pour lesquels la fonction prend une valeur déterminée quelconque.

Soient deux fonctions fuchsiennes distinctes $F(z)$, $F_1(z)$ qui correspondent à un même groupe fuchsien; entre ces deux fonctions, il existe une relation algébrique. Toutes les fonctions fuchsiennes qui correspondent à un même groupe s'expriment rationnellement à l'aide de deux d'entre elles x, y; ces dernières sont d'ailleurs liées par une équation algébrique.

La détermination du genre de cette équation est un problème capital, qui se trouve résolu, par des considérations de Géométrie de situation, dans le premier Mémoire de l'auteur (*Classification des groupes en genres*).

Si l'on forme les deux fonctions

$$v_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}}, \quad v_2 = z\sqrt{\frac{dx}{dz}},$$

on aura

$$\frac{1}{v_1}\frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{1}{v_2}\frac{d^2 v_2}{dx^2} = \frac{4\dfrac{d^3 x}{dz^3}\dfrac{dx}{dz} - 3\left(\dfrac{d^2 x}{dz^2}\right)^2}{4\left(\dfrac{dx}{dz}\right)}.$$

Le troisième membre de cette double égalité est une fonction fuchsienne de z : c'est donc une fonction rationnelle $\varphi(x, y)$ de x et de y. Il suit de là que les deux intégrales de l'équation linéaire

$$(3) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} = v\,\varphi(x, y)$$

sont

$$v = v_1, \quad v = v_2.$$

Ainsi, la considération de la fonction fuchsienne x permet d'intégrer l'équation linéaire (3) dont les coefficients sont des fonctions rationnelles du point analytique (x, y). On voit que la variable indépendante x s'exprime par une fonction fuchsienne de z, c'est-à-dire du rapport des intégrales. Quand on connaît cette fonction fuchsienne, on en déduit les intégrales elles-mêmes, à l'aide des formules précédentes.

Le reste du Mémoire de M. Poincaré est rempli par l'étude particulière des diverses familles de fonctions fuchsiennes, suivant le genre auquel elles appartiennent, étude dans le détail de laquelle nous ne pouvons entrer ici. Le cas où le genre est nul, et où par conséquent toutes les fonctions fuchsiennes s'expriment rationnellement au moyen de l'une d'elles, offre un intérêt particulier. M. Poincaré fait l'étude approfondie des fonctions fuchsiennes appartenant à la *première famille* et au genre zéro. Il rencontre là, comme cas très particulier, ces fonctions fuchsiennes auxquelles donne naissance l'équation hypergéométrique de Gauss, fonctions dont l'existence avait été signalée en 1872. M. Schwarz (*Journal de Borchardt*, t. 75) avait reconnu qu'elles étaient uniformes et qu'elles admettent un cercle comme ligne singulière essentielle.

Bourguet. — Note sur les intégrales eulériennes. (295-296).

On a, d'après M. Heine,

$$\Gamma(a) = \frac{1}{2i\sin a\pi}\int z^{a-1}e^{z}dz,$$

l'intégration étant faite le long d'un contour qui contient l'origine et s'étend indéfiniment vers les x négatifs, ce contour pouvant ne pas être fermé.

M. Bourguet prend un contour formé de deux droites inclinées passant par l'origine et d'un petit cercle ayant l'origine pour centre; dans une autre Note, il prend une parabole ayant son foyer à l'origine; il parvient ainsi à l'expression de diverses intégrales définies.

Picard. — Sur une classe de groupes discontinus de substitutions linéaires et sur les fonctions de deux variables indépendantes restant invariables par ces substitutions. (297-326).

Le but que se propose M. Picard dans ce Mémoire est de trouver des analogues, dans le cas de deux variables, aux fonctions thêtafuchsiennes de M. Poincaré, afin d'en déduire des fonctions de deux variables indépendantes, analogues aux fonctions fuchsiennes, qui restent invariables pour toutes les substitutions d'un groupe, nécessairement discontinu.

C'est la formation d'un tel groupe qu'il faut d'abord expliquer:

L'auteur prend pour point de départ une forme quadratique ternaire

$$\begin{aligned}&axx_0 + a'yy_0 + a''zz_0 + byz_0\\&\quad + b_0y_0z + b'zx_0 + b'_0z_0x + b_0xy_0 + b''_0yx_0 = f(x, y, z, x_0, y_0, z_0);\end{aligned}$$

dans cette forme, les variables x, y, z sont des quantités complexes, et les variables x_0, y_0, z_0 les quantités conjuguées; les coefficients a, a', a'' sont des entiers réels, les coefficients b, b', b'' sont des entiers complexes qu'on peut supposer formés au moyen des racines, supposées imaginaires, d'une équation du deuxième degré à coefficients entiers; les coefficients b_0, b'_0, b''_0 sont les quantités conjuguées de b, b', b''; si l'on effectue une substitution linéaire, à coefficients complexes, sur les variables x, y, z et que l'on effectue en même temps sur les variables x_0, y_0, z_0 la substitution linéaire que l'on déduit de la première en remplaçant chaque coefficient par la quantité conjuguée, la forme f se change en une nouvelle forme analogue; pour une telle substitution le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} a & b'' & b''_0 \\ b'_0 & a' & b \\ b' & b_0 & a'' \end{vmatrix}.$$

joue le rôle d'invariant, il se reproduit multiplié par le produit des déterminants des deux substitutions partielles, ou, si l'on veut, par le carré du module d'une de ces substitutions. Par une transformation très élémentaire, on peut substituer à la forme $f(x, y, z, x_0, y_0, z_0)$ la forme

$$(1) \qquad \alpha u u_0 + \beta v v_0 + \gamma w w_0,$$

où u_0, v_0, w_0 sont encore les quantités conjuguées de u, v, w et où les coefficients α, β, γ sont des nombres entiers dont aucun n'est nul ; cela suppose, toutefois, que l'invariant δ est lui-même différent de zéro; la forme f est *définie* ou *indéfinie*, suivant que les trois quantités α, β, γ sont de même signe ou de signe contraire. Cela posé, l'étude des substitutions de la nature de celles que l'on a décrites plus haut et qui changent la forme f en elle-même se ramène à l'étude des substitutions à coefficients entiers de même nature que b, b', b'', par lesquelles la forme (1) se reproduit; leur nombre est fini ou infini suivant que la forme f est définie ou indéfinie; plaçons-nous dans le deuxième cas et supposons

$$\alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \gamma = -g < 0.$$

Si l'on désigne par M_1, P_1, R_1, M_2, P_2, R_2, M_3, P_3, R_3 les coefficients d'une telle substitution, ou plutôt de la substitution partielle à effectuer sur les variables non affectées de l'indice zéro, il est clair que l'ensemble des substitutions, telles que

$$(2) \qquad X = \frac{M_1 x + P_1 y + R_1}{M_3 x + P_3 y + R_3}, \quad Y = \frac{M_2 x + P_2 y + R_2}{M_3 x + P_3 y + R_3},$$

constitue un groupe : or M. Picard démontre que *ce groupe est discontinu pour tout système de valeurs x et y telles que l'on ait*

$$(3) \qquad \alpha(x'^2 + x''^2) + \beta(y'^2 + y''^2) - g < 0,$$

en posant

$$x = x' + ix'', \quad y = y' + iy''.$$

On voit, d'ailleurs, de suite que si le système des variables x, y est à l'intérieur du domaine D défini par l'inégalité (3), il en sera de même du système des variables transformées x, y; dans les mêmes conditions, on n'obtient jamais pour ces dernières variables des valeurs indéterminées. Cela établi, dans le groupe des substitutions (2), M. Picard considère particulièrement le sous-groupe formé avec les substitutions (2) dont le déterminant est égal à $+1$; c'est à ce sous-groupe que se rapportent les propositions qui suivent, où l'on sous-entend que les équations (2) définissent une substitution quelconque de ce sous-groupe.

La série

$$\sum \frac{1}{\text{mod.}\,(M_3 x + P_3 y + R_3)^{3m}},$$

étendue à toutes les substitutions du groupe, *en supposant le système x, y à l'intérieur du domaine D, est convergente pour $m \gtreqless 2$*; M. Picard donne deux démonstrations de cette proposition, essentielle pour son objet; la seconde démonstration, qui fournit seule la limite inférieure 2, est fort remarquable par sa généralité.

Cela posé, soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle de x et y qui reste continue pour tous les systèmes x, y situés à l'intérieur du domaine, telle par exemple qu'un polynôme entier en x, y, ou que la fonction

$$\frac{1}{a-x-y},$$

a étant une quantité positive inférieure à $\frac{g(\beta+\alpha)}{\alpha\beta}$: la série

$$(4)\qquad \sum R\left(\frac{M_1x+P_1y+R_1}{M_3x+P_3y+R_3}, \frac{M_2x+P_2y+R_2}{M_3x+P_3y+R_3}\right)\frac{1}{(M_3x+P_3y+R_3)^{3m}},$$

étendue à toutes les substitutions du groupe, sera absolument convergente, en supposant le système x, y à l'intérieur du domaine D : la série (2) définit, à l'intérieur de ce domaine, une fonction $P(x, y)$ uniforme et continue, analogue aux fonctions thêtafuchsiennes de M. Poincaré, et jouissant, relativement à toute substitution du sous-groupe considéré, de la propriété que définit l'équation suivante

$$P\left(\frac{M_1x+P_1y+R_1}{M_3x+P_3y+R_3}, \frac{M_2x+P_2y+R_2}{M_3x+P_3y+R_3}\right) = (M_3x+P_3y+R_3)^{3m}P(x, y).$$

Le quotient de deux fonctions P fournit enfin une fonction uniforme des deux variables indépendantes x, y, définie dans le domaine D et se reproduisant quand on effectue sur x, y une substitution quelconque du groupe considéré.

Fuchs. — Sur les équations différentielles linéaires homogènes dont les intégrales vérifient des relations homogènes d'un degré supérieur au premier. (321-362).

Soit

$$(1)\qquad \frac{d^3y}{dz^3}+p\frac{dy^2}{dz^2}+q\frac{dy}{dz}+ry=0$$

une équation linéaire du troisième ordre à coefficients rationnels en z; M. Fuchs suppose qu'elle appartient à ce type d'équations, qu'il a appris à connaître, telles que les intégrales, aux environs d'un point critique a, puissent être mises sous la forme

$$(z-a)^r\mathfrak{P}(z-a),$$

r étant un nombre rationnel et $\mathfrak{P}(z-a)$ une série procédant suivant les puissances entières et positives de $z-a$. Suivant l'habitude, $z-\infty$ doit être remplacé par $\frac{1}{z}$.

Il suppose ensuite que, entre les éléments y_1, y_2, y_3 d'un système fondamental d'intégrales, il existe une relation de la forme

$$(2)\qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

le premier membre étant une fonction entière et homogène de y_1, y_2, y_3, et l'équation étant supposée irréductible. Une première conséquence consiste en ce que le hessien de la forme f est la racine d'une fonction rationnelle de z.

M. Fuchs établit que, si le degré n de l'équation (2) est égal à 2, l'équation coïncide avec l'équation différentielle linéaire du troisième ordre dont les intégrales sont les carrés des intégrales d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients rationnels.

Si n est plus grand que 2, les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions algébriques de z; il y a alors lieu de distinguer trois cas :

1° Si le genre p de l'équation algébrique (2) est plus grand que 1, le nombre des racines réduites de l'équation algébrique à laquelle satisfait l'intégrale générale de l'equation (1) est au plus égal à 4.

2° Si $p = 1$, le nombre des racines réduites est 2, 3, 4 ou 6.

3° Si p est nul, les intégrales de l'équation (1), abstraction faite d'un facteur commun à toutes, facteur qui est la racine d'une fonction rationnelle, sont des fonctions rationnelles entières et homogènes du $n^{\text{ième}}$ degré d'un système fondamental d'intégrales ξ_1, ξ_2, d'une équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients rationnels, algébriquement intégrable.

D'ailleurs toute équation différentielle linéaire (1) qui est algébriquement intégrable jouit de cette propriété que, entre les éléments y_1, y_2, y_3 d'un système fondamental d'intégrales, existe une relation telle que (2); par conséquent, les résultats précédemment énumérés épuisent tous les cas possibles dans lesquels une équation différentielle linéaire homogène peut être intégrée algébriquement.

Bourguet. — Sur quelques intégrales définies. (363-367).

Hermite. — Sur une relation donnée par M. Cayley dans la théorie des fonctions elliptiques. (368-370).

Démonstration de la formule

$$-k'^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} r \operatorname{sn} s + \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn} r \operatorname{cn} s = \frac{1}{k^2} \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v \operatorname{dn} r \operatorname{dn} s = -\frac{k'^2}{k^2},$$

ou l'on suppose $u + v + r + s = 0$, déduite des formules

$$\operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a) = \frac{1}{k^2 \operatorname{sn} a} \mathrm{P},$$

$$\operatorname{cn} x \operatorname{cn}(x+a) = \frac{\operatorname{dn} a}{k^2 \operatorname{sn} a} \mathrm{P},$$

$$\operatorname{dn} x \operatorname{dn}(x+a) = \operatorname{dn} a - \frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{sn} a} \mathrm{P},$$

où

$$\mathrm{P} = \mathrm{Z}(x) - \mathrm{Z}(x+a) + \mathrm{Z}(a).$$

Netto. — Sur la théorie des discriminants. (371-400).

Le Mémoire de M. Netto se rattache à quelques remarques faites par M. Kronecker, dans ses *Grundzuge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grossen.* Il contient d'abord une recherche préliminaire sur la possibilité de l'égalité entre quelques-unes des 1, 2, ..., n expressions que l'on obtient en permutant de toutes les manières possibles des variables données $x_1, x_2, \ldots, x_n$

dans une fonction linéaire de ces quantités à coefficients indéterminés. Seule, l'égalité entre les variables a une influence. Toute autre relation algébrique entre les variables n'en a aucune. L'auteur établit ensuite que l'égalité de valeurs conjuguées de toutes les fonctions d'un genre ne peut être obtenue également que si quelques-unes des variables données sont égales.

Ceci posé, si l'on considère une équation spéciale et toutes les fonctions d'un genre G formé avec les racines de cette équation, le diviseur du genre G sera, par définition, le plus grand commun diviseur entre les discriminants de toutes ces fonctions; il n'y a de diviseur du genre (ne se réduisant pas à un nombre entier) que s'il existe des transpositions qui paraissent dans le groupe qui caractérise l'équation spéciale que l'on considère et qui ne paraissent pas dans le sous-groupe déterminé par le genre G.

D'après cela, ce problème: Trouver tous les genres qui n'ont pas de diviseurs du genre, revient à cet autre : Trouver chaque groupe ayant des sous-groupes qui contiennent toutes les transpositions du groupe. Deux cas peuvent se présenter : ou bien le groupe cherché ne contient aucune transposition, et alors aucun genre formé à l'aide des racines de l'équation caractérisée par le groupe n'a de diviseur du genre, et inversement; de sorte que tous les groupes ne contenant pas de transpositions répondent à la question : ce premier cas se présente dans les genres alternés, cycliques, métacycliques, demi-métacycliques; ou bien le groupe cherché contient des transpositions, et alors, pour obtenir tous les groupes qui répondent à la question, M. Netto montre qu'il suffit de former, de toutes les manières possibles, une suite d'équations irréductibles

$$g[x, x', \ldots, x^{(\nu)}] = 0, \quad g[x', \ldots, x^{(\nu)}] = 0, \quad g[x^{(\nu)}] = 0,$$

dont la première soit une équation générale, et d'éliminer entre elles les paramètre x', ..., $x^{(\nu)}$; le groupe de l'équation résolvante répond chaque fois à la question. On peut aussi former ce groupe directement.

On peut, sans difficulté, étendre ces recherches sur les groupes, en considérant, au lieu de transpositions (x_1, x_2), d'autres substitutions de types déterminés, par exemple du type (x_1, x_2, x_3).

M. Netto démontre, en terminant, divers théorèmes, parmi lesquels nous signalerons le suivant :

Soit φ une fonction entière ρ-valente de n éléments, ρ étant plus grand que n; soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ ces ρ valeurs; soit S le groupe symétrique des n éléments; appliquons toutes les substitutions de S à la suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$; les résultats pourront être regardés comme des permutations des éléments $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$, et leur ensemble constitue un groupe Σ : *ce groupe ne contient aucune substitution cyclique dont l'ordre soit un nombre premier.*

Tome II, 1883.

Goursat. — Sur une classe de fonctions représentées par des intégrales définies. (1-70).

Soit $z = f(x, u)$ une fonction de deux variables indépendantes x, u, jouissant des propriétés suivantes. Tout d'abord, elle admet, pour chaque système de valeurs des variables, un nombre fini ou infini de déterminations, mais qui sont telles que le rapport de deux quelconques d'entre elles est une constante. Si x est supposé constant, z considéré comme fonction de u admet, pour cette variable, un nombre limité m de valeurs singulières $v_1, v_2, \ldots, v_m$ dont les n premières $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne dépendent pas de x, dont les p autres, $u_1, u_2, \ldots, u_p$ dépendent, au contraire, de cette variable et lui sont liées par l'équation $\Phi(x, u) = 0$. En donnant à u une valeur particulière constante, z devient une fonction de x; M. Goursat admet qu'elle n'ait pas d'autres points critiques que ceux que l'on fait correspondre à cette valeur de u par l'équation $\Phi(x, u) = 0$; telle est, par exemple, la fonction

$$z = (u-a_1)^{b_1^{-1}}(u-a_2)^{b_2^{-1}}\ldots(u-a_n)^{b_n^{-1}}$$
$$\times [\varphi_1(x, u)]^{\lambda_2^{-1}}[\varphi_2(x, u)]^{\lambda_2^{-1}}\ldots[\varphi_q(x, u)]^{\lambda_q^{-1}}\Psi(x, u),$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ étant des polynômes entiers en u de degrés $m_1, m_2, \ldots, m_q$ dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x et $\Psi(x, u)$ désignant une fonction holomorphe de x et de u; les valeurs singulières de u qui dépendent de x sont données par l'équation

$$\Phi(x, u) = \varphi_1(x, u)\varphi_2(x, u)\ldots\varphi_q(x, u) = 0,$$

et l'on a

$$p = m_1 + m_2 + \ldots + m_q.$$

L'objet de M. Goursat est l'étude des intégrales de la forme

$$\int z\, du,$$

prises entre deux points singuliers, le long de la droite qui joint ces points. En général, le symbole (CD) désigne la valeur de l'intégrale rectiligne $\int z\, du$ prise entre les deux points C, D.

Considérons d'abord une intégrale rectiligne $(a_i a_h)$, et supposons qu'elle ait un sens, tant que le chemin rectiligne ne contient aucun autre des points pour lesquels la fonction $f(x, u)$ cesse d'être holomorphe; cette intégrale est une fonction de x et c'est cette fonction dont l'auteur cherche les propriétés : il apprend d'abord quel système de coupures on doit pratiquer dans le plan pour la rendre holomorphe. L'ensemble des valeurs de x telles que, parmi les p valeurs de u, déduites de l'équation $\Phi(x, u) = 0$, il y en ait une ou plusieurs situées sur la droite $a_i a_h$, forme, en général, sur le plan, un nombre fini ou infini de portions de courbes dont chacune joue le rôle de coupure pour l'intégrale considérée; ces coupures sont dites de première espèce. Si, pour une valeur donnée de x non située sur les coupures, on choisit la valeur de la fonction z que l'on prend dans l'intégration, l'intégrale $(a_i a_h)$ définit, quand on fait varier x à partir de cette valeur et quand on associe les valeurs de z de façon qu'elles se suivent d'une manière continue, une fonction analytique de la variable x que l'on peut continuer tant que l'on ne rencontre pas de coupures; si l'on revient ainsi au point de départ, on retrouvera la valeur initiale de $(a_i a_h)$ ou cette valeur multipliée par une constante, la seconde circonstance ne pouvant se présenter que dans le cas où le contour décrit par x renferme quelque coupure à son intérieur; il faut pour cela qu'il y ait des coupures qui ne s'étendent point à l'infini; on complétera alors le système de coupures (C) de première espèce par des coupures de seconde espèce (C′) s'étendant à l'infini et pratiquées de telle sorte qu'aucun contour fermé ne puisse, sans les traverser, enfermer une coupure de première espèce.

Considérons maintenant les intégrales de la forme $(a_i u_h)$; il faut d'abord définir les fonctions u de x d'une façon précise; en partant de l'équation

$$\Phi(x, u) = 0,$$

on peut construire dans le plan des x un système de coupures C_1, grâce auxquelles les p racines u de cette équation deviennent des fonctions holomorphes de x : ce sont ces fonctions que M. Goursat désigne par $u_1, u_2, \ldots, u_p$; ceci posé, soient u_h l'une de ces valeurs et a_i l'une des valeurs critiques indépendantes de x; admettons que la droite $a_i u_h$ ne contienne aucune autre valeur singulière et que l'intégrale $(a_i u_h)$ ait un sens; la variable x décrivant un chemin quelconque ne rencontrant pas les coupures C_1, on pourra continuer la fonction $(a_i u_h)$ tant que le segment de droite $a_i u_h$ ne contiendra aucune autre valeur singulière, et de la même façon que précédemment, on est amené à définir un système de coupures de première espèce C', qui peuvent d'ailleurs coïncider totalement ou en partie avec les coupures C_1 et un système de coupures de seconde espèce C'', de manière à rendre holomorphe, dans le plan découpé, la fonction $(a_i u_h)$; au point a_i, on peut maintenant associer les différents points u_h et former ainsi p intégrales; on voit ici le rôle des coupures C_1, quand elles ne coïncident pas avec les coupures C' : en les traversant, on passe d'une intégrale $(a_i u_h)$ à une autre intégrale $(a_i u_h)$. Le lecteur pourra facilement étendre ces considérations aux intégrales de la forme (u_i, u_h).

Ceci posé, admettons que, sauf pour des valeurs de x formant une ou plusieurs courbes dans le plan des x, il n'y ait pas trois des m points critiques $v_1, v_2, \ldots, v_m$ qui soient en ligne droite et que les $\frac{m(m-1)}{2}$ intégrales $(v_i v_h)$ aient un sens; l'ensemble des valeurs de x, pour lesquelles trois points v sont en ligne droite constituent l'ensemble des coupures de première espèce; que l'on complète, pour chaque intégrale, ces coupures par un système de coupures de seconde espèce; ce découpage pratiqué dans chaque portion du plan, chaque intégrale $(v_i v_h)$ est une fonction uniforme de x, bien définie dès que l'on aura choisi (pour chaque portion) la valeur de z que l'on prend dans l'intégration.

Le but final que poursuit M. Goursat est la réponse à cette question : « Que deviennent ces fonctions quand on fait parcourir à la variable un chemin quelconque? »

Il montre que, partant d'un point avec une fonction, on arrive à un autre point du plan, avec une valeur qui est une fonction linéaire à coefficients constants des $\frac{m(m-1)}{2}$ fonctions qui répondent à la région du plan où se trouve le point d'arrivée; d'ailleurs, ces $\frac{m(m-1)}{2}$ fonctions s'expriment linéairement au moyen de $n-1$ d'entre elles, qui constituent un système *fondamental*, dont M. Goursat explique la formation; finalement, il parvient à ce théorème :

Toutes les intégrales définies $(v_i v_h)$, formées comme il a été dit plus haut, satisfont à une même équation différentielle linéaire d'ordre $m-1$ à coefficients constants.

Il établit ensuite des règles pour la formation de cette équation et donne de nombreux et intéressants exemples. Enfin, dans la dernière partie de son Mémoire, il indique diverses voies dans lesquelles on peut s'engager pour généraliser les propositions précédentes et étudie en particulier certaines intégrales doubles qui se présentent dans la théorie des intégrales hypergéométriques de deux variables.

Appell. — Sur une classe de fonctions de deux variables indépendantes. (71-86).

I. Soient

$$f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_\nu(x, y), \ldots \tag{1}$$

une suite de fonctions analytiques uniformes des deux variables indépendantes x et y possédant la propriété suivante : Pour toutes les valeurs de ν supérieures à un entier positif μ, on peut assigner un nombre positif a_ν tel que la fonction $f_\nu(x, y)$ reste holomorphe tant que les modules de x et de y restent inférieurs à a_ν; de plus, ce nombre a_ν augmente indéfiniment avec ν. On peut alors former une fonction uniforme $F(x, y)$ des variables indépendantes x et y n'ayant à distance finie d'autres points singuliers que ceux des fonctions (1) et telles que la différence

$$F(x, y) - f_\nu(x, y)$$

soit régulière en tous les points singuliers de $f_\nu(x, y)$, à l'exception de ceux de ces points singuliers qui peuvent appartenir à certaines autres des fonctions (1).

II. Soient

$$g_1(x, y), g_2(x, y), \ldots, g_\nu(x, y), \ldots \tag{2}$$

une suite de fonctions entières de x et y possédant la propriété suivante : Pour toutes les valeurs de x supérieures à un entier positif μ, on peut assigner un nombre positif a_ν tel que la fonction $g_\nu(x, y)$ ne s'annule pour aucun système de valeurs de x et y dont les modules restent inférieurs à a_ν; de plus, ce nombre a_ν augmente indéfiniment avec ν. Alors, en désignant par

$$k_1, k_2, \ldots, k_\nu, \ldots$$

une suite d'entiers positifs, on peut former une fonction entière $G(x, y)$ de x et y, s'annulant pour toutes les valeurs de x et y, qui annulent la fonction $g(x, y)$, de telle façon que le quotient

$$\frac{G(x, y)}{[g\ (x, y)]^{k_\nu}}$$

reste fini et différent de zéro pour toutes ces valeurs, sauf pour celles d'entre elles qui annulent en même temps certaines autres des fonctions entières (2).

Cette fonction $G(x, y)$ est donnée par la formule

$$G(x, y) = G_1(x, y)\, G_2(x, y),$$

où

$$G_1(x,y) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\mu} [g_\nu(x,y)]^{k_\nu},$$

$$G_2(x,y) = \prod_{\nu=1}^{\nu=\infty} [g_\nu(x,y)]^{k_\nu} e^{\gamma_\nu(x,y)},$$

en désignant par $\gamma_\nu(x, y)$ un polynôme convenable.

L'auteur applique ce théorème à la formation de fonctions de deux variables simplement périodiques.

Crone. — Sur une espèce de courbes symétriques de la sixième classe. (31-96).

Les recherches de l'auteur ont pour point de départ la considération d'une courbe symétrique du sixième ordre et de la sixième classe qui est le contour apparent d'une surface du quatrième ordre à conique cuspidale, vue d'un point quelconque sur un plan quelconque. Cette courbe, sans tangentes doubles ni points doubles, a huit tangentes d'inflexion symétriques deux à deux et huit points d'inflexion aussi symétriques deux à deux. Si le nombre de tangentes singulières est augmenté, soit d'une tangente double, soit d'une tangente d'inflexion, tandis que la classe de la courbe reste la même, on a des formes spéciales, savoir : une courbe du quatrième ordre à deux points de rebroussement mais sans points doubles, et une courbe du troisième ordre sans points doubles ni points de rebroussement.

M. Crone montre que les courbes symétriques de la sixième classe et du sixième ordre à huit tangentes d'inflexion sont les courbes générales types, c'est-à-dire que toutes les courbes douées des mêmes nombres plückériens pourront être transformées en des courbes symétriques par une transformation homographique.

La courbe symétrique générale et les deux formes spéciales ont entre elles la relation suivante : si l'on fait tourner une de ces dernières courbes autour de son axe de symétrie, le contour apparent de la surface de révolution vu d'un point quelconque sera toujours une des trois courbes.

Poincaré. — Sur les fonctions de deux variables. (97-113).

Extension aux fonctions de deux variables de ce théorème établi par M. Weierstrass pour les fonctions d'une seule variable : si $F(x)$ est une fonction méromorphe dans toute l'étendue du plan, on peut le mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières.

Picard (E.). — Sur des fonctions de deux variables indépendantes analogues aux fonctions modulaires. (114-135).

Si l'on considère les intégrales définies de la forme

$$\int_g^h \frac{dt}{\sqrt[3]{t(t-1)(t-x)(t-y)}},$$

où g, h désignent deux des quantités 0, 1, x, y, ∞, ces expressions regardées comme des fonctions de x et y satisfont aux trois équations linéaires simultanées aux dérivées partielles :

$$\begin{gathered}
9x(x-1)(x-y)r \\
= (-5x^2+4xy+3x+2y)3p - 3y(1-y)q + (x-y)z, \\
3(x-y)s = p - q, \\
9y(y-1)(y-x)t \\
= -3x(1-x)p + (-5y^2+4xy+3y+2x)q + (y-x)z.
\end{gathered}$$

Ces équations ont trois solutions communes linéairement indépendantes.

M. Picard établit que, en désignant par ω_1, ω_2, ω_3 trois solutions convenables, les équations

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = u, \quad \frac{\omega_3}{\omega_1} = v$$

donnent, pour x et y, des fonctions uniformes de u et v, fonctions qui ne seront définies, si l'on pose $u = u' + iu''$ et $v = v' + iv''$, que pour les valeurs de u et v satisfaisant à l'inégalité

$$2v' + u'^2 + u''^2 < 0.$$

Ces fonctions x et y restent invariables quand on effectue sur u et v une infinité de substitutions linéaires. Les substitutions fondamentales de ce groupe sont

$$(S_1) \qquad \begin{cases} U = \lambda^2 u - (\lambda - 1), \\ V = v + (\lambda - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2); \end{cases}$$

$$(S_2) \qquad \begin{cases} U = \lambda^2 u + (1 - \lambda^2), \\ V = v + (1 - \lambda^2)u - (1 - \lambda^2); \end{cases}$$

$$(S_3) \qquad \begin{cases} U = \dfrac{u}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v}, \\[2ex] V = \dfrac{-\lambda v + \lambda^2 - 1}{-2\lambda + (\lambda^2 - 1)v}, \end{cases}$$

où $\lambda = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. L'auteur termine en indiquant l'intérêt que peuvent présenter ces fonctions x et y dans l'étude des fonctions abéliennes auxquelles conduit la relation algébrique entre z et t

$$z^3 = t(t-1)(t-x)(t-y),$$

relation pour laquelle le nombre caractéristique p est égal à 3 ; les fonctions de u et de v définies précédemment jouent, dans la théorie de ces fonctions abéliennes, le même rôle que la fonction modulaire dans la théorie des fonctions elliptiques.

Valentiner. — Sur la théorie des courbes dans l'espace. (136-230).

La première Section de ce Mémoire comprend divers théorèmes sur lesquels seront fondées les recherches ultérieures de l'auteur; un certain nombre de ces propositions sont connues, mais démontrées d'une façon qui appartient à M. Valentiner. D'autres sont nouvelles; nous signalerons, en particulier, l'étude qu'il fait de la question suivante:

Sur une courbe plane φ_q de degré q, on donne $mq+k$ points $\alpha (k<q)$, dont aucun ne coïncide avec un point double; une courbe plane du $n^{\text{ième}}$ ordre $(n>m)$ qui passe par les points α peut être assujettie à passer par x points arbitraires de φ_n; quelle est la plus grande valeur que l'on puisse donner à x et quelle position occupent alors les points α? Dans la seconde Section, l'auteur traite de la représentation des courbes gauches; il prend pour point de départ le mode de correspondance avec les courbes planes introduit par M. Cayley, correspondance obtenue, comme on sait, au moyen d'un cône et d'un monoïde; tel a été aussi le point de départ de M. Halphen et de M. Noether dans leurs Mémoires couronnés par l'Académie des Sciences de Berlin.

En désignant par

$$\varphi_m - a\varphi_{m-1} = 0$$

l'équation d'un monoïde, où φ_m et φ_{m-1} sont les premiers membres des équations de cônes de degrés respectifs m, $m-1$, qui ont un même sommet, nous appellerons premier cône le cône φ_m, second cône le cône φ_{m-1}. Cela posé, l'auteur établit les propositions suivantes :

« Si l'on considère un cône ayant pour sommet un point arbitraire α et contenant les droites qui passent par le point et rencontrent une courbe gauche C_n en deux points, il y aura toujours un monoïde ayant pour sommet le point α et admettant ce cône comme second cône. »

« Si le nombre h des points doubles d'une courbe plane du $n^{\text{ième}}$ ordre est $\dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$, cette courbe plane est la projection d'une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre; si, au contraire, on a $h \leqq \dfrac{(n-2)(n-3)}{2}$, ceci n'a lieu que dans le cas où les points doubles sont tels qu'une courbe du $(n-4)^{\text{ième}}$ ordre qui passe par $h-1$ de ces points passe aussi par le $h^{\text{ième}}$. »

Dans la troisième Section, l'auteur traite des rayons doubles (droites qui rencontrent la courbe en deux points), en particulier de l'ordre minimum d'un cône qui contient tous les rayons doubles issus d'un point arbitraire, et du nombre de ces droites qu'un cône doit contenir pour les contenir toutes; voici une des propositions auxquelles parvient M. Valentiner :

Quand une courbe gauche c_n admet $h = d - x$ points doubles apparents, on peut toujours faire passer par les rayons doubles un cône du $m^{\text{ième}}$ ordre, lequel peut encore être assujetti au moins à x conditions si l'on a

$$d = \frac{m(m+3)}{2} + \frac{(n-m-2)(n-m-3)}{2}, \quad n-2>m \geqq \frac{n-2}{2}.$$

Voici maintenant les principaux résultats qui sont contenus dans la quatrième Section, où l'on s'occupe des points d'intersection des courbes et des surfaces.

« Si, par une courbe gauche c_n qui admet h points doubles apparents, on peut faire passer deux surfaces F_p, F_q du $p^{\text{ième}}$ et du $q^{\text{ième}}$ ordre, et si ces deux surfaces se coupent, en dehors de c_n, suivant une courbe irréductible c_{pq-n}, cette condition, qu'une surface F_{p+q-4} du $(p+q-4)^{\text{ième}}$ ordre doive passer par c_n, équivaut à

$$(p+q-4)n-\left[\frac{(n-1)(n-2)}{2}-1\right]+1$$

conditions simples.

» Sous ces mêmes conditions, la surface F_{p+q-4}, si elle contient tous les points d'intersection de c_n et de c_{pq-n} moins un, contient aussi ce dernier point. »

C'est l'analogue d'un théorème bien connu de M. Cayley pour les courbes planes.

Enfin la dernière Section contient de nombreux théorèmes relatifs à diverses conditions auxquelles on peut assujettir une courbe gauche.

Ajoutons enfin que, dans ce Mémoire, M. Valentiner n'a fait que reproduire et développer les résultats contenus dans sa dissertation inaugurale : *Bidrag til Raumcurvenes Theori,* qui remonte à l'année 1881.

Mellin (H.). — Sur la fonction transcendante $Q(x) = \Gamma(x) - P(x)$. (231-232).

En posant

$$R(x) = e^{-2}2^x + e^{-3}3^x + e^{-4}4^x + \ldots,$$

on a

$$Q(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-\lambda)}{1.2.3\ldots\lambda} A_\lambda R(x-1-\lambda),$$

où les A_λ sont des coefficients qui peuvent se calculer par la formule récurrente

$$A_\lambda + \lambda A_{\lambda-1} = e.$$

Elliot. — Sur une équation linéaire du second ordre à coefficients doublement périodiques. (233-260).

« L'objet de ce travail est l'intégration d'une équation différentielle à coefficients doublement périodiques qui comprend comme cas particulier l'équation de Lamé. Dans une Lettre adressée à M. Heine (*Journal de Crelle,* t. 89), M. Hermite, à qui l'on doit la solution complète de l'équation de Lamé (*Annali di Matematica,* série II, t. IX), en a achevé l'étude par l'examen du cas où le module est égal à l'unité, et a fait connaître en même temps trois équations linéaires qui ont pour intégrales les fonctions doublement périodiques de seconde espèce. C'est l'une de ces équations dont je m'occupe ici ; elle peut s'écrire

$$(1) \qquad \frac{d^2X}{dz^2} - 2m\frac{\lambda'(z)}{\lambda(z)}\frac{dX}{dz} = [(n-m+1)(n+m)k^2\lambda^2(z) + h_1]X,$$

m et n étant des entiers positifs et $\lambda(z)$ la fonction elliptique au module k.

» La propriété qu'ont en général deux des intégrales de cette équation d'être des fonctions de seconde espèce conduit naturellement à l'introduction de leurs dérivées logarithmiques qui sont des fonctions de première espece, et à leur expression par les fonctions θ (Fuchs, *Journal de M. Resal,* 1878). Mais on n'obtient ainsi que la forme des intégrales, et les arguments des fonctions θ qui restent inconnus doivent être déterminés par d'autres considérations. M. Fuchs a indiqué pour cet objet, et relativement à l'équation de Lamé, une méthode fondée sur les résultats obtenus par lui dans un important Mémoire sur l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre, par des fonctions algébriques (*Journal de Crelle*, t. 81). La transformée à laquelle donne lieu l'équation de Lamé quand on change de variable indépendante, en substituant la fonction $\lambda(z)$ à son argument, se trouve être ainsi un cas particulier d'une classe d'équations linéaires, étudiées par M. Fuchs, et dans les intégrales desquelles figureraient les fonctions θ abéliennes.

» Lorsqu'on reste dans le domaine des fonctions doublement périodiques, on peut, dans un assez grand nombre de cas, arriver directement à la solution complète de la question en cherchant l'expression de la dérivée logarithmique au moyen de la fonction $\lambda(z)$ et de sa dérivée, sous la forme qui résulte du théorème bien connu de Liouville. C'est ce que je me suis proposé de montrer dans ce qui suit, en prenant comme exemple l'équation (1). La première partie contient la recherche de l'intégrale générale quand deux solutions sont des fonctions de seconde espèce. La deuxième est relative aux solutions doublement périodiques de première espèce. Dans la troisième, j'étudie les cas particuliers où le module est égal à l'unité ou à zéro, en mettant à profit la forme analytique donnée par M. Hermite. »

Bourguet. — Sur les intégrales eulériennes et quelques autres fonctions uniformes. (261-292).

M. Bourguet étudie les fonctions $P(z)$ et $Q(z)$ introduites par M. Prym,

$$P(z) = \int_0^1 e^{-x} x^{z-1}\,dx,$$

$$Q(z) = \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1}\,dx;$$

il montre que $Q(z)$ est une fonction transcendante entière et donne une limite supérieure du module de cette fonction.

Il rappelle ensuite cette belle proposition de M. Heine, à savoir que

$$G(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int e^x x^{-z}\,dx,$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour qui contient l'origine et s'étend indéfiniment vers lès x négatifs sans être nécessairement fermé; il déduit de ce théorème la formule

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_1^\infty e^{-\rho}\left(e^{z(\pi i-\log\rho)} - e^{-z(\pi i+\log\rho)}\right) d\rho$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{\cos\omega}\cos[(1-z)\omega + \sin\omega]\,d\omega,$$

et évalue approximativement les coefficients des diverses puissances de z dans le développement des deux parties; ces évaluations permettent de calculer une limite supérieure du reste de la série. Il donne ensuite un moyen pour calculer exactement les cofficients de ce développement ainsi que ceux du développement de $\frac{1}{\Gamma(x)}$. Il introduit enfin diverses fonctions transcendantes entières, savoir :

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= G(x+1) + G(x+2) + \ldots,\\
F_2(x) &= F_1(x) \quad + F_1(x+1) + \ldots,\\
F_3(x) &= F_2(x) \quad + F_2(x+1) + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

dont il indique quelques propriétés. Le Mémoire se termine par des Tableaux numériques donnant avec vingt décimales les coefficients des développements de

$$F_1(x), \quad \frac{1}{\Gamma(x)}, \quad \frac{1}{x(x+1)\Gamma(x)},$$

$$\frac{1}{x(x+1)e^{-cx}\Gamma(x)}, \quad x(x+1)\Gamma(x), \quad \Gamma(x) - P(x).$$

Bourguet. — Sur la fonction eulérienne. (296-298).

L'équation $P(x) = 0$ a une infinité de racines réelles.

Hermite et Lipschitz. — Sur quelques points de la théorie des nombres. (299-304).

Lettre de M. Hermite. — Soit

$$F(n) = \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n),$$

où $\varphi(i)$ est le nombre de diviseurs de i; on a

$$F(n) = 2\sum_{i=1}^{i=\nu} E\left(\frac{n}{i}\right) - \nu^2,$$

où ν est la partie entière de $\sqrt{n}$.

Lettre de M. Lipschitz. — On peut représenter d'une manière analogue la somme

$$F_s(n) = \sum_{i=1}^{i=n} f_s(i),$$

où $f_s(i)$ est le nombre des diviseurs de i qui sont en même temps des puissances $s^{\text{ièmes}}$ exactes d'un nombre.

On a, en effet,

$$F_s(n) = \left(\frac{n^{\frac{1}{s}}}{1^{\frac{1}{s}}}\right) + \left(\frac{n^{\frac{1}{s}}}{2^{\frac{1}{s}}}\right) + \ldots + \left(\frac{n^{\frac{1}{s}}}{n^{\frac{1}{s}}}\right),$$

où (z) désigne le plus grand entier contenu dans z; M. Lipschitz transforme légèrement cette formule et en tire diverses conséquences.

Cantor (*G.*). — Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels. (305-310).

— Une contribution à la théorie des ensembles. (311-328).

— Sur les séries trigonométriques. (329-335).

— Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques. (336-348).

— Sur les ensembles infinis et linéaires de points. (349-380).

— Fondements d'une théorie générale des ensembles. (381-408).

— Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à n dimension. Première Communication. (409-414).

Bendixson (*J.*). — Quelques théorèmes de la théorie des ensembles. (415-420).

On a réuni, dans le quatrième cahier du second Volume des *Acta*, les principaux Mémoires, traduits en français, de M. G. Cantor sur la théorie des ensembles (*Mannigfaltigkeitslehre*).

Ces Mémoires, publiés dans le *Journal de Borchardt* ou dans les *Mathematische Annalen*, ont été, pour la plupart, analysés dans le *Bulletin*; mais la théorie créée par M. Cantor est arrivée maintenant à un degré de développement qui permet une exposition générale que je vais essayer ici; la réédition de ces premiers Mémoires et la publication des *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* (Leipzig, 1883) donnent l'occasion d'appeler l'attention du lecteur sur une théorie qui n'est sans doute ni terminée, ni parfaite, mais qui offre de l'intérêt au point de vue philosophique et qui, dans l'ordre mathématique, est liée assez intimement aux derniers résultats des recherches sur la théorie des fonctions, pour que M. Mittag-Leffler ait cru indispensable d'en rappeler les résultats avant de publier, sous une forme complète, les théorèmes généraux auxquels l'a conduit l'étude des fonctions uniformes.

La notion de nombre irrationnel joue, dans la théorie des ensembles, un rôle essentiel, et il convient, avant tout, de dire quelques mots sur ce sujet; M. Cantor a exposé ses idées sur cette question dans un Mémoire sur les séries trigonométriques (*Math. Annalen*, t. V, p. 283) et dans les *Grundlagen;* dans ce dernier travail, il indique, outre le mode d'exposition auquel il s'est arrêté, la façon dont M. Weierstrass introduit les nombres irrationnels dans son enseignement, ainsi que le résumé des idées de M. Dedekind, que ce dernier a exposées dans un travail publié sous ce titre : *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Je ne veux pas m'arrêter ici aux critiques dirigées par M Cantor contre la définition donnée par M. Weierstrass, critiques dont, je l'avoue, la portée m'échappe. Quant à l'idée qui a servi de point de départ au travail de M. Dedekind, travail que je ne connais d'ailleurs que par la citation de M. Cantor, elle est bien connue en France; elle a été, en effet, formulée, il y a longtemps, dans le *Traité d'Arithmétique* de M. Joseph Bertrand, qui, peut-être, ne lui a pas donné les développements qu'elle méritait : elle consiste à décomposer l'ensemble de tous les nombres rationnels en deux classes, chaque nombre de la première classe étant plus petit que chaque nombre de la seconde classe; j'ajoute qu'un tel mode de décomposition définit un nombre irrationnel si aucun nombre de la première classe n'est plus grand que tous les autres et si aucun nombre de la seconde classe n'est plus petit que tous les nombres de la même classe; on peut dire que le nombre irrationnel ainsi défini est plus grand que tous les nombres (rationnels) de la première classe, plus petit que tous les nombres de la seconde classe; on aperçoit de suite la façon dont on doit définir deux nombres irrationnels égaux, un nombre irrationnel plus grand ou plus petit qu'un autre nombre irrationnel, ainsi que l'extension des propositions fondamentales relatives aux égalités ou inégalités; tout, jusque-là, est très simple et il semble que cette définition soit celle qui se présente le plus naturellement à l'esprit quand on veut définir le nombre qui représente la mesure d'une grandeur continue incommensurable à l'unité, ou, pour rester dans le champ de la pure Arithmétique, quand on veut définir une racine irrationnelle.

Il est clair aussi qu'on peut aller plus loin tout en restant dans la même voie, et la marche qu'a dû suivre M. Dedekind pour étendre aux nombres irrationnels la notion des opérations arithmétiques se présente naturellement à l'esprit. La notion, bien simple dans l'ordre d'idées qui précède, des valeurs approchées d'un nombre irrationnel permet aussi d'abandonner cette voie, et cela mène naturellement à la considération des suites infinies que M. Cantor a prises pour point de départ, ainsi que M. Heine l'avait d'ailleurs fait avant lui; cette façon de voir a d'ailleurs été adoptée par divers géomètres, en particulier par M. Lipschitz.

La notion d'une suite infinie $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de nombres rationnels jouissant de cette propriété que, à chaque nombre positif ε, réponde un indice n tel que l'on ait

$$|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon$$

pour toutes les valeurs positives entières de m, paraît due à Cauchy, qui l'a introduite dans la théorie des séries; M. Heine a pris cette propriété comme définition de la limite : une suite jouissant de cette propriété a, par *définition*, une limite; que les définitions soient arbitraires, c'est une règle admise en logique; mais il est bien entendu que, en se plaçant à ce point de vue, il ne faut rien entendre de plus, tout d'abord, dans le mot *limite*, que ce qui a été mis dans la définition, c'est-à-dire la propriété de la suite. Pour aller plus loin, il convient de porter l'attention sur la propriété suivante de ces suites, qui est fondamentale : « Dans une suite, telle que celles qui ont été définies plus haut et dont les termes ne deviennent pas infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, tous les termes finissent par avoir le même signe et être, en valeur absolue, plus grands qu'un certain nombre positif. Cette proposition montre immédiatement comment une telle suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de nombres rationnels et n'admettant point pour limite quelque nombre rationnel peut, au point de vue de M. Dedekind, définir un nombre irrationnel en permettant de ranger tout nombre rationnel α dans une classe ou dans l'autre, suivant que la suite $a_1 - \alpha, a_2 - \alpha, \ldots$ finit par avoir ses termes tous positifs ou tous négatifs; on a ici le lien entre les deux modes d'exposition; quoi qu'il en soit, pour en revenir au point de vue de M. Cantor, si l'on considère deux suites de nombres rationnels

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \quad b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

ayant, au sens qui a été précisé plus haut, chacune une limite, on dit qu'elles définissent respectivement des nombres a, b et l'on a les relations

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b$$

suivant que les termes de la suite

$$a_1 - b_1, \; a_2 - b_2, \; \ldots, \; a_n - b_n, \; \ldots,$$

deviennent infiniment petits avec $\frac{1}{n}$, ou, dans le cas contraire, finissent par devenir supérieurs à un nombre positif, ou inférieurs à un nombre négatif. La somme des deux nombres a, b, ou leur produit, est définie par l'une ou l'autre des suites

$$\begin{array}{cccc} a_1 + b_1, & a_2 + b_2, & \ldots, & a_n + b_n, \; \ldots, \\ a_1 b_1, & a_2 b_2, & \ldots, & a_n b_n, \; \ldots, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \; \ldots \end{array}$$

Les théorèmes élémentaires d'Arithmétique s'étendent aisément aux nouveaux nombres ainsi définis.

Ces nouveaux nombres déduits de l'ensemble (A) des nombres rationnels par le procédé qui vient d'être décrit constituent un ensemble (B); en partant des nombres rationnels (A) et des nombres (B) et appliquant le même procédé à l'ensemble des nombres (A) et (B), on parviendra à définir de nouveaux nombres (C), etc. M. Cantor regarde les nombres (C) comme distincts des nombres (B). Cette distinction me paraît toutefois absolument formelle; elle ne repose que sur un procédé spécial de définition, tandis que la distinction entre les nombres rationnels et les nombres irrationnels est évidemment fondée en nature; il n'y a pas lieu, pour le moment, de s'y arrêter et je ne l'ai signalée que pour montrer le caractère subtil et métaphysique qu'affectent volontiers, comme la suite le montrera amplement, les ingénieuses spéculations de M. Cantor.

La notion de nombre réel (rationnel ou non) étant bien éclaircie, l'auteur se propose d'étudier les *ensembles* formés de tels nombres. On dit qu'un ensemble (E) de nombres réels distincts est donné, quand on fournit le moyen de reconnaître si un nombre a quelconque appartient ou non à cet ensemble; tel est, par exemple, l'ensemble de tous les nombres entiers, l'ensemble de tous les nombres positifs, l'ensemble de tous les nombres irrationnels, etc. On peut d'ailleurs concevoir qu'un ensemble soit *bien défini,* sans qu'il soit *donné explicitement;* on peut aussi considérer, au lieu d'un ensemble de nombres, un ensemble dont les éléments soient quelconques, un ensemble de points, ou de surfaces, ou de lignes dans un espace à un nombre quelconque de dimensions.

Un ensemble peut être composé d'un nombre fini ou infini d'éléments. Aux ensembles composés d'un nombre fini d'éléments correspond la notion de nombre entier; aux ensembles composés d'un nombre infini d'éléments correspond la notion de *puissance.* Deux ensembles bien définis E, E' sont dits *équivalents,* ou de même puissance si l'on peut les faire correspondre élément par élément au moyen d'une opération à sens unique. M. Cantor écrit alors $E \backsim E'$. Un ensemble est de la première puissance s'il est équivalent à l'ensemble $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ des nombres entiers positifs; ses éléments peuvent être alors arrangés suivant une série

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots.$$

On dit encore qu'il est *dénombrable*. Il convient d'observer que les ensembles dénombrables sont beaucoup plus riches qu'il ne semble à première vue. Tout d'abord, si l'on considère l'ensemble des nombres compris dans la formule

$$a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n},$$

où les n indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, doivent prendre toutes les valeurs de zéro à l'infini, on aperçoit de suite qu'on a affaire à un ensemble de première puissance.

Un cas particulier de ce théorème consiste en ce que l'ensemble des nombres rationnels est dénombrable. M. Cantor montre plus généralement qu'il en est de même de l'ensemble des nombres réels algébriques, c'est-à-dire des nombres réels qui sont racines d'une équation entière à coefficients entiers. Ces propositions donnent de l'intérêt au théorème suivant :

« Lorsqu'on a une suite infinie de nombres réels différents les uns des autres se succédant suivant une loi déterminée quelconque

$$(a) \qquad a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots,$$

on peut, dans chaque intervalle (α, β) donné d'avance, déterminer un nombre η qui n'appartient pas à la suite (a); il existe, par conséquent, une infinité de tels nombres η. »

Ce théorème met en évidence l'impossibilité de dénombrer l'ensemble des nombres réels compris entre deux limites quelconques.

Si l'on considère un ensemble M, tout ensemble M' dont les éléments appartiennent tous à l'ensemble M est dit une partie aliquote de M, ou un diviseur de M. Réciproquement, M est dit un multiple de M'. Le plus grand commun diviseur D(M, N) de deux ensembles M, N est l'ensemble composé des éléments communs; si les deux ensembles n'ont point d'élément commun, s'ils sont *sans connexion,* leur plus grand commun diviseur est nul. Le plus petit commun multiple de plusieurs ensembles M_1, M_2, M_3, ... est l'ensemble de tous les éléments différents qui figurent dans ces ensembles; si les ensembles M_1, M_2, ..., sont sans connexion, leur plus petit commun multiple est leur produit P, que M. Cantor écrit, suivant les cas,

$$P \equiv (M_1, M_2, M_3, \ldots) \quad \text{ou} \quad P \equiv M_1 + M_2 + M_3 + \ldots,$$

le signe $\equiv$ exprimant l'identité des ensembles dont les symboles figurent dans les deux membres.

Il est clair qu'une partie aliquote d'un ensemble peut être de même puissance que cet ensemble; par exemple, l'ensemble des nombres pairs est évidemment équivalent à l'ensemble des nombres entiers; si un ensemble M' qui divise un ensemble M ne lui est pas équivalent, on dit que la puissance de M', ou de tout ensemble équivalent à M', est inférieure à la puissance de M. Ainsi l'ensemble *dénombrable* des nombres rationnels compris entre zéro et un a une puissance inférieure à l'ensemble des nombres réels compris entre zéro et un.

A ce fait que ce dernier ensemble n'est pas dénombrable, se relie une proposition intéressante au point de vue philosophique, en ce sens qu'elle met hors de doute la nécessité de faire entrer la notion de continuité dans celle de dimension; M. Cantor montre, en effet, qu'on peut faire correspondre d'une façon complète et à sens unique un ensemble continu à n dimensions à un ensemble continu d'une seule dimension; en d'autres termes, les éléments d'un ensemble continu à n dimensions peuvent être déterminés à sens unique par une seule coordonnée t continue et réelle, comme par un système de m coordonnées continues, m étant égal à n ou différent.

Ainsi, étant donné un cercle et un segment de droite limité, on peut établir une correspondance univoque entre chaque point de la droite et chaque point appartenant à la surface ou à la circonférence du cercle.

Cette proposition dépend de la suivante:

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n grandeurs réelles, variables indépendantes l'une de l'autre, dont chacune peut prendre toutes les valeurs supérieures ou égales à zéro et inférieures ou égales à un, et soit t une autre variable comprise dans les mêmes limites ($0 \leqq t \leqq 1$), on peut faire correspondre cette grandeur t au système des n grandeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de telle sorte que à chaque valeur déterminée de t appartienne un système de valeurs déterminées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et *vice versa* à chaque système de valeurs déterminées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une certaine valeur de t.

La démonstration de cette dernière proposition repose essentiellement sur ce qu'on peut faire correspondre d'une façon univoque une valeur quelconque incommensurable de t comprise entre zéro et un système de valeurs incommensurables des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, comprises elles aussi entre zéro et un. La possibilité de cette correspondance tient à ce fait qu'un nombre incommensurable est déterminé par une suite infinie de nombres entiers, par exemple, s'il s'agit d'un nombre incommensurable compris entre zéro et un, par la suite des entiers positifs $a_1, a_2, a_3, \ldots$ qui figurent dans la fraction continue illimitée

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}},$$

qui est égale à ce nombre : convenons de représenter une telle fraction par le symbole $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$; l'ensemble de n valeurs irrationnelles déterminées des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se représentera de même par n symboles

$$(\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \alpha_{i,3}, \ldots),$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$, et l'on fera correspondre d'une façon univoque la suite de ces n symboles et le symbole $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ en supposant, par exemple,

$$a_{(j-1)n+i} = \alpha_{i,j},$$

où $i = 1, 2, \ldots, n; j = 1, 2, \ldots, \infty$.

Il suffit, pour compléter la démonstration, de prouver qu'une grandeur variable e qui peut prendre toutes les valeurs numériques irrationnelles de l'intervalle $(0, -1)$ peut se joindre à sens unique à une variable x comportant toutes les valeurs réelles du même intervalle $(0 - 1)$, en sorte que, à chaque valeur irrationnelle de e comprise entre zéro et un corresponde une valeur réelle et une seule appartenant à l'intervalle $(0, 1)$ et que, réciproquement, à chaque valeur réelle de x corresponde une certaine valeur irrationnelle de e. Cette dernière proposition se démontre facilement. Le mode de correspondance que l'on établit ainsi entre un espace à une dimension et un espace à n dimensions montre bien le caractère philosophique de la proposition, car il ne semble pas qu'on puisse, au point de vue analytique, en tirer aucun parti.

Il n'en est pas de même de la notion des ensembles *dérivés* dont l'importance, au point de vue mathématique, ne saurait échapper au lecteur.

Étant donné un ensemble (E) dont les éléments, en nombre infini, sont toujours supposés être des nombres réels distincts, on dit qu'un nombre a est une *valeur limite* de cet ensemble si, dans tout intervalle comprenant a, il existe une infinité de nombres appartenant à l'ensemble E. Cette notion s'étend sans peine aux ensembles composés d'un nombre infini de points distincts dans un espace à un nombre quelconque de dimensions, et l'on conçoit sans difficulté ce qu'il faut entendre par un point limite d'un tel ensemble.

L'ensemble des valeurs limites, ou des points limites, d'un ensemble bien défini E, de nombres ou de points, constitue un nouvel ensemble bien défini E qui peut d'ailleurs être composé d'un nombre fini ou infini d'éléments. L'ensemble E' est dit dérivé de l'ensemble E. L'ensemble E', s'il est composé d'un nombre infini d'éléments, donnera de même naissance à un second ensemble dérivé E'', etc.; il peut se faire que, en continuant indéfiniment dans cette voie, on trouve un nombre illimité d'ensembles dérivés E', E'', E''', ... Il peut se faire que, au bout d'un certain nombre d'opérations, on tombe sur un ensemble $E^{(n)}$ composé d'un nombre limité d'éléments; on écrit alors $E^{(n+1)} \equiv 0$ et l'on dit que les ensembles dérivés qui suivent $E^{(n)}$ sont nuls. Dans ce dernier cas, on dit que l'ensemble E est du premier *genre* et de la $n^{\text{ième}}$ *espèce;* dans le premier cas E est un ensemble du second genre. Il est à remarquer que les éléments de l'ensemble E' peuvent ne pas appartenir au premier ensemble E, mais que les éléments des ensembles E'', E''', ... appartiennent tous nécessairement à E'.

Si, par exemple, on considère une suite infinie de nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ admettant au sens ordinaire du mot une limite, l'ensemble des nombres qui forment cette suite appartiendra au premier genre; l'ensemble dérivé se composera d'un seul nombre, à savoir la limite de la suite infinie; l'ensemble des nombres rationnels qui appartiennent à l'intervalle $(0, 1)$ a pour dérivé l'ensemble des nombres réels qui appartiennent au même intervalle et leurs dérivés successifs sont identiques à ce dernier ensemble; de tels ensembles, qui sont identiques à leurs dérivés, sont dits *parfaits.*

Considérons un ensemble du second genre E et ses dérivés successifs $E', E'', \ldots$; chaque ensemble dérivé est un diviseur des ensembles dérivés qui le précèdent; soit $E^{(\omega)}$ le plus grand commun diviseur de tous les dérivés $E', E'', E''', \ldots$, c'est-à-dire l'ensemble des nombres (ou des points) communs aux ensembles E', E'', E''', ..., ou encore, si l'on veut, l'ensemble des nombres (ou des points) qui ne disparaissent jamais, si loin qu'on s'avance dans la suite infinie $E', E'', \ldots$; l'ensemble $E^{(\omega)}$ pourra appartenir lui-même au second genre et admettre ainsi une infinité de dérivés successifs que l'on pourra représenter par $E^{(\omega+1)}, E^{(\omega+2)}, \ldots$; chacun de ces dérivés divisera encore les précédents; soit de même $E^{(2\omega)}$ le plus grand commun diviseur de tous les dérivés $E^{(\omega+1)}, E^{(\omega+2)}, \ldots$; si $E^{(2\omega)}$ est du second genre, il y aura lieu de considérer le plus grand commun diviseur $E^{(3\omega)}$ de ses dérivés successifs $E^{(2\omega+1)}, E^{(2\omega+2)}, \ldots$; en continuant ainsi, on aperçoit le sens du symbole $E^{(\lambda_1\omega+\lambda)}$, où λ et λ_1 sont des entiers positifs; maintenant, on représentera par $E^{(\omega^2)}$ le plus grand commun diviseur de tous les ensembles

$$E^{(\omega)},\ E^{(2\omega)},\ E^{(3\omega)},\ \ldots,$$

qui divise d'ailleurs tous les ensembles compris dans la formule $E^{\lambda_1\omega+\lambda}$, λ_1 et λ

prenant toutes les valeurs entières positives, en excluant toutefois la combinaison $\lambda = \lambda_1 = 0$; en continuant ainsi, on fixera le sens du symbole

$$E^{(\lambda_2\omega^2+\lambda_1\omega+\lambda)},$$

et plus généralement du symbole

$$E^{\lambda_n\omega^n+\lambda_{n-1}\omega^{n-1}+\ldots+\lambda_1\omega+\lambda},$$

où les λ prennent toutes les valeurs entières positives, sans toutefois être nuls à la fois; le plus grand commun diviseur de tous les ensembles compris dans la formule précédente sera représenté par le symbole

$$E^{(\omega^\omega)}, \ldots.$$

Il peut se faire qu'en continuant toujours on tombe sur un ensemble composé d'un nombre fini de points, et alors les ensembles dérivés suivants seront nuls; il peut aussi arriver que cette circonstance ne se présente jamais. Désignons par α l'un quelconque des symboles $\omega, \omega+1, \ldots, \lambda_n\omega^n+\ldots+\lambda, \ldots, \omega^\omega, \ldots,$ que M. Cantor appelle *symboles d'infini;* on comprend sans autre explication ce qu'il faut entendre par un symbole d'infini qui en précède un autre. Dans la théorie des ensembles, ces symboles ont un sens très précis et il semble difficile d'élever quelque objection contre leur introduction. Mais l'auteur veut les séparer de la théorie qui leur a donné naissance, de la même façon que, pour arriver à la notion de nombre entier, on fait abstraction de la nature des groupes d'objets que ces nombres peuvent servir à comparer. Ces symboles d'infini, M. Cantor les regarde comme des *nombres entiers;* ainsi ω sera dit un nombre entier *immédiatement supérieur à tous les nombres de la suite naturelle* 1, 2, 3, ..., n, ...; en partant ensuite du nombre ω, on forme la nouvelle suite de nombres entiers consécutifs

$$\omega+1, \ \omega+2, \ \omega+3, \ \ldots,$$

et 2ω est regardé comme un nombre entier immédiatement supérieur aux nombres de cette suite, etc. Ces dénominations choquent sans doute les habitudes; mais, après tout, il n'y a peut-être pas lieu de s'arrêter à la répugnance que peut nous causer l'emploi inusité de tel ou tel vocable, et de reprocher à l'auteur d'avoir substitué à cette expression « symbole d'infini » le mot de « nombre », ou de dire « nombre plus petit qu'un autre » au lieu de « symbole d'infini précédant un autre symbole ».

Quoi qu'il en soit, dans la terminologie de l'auteur, les nombres entiers ordinaires 1, 2, 3, ..., n, ... formant la première classe, ou la classe (I) des nombres entiers, puis les symboles d'infini ou nombres

$$\omega, \ \omega+1, \ \ldots, \ \lambda_n\omega^n+\lambda_{n-1}\omega^{n-1}+\ldots+\lambda, \ \ldots, \ \omega^\omega, \ \ldots, \ \omega^{\omega^\omega}, \ \ldots, \ \alpha, \ \ldots,$$

formés comme il a été expliqué, constituent, dans leur ensemble, la deuxième classe ou la classe (II) des nombres entiers; il est toutefois nécessaire d'ajouter ici quelques explications qui concernent la *limitation* de la classe (II); si l'on considère les nombres de la classe (I) dans leur succession naturelle, il est clair que, si l'on s'arrête à un terme quelconque dans la suite qu'ils forment, le nombre des termes qui le précèdent est fini; voici la propriété des nombres de la classe (II) qui correspond à ce fait évident : si l'on s'arrête à un terme quelconque de la classe (II), l'ensemble des nombres entiers qui le précèdent dans les classes (I) et (II) est de la première puissance; en d'autres termes, cet ensemble peut être arrangé suivant une suite simplement infinie, telle que u_1, u_2, ..., u_n, ... Cela est bien évident, si l'on se reporte au procédé qui a été décrit pour la formation des nombres (α); par exemple, l'ensemble des nombres qui précèdent ω^ω est compris dans la formule

$$\lambda_n \omega^n + \lambda_{n-1} \omega^{n-1} + \ldots + \lambda,$$

où il faut donner aux λ toutes les valeurs entières 1, 2, ..., ∞, en excluant toutefois la combinaison $\lambda_n = \lambda_{n-1} = \ldots = \lambda = 0$. On a expliqué au commencement de cet article qu'un tel système peut toujours se mettre sous forme d'une série simplement infinie et qu'il a, par suite, la première puissance; d'ailleurs, comme toute suite de systèmes dont chacun est de la première puissance donne toujours lieu, si elle est elle-même de la première puissance, à un nouveau système de la première puissance, il est clair que, si loin que l'on s'avance dans la suite des nombres de la seconde classe, formés par le procédé décrit, on aura toujours derrière soi un ensemble de nombres ou de symboles qui sera de la première puissance. La seconde classe de nombres est en quelque sorte limitée par le caractère de ses éléments; maintenant, il importe essentiellement de remarquer que l'ensemble des nombres de la seconde classe n'est pas de la première puissance, mais bien d'une puissance supérieure; M. Cantor montre qu'il y a lieu de regarder cette puissance comme immédiatement supérieure à la première et, par suite, comme étant égale à deux.

En poursuivant le même ordre d'idées, on est amené à introduire un nombre Ω que l'on regarde comme immédiatement supérieur à tous les nombres de la classe (II) et en partant duquel on formera la *troisième classe* de nombres entiers; celle-ci sera *limitée* par ce caractère de ses éléments, à savoir que l'ensemble des nombres des classes (I), (II), (III) qui le précèdent est toujours de la deuxième puissance; l'ensemble des nombres de la classe (III) est de la troisième puissance, etc.; on conçoit ainsi la formation d'une suite infinie de classes de nombres, dont chacune est limitée par le même principe et qui permettent de définir les puissances entières successives.

M. Cantor tire parti de ces notions pour le *dénombrement d'un ensemble bien ordonné* : le concept de système dénombrable, précédemment introduit, peut, en effet, être grandement généralisé. Par *ensemble* ou *système bien ordonné*, il faut entendre tout système bien défini, où les éléments sont unis entre eux par une succession donnée et déterminée, d'après laquelle il y a *un premier élément* du système; chaque élément (pourvu qu'il ne soit pas le dernier dans la succession) est suivi immédiatement d'un autre déterminé, et à chaque système arbitraire d'éléments, fini ou infini, correspond un élément *déterminé*, qui les suit *immédiatement* dans la succession (pourvu que dans l'ensemble il y ait des éléments qui suivent tous les éléments du système partiel considéré). Ainsi, d'un ensemble (a_ν) de la première puissance, on peut déduire, de différentes manières, des ensembles bien ordonnés, par exemple, les suivants :

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots),$$
$$(a_2, a_3, \ldots, a_\nu, a_{\nu+1}, \ldots, a_1),$$
$$(a_1, a_3, \ldots, a_{2\nu-1}, \ldots, a_2, a_4, \ldots, a_{2\nu}, \ldots).$$

Deux systèmes bien ordonnés sont dits avoir *le même nombre* (et ce nombre dépend essentiellement de l'ordre de succession des éléments) lorsqu'on peut établir entre eux une correspondance réciproque à sens unique, tel que deux éléments de l'un des systèmes se succèdent dans le même ordre que dans l'autre système, les éléments correspondants. S'il existe un tel mode de correspondance, il est unique : ceci posé, en admettant que le système $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ ait pour nombre ω, les trois systèmes bien ordonnés qui ont été écrits plus haut auront pour nombres respectifs ω, $\omega+1$, 2ω.

C'est sur cette conception que M. Cantor essaye de fonder une théorie arithmétique des nombres de diverses classes et des opérations arithmétiques élémentaires à effectuer sur ces nombres.

Voici maintenant, relativement aux ensembles de points situés dans un espace continu (que l'on peut supposer à n dimensions) une remarque importante:

Soit P un tel ensemble qui ne soit pas un ensemble parfait, c'est-à-dire qui ne soit pas identique à son premier dérivé P'; l'ensemble $P - P'$ jouira de cette propriété qu'autour de chacun de ses points on pourra décrire une sphère de rayon fini telle qu'aucun autre point de l'ensemble ne soit situé à l'intérieur ou sur la limite de la sphère. C'est là le caractère d'un *ensemble isolé*. Il est aisé de voir que tout ensemble isolé Q est de la première puissance; cela est manifeste si l'ensemble Q peut être compris tout entier à l'intérieur d'une sphère de rayon fini. Si l'on imagine alors, en effet, chaque point entouré de sa sphère *isolante*, on observe immédiatement que celles de ces sphères dont le rayon est supérieur à un nombre positif donné quelconque sont en nombre fini : il suffira donc de ranger les sphères isolantes par ordre de grandeur pour ranger du même coup les points de l'ensemble comme une suite $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. On ramène maintenant le cas où l'espace qui contient Q est infini au cas qui vient d'être traité au moyen d'une transformation par rayons vecteurs réciproques. Voici maintenant, dans le même ordre d'idées, quelques théorèmes plus généraux.

» A. Un ensemble de points P (situé dans un espace continu G_n à n dimensions) ayant la *première puissance* ne peut jamais être un ensemble parfait.

» B. Le nombre α appartenant à la *première* ou à la *seconde* classe de nombres, soit P un ensemble de points tel que son ensemble dérivé $P^{(\alpha)}$ d'ordre α soit nul; alors le premier ensemble dérivé $P^{(1)}$ de P et l'ensemble P lui-même sont de la première puissance, sauf les cas où les ensembles P ou $P^{(1)}$ sont finis.

» C. P étant un ensemble de points tel que son premier dérivé $P^{(1)}$ soit de la première puissance, il existe des nombres α de la *première* ou de la *seconde* classe de nombres, tels qu'on ait identiquement

$$P^{(\alpha)} = 0,$$

et de tous ces nombres α il y en a un qui est le plus petit.

D. Si P a une puissance plus grande que la première, il existe toujours des points qui appartiennent à la fois à tous les $P^{(\gamma)}$ [où γ parcourt tous les nombres de la classe (I) et (II)].

E. Si $P^{(\Omega)}$ est l'ensemble de tous les points du théorème (D), $P^{(\Omega)}$ est un ensemble parfait; Ω est le premier nombre de la classe III.

F. Si $P - P^{(\Omega)} \equiv R$, R a la première puissance.

» G. Il existe un γ, appartenant aux nombres de la classe (I) ou (II), tel que le plus grand commun diviseur de R et de $R^{(\gamma)}$ soit nul.

Les quatre derniers théorèmes ont été énoncés et démontrés par M. Bendixson dans une Lettre adressée à M. Cantor, qui était lui-même en possession des théorèmes D, E, F.

Je terminerai cette longue analyse en donnant, d'après l'auteur, la définition purement arithmétique d'un ensemble continu de points dans un espace plan à n dimensions G_n; un point est d'abord défini par le système de ces n coordonnées; la notion de distance s'ensuit immédiatement. Maintenant un ensemble infini S de points sera dit *continu*, 1° s'il est *parfait*, 2° s'il est *parfaitement enchaîné*. M. Cantor dit que T est un système bien enchaîné quand, considérant deux points quelconques t et t' de ce système et un nombre positif ε aussi petit qu'on voudra, il y a toujours un nombre fini de points $t_1, t_2, \ldots, t_\nu$ de T tels que les distances $tt_1, t_1t_2, \ldots, t_nt'$ soient toutes plus petites que ε.

M. Cantor fait cette curieuse remarque que si d'un ensemble continu quelconque, par exemple de l'espace ordinaire E à trois dimensions, on supprime un ensemble infini de points de la première puissance, par exemple l'ensemble des points à coordonnées rationnelles, l'ensemble E' restant, qui ne sera plus un *continu* au sens précédent, sera encore *connexe,* c'est-à-dire qu'on pourra en joindre deux points quelconques par un trait continu dont tous les points appartiennent à E'. Il donne aux géomètres le singulier conseil d'essayer de fonder une mécanique modifiée, applicable aux espaces de la même nature que E'. « Grâce aux résultats de ces recherches, que l'on comparera avec les faits, on arrivera peut-être à obtenir des points d'appui réels pour l'hypothèse de la continuité générale de l'espace tel qu'on le conçoit dans la pratique. » C'est là une espérance qu'il est peut-être permis de ne pas partager.

J. T.

OVERSIGT OVER DET KONGELIGE DANSKE VIDENSBABERNES SELSKABS FORHANDLINGER (¹).

Année 1877.

Steen (A.). — Sur la loi des variations des positions des axes principaux. (10-19).

L'auteur développe de nouvelles expressions servant à determiner les axes principaux d'un corps qui correspondent aux différents points de l'espace.

Année 1879.

Lorenz (L.). — Sur la propagation de l'électricité (41-72).

Zeuthen (H.-G.). — Sur quelques-unes des propriétés des courbes du quatrième ordre à deux points doubles. (89-122; résumé en français, 15-19).

(¹) *Bulletin de l'Academie Royale danoise des Sciences et des Lettres.* — Voir *Bulletin*, I_2, p. 194.

Une courbe du quatrième ordre à deux points doubles peut toujours être regardée comme projection centrale de la courbe d'intersection d'un faisceau de surfaces du deuxième ordre. Les contours apparents de ces surfaces forment un système singulier de coniques tangentes quatre fois à la courbe. Ce sont les propriétés de ce système dont s'occupe l'auteur.

Mejer (*Osvald*). — Sur le comput ecclésiastique. (195-234; résumé en français, 27-36).

Année 1880.

Colding (*A.*). — Recherches sur la vitesse du vent. (41-62).

Zeuthen (*H.-G.*). — Construction du huitième point commun aux surfaces du second ordre qui passent par sept points donnés. (227-236; résumé en français, 28-29).

L'auteur a exposé ailleurs les mêmes constructions comme des exemples d'une théorie des figures projectives sur une surface du second ordre (*Mathematische Annalen*, t. XVIII). Le Mémoire actuel en contient une déduction indépendante de cette théorie.

Steen (*A.*). — Sur l'intégration des équations différentielles par des intégrales définies. (237-243).

L'équation différentielle $y'' - axy' + \mu a y = 0$ a (si $\mu > -1$) pour intégrales particulières

$$y = \int_{\infty\sqrt{-1}}^{0} e^{\frac{1}{2}a(x+\alpha)^2} \alpha^\mu d\alpha$$

et

$$y = x^\mu - \frac{\mu(\mu+1)}{2a} x^{\mu-2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)}{2.4a^2} x^{\mu-4} + \ldots$$

Année 1881.

Thiele (*T.-N.*). — Des formules d'interpolation relatives aux étoiles doubles. (129-155).

Afin de représenter les mouvements des étoiles doubles qu'on ne peut encore assujettir à un calcul d'orbite propre, l'auteur recommande l'application de formules conformes à la loi des aires, et, en particulier, de celles où la distance apparente r dépend du temps suivant l'équation

$$r^2 = l + mt + nt^2,$$

où, par conséquent, l'orbite apparente est la même qui résulterait d'une attraction inversement proportionnelle au cube de la distance apparente. L'auteur discute les différents cas qui correspondent à cette loi, et expose en détail des méthodes servant à la détermination des constantes par les observations.

Hansen (*P.-C.-V.*). — Remarques sur l'intégration de l'équation différentielle $f\left(\frac{du}{dz}, u\right) = 0$. (156-170; résumé en français, 7-8).

f étant une fonction rationnelle et entière de $\frac{du}{dz}$ et u, l'auteur cherche l'intégration de $f\left(\frac{du}{dz}, u\right) = 0$ dans les cas où u devient une fonction algébrique de z ou une fonction simplement périodique qui, pour chaque valeur finie de z, n'a qu'un nombre fini de valeurs.

Année 1882.

Oppermann (*L.*). — Remarques sur notre connaissance des nombres premiers et de la loi de leur fréquence. (169-179; résumé en français, 9-12).

Le but de cette Communication est de donner un aperçu, tant de l'état actuel de nos connaissances en ce qui concerne la quantité et la distribution des nombres premiers que des progrès qu'on peut espérer voir se réaliser à cet égard dans un avenir prochain.

Christiansen (*C.*). — Méthodes propres à mesurer l'indice de réfraction de liquides coloriés. (217-250).

Année 1883.

Christiansen (*C.*). — Mesurage absolu de l'absorption et de l'émission de chaleur. (20-57).

Mynster-Fischer (*J.-P.*). — Observations magnétiques faites à des points différents du Danemark.

Christiansen (*C.*). — Sur la dépendance de l'émission de chaleur de la forme de la surface. (139-149).

TIDSSKRIFT FUR MATHEMATIK. Udgivet af H.-G. Zeuthen (4e série) (1).

Tome III; 1879.

Bing (*F.*). — Sur la probabilité *a posteriori*. (1-22).

Polémique sur la même matière entre MM. Lorenz et Bing. (57-70, 118-131).

M. Bing critique l'application ordinaire de l'extension suivante de la règle de Baye : La probabilité qu'un fait connu serait le résultat d'une cause donnée est proportionnelle et à la probabilité, donnée *a priori*, que cette cause entrera en activité, et à la probabilité que la cause, lorsqu'elle entre en activité, aura pour effet le fait connu. La règle est juste lorsqu'on a une connaissance complète des différentes causes possibles; mais, lorsque cette connaissance est incomplète, son application peut conduire à des paradoxes, dont l'auteur ajoute de nouveaux exemples, pris de la théorie de mortalité, à ceux qui étaient exposés antérieurement par d'autres auteurs. L'auteur montre ensuite l'impossibilité de substituer une autre règle à celle de Baye et déclare, en conséquence, qu'il n'existe aucune probabilité *a posteriori* dans le cas où l'on ne connaît pas les différentes causes qui peuvent avoir agi.

Sous cette dernière condition, M. Lorenz ne nie pas la conclusion de M. Bing; mais, selon lui, cet auteur a eu tort en faisant usage de raisonnements d'une portée beaucoup plus grande.

Valentiner (*H.*). — Théorèmes sur les courbes d'intersection complète de deux surfaces. (22-30).

Détermination : 1° du nombre de points d'une surface d'ordre q suffisant à déterminer sa courbe d'intersection avec une surface inconnue d'ordre $p \geqq q$; 2° de la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface d'ordre $n > p \geqq q$ passe par la courbe d'intersection complète de surfaces des ordres p et q; 3° le nombre des constantes dont dépend une surface qui doit contenir une courbe d'intersection complète inconnue de surfaces d'ordres donnés. L'auteur fait observer que c'est à tort qu'on a supposé qu'une surface du quatrième ordre contient, en général, des courbes d'intersection de surfaces du deuxième ordre.

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur la construction de polygones funiculaires pour des forces données dans l'espace. (46-57; 96-101).

Pour cette construction, l'auteur fait usage d'une figure des forces analogue à celle qu'on applique à la construction de polygones funiculaires plans.

Thiele (*T.-N.*) — Remarques sur la convergence de fractions continues périodiques. (70-74).

---

(1) Voir *Bulletin*, III_2, 163.

Crone (*C.*). — Démonstrations élémentaires et géométriques de théorèmes sur les courbes bicirculaires du quatrième ordre. (81-86).

Petersen (*Jules*). — Le théorème de réciprocité. (86-90).

Démonstration très simple de l'extension due à Jacobi du théorème de Legendre sur une réciprocité dans la théorie des nombres. L'auteur a communiqué la même démonstration dans l'*American Journal*, t. II.

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Représentation indépendante de quelques quotients différentiels d'ordre supérieur. (90-95).

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Sur la multiplication de deux séries infinies. (95-96).

Eneström (*G.*). — Contributions diverses à l'histoire des Mathématiques : I. Les solutions singulières des équations différentielles (113-118). — II. Représentation de quantités inconnues par des lettres ordinaires. (161-165).

Hertzsprung (*S.*). — Solution et extension d'une question. (134-140).

La question proposée était de trouver le nombre des termes d'un déterminant, qui ne contiennent aucun élément de la diagonale. L'auteur résout aussi la question où il s'agit des termes qui ne contiennent aucun élément, ni de l'une ni de l'autre des deux diagonales.

Zeuthen (*H.-G.*). — Hypothèses sur l'extraction des racines carrées d'Archimède. (145-155).

Après avoir rendu compte de différentes hypothèses, l'auteur en expose deux nouvelles, l'une de M. Steen, l'autre de lui-même. La dernière contient une explication du fait que les convergentes d'Archimède sont des convergentes à des fractions continues sans y être des convergentes successives.

Hansen (*P.-C.-V.*). — Sur l'intégration de différentielles à plusieurs variables indépendantes. (165-170).

Extension au cas de plusieurs variables de la considération qu'une intégrale est la somme de ses éléments.

Petersen (*Jules*). — Une remarque sur les équations aux différentielles partielles. (170-171).

Tome IV ; 1880.

Thiele (*T.-N.*). — Construction des axes d'une ellipse dont on connaît deux diamètres conjugués. (1-3).

Zeuthen (*H.-G.*). — Des paradoxes apparents dans la théorie du mouvement central. (3-9).

Thiele (*T.-N.*). — Études analytiques sur les principes des Mathématiques pures. (33-62).

Analyse abstraite des conséquences respectives de chacun des principes sur les opérations numériques élémentaires.

Juel (*C.*). — Déduction géométrique des propriétés fondamentales des surfaces du quatrième ordre à une conique double. (81-108; 113-121).

L'auteur prend pour point de départ la génération des surfaces par deux faisceaux de quadratiques passant par la conique double.

Hansted (*Birger*). — Méthodes pour intégrer certaines équations différentielles au moyen d'intégrales définies. (121-135).

Cayley (*A.*). — Sur le nombre des constantes de l'équation de la surface $PS - QR = 0$. (145-148).

Hansen (*P.-C.-V.*). — Remarques sur l'intégration algébrique de certaines équations différentielles linéaires. (148-154).

Toute fonction algébrique peut être une intégrale particulière d'une équation différentielle linéaire à des coefficients rationnels. L'auteur montre quelques dépendances qui doivent avoir lieu entre la fonction et l'équation.

Dahl (*C.*). — Démonstration d'un théorème de la théorie des invariants. (154-158).

Zeuthen (*H.-G.*). — Une démonstration de l'existence de l'intégrale générale de l'équation $f(x, y, y') = 0$. (161-167).

Petersen (*Jules*). — Sur les covariants des formes binaires. (177-190).

Dans ce Mémoire, continué dans l'année suivante du *Tidsskrift*, l'auteur déduit les différents covariants, et les relations ayant lieu entre les covariants des semi-invariants et des relations qui ont lieu entre les semi-invariants.

Tome V; 1881.

Valentiner (*H.*). — Démonstration d'un théorème sur les courbes algébriques. (1-3).

Le théorème dont il s'agit est le suivant : « Si mn points du plan satisfont à la condition que toute courbe d'ordre n passant par $mn - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ des points passera par les autres, il faut (pour $n > m > 3$) que tous ces points se trouvent sur une courbe d'ordre m. » Le théorème réciproque est bien connu.

Petersen (*Jules*). — Démonstration élémentaire du théorème de Desargues, avec une application. (4-5).

Hansted (*Birger*). — Transformations de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants par la substitution d'une nouvelle variable indépendante. (5-12).

Hansted (*Birger*). — Notes sur la détermination des coefficients de la $m^{\text{ième}}$ puissance d'une série. (12-16).

Tucen (*C.*). — Contribution à la théorie des nombres premiers. (16-25).

Petersen (*Jules*). — Sur les covariants de formes binaires. (*Suite*, 33-40).

Formation de semi-invariants.

Zeuthen (*H.-G.*). — Détermination du plus grand facteur commun à deux polynômes par des déterminants. (45-55; 109-124).

L'auteur joint aux conditions d'un facteur commun d'un certain degré et à l'expression du facteur commun la formation d'une série de polynômes dont on peut faire usage à l'application du théorème de Sturm. L'auteur complète, à cet égard, des règles et des démonstrations dues à M. Lemonnier.

Jensen (*J.-L.-W.-V.*). — Théorèmes et démonstrations appartenant aux séries et aux produits infinis. (65-77).

Les séries et les produits sont supposés avoir des termes et des facteurs complexes.

Thaarup (*F.*). — Recherche si un nombre donné est premier. (77-86).

Paulli (*H.*). — Relations entre les rayons de courbure et de torsion d'une courbe gauche et de ses indicatrices sphériques. (86-87).

Valentiner (*E.-C.*). — Théorèmes sur certaines courbes algébriques. (88-91).

Falk (*M.*). — Note sur les équations aux différentielles partielles. (97-101).

Steen (*A.*). — Sur une remarquable égalité de coefficients différentiels de deux fonctions. (101-109).

Étude des conditions de l'égalité de

$$\frac{d^n(x-a)^{n+r}(x-b)^{n+s}}{dx^n} = \frac{d^m(x-a)^{m+r}(x-b)^{m+s}}{dx^m},$$

où $m+n+1+r+s=0$.

Valentiner (*E.-C.*). — Théorèmes fondamentaux sur les courbes algébriques. (124-126).

Schmidt (*Ejgil*). — Sur les courbes du quatrième ordre dont les équations ne contiennent que les carrés des variables. (145-156).

Nous signalons le résultat suivant auquel conduit une transformation des courbes en question : Les tangentes d'inflexion d'une courbe rationnelle du quatrième ordre sont tangentes à une conique. Celle-ci est deux fois tangente à celle qui a pour tangentes les six tangentes ordinaires de la courbe qui passent par les points doubles.

Forchhammer (*G.*). — Exemples de la Géométrie à quatre dimensions. (157-166).

Un des exemples est une extension du théorème d'Euler sur les nombres relatifs à un polyèdre.

Valentiner (*H.*). — Démonstration d'un théorème de la Géométrie plane.

Le théorème dont il s'agit est le théorème réciproque à celui de Cayley sur une couche d'ordre n, en passant par les points d'intersection de courbes des ordres p et q.

Steen (*A.*). — Une équation différentielle linéaire, d'après M. Halphen. (177-180).

Gade (*Kr.*). — Démonstration de deux théorèmes sur les fonctions périodiques. (181-184).

Oppermann (*L.*). — Expression explicite de $\frac{d^k}{dx^k}(x-a)^p(x-b)^q$.

Tome VI; 1882.

Cavallin (*G.-B.-S.*). — Déduction et généralisation de la formule de Legendre $\int_0^{2\pi} p\,d\omega = \mathrm{L}$. (1-2).

Petersen (*Jules*). — Équations aux différentielles partielles. (3-4).

Nouvelle déduction de l'intégration de $\mathrm{P}p + \mathrm{Q}q = \mathrm{R}$.

Zeuthen (*H.-G.*). — Courbes stationnaires d'un système. (5-13).

Zeuthen (*H.-G.*). — Démonstration d'une construction de Chasles. (13-16).

Sesdelin (*C.*). — Sur la construction de tangentes à la courbe de contact d'une surface de révolution avec un cône ou un cylindre circonscrit.

Zeuthen (*H.-G.*). — Démonstration élémentaire de quelques théorèmes sur le mouvement d'un point. (36-50).

Steen (*A.*). — Sur l'application de l'intégration par partie. (51-55).

Steen (*A.*). — Une intégrale définie, qui est fonction discontinue. (65-68).

Il s'agit de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^m ax}{x^m}\,dx$, regardée comme fonction de a.

Krebs (*C.*). — Les axiomes sont-ils dus à l'expérience? (81-95).

Cavallin (*C.-B.-S.*). — Sur une valeur moyenne dans la Géométrie. (95-96).

Zeuthen (*H.-G.*). — Fragments de l'histoire des Mathématiques : II. La sommation de séries géométriques dans Euclide. —

III. Une démonstration par procédés de la Géométrie projective dans Apollonius. (97-101).

Apollonius, dans sa détermination d'une tangente à une conique, fait usage de la conservation du rapport anharmonique par projection.

Meyer (*Ad.*). — Les axiomes sont-ils dus à l'expérience? (113-118).

Cette réplique à l'article de M. Krebs est encore suivie de remarques de la part du rédacteur. (119-125).

Petersen (*Jules*). — Sur les nombres premiers. (138-143).

Expression du plus petit multiple commun à tous les nombres entiers jusqu'à une limite donnée; application à un dénombrement approximatif des nombres premiers.

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur la construction mécanique des ovales de Descartes. (145-155).

Jensen (*P.-V.*). — Déduction par la Géométrie analytique élémentaire des propriétés des courbes engendrées par un mouvement de trois barres. (154-163).

Falk (*M.*). — Sur les dérivées et les différentielles d'une fonction de deux variables indépendantes. (164-182).

Déduction de la condition de l'existence des dérivées et de la différentielle totale. L'auteur expose, avec quelques extensions, ce que contient, à cet égard, les travaux de J. Thomae.

5e série (1). — Tome I; 1883.

Petersen (*Jules*). — Sur les principes de la Géométrie; démonstration du théorème sur la somme des angles d'un triangle. (1-11).

Apparemment l'auteur retourne à des considérations anciennes, en disant que les Mathématiques posent arbitrairement leurs fondements et s'occupent seulement de la déduction logique des conséquences; mais, en disant qu'il dépend de la conformité des principes avec l'expérience quel usage on peut faire des résultats au monde physique, il n'est pas pourtant en désacord sérieux avec la

(1) A partir du commencement de cette série, le *Tidsskrift* est rédigé par J.-P. Gram et H.-G. Zeuthen.

philosophie géométrique de notre époque. Il obtient une démonstration du onzième axiome d'Euclide en attribuant, par définition, au plan une propriété dont le théorème sur la somme des angles est une conséquence.

Steen (*A.*). — Sur les équations différentielles homogènes du second ordre. (11-14).

Christensen (*S.-A.*). — Démonstration de quelques théorèmes sur les coniques. (14-17).

Cavallier (*C.-B.-S.*). — Déduction de quelques valeurs approximatives de la circonférence d'une ellipse. (33-37).

Gram (*J.-P.*). — Sur les quadratures des courbes d'erreur. (65-72).

L'auteur s'est proposé le problème suivant : « $F(x)$ étant un polynôme du degré $2n-1$, déterminer les $2n$ constantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $A_1, A_2, \ldots, A_n$, de telle manière que

$$A_1 F(x_1) + A_3 F(x_2) + \ldots + A_n F(x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}x^2} F(x)\,dx. \text{ »}$$

Communications de la part de la Société mathématique et physique à Upsal, I. (73-78).

La Communication contient des recherches de MM. Falk et Meyer sur le rayon de convergence de la série $\Sigma(a_n)^\mu z^n$, μ étant un nombre complexe.

Zeuthen (*H.-G.*). — Démonstration élémentaire du théorème de Pascal. (78-81).

Communication d'une démonstration de M. Haase à Augsburg.

Christensen (*S.-A.*). — Historique de la théorie des courbures des surfaces et des courbes gauches. (97-127).

Gram (*J.-P.*). — Nécrologie de M. Oppermann. (137-144).

Zeuthen (*H.-G.*). — Fragments de l'histoire des Mathématiques : IV. Spécimens des solutions de Diophante de problèmes arithmétiques. (145-156).

Zeuthen (*H.-G.*). — Sur la composition des vitesses simultanées d'un point. (156-162).

Oppermann. — Démonstration d'un théorème sur la convergence des fractions continues. (163-164).

Communiquée d'après les papiers de feu M. Oppermann, par J.-P. Gram.

Communications de la part de la Société mathématique et physique à Upsal, II. (177-183).

Sommations de la série $\sum_{0}^{n} {}_x x^m a^n$, m et n étant des nombres entiers, et de la série $\sum_{1}^{n} {}_x \frac{1}{x^m}$, m étant un nombre entier et positif, proposées par M. Meyer et exécutées par M. Charlier.

Thiele (T.-N.). — Des résultats remarquables d'interpolations. (183-185).

Sebelien (J.). — Représentation graphique d'une série d'expériences. (186-188).

M. J.-P. Gram y a joint des remarques. (188-190).
Le *Tidsskrift* contient une des questions à résoudre, des solutions, des questions d'examen, etc.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS (1).

Tome XCII; 1882.

Kronecker (L.). — Traits fondamentaux d'une théorie arithmétique des quantités algébriques (2). (1-122).

Ire Partie.

§ 1. Les domaines de rationalité. § 2. Les quantités algébriques; leur classification en genres. § 3. Les domaines naturels de rationalité et les domaines de

(1) Voir *Bulletin*, VII_2, 157.
(2) Réimpression d'un Mémoire dédié à M. E.-E. Kummer à l'occasion du cinquantième anniversaire de son doctorat, le 10 septembre 1881. (*Voir* le compte rendu par M. Molk, t. VIII_1, p. 145 du *Bulletin.*)

genre. § 4. La décomposition de fonctions entières de variables en facteurs irréductibles. § 5. Les quantités algébriques entières; leur classification en espèces. § 6. Représentation linéaire des quantités de l'espèce principale par un nombre fini d'éléments. § 7. Cas particuliers où la représentation linéaire des quantités de l'espèce ne demande qu'un nombre d'éléments égal à celui de l'ordre. § 8. Les discriminants des genres et des espèces. § 9. Les relations entre les discriminants de genres différents dont l'un est contenu sous l'autre. § 10. Les systèmes d'équations; leurs discriminants et leurs résolvants différents. § 11. Les systèmes particuliers d'équations par lesquels des quantités algébriques conjuguées sont définies. Le principe algébrique de Galois. § 12. Les genres de fonctions rationnelles de plusieurs quantités indéterminées. § 13. Sanction de l'existence arithmétique des quantités algébriques.

IIe Partie.

§ 14. Les plus grands diviseurs communs de quantités algébriques entières. § 15. Les diviseurs algébriques. § 16. Les diviseurs algébriques qui sont formés de formes linéaires. § 17. Les diviseurs algébriques généraux; leur équivalence avec les diviseurs particuliers qui sont formés de formes linéaires. § 18. La décomposition des diviseurs algébriques en facteurs irréductibles. § 19. Les nombres algébriques entiers et leurs diviseurs. Le principe kummérien de l'équivalence. § 20. Introduction de systèmes diviseurs à rangs différents. § 21. Les propriétés des systèmes diviseurs. § 22. Les formes algébriques entières des rangs différents; leur équivalence absolue; leur décomposition en facteurs irréductibles. § 23. L'équivalence relative des formes algébriques entières. § 24. Les formes fondementales, en particulier les formes linéaires du règne algébrique des nombres. § 25. Les équations fondamentales; les formes des discriminants et leurs diviseurs des rangs différents.

Caspary (F.). — Sur la transformation de certains déterminants qui se présentent dans la théorie des sections coniques. (123-144).

Le Mémoire s'occupe de la transformation de certains déterminants qui sont l'expression de théorèmes connus relatifs aux sections coniques. L'auteur revient donc sur un sujet traité à diverses reprises par MM. Hunyady (t. LXXXIII), Mertens (t. LXXXIV), Pasch (t. LXXXIX) (comp. *Bulletin*, II_2, p. 224; III_2, p. 114; V_2, p. 198); mais il le fait pour simplifier ces transformations sous un nouveau point de vue et pour faciliter le changement direct d'un déterminant en ses formes diverses. Cette nouvelle méthode d'aborder la question a été suggérée par Grassmann (*Ausdehnungslehre,* Berlin, 1862, p. 37, etc.) et paraît propre à être appliquée au problème d'étendre quelques-uns des théorèmes connus pour les sections coniques à des courbes d'ordre supérieur et même à des surfaces.

Hermite (Ch.). — Sur une application du théorème de M. Mittag-Leffler, dans la théorie des fonctions. (145-155).

(Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler.)

1° On a

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)} = \sum \frac{R_n}{x+n},$$

où $R_n = \frac{(-1)^n(a-1)(a-2)\dots(a-n)}{1.2\dots n}$ et a positif.

Soit a négatif, et posons $a = -\nu + \alpha$, ν étant un nombre entier et α positif, alors on trouve

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)} = \sum \left[\frac{R_n}{x+n} + G_n(x)\right],$$

où $R_n = \frac{(-1)^n(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{1.2\dots n} G(-n)$,

$$G(x) = \left(1 + \frac{x}{\alpha-1}\right)\left(1 + \frac{x}{\alpha-2}\right)\cdots\left(1 + \frac{x}{\alpha-\nu}\right), \quad G_n(x) = \frac{G(x) - G(-n)}{x+n}.$$

2°

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \sum \frac{R_n}{x+n} - \sum \frac{R_n}{x-a-n},$$

où $R_n = \frac{(-1)^n a(a+1)\dots(a+n-1)}{1.2\dots n}$ et $0 < a < 1$.

Ce résultat subsiste sans modification pour les valeurs négatives de a. Soit, enfin, $a > 1$ et faisons $a = \nu + \alpha$, où ν est entier; α positif est moindre que 1. Alors nous obtenons la formule

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a-x)}{\Gamma(a)} = \sum \frac{G(x)\rho_n}{x+n} - \sum \frac{G(x)\rho_{\nu+n}}{x-a-n} - P(x),$$

où $G(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\alpha+\nu-1}\right)$, ρ_n ce que devient R_n quand on change a en α,

$$P(x) = G(x)\left(\frac{\rho_0}{x-\alpha} + \frac{\rho_1}{x-\alpha-1} + \dots + \frac{\rho_{\nu-1}}{x-\alpha-\nu+1}\right).$$

Hertz (Heinrich). — Sur le contact de corps solides élastiques. (156-171).

M. Hertz traite un cas intéressant pour la pratique, à savoir celui où deux corps isotropes élastiques se touchent dans une très petite partie de leur surface et exercent une pression finie l'un sur l'autre à travers cette partie. Les surfaces qui se touchent sont supposées parfaitement polies, c'est-à-dire qu'elles n'exercent qu'une pression normale entre les parties en contact. La partie de la surface qui est commune aux deux corps après la déformation est appelée *surface de pression*, le contour de cette partie, *figure de pression*. Les recherches de M. Hertz déterminent la surface dont la surface de pression est une partie infiniment petite : elle se trouve être une surface de second ordre qui est située entre les surfaces en contact dans leur état non déformé; elle se rapproche plus de la figure de celui des deux corps qui a le plus grand module d'élasticité. De plus, le Mémoire résout la question concernant la forme et grandeur absolue de la figure de pression, et le problème de la répartition de la pression normale, à l'intérieur de la figure de pression. L'auteur calcule les dimensions de l'ellipse de pression et enfin la durée de percussion, c'est-à-dire le temps pendant lequel deux corps qui se choquent sont en contact.

Stahl (*Wilhelm*). — Sur le système de rayons de deuxième ordre et de deuxième classe. (172-180).

Cette construction s'obtient comme spécialisation de cette donnée par le même auteur pour le système de rayons de troisième ordre et de deuxième classe (t. XCI, p. 1; *Bulletin*, VII_2, p. 157).

Dedekind (*R.*) et *Weber* (*H.*). — Théorie des fonctions algébriques d'une variable. (181-290).

Introduction.

« Les recherches ont pour but d'établir, sous un point de vue simple et en même temps rigoureux et tout à fait général, la théorie des fonctions algébriques d'une variable, laquelle est l'un des résultats capitaux de la création de Riemann. Dans les études qu'on a faites jusqu'à présent sur ce sujet, on adopte ordinairement certaines hypothèses restrictives sur les singularités des fonctions considérées, et l'on ne mentionne qu'en passant les soi-disant cas d'exception comme cas limites, ou bien on les laisse entièrement de côté. De même on admet sur la continuité et la développabilité certains principes dont l'évidence est fondée sur l'intuition géométrique de divers genres. Une base sûre pour les concepts fondamentaux de même que pour le traitement général et libre d'exception peut être gagnée quand on part d'une généralisation de la théorie des fonctions rationnelles d'une variable, en particulier de la proposition d'après laquelle chaque fonction entière rationnelle est décomposable en facteurs linéaires. Cette généralisation est simple et connue dans le premier cas où le nombre que Riemann désignait par p a la valeur zéro. Pour le cas général, qui est à celui que nous venons d'indiquer comme le cas des nombres algébriques les plus généraux à celui des nombres rationnels, la voie féconde a été signalée par les méthodes employées avec le meilleur succès dans la théorie des nombres et qui s'attachent à la création, faite par Kummer, des nombres idéaux, méthodes qui sont susceptibles d'être transférées à la théorie des fonctions.

» Donnons, par analogie avec la théorie des nombres, le nom de *corps de fonctions algébriques* à un système de fonctions telles que les quatre règles fondamentales, appliquées à des fonctions du système, ne conduisent qu'à des fonctions du même système; alors cette notion coïncide complètement avec celle de la classe riemannienne de fonctions algébriques. On peut envisager une quelconque d'entre les fonctions d'un tel corps comme variable indépendante et les autres comme dépendant d'elle. Pour chacun de ces « modes de représen- » tation », il résulte un système de fonctions du corps qui sont à désigner comme *fonctions entières*, dont les quotients épuisent le corps entier. Parmi ces fonctions entières on peut encore distinguer des groupes de fonctions affectées des caractères essentiels de ces fonctions rationnelles entières qui ont un diviseur commun. Il est vrai qu'un tel diviseur n'existe pas au cas général; mais, quand on n'attache pas au diviseur lui-même les théorèmes en question sur les fonctions rationnelles, mais plutôt au système des fonctions divisibles par lui, ils se prêtent à être entièrement appliqués aux fonctions générales algébriques. C'est ainsi qu'on parvient à la notion d'*idéal*, nom emprunté aux travaux de M. Kummer sur la théorie des nombres où les diviseurs non existants sont introduits au calcul comme « diviseurs idéaux », etc.

» Après une définition convenable de la multiplication, on peut exécuter tous les calculs sur ces idéaux comme sur les fonctions rationnelles. En particulier, il subsiste le théorème : « Tout idéal n'est décomposable que d'une seule ma-» nière en facteurs qui ne sont plus encore décomposables, et qui sont, par » conséquent, nommés *idéaux premiers*. Ces idéaux premiers sont l'analogue des facteurs linéaires dans la théorie des fonctions rationnelles entières. En s'appuyant sur eux, on parvient à une définition tout à la fois précise et générale du « point de la surface de Riemann », c'est-à-dire d'un système tout à fait déterminé de valeurs numériques qu'on peut attribuer aux fonctions d'un corps sans s'embarrasser dans des contradictions.

» Cette base étant acquise, une définition formelle du quotient différentiel mène alors au nombre du genre et à une représentation toute générale et élégante des différentiels de première espèce. Vient ensuite la démonstration du théorème de Riemann-Roch sur le nombre des constantes arbitraires dans une fonction déterminée par ses infinis et la théorie des différentiels de deuxième et de troisième espèce. Jusqu'à ce point, la continuité et la développabilité des fonctions recherchées n'entre nullement en considération. Ainsi une lacune ne serait nulle part à trouver si l'on voulait borner le domaine des nombres employés au système des nombres algébriques. Une partie bien délimitée et assez ample de la théorie des fonctions se traite donc uniquement par les moyens ressortant de sa propre sphère.

» On ne saurait nier que tous ces résultats ne s'ensuivent de la théorie de Riemann par un appareil beaucoup moindre de moyens et comme cas spéciaux d'une généralité bien vaste; mais on sait que cette théorie présente encore certaines difficultés relatives à la rigueur des démonstrations; et, en attendant qu'on ait pleinement réussi à vaincre ces difficultés, nous pensons que le chemin frayé par nous, ou au moins une voie semblable, est le seul qui conduise au but avec une rigueur et une généralité suffisantes pour la théorie des fonctions algébriques. Ainsi la théorie des idéaux se simplifierait même d'une manière extraordinaire, si l'on voulait postuler la notion de surface riemannienne, et, en particulier, celle d'un point sur elle, conjointement avec les intuitions qui se fondent sur la continuité des fonctions algébriques. Inversement, la théorie des idéaux s'établit algébriquement dans notre travail par un long détour et fait naître une définition tout à fait précise et rigoureuse du « point de la surface riemannienne », laquelle peut servir aussi de base à la recherche de la continuité et des questions qui s'y rattachent. Nous excluons encore, à présent, de notre recherche, les questions qui comprennent aussi celles relatives aux intégrales abéliennes et aux modules de périodicité. »

Ire Partie.

§ 1. Corps de fonctions algébriques. § 2. Normes, traces et discriminants. § 3. Le système des fonctions entières de z dans le corps Ω. § 4. Les modules de fonction. § 5. Congruences. § 6. Norme d'un module par rapport à un autre. § 7. Les idéaux dans $\mathfrak{o}$. § 8. Multiplication et division des idéaux. § 9. Lois de la divisibilité des idéaux. § 10. Les bases complémentaires du corps Ω.

§ 11. L'idéal de ramification. § 12. Les fonctions fractionnaires de z dans le corps Ω. § 13. Les transformations rationnelles des fonctions du corps Ω.

IIe Partie.

§ 14. Les points de la surface riemannienne. § 15. Les nombres d'ordre. § 16. Points conjugués et valeurs conjuguées. § 17. Représentation des fonctions du corps Ω par des quotients de polygone. § 18. Polygones équivalents et classes de polygones. § 19. Les faisceaux de polygones. § 20. Rabaissement de la dimension d'un faisceau par des conditions de divisibilité. § 21. Les dimensions des classes de polygones. § 22. Les bases normales de o. § 23. Les quotients différentiels. § 24. Le genre du corps Ω. § 25. Les différentiels dans Ω. § 26. Les différentiels de première espèce. § 27. Classes de polygone de première et de seconde espèce. § 28. Le théorème de Riemann-Roch pour les classes propres. § 29. Le théorème de Riemann-Roch pour les classes impropres de première espèce. § 30. Classes impropres de deuxième espèce. § 31. Les différentiels de deuxième et de troisième espèce. § 32. Les résidus. § 33. Relation entre les différentiels de première et de deuxième espèce.

Königsberger (*L.*). — Sur l'irréductibilité d'équations différentielles. (291-300).

Une équation différentielle algébrique est irréductible lorsqu'elle est irréductible par rapport au plus haut quotient différentiel au sens algébrique et qu'elle ne possède aucune intégrale algébrique d'un ordre quelconque. Ou bien : si une équation différentielle qui est irreductible au sens algébrique par rapport au plus haut quotient différentiel a une intégrale commune avec une autre équation différentielle et que cette intégrale ne soit pas en même temps une intégrale d'une équation différentielle d'ordre inférieur, l'équation proposée aura toutes ses intégrales communes avec l'autre, c'est-à-dire elle en est une intégrale algébrique.

Nother (*M.*). — Sur un théorème de la théorie des fonctions algébriques. (Extrait d'une lettre à M. Fuchs). (301-303).

Démonstration de ce théorème de M. Weierstrass : « Dans la classe de fonctions définie par l'équation irréductible algébrique $f(s, x) = 0$ du genre p, il n'existe pas de fonction rationnelle de s, z qui ne devienne infinie d'un ordre $\mu < p + 1$ que dans un seul point, mais choisi arbitrairement (s_0, z_0).

Hunyady (*Eugen*). — Sur le lieu géométrique des centres de cônes de second degré qui passent par six points donnés. (304-306).

Réduction de l'équation donnée pour ce lieu, par M. Cayley, à celle développée par M. Hierholzer.

Hunyady (*Eugen*). — Complément au Mémoire : Sur les formes différentes de l'équation de condition qui exprime que six points sont situés sur une section conique. (307-310).

Voir t. LXXXIII, p. 76 du même Journal; *Bulletin*, II_2, p. 224.

Frobenius et *Stickelberger*. — Sur la différentiation des fonctions elliptiques par rapport aux périodes et aux invariants. (311-327).

Considérons, outre l'argument u des fonctions elliptiques, les périodes 2ω et $2\omega'$ comme variables indépendantes qui ne soient soumises qu'à la condition de ne devenir ni infiniment grandes ni infiniment petites et d'avoir un quotient non réel. Alors les invariants correspondants g_2 et g_3 sont aussi des variables indépendantes susceptibles de toutes les valeurs finies pour lesquelles le discriminant $g_2^3 - 27g_3^2$ ne s'évanouit pas. Les périodes étant données, on calcule les invariants au moyen de ces équations

$$(1)\qquad g_2 = 60\sum{}' \frac{1}{(2\nu\omega + 2\nu'\omega')^4}, \quad g_3 = 140\sum{}' \frac{1}{(2\nu\omega + 2\nu'\omega')^6},$$

où les nombres ν, ν' parcourent tous les couples de nombres entiers depuis $-\infty$ à $+\infty$, à l'exception du couple $0, 0$; ou bien, posant

$$(2)\qquad \tau = \frac{\omega'}{\omega}, \quad h = e^{i\pi\tau},$$

et supposant l'ordonnée de la quantité complexe τ positive,

$$(3)\qquad \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^4 12 g_2 = 1 + 240\sum_1^\infty \frac{\lambda^3 h^{2\lambda}}{1-h^{2\lambda}}, \quad \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^6 216 g_3 = 1 - 504\sum_1^\infty \frac{\lambda^5 h^{2\lambda}}{1-h^{2\lambda}}.$$

Pour trouver les équations aux différences partielles auxquelles satisfait une fonction elliptique considérée comme fonction de trois variables, les auteurs l'envisagent d'abord comme fonction de u, ω, ω', et puis ils transforment les équations différentielles obtenues en introduisant pour ω, ω' les variables g_2, g_3. Enfin ils réunissent dans des groupes les équations différentielles qui existent entre les périodes, les invariants, les périodes des intégrales de seconde espèce et les invariants transformés par une transformation linéaire des périodes.

§ 1. Les périodes 2ω, $2\omega'$ comme variables indépendantes. § 2. Les invariants g_2, g_3. § 3. Les périodes 2η, $2\eta'$. § 4. Le rapport des périodes et l'invariant absolu. § 5. Transformation des périodes.

Vogt (*Heinrich*). — Sur les sphères qui touchent un quadrilatère gauche. (328-341).

Il y a, en général, huit sphères qui touchent les côtés d'un quadrilatère gauche quelconque. Si la somme de deux côtés quelconques d'un quadrilatère gauche est égale à la somme des deux autres, le quadrilatère est touché par une infinité de sphères dont les centres sont situés sur une droite; entre celles-ci, il y a encore quatre sphères touchantes qui n'appartiennent pas à ce faisceau.

Malet (*John-C.*). — Sur certaines intégrales définies. (342-348).

Quelques observations sur des intégrales qui se ramènent à des intégrales elliptiques.

Stern (*M.-A.*). — Contribution à la théorie des nombres de Bernoulli. (349-350).

Les nombres de Bernoulli vont en croissant : il n'y en a que deux égaux

$$B_2 = B_4 = \frac{1}{30}.$$

Prix Jablonowski pour 1885.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA.

2e série. — Tome XI; 1882-1883 (¹).

Volterra. — Sur certaines conditions caractéristiques des fonctions d'une variable complexe. (1-55).

Voici les principaux problèmes traités par l'auteur :

Étant donné dans le plan d'une variable complexe un *champ* S que l'on peut représenter d'une manière conforme sur un cercle et qui est limité par un contour s formé de portions de courbes analytiques, déterminer une fonction $w = u + iv$ de la variable z qui soit continue et monodrome dans S et telle que, sur une partie du contour, u prenne des valeurs prescrites à l'avance, et qu'il en soit de même pour v sur le reste du contour. Le problème est résolu pour le cercle au moyen de la formule

$$w(z) = -\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_0^\theta f(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\sin\frac{\theta-\omega}{2}\sin\frac{\omega}{2}}}\,d\omega$$

$$+\frac{\sqrt{(z-e^{i\theta})(z-1)}}{2\pi}\int_\theta^{2\pi} f_1(\omega)\frac{e^{i\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\theta}{4}\right)}}{(z-e^{i\omega})\sqrt{\sin\frac{\theta-\omega}{2}\sin\frac{\omega}{2}}}\,d\omega,$$

où $f(\omega)$, $f_1(\omega)$ sont des fonctions réelles, finies et aptes à l'intégration de la variable réelle ω; l'auteur montre que si l'on considère un point $\omega = \alpha$ de l'arc $(0, \theta)$ pour lequel la fonction f n'ait pas de discontinuité de seconde espèce et qui ne soit pas une des extrémités de l'arc, la partie réelle de $w(z)$, quand on

(¹) Voir *Bulletin*, VI_2, 103.

s'approche du point α, tend vers

$$\frac{f(\alpha+o)+f(\alpha-o)}{2}.$$

Les choses se passent pareillement, relativement à la partie imaginaire de $w(z)$ et à la fonction $f_1(\omega)$ pour les divers points de l'arc $(\theta, 2\pi)$.

Déterminer une fonction $w = u + iv$ de variable complexe z monodrome, finie et continue pour tous les points de l'intérieur et de la circonférence d'un cercle de rayon 1 et qui satisfasse, pour les points des arcs (A_p, θ_{p+1}) du contour, aux conditions suivantes

$$A_p u(\theta) + B_p v(\theta) = F(\theta) \; (p = 1, 2, \ldots, n),$$

A_p et B_p étant des nombres réels qui ne varient qu'avec p et $F(\theta)$ étant une fonction réelle finie, continue, à dérivée finie et continue.

Déterminer les fonctions $w(z) = u + iv$ qui, a l'intérieur d'un champ donné, sont monodromes finies et continues, et qui, lorsqu'on s'approche d'un point quelconque s du contour, le long de la normale au contour en ce point, sont telles que

$$f(s)u + \varphi(s)v$$

tende avec continuité vers une limite $\theta(s)$, les fonctions réelles $f(s)$, $\varphi(s)$, $\theta(s)$ étant soumises à certaines conditions relatives à la continuité et à l'existence des dérivées premières et secondes. Le problème est résolu dans le cas du cercle, puis dans le cas du champ compris entre deux cercles concentriques; la solution est étendue à d'autres champs dont on peut faire la représentation conforme sur un cercle, ou sur une couronne.

Dillner (*G.*). — Sur l'intégration des équations différentielles du problème des N corps. (56-64).

Ce travail fait suite à un Mémoire de l'auteur, inséré dans les *Actes de la Société royale des Sciences d'Upsal* pour l'année 1877. Les équations du mouvement y sont mises sous une forme très symétrique, à l'aide de transformations qui reposent sur une identité remarquable communiquée par M. Göran Dillner à l'Académie des Sciences de Paris dans la séance du 31 janvier 1882.

Mittag-Leffler. — Sur l'intégration des équations différentielles de M. Hermite du troisième et du quatrième ordre dont les intégrales n'admettent que des infinis du premier ordre. (65-80).

L'auteur, se proposant de poursuivre la voie ouverte par M. Hermite dans ses belles recherches sur l'équation de Lamé, considère les équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions doublement périodiques de la variable x, avec les deux périodes $2K$ et $2iK'$, ne deviennent infinis que pour $x = iK'$ et les points congruents et dont l'intégrale générale est une fonction méromorphe de x. Ces équations différentielles, d'après M. Fuchs (*Comptes rendus*, 22 mars 1880), sont de la forme suivante

$$y^{(n)} + \varphi_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + \varphi_{n-1}(x)y' + \varphi_n(x)y = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
\varphi_2(x) &= \alpha_0 + \alpha_1 \operatorname{sn}^2 x,\\
\varphi_3(x) &= \beta_0 + \beta_1 \operatorname{sn}^2 x + \beta_2 D_x \operatorname{sn}^2 x,\\
\varphi_4(x) &= \gamma_0 + y_1 \operatorname{sn}^2 x + \gamma_2 D_x \operatorname{sn}^2 x + \gamma_3 D_x^2 \operatorname{sn}^2 x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

où les constantes α, β, γ, ... doivent d'ailleurs satisfaire à certaines conditions. M. Mittag-Leffler annonce qu'il est en mesure de classer ces diverses équations, quel que soit l'ordre d'infinité des pôles que présentent les intégrales, et d'intégrer les diverses classes d'équations. Dans le Mémoire actuel, il se borne à étudier les équations du troisième et du quatrième ordre pour lesquelles l'intégrale générale n'a que des pôles du premier ordre.

D'après un théorème de M. Picard, précisé d'ailleurs par M. Mittag-Leffler, une équation différentielle linéaire à coefficients doublement périodiques, si elle admet une intégrale uniforme, admet une intégrale uniforme $\psi(x)$ telle que l'on ait

$$\psi(x + 2K) = \mu\psi(x), \quad \psi(x + 2iK') = \nu\psi(x),$$

μ et ν étant des constantes convenables.

Dans l'hypothèse précédemment admise, l'équation doit admettre comme intégrale une fonction doublement périodique de seconde espèce avec le seul pôle iK'; en adoptant les notations de M. Hermite, on exprime cette intégrale par le produit d'une exponentielle où figure une constante arbitraire λ multipliée par une expression de la forme $\frac{H(x+\omega)}{\Theta(x)}$, ω étant une constante arbitraire; en remplaçant, dans l'équation donnée par M. Fuchs, y par $f(x)$ et x par $iK' + \varepsilon$, développant suivant les puissances ascendantes de ε et écrivant que le premier membre n'est pas infini pour $\varepsilon = 0$, on obtient $n + 1$ relations entre les coefficients de l'équation et les constantes λ et ω : on obtient aussi deux types d'équations du troisième ordre et quatre types d'équations du quatrième ordre. Les calculs sont entièrement développés dans le Mémoire de M. Mittag-Leffler.

Brioschi. — Sur la classe d'équations différentielles linéaires considérées dans le précédent Mémoire de M. Mittag-Leffler. (81-92).

Revenant sur la même question, M. Brioschi montre quelles simplifications on peut apporter aux calculs en prenant pour point de départ les résultats et les notations exposés par lui dans un Mémoire antérieur (*Annali*, t. X, p. 74), il développe les calculs pour les équations linéaires du cinquième ordre.

Veronese. — Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres particulièrement pour $n = 3, 4, 5, 6$, en relation avec les groupes de l'hexagramme mystique. (93-236).

Le Mémoire de M. Veronese a été analysé dans la première partie du *Bulletin*.

Piuma. — Sur une congruence de module premier. (237-245).

Trouver les conditions pour qu'on puisse satisfaire en nombres entiers à la congruence

$$Ax^p + By^q + C = 0 \pmod{m},$$

où $m = pq + 1$ est un nombre premier, qui ne divise pas les nombres entiers A, B, C.

Malet. — Extension d'un théorème de Legendre. (246-254; 312-315).

Si l'on pose

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^m\theta \sin^p\theta}{(1-k\sin^2\theta)^{\frac{1}{n}}} d\theta, \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m\theta \sin^p\theta (1-k\sin^2\theta)^{\frac{n-1}{n}} d\theta,$$

$$F' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{m'}\theta \sin^p\theta}{(1-k'\sin^2\theta)^{\frac{1}{n}}} d\theta, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m'}\theta \sin^p\theta (1-k'\sin^2\theta)^{\frac{n-1}{n}} d\theta,$$

où

$$k + k' = 1, \quad m' = \frac{2}{n} - m - p - 1, \quad m+1 > 0, \quad m'+1 > 0, \quad p+1 > 0,$$

l'équation différentielle linéaire

$$2nk(1-k)\frac{d^2u}{dk^2} + [n(p+m+2) - k(3n+np+2)]\frac{du}{dk} - (p+1)u = 0$$

admet pour intégrale générale $C_1 F + C_2 F'$, et l'on a la relation

$$k^{\frac{m+n}{2}} k'^{\frac{m'+p}{2}} \left[(1-m')F'E + (1-m)FE' - 2\left(1-\frac{1}{n}\right)FF'\right]$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m'+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{2n\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}.$$

Bianchi. — Sur la résolvante de Lagrange pour les équations de Lagrange pour les équations de degré premier que l'on peut résoudre au moyen de radicaux. (255-283).

M. Betti (*Annali*, t. II, p. 102) a montré que si l'on peut résoudre au moyen de radicaux une équation de degré premier p, la résolvante de Lagrange de cette équation, outre le facteur rationnel linéaire, admet encore $\varphi(p-1)-1$ facteurs rationnels de degré p, φ étant la fonction numérique bien connue. M. Bianchi montre qu'il n'y a pas d'autres facteurs rationnels de degré p; il détermine en outre le nombre de facteurs irréductibles de degré $p\delta$, δ étant un diviseur de $p-1$; ce nombre est égal à $\frac{\psi(\delta)}{\delta}$ si δ n'est pas égal à $p-1$; il est égal à

$$\frac{\psi(p-1)}{p} - \frac{f(p-1)}{p},$$

pour $\delta = p - 1$; dans ces formules, les fonctions numériques $f(\delta)$, $\psi(\delta)$ sont définies comme il suit :

$$f(\delta) = 1.2.3\ldots(\delta - 1)\left(\frac{p-1}{\delta}\right)^{\delta-1}\varphi\left(\frac{p-1}{\delta}\right) - 1,$$

$$\psi(\delta) = f(\delta) - \Sigma f\left(\frac{\delta}{p_i}\right) + \Sigma f\left(\frac{\delta}{p_i p_k}\right) - \Sigma f\left(\frac{\delta}{p_i p_k p_l}\right) + \ldots$$

Dans cette dernière égalité, les sommations sont étendues aux diverses combinaisons que l'on peut former avec les facteurs premiers distincts $p_1, p_2, p_3, \ldots$ de δ.

Relativement à cette fonction numérique $\psi(\delta)$, M. Bianchi établit la propriété suivante

$$\psi(\delta) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Veronese. — Sur les groupes $(\mathrm{P})_{360}$, $(\Pi)_{360}$ de la figure formée par six complexes linéaires de droites deux à deux en involution. (284-290).

Cette Note complète les résultats du Mémoire « Sur l'interprétation... ».

Brioschi. — Sur les relations qui existent entre les covariants et les invariants d'une même forme binaire. (291-304).

Si l'on désigne par m le nombre des covariants indépendants d'une forme binaire, par r le nombre de ses invariants indépendants et par k le nombre de ses coefficients, il y aura $m + r - k - 1$ relations indépendantes entre les covariants et les invariants de cette forme : ainsi pour les formes binaires du troisième ou du quatrième ordre, il y a une telle relation; il y en a 18 pour une forme binaire du cinquième ordre. M. Brioschi a montré (*Annali*, t. I, 1858) comment la théorie des *covariants associés* permettait de trouver les relations en question pour les formes du troisième et du quatrième ordre. Cette même méthode pour être encore suivie pour les formes d'ordre supérieur, mais elle conduit à des calculs d'élimination très compliqués; M. Brioschi montre peu quels artifices ou peut la simplifier, et donne les relations entre les covariants et les invariants d'une forme du cinquième ordre; il applique ces relations pour faire disparaître, comme M. Hermite a montré qu'on pouvait le faire, le deuxième et le quatrième terme d'une équation du cinquième degré; il termine en montrant comment cette réduction et la réduction semblable pour l'équation du sixième degré dépendent du théorème général que voici :

Soit f une forme binaire de l'ordre n, soient h, k des covariants de cette forme du même ordre m, et de degrés respectifs u, v.

Si l'on élimine le rapport $\frac{x_1}{x_2}$ entre les équations

$$f = 0, \quad hy - k = 0,$$

on obtiendra une transformée de la forme

$$A_0 y^n + A_1 y^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

dans laquelle les coefficients A_0, A_1, $\ldots$, A_n sont des invariants de la forme binaire f, le coefficient A_r est de degré

$$nu + m + r(v - u);$$

Si par suite la forme f n'admet pas d'invariant de ce degré, de coefficients A_r sera nul.

Tonelli. — Un théorème sur la fonction potentielle. (305-311).

Ce théorème permet de déduire d une fonction potentielle, dans un espace à n dimensions, d'autres fonctions potentielles, au moyen d'intégrations répétées.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK (1).

Tome XXVII; 1882.

Heymann. — Sur l'intégration des équations différentielles. (1-40).

I. Substitution des coordonnées tangentielles aux coordonnées ponctuelles.

1. Équation différentielle linéaire du second ordre.
2. Application à l'équation de Liouville

$$(a_2 + b_2 u + c_2 u^2)\frac{d^2 v}{du^2} + (a_1 + b_1 u)\frac{dv}{du} + a_0 v = 0.$$

II. Intégration au moyen de coordonnées homogènes.

1. Introduction de constantes homogènes.
2. Intégration de l'équation différentielle

$$f(x_1^m u_1,\ x_2^m u_2,\ x_3^m u_3) = 0,$$

où f désigne une fonction entière homogène des $x_i^m u_i$ et où

$$u_1 = \mu(x_2 dx_3 - x_3 dx_2).$$

II. Essais sur l'intégration de l'équation différentielle $M dx + N dy = 0$, où

$$M = A_1 x^2 + B_1 y^2 + 2C_1 xy + 2D_1 x + 2E_1 y + F_1,$$
$$N = A_2 x^2 + B_2 y^2 + 2C_2 xy + 2D_2 x + 2E_2 y + F_2.$$

1. L'équation

$$(a + 2bx + cx^2)\frac{dy}{dx} + (y - \alpha_1 - \beta_1 x)(y - \alpha_2' - \beta_2 x) = 0$$

se ramène à l'équation de Liouville.

(1) Voir *Bulletin*, VI_2, 139.

2. Il en est de même de l'équation

$$(a+2bx+cx^2)\frac{dy}{dx}+Ax^2+By^2+\ldots+F=0.$$

3. Cas particuliers de cette dernière équation.
4. Intégration au moyen de dérivations d'ordre quelconque.
5. Équations différentielles $M\,dx+N\,dy=0$ qui se ramènent au type précédent.
6. Étude de quelques cas particuliers au moyen d'une substitution quadratique.

Thomae. — Étude élémentaire de la série hypergéométrique. (41-55).

Suite d'un Mémoire contenu dans le Volume précédent.

IV. Ensemble des diverses solutions de l'équation hypergéométrique.
V. La série hypergéométrique comme fonction de son cinquième élément.
VI. De la périodicité.

Thieme. — Sur la géométrie du tétraèdre. (56-61).

Le lieu des points tels que leurs projections sur les faces d'un tétraèdre soient dans un même plan est une surface du troisième degré. L'auteur traite de diverses questions connexes à cette surface : points tels que leur quatre projections soient les sommets d'un trapèze, d'un parallélograme, les trois sommets d'un triangle et le point de rencontre des hauteurs, etc.

Nous noterons encore la proposition suivante : « A chaque couple d'arêtes opposées correspond un hyperboloïde orthogonal, lieu des intersections des plans perpendiculaires entre eux qui passent par ces deux arêtes; ces trois hyperboloïdes et l'hyperboloïde qui contient les quatre hauteurs passent par une même courbe du quatrième degré. »

Schroeter. — Théorème de Géométrie. (61-62).

Sur les quatre coniques, que l'on peut déduire de quatre points, en prenant l'un pour centre, les trois autres comme sommets d'un triangle polaire. Si A, B, C sont les sommets d'un triangle, a, b, c les pieds des hauteurs, H leur point d'intersection, on a

$$\frac{1}{AH.Aa}+\frac{1}{BH.Bb}+\frac{1}{CH.Cc}=\frac{2}{HA.Ha}=\frac{1}{HB.Hb}=\cdots$$

Schlömilch. — Sur certaines intégrales elliptiques. (62-64).

Application aux intégrales elliptiques de première et de seconde espèce de la remarque suivante :

Si les deux fonctions $F(x)$, $f(x)$ sont telles que l'on ait

$$F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right)=\text{const.},\quad f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right),$$

on aura

$$\int_0^\infty F(x)\,f(x)\,\frac{dx}{x} = \text{const.} \int_0^1 f(x)\,\frac{dx}{x}.$$

Meisel. — Sur l'illumination d'une sphère par une sphère. (65-85).

Étude de la variation de l'intensité dans la zone de pénombre.

Hurwitz. — Quelques propriétés des fonctions de Dirichlet

$$F(s) = \sum \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

qui interviennent dans la détermination du nombre de classes des formes quadratiques binaires. (66-101).

Soit $\left(\frac{D}{n}\right)$ le symbole de Legendre étendu par Jacobi et soient

$$F(s, D) = \frac{1}{1-(-1)^{\frac{D^2-1}{8}}\frac{1}{2^s}} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s},$$

si $D \equiv 1 \pmod{4}$, et, dans les autres cas,

$$F(s, D) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}.$$

Les fonctions $F(s, D)$ sont des fonctions uniformes de la variable s; toutes ces fonctions, sauf $F(s, 1)$, ont des valeurs finies pour toutes les valeurs finies de s; la fonction $F(s, 1)$ est finie, sauf pour $s = 1$, et l'on a

$$\lim\,[(s-1)\,F(s, 1)]_{s=1} = 1.$$

Ces fonctions vérifient les relations suivantes :

$$F(1-s, D) = \left(\frac{\varepsilon\pi}{D}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} F(s, D)$$

pour D positif,

$$F(1-s, D) = \left(\frac{-\varepsilon D}{\pi}\right)^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+\frac{1}{2}\right)} F(s, D)$$

pour D négatif.

On doit prendre $\varepsilon = 1$ pour $D \equiv 1 \pmod{4}$, et $\varepsilon = 4$ pour tous les autres cas.

Ces relations contiennent, comme cas particulier, des propositions dues à Riemann (*Werke*, p. 136), et à M. Schlömilch (*Zeitschrift*, CIII, p. 138).

Schwering. — Recherches sur les résidus de cinquièmes puissances et sur les nombres entiers formés avec les racines cinquièmes de l'unité. (102-118).

1. Sur la décomposition des nombres premiers de la forme $10n+1$ en quatre facteurs complexes $\pi(\alpha)$, $\pi(\alpha^2)$, $\pi(\alpha^3)$, $\pi(\alpha^4)$ où α est une racine cinquième imaginaire de l'unité et où $\pi(\alpha) = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3$, a, b, c, d étant des nombres entiers.

2. La forme normale de Kummer.

3. Sur les périodes $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_4$,

$$\begin{aligned}\eta_0 &= x + x^{g^5} + x^{g^{10}} + \ldots + x^{g^{p-6}},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \eta_4 &= x^{g^4} \quad + x^{g^9} + \ldots + x^{g^{p-2}},\end{aligned}$$

où x est une racine $p^{\text{ième}}$ imaginaire de l'unité et g une racine de l'unité appartenant au module p.

4. Formation de l'équation aux périodes (équation du cinquième degré, dont $\eta_0, \ldots, \eta_u$ sont les racines).

5. Recherches ultérieures sur les racines $\eta_0, \ldots, \eta_4$.

Cardinaal. — Sur la construction d'une surface du second degré. (119-122).

On suppose que huit des neuf points qui déterminent cette surface sont donnés comme points doubles d'involutions.

Pasch. — Remarque sur la théorie des coniques. (122-124).

Pasch. — Remarques sur les suites projectives. (124-125).

Schumann. — Démonstration d'un théorème de Liouville sur les fonctions doublement périodiques. (125-126).

Schaeweg. — Sur certaines transversales dans les triangles sphériques. (126-128).

Wiener. — Sur les développées des roulettes. (129-139).

Study. — Sur les relations entre les distances. (140-159).

L'auteur établit d'une façon systématique et fort simple, pour un espace plan à n dimensions, une suite de propositions relatives à des relations entre des distances ou des sommes de tétraèdres, propositions dont la plupart se trouvent dans les Livres ou Mémoires suivants : Baltzer, *Theorie und Anwendungen der Determinanten;* Darboux, *Sur les groupes de points,* etc. (*Annal. de l'École Normale,* 1872); Frobenius, *Anwendungen der Determinanten auf Geometrie* (*Journal de Crelle,* t. LXXIX); d'Ovidio, *Alcune proprieta metriche,* etc. (*Atti della Academia dei Lincei,* 2e série, t. III; 3e série, t. I). Il emploie pour déterminer un point une pyramide à $n+1$ sommets et un système de $n+1$

masses, qui, placées à chaque sommet, sont telles, que le point considéré soit leur centre de gravité.

Böklen. — Sur la surface des ondes dans un cristal biaxe. (160-175).

L'auteur établit diverses propriétés de cette surface qui se rapportent, les unes à la théorie des moments d'inertie, les autres au complexe de droites par lesquelles on peut mener deux plans tangents rectangulaires et un ellipsoïde.

Veltmann. — Sur la mise en ordre des singularités en nombre infini d'une fonction. (170-176).

L'auteur montre que, sur la circonférence d'un cercle, on peut construire un ensemble isolé de points en nombre infini, tels que, si l'on range les arcs limités par ces points d'après leur grandeur, la série évidemment convergente dont ces arcs sont les termes ait une somme moindre que la circonférence, et comment on peut construire une fonction intégrable ayant ces points pour points de discontinuité.

Thomae. — Sur les intégrales elliptiques de seconde espèce. (179-180).

Soient

$$t(u) = \int_0^u \xi\, du, \quad du = \frac{1}{2} d\xi \sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}, \quad \xi = \operatorname{sn} u.$$

L'auteur effectue le développement en série de la quantité $\mathrm{A}t(u) + \mathrm{B}u$ sous la forme

$$\sqrt{\xi(1-\xi)(1-\varkappa\xi)}\ (a_1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + \ldots).$$

Thomae. — Sur certaines fonctions elliptiques spéciales. (181-189).

Inversion de l'intégrale

$$\int \frac{dz}{\sqrt[3]{(z-k_1)^2(z-k_2)^2(z-k_3)^2}}.$$

Hofman. — Sur une couple de droites à propriétés optiques qui correspondent à celles des foyers. (189-192).

Soient K une conique, P un point de son plan, il existe deux droites x, y qui jouissent de la propriété suivante. Si A est un point arbitraire de K et si l'on place suivant la droite AP un miroir dont le plan soit perpendiculaire à celui de la conique K, si enfin X, Y sont les points d'intersection des droites x, y avec la tangente en A, un rayon de lumière allant du point X vers le point P ira, après la réflexion, passer par Y.

Veltman. — La série de Fourier. (193-235).

Ce Mémoire contient d'abord divers préliminaires concernant la théorie des séries, l'existence de l'intégrale définie, la théorie des ensembles de points sur la circonférence d'un cercle; l'auteur fait ensuite l'étude des séries de Fourier fondée sur l'intégrale de Poisson

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma)}{\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\gamma-t)} d\gamma.$$

Il s'attache, en particulier, à montrer qu'il y a des fonctions qu'on ne peut représenter par une série de Fourier, même en faisant abstraction des valeurs isolées d'indétermination. Telles sont, tout d'abord, les fonctions non intégrables. M. Veltman montre que, parmi les fonctions qu'on ne peut représenter, il y en a dont les discontinuités sont isolées; si l'on veut représenter seulement les valeurs d'une telle fonction sur des portions d'arc, on peut y réussir par la série de Fourier; à cette fin, on prend les intégrales qui figurent dans la série seulement sur ces portions d'arc; mais il peut arriver aussi que ce procédé ne réussisse pas; c'est ce qui arrive dans le cas où les arcs sont divisés en un nombre infini de parties infiniment petites par des points où il n'y a pas de dérivées. En supposant la fonction finie, la série de Fourier n'est pas infinie, mais elle peut être indéterminée.

Hauck. — Études de perspective. (236-247).

Addition au Mémoire *Ueber die Grundprincipien der Linearperspective* inséré dans le tome précédent du *Zeitschrift*.

Kotànyi. — Constructions d'expressions algébriques au moyen d'involutions et d'une section conique. (248-252).

Petzold. — Construire une droite qui coupe sous des angles donnés deux droites données par leurs projections. (252-253).

— Académie du prince Jablonowski. Sujets proposés. (253-256).

Pour l'année 1885 : Étude de la surface générale du quatrième ordre.

Weiler. — Génération des complexes du premier et du second degré au moyen de congruences linéaires. (257-288).

Parmi les 49 complexes proprement dits du second degré, il y en a 38 que l'on peut engendrer au moyen de congruences linéaires; M. Weiler les énumère en suivant son Mémoire *Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe zweites Grades* (*Math. Ann.*, t. VII), indique pour chacun d'eux la nature de la surface des singularités, qui est nécessairement réglée, et montre enfin comment on peut construire les deux droites qui détermine chacune des congruences linéaires dont l'ensemble infini constitue le complexe considéré.

Wittwer. — Fondements de la Chimie mathématique. (289-309).

Morawetz. — La réflexion et la réfraction de la lumière sur les courbes et les surfaces. (310-313).

Veltman. — Sur la théorie des ensembles des points. (313-314).

Nouvel exemple d'une singularité précédemment signalée par l'auteur.

Wittstein. — Contribution à la méthode des moindres carrés. (313-317).

Schlömilch. — Sur des développements en série relatifs à certaines intégrales hyperelliptiques.

Legendre a montré comment on pouvait développer les intégrales elliptiques complètes, suivant les puissances du module ou du module complémentaire. C'est ce dernier calcul qu'effectue l'auteur par l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^2)^{\mu}(1-k^2x^2)^{1-\mu}},$$

où l'on suppose $0 < \mu < 1$.

Geisenheimer. — Sur le centre d'une courbe gauche du troisième ordre. (321-328).

M. Schröter a montré (*Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung*, etc.) que si l'on considère une cubique gauche et dans un plan osculateur la conique enveloppe des traces sur ce plan des autres plans osculateurs, le lieu du centre de cette conique était encore une conique. C'est le centre de cette dernière conique, contrairement à une démonstration proposée par M. Schröter, que M. Geisenheimer propose d'appeler *centre de la cubique gauche*. Il donne de ce centre un très grand nombre de propriétés; c'est, par exemple, le centre de l'hyperboloïde qui contient les trois asymptotes de la cubique.

Wittwer. — Fondements de la Chimie mathématique. (329-345).

Leonhardt. — Fondements d'une Géométrie dipolaire. (346-362).

Les « coordonnées dipolaires » se présentent dans certaines questions de distribution de l'électricité. « Étant donnés sur une droite fixe deux points AA', un plan qui passe par AA' est fixé par son azimut φ, et, dans ce plan, un point B est fixé par l'angle ω sous lequel le cercle qui passe par B, A, A' coupe AA' et par la valeur du rapport $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BA'}} = \lambda = e^{-\theta}$. » L'auteur établit diverses formules relatives à ce système de coordonnées.

Schumann. — Sur la réciprocité d'un théorème de Chasles et d'un théorème de Steiner, et sur certaines relations géométriques qui en découlent. (363-368).

Démonstration simple et conséquences diverses de ces propositions : « Les sommets de deux triangles dont chacun est conjugué par rapport à une conique sont sur une même conique; réciproquement, deux systèmes de trois points sur une conique peuvent être regardés comme les sommets de deux triangles dont chacun est conjugué par rapport à une conique.

Schumann. — Relation générale entre cinq points de l'espace. (368-369).

Böckler. — Sur la courbure des surfaces. (369-374).

Propriétés des lignes focales de surfaces du second degré qui touchent une surface F en un point, suivant l'ordre du contact, et suivant certaines autres conditions imposées.

Heymann. — Sur une transformation de l'équation différentielle $\varphi_0 \frac{dy}{dx} + \varphi_1 y^2 + \varphi_2 y + \varphi_3 = 0$. (374-380).

Schlömilch. — Deux théorèmes projectifs. (380).

« Si ABCD est un quadrilatère ordinaire, si E, F, G sont les points d'intersection de AC, BD, de AB, CD, de DA, BC, si enfin on projette la figure d'un point quelconque O sur un plan qui passe par la droite FG, et que A'B'C'D' soit la figure projetée, les quatre droites AC', BD', CA', DE' passent par un même point P de FG. » — Théorème corrélatif.

Sachse. — Démonstration des théorèmes précédents. (381-383).

Hofman. — Théorème de Géométrie élémentaire; essai sur la théorie des projections stéréographiques. (383-384).

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES (¹).

Tome XCVIII; 1884.

N° 1; 7 janvier.

Goursat. — Sur certaines fonctions doublement périodiques de seconde espèce. (35).

Soit $F(x)$ une fonction doublement périodique de seconde espèce dont les

(¹) Voir *Bulletin*, VII_2, 187.

multiplicateurs sont des racines de l'unité, l'un au moins étant différent de l'unité, l'intégrale $\int F(x)dx$ est égale à une fonction doublement périodique augmentée d'une somme de logarithmes de fonctions doublement périodiques multipliées par des facteurs constants.

Floquet. — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (38).

Soit

$$P(y) = \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0$$

une telle équation, avec les périodes ω, ω' pour les coefficients : en considérant la période ω seule, M. Floquet a établi l'existence de m solutions distinctes de la forme

$$\mathfrak{P}(x) = \varphi_0(x) + x\varphi_1(x) + \ldots + x^i\varphi_i(x),$$

où les φ se reproduisent à un facteur constant près par le changement de x en $x+\omega$. Ce facteur est racine d'une certaine équation $\Delta = 0$, ou Δ est un déterminant d'ordre n; c'est l'*équation fondamentale relative à la période* ω; soient ε_i, ..., ε_n les racines distinctes; à chaque racine ε_i répondent deux nombres, son ordre de multiplicité μ_i et l'ordre λ_i à partir duquel les mineurs de Δ ne sont plus nuls pour $\varepsilon - \varepsilon_i$; μ_i est le nombre maximum de solutions distinctes de la forme $\mathfrak{P}(x)$ avec le multiplicateur ε_i, λ_i est le nombre de solutions $S(x)$ telles que l'on ait $S(x+\omega) = \varepsilon_i S(x)$: soit, en outre, $\nu = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots \lambda_n$; à la seconde période correspondront de même les nombres n', ν'; soit N le nombre maximum de solutions directes qui sont des fonctions doublement périodiques. N ne peut surpasser ni ν ni ν', ni être inférieur à n et à n'; donc $N \leqq 1$ (Picard et Mittag-Leffler). Pour que N soit égal à m, il faut et il suffit que toute racine de chaque équation fondamentale annule tous les mineurs du premier membre jusqu'à l'ordre marqué par son degré de multiplicité exclusivement.

Enfin, dans une Note ultérieure, M. Floquet montre que les intégrales qui ne sont pas doublement périodiques s'expriment par un polynôme aux deux variables x, $Z(x)$ ayant pour coefficients des fonctions doublement périodiques de seconde espèce de mêmes multiplicateurs.

Radau. — Sur une notation propre à représenter certains développements. (39).

Léauté. — Calcul de l'arc de contact d'une bande métallique flexible enroulée suivant certaines conditions données, mais quelconques, sur un cylindre circulaire. (41).

La lame étant supposée primitivement droite, les équations de la courbe élastique sont de la forme

$$\xi = \sigma + 2a\left[k^2\frac{\operatorname{sn}\frac{\sigma}{a}\operatorname{cn}\frac{\sigma}{a}}{\operatorname{dn}\frac{\sigma}{a}} - E\left(\frac{\sigma}{a}\right)\right], \quad \eta = 2akk'\operatorname{sn}\frac{\sigma}{a},$$

a étant une constante, et σ étant l'arc de la courbe élastique.

N° 2; 14 janvier.

Laguerre. — Sur le genre de quelques fonctions entières. (79).

$F(x)$ désignant une fonction transcendante entière de genre n, la fonction suivante

$$\Theta\, F(x) + \Theta_1 F'(x) + \Theta_2 F''(x) + \ldots + \Theta_h F^{(h)}(x),$$

où h est un entier quelconque, où F', F'', ... sont les dérivées de $F(x)$, $\Theta_1, \ldots, \Theta_h$ des polynômes entiers, est une fonction entière du genre n, si la fonction $F(x)$ n'admet qu'un nombre limité de racines imaginaires.

Genocchi. — Sur le limaçon de Pascal. (81).

Floquet. — Sur les opérations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. (82).

N° 3; 21 janvier.

Halphen. — Sur les multiplicateurs des équations différentielles linéaires. (134).

L'auteur a montré, dans deux Communications précédentes (t. XCVII, p. 1488 et 1541), comment on pouvait intégrer une équation différentielle linéaire du troisième ordre, connaissant, en fonction de la variable indépendante, l'expression d'un polynôme homogène du troisième degré composé avec les solutions inconnues; il développe les calculs dans la Communication actuelle et traite l'exemple suivant :

Intégrer l'équation

$$fy''' + \frac{2}{3}f'y'' + \frac{4}{9}f''y' - \frac{1}{81}f'''y = 0,$$

où f désigne un polynôme du troisième degré, sachant qu'il existe entre les solutions une relation homogène du troisième degré à coefficients constants.

Laguerre. — Sur les valeurs que prend un polynôme entier lorsque la variable varie entre des limites déterminées. (136).

Soit le polynôme entier

$$F(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

formons les quantités

$$Q_0 = a_0,\quad Q_1 = Q_0\xi + a_1,\quad Q_2 = Q_1\xi + a_2,\quad \ldots,\quad Q_n = Q_{n-1}\xi + a_n;$$
$$P_n = Q_n,\quad P_{n-1} = P_n + (\eta - \xi)Q_{n-1},$$
$$P_{n-2} = P_{n-1} + (\eta - \xi)Q_{n-2},\quad \ldots,\quad P_0 = P_1 + (\eta - \xi)Q_0,$$

en supposant $\eta > \xi > 0$; le nombre des racines de l'équation $F(x) = 0$ qui sont comprises entre η et ξ est au plus égal au nombre de variations de la suite

$$P_0, P_1, \ldots, P_n,$$

et la valeur du polynôme $F(x)$ quand x varie depuis ξ jusqu'à η demeure constamment comprise entre la plus petite et la plus grande des quantités P.

Cottillon. — Note sur le lavis d'une sphère. (139).

N° 4; 28 janvier.

Baillaud. — Sur le mouvement du premier satellite de Saturne. (205).

Détermination du moyen mouvement.

Laguerre. — Sur la réduction en fractions continues d'une fraction qui satisfait à une équation linéaire du premier ordre à coefficients rationnels. (209).

Conclusion explicite d'une Note insérée dans le *Bulletin de la Société mathématique* (t. VIII, p. 21).

André (D.). — Abaissement des limites fournies par la règle des signes de Descartes. (212).

Soit $f(x)$ un polynôme entier quelconque; considérons trois termes où les exposants de x soient trois entiers consécutifs et dont les coefficients ont pour valeurs absolues L, M, N; ce groupe sera un *trinôme abaisseur*, si les coefficients extrêmes sont de même signe et si l'on a $M^2 \leqq LN$, un trinôme abaisseur est de la *première* ou de la *seconde espèce* suivant qu'il présente deux variations ou deux permanences; le nombre positif α est dit *compris* dans le trinôme abaisseur si l'on a

$$\frac{M}{L} \leqq \alpha \leqq \frac{N}{M};$$

deux trinômes abaisseurs sont *distincts* lorsqu'ils n'ont pas plus d'un terme en commun; plusieurs trinômes abaisseurs sont distincts, quand deux quelconques sont distincts; des trinômes abaisseurs en nombre quelconque sont *compatibles* lorsqu'il existe un nombre α au moins qui soit compris dans chacun d'eux. Ceci posé, on a les propositions suivantes :

Lorsque l'on multiplie $f(x)$ par $x + \alpha$, le nombre α étant positif, il se perd juste autant de couples de variations qu'il y a dans $f(x)$ de trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts les uns des autres et comprenant α.

Si l'on désigne par θ le plus grand nombre de trinômes abaisseurs de la première espèce, distincts et compatibles, que présente le polynôme $f(x)$, le nombre des racines positives de l'équation $f(x) = 0$ est au plus égal à $v - 2\theta$, et s'il est inférieur à cette limite, c'est d'un nombre pair.

Si l'on désigne par τ le plus grand nombre de trinômes abaisseurs de la seconde espèce, distincts et compatibles, que présente le polynôme $f(x)$, le nombre des racines négatives de l'équation $f(x) = 0$ est au plus égal à $w - 2\tau$, et s'il est inférieur à cette limite, c'est d'un nombre pair.

Dans ces deux derniers énoncés, v et w désignent respectivement les limites supérieures du nombre de racines positives et du nombre de racines négatives que fournit le théorème de Descartes.

Appell. — Sur la distribution du potentiel dans des masses liquides limitées par des faces planes. (215).

M. Chervet a exprimé (23 septembre 1883) la distribution du potentiel dans une masse liquide indéfinie limitée par deux plans parallèles, en supposant les électrodes placées en deux points symétriques par rapport au plan médian; pour cela M. Chervet introduit une fonction qui, suivant la terminologie de M. Appell (3 février 1883), est une fonction uniforme de x, y, z admettant un groupe de périodes et ayant une infinité de pôles du premier degré sur la droite joignant les électrodes; M. Chervet et M. Appell ont depuis étendu ces résultats.

« J'ai reconnu, dit M. Appell, que ces résultats sont susceptibles d'une grande extension, et, jusqu'à présent, j'ai résolu la même question :

» 1° Pour une masse liquide indéfinie limitée par deux plans parallèles ou ayant la forme d'un prisme droit à base rectangle, mais en supposant les électrodes placées d'une façon quelconque;

» 2° Pour une masse liquide ayant la forme d'un parallélépipède rectangle, les électrodes étant placées d'une façon quelconque.

» La solution de toutes ces questions peut se résumer ainsi : En considérant l'une des électrodes comme un point lumineux et les faces planes de la masse liquide comme des surfaces réfléchissantes du côté du liquide, on construit toutes les images de ce point et l'on forme une fonction $F(x, y, z)$ satisfaisant à l'équation $AF = 0$, et admettant pour pôles de résidus $+1$ le point lumineux et toutes ses images; considérant de même l'autre électrode et toutes ses images, on formera une fonction analogue $F_1(n, y, z)$ ayant tous ces points pour pôles de résidus $+1$; la différence

$$F(x, y, z) - F_1(x, y, z),$$

augmentée d'une fonction entière convenable, sera le potentiel cherché.

» La formation de ces deux fonctions F et F_1 repose sur l'extension du théorème de M. Mittag-Leffler aux fonctions uniformes vérifiant l'équation $\Delta V = 0$, extension que j'indique en détail dans un Mémoire actuellement en cours de publication, dans les *Acta Mathematica*. Il est à présumer que cette règle fournira le potentiel dans un grand nombre d'autres masses liquides limitées par des plans; c'est ce que je me réserve d'examiner dans un Mémoire plus étendu. »

Liouville (R.). — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre qui contiennent linéairement les dérivées les plus élevées. (216).

Étant donnée une telle équation, dans laquelle ne figure pas la fonction inconnue, l'auteur montre qu'il existe toujours une substitution telle que l'équation transformée ait la même forme que l'équation proposée, si ce n'est que la fonction inconnue pourra s'y trouver.

Cette substitution sera évidemment très avantageuse quand l'équation transformée admettra quelque intégrale intermédiaire. L'auteur applique ce procédé à l'équation

$$(x^2 - y^2)(r - t) + 4xys = 0,$$

par laquelle on détermine toutes les représentations planes de la sphère qui conservent les aires infiniment petites et, en même temps, l'orthogonalité des méridiens et des parallèles; il montre comment on peut en trouver une infinité de solutions se déduisant successivement les unes des autres.

Léauté. — Relation entre la puissance et la résistance appliquées aux deux points d'attache d'un frein à lame, lorsque l'on tient compte de l'élasticité de la lame. (219).

N° 5; 4 février.

Sylvester. — Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton. (273).

Le Paige. — Sur les involutions biquadratiques. (285).

Sur la détermination du vingtième élément d'une involution du quatrième ordre et du troisième rang au moyen de dix-neuf autres.

Poincaré. — Sur les courbes définies par les équations différentielles. (287).

Considérant une courbe définie par les équations

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z},$$

où X, Y, Z sont des polynômes entiers en x, y, z, l'auteur suppose que, en suivant par exemple des procédés analogues à ceux qu'il a indiqués (23 juillet 1883), on ait reconnu qu'il est possible de satisfaire à ces équations au moyen d'une courbe C_0, et il étudie la forme des courbes (C) définies par les équations données dans le voisinage de C_0. Il rattache ensuite cette question à l'étude de la convergence des séries de M. Lindstedt.

Picard. — Sur une classe de fonctions abéliennes. (289).

L'auteur donne une intéressante formule relative à la transformation d'une fonction θ particulière, dans le cas de $p = 3$, formule qui rapproche cette fonction particulière θ des fonctions θ à une seule variable.

André (D.). — Nombre exact de variations perdues par la multiplication par $x - \alpha$. (292).

L'auteur, poursuivant ses recherches sur la règle de Descartes, donne un théorème analogue à celui qui a été cité plus haut, mais toutefois un peu moins simple.

Lefébure. — Sur la composition de polynômes algébriques qui n'admettent que des diviseurs premiers d'une forme déterminée. (293).

L'auteur recherche, d'une manière générale, des polynômes qui ne contiennent que des diviseurs premiers de l'une quelconque des formes Hr_1r_2+1, $Hr_1r_2r_3+1$, $Hr_2r_1\ldots r_\rho+1$, $r_1 r_2, \ldots, r_\rho$ représentant des nombres premiers quelconques en quantité arbitraire.

N° 6; 11 février.

Poincaré. — Sur les substitutions linéaires. (349).

Classification en familles des substitutions de la forme

$$\left(x, y;\ \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''},\ \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}\right).$$

Farkas. — Généralisation du théorème de Jacobi sur les équations d'Hamilton. (352).

Sur la formation d'une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles qui correspond à un systeme canonique, quand on a intégré ce système.

Le Paige. — Sur les courbes du quatrième ordre. (353).

Sur la construction de ces courbes.

Kowalewski (Mme de). — Sur la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé. (356).

Lamé a ramené la question de la propagation de la lumière dans un milieu cristallisé à l'intégration du système suivant d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(a^2\frac{\partial\eta}{\partial x} - b^2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(c^2\frac{\partial\xi}{\partial z} - a^2\frac{\partial\xi}{\partial x}\right),\\
\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(b^2\frac{\partial\zeta}{\partial y} - c^2\frac{\partial\eta}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(a^2\frac{\partial\eta}{\partial x} - b^2\frac{\partial\xi}{\partial y}\right),\\
\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(c^2\frac{\partial\xi}{\partial z} - a^2\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(b^2\frac{\partial\zeta}{\partial y} - c^2\frac{\partial\eta}{\partial z}\right),
\end{aligned}$$

où t représente le temps; x, y, z les coordonnées d'un point du milieu vibrant; ξ, η, ζ les projections de l'écart de ce point de sa position d'équilibre et a^2, b^2, c^2 les trois constantes optiques du cristal.

Mme de Kowalewski est parvenue à former un système de valeurs de ξ, η, ζ qui satisfait au système proposé, qui est tel que, pour $t=0$, chacune des quantités ξ, η, ζ, de même que leurs premières dérivées par rapport à t, deviennent égales à des fonctions données de x, y, z, lesquelles toutefois doivent être choisies en accord avec l'équation

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0.$$

Ces formules générales représentent un certain mouvement possible physiquement sans avoir recours à l'hypothèse de l'éther.

Appell et *Chervet*. — Sur la distribution du potentiel dans une masse liquide ayant la forme d'un prisme rectangulaire indéfini. (358).

N° 7; 18 février.

Genocchi. — Sur les diviseurs de certains polynômes et l'existence de certains nombres premiers. (411).

A propos des recherches de M. Lefébure, l'auteur rappelle les résultats contenus dans une Note publiée en 1868 dans les *Annales* de MM. Brioschi et Cremona, relatifs aux polynômes A_h, B_h, définis en a, b au moyen de l'égalité

$$(a+\sqrt{b})^h=A_h+B_h\sqrt{b}.$$

Lefébure. — Sur la composition de polynômes qui n'admettent que des diviseurs premiers d'une forme déterminée. (413).

Picard. — Sur certaines substitutions linéaires. (416).

Modification à la classification proposée par M. Poincaré.

André (*D.*). — Sur une équation du degré m qui n'a jamais plus de deux racines réelles. (417).

Il s'agit de l'équation

$$u_0x^m-u_1x^{m-1}+u_2x^{m-2}-u_3x^{m-3}+\ldots=0,$$

qui ne présente que des variations et dont les coefficients sont les termes d'une série récurrente proprement dite définie par l'égalité

$$u_n=\alpha u_{n-1}+\beta u_{n-2}.$$

Goursat. — Sur une équation différentielle du troisième ordre. (419).

Détermination de toutes les solutions rationnelles de l'équation

$$\frac{z'''}{z'}-\frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2+\frac{(1-\nu^2)z^2+(\lambda^2+\nu^2-\mu^2-1)z+(1-\lambda^2)}{2z^2(z-1)^2}z'^2$$
$$=\frac{(1-\nu'^2)t^2+(\lambda'^2+\nu'^2-\mu'^2-1)t+1-\lambda'^2}{2t^2(t-1)^2},$$

où t est la variable indépendante, où λ, μ, ν, λ', μ', ν' sont des constantes. Cette équation a été introduite par M. Kummer dans la théorie de la transformation de la série hypergéométrique.

Halphen. — Sur une courbe élastique. (422).

L'auteur effectue, avec les notations de M. Weierstrass, l'inversion des formules

$$ds = \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 - (\mathrm{A}r^4 + \mathrm{B}r^2 + \mathrm{C})^2}}, \quad d\theta = \frac{\mathrm{A}r^4 + \mathrm{B}r^2 + \mathrm{C}}{\sqrt{r^2 - (\mathrm{A}r^4 + \mathrm{B}r^2 + \mathrm{C})^2}} \frac{dr}{r},$$

rencontrées par M. Maurice Lévy dans l'étude de la forme d'équilibre d'une verge élastique de forme circulaire, soumise à une pression toujours normale et uniforme dans toute sa longueur.

N° 8; 25 février.

Sylvester. — Sur les quantités formant un groupe de nonions analogues aux quaternions de Hamilton. (471).

Pansiot. — Sur le calcul de la rotation des taches du Soleil. (500).

Poincaré. — Sur les groupes hyperfuchsiens. (503).

Construction d'une classe de groupes hyperfuchsiens, analogue à la troisième famille de groupes fuchsiens; généralisation de la notion des invariants analogues à la longueur, à la surface, à l'angle, au volume.

Hurwitz. — Sur la décomposition des nombres en cinq carrés. (504).

Le nombre des décompositions du carré d'un entier quelconque m en cinq carrés s'exprime par

$$\mathrm{F}(m^2) = 10\,\frac{2^{2k+3} - 1}{2^3 - 1}\,\frac{p^{3\alpha+3} - p^{3\alpha+1} + p - 1}{p^3 - 1}\,\frac{q^{3\beta+3} - q^{3\beta+1} + q - 1}{q^3 - 1},$$

où l'on suppose

$$m = 2^k p^\alpha q^\beta \ldots,$$

$2, p, q, \ldots$ étant ces nombres premiers différents.

Sébert et Hugoniot. — Sur la propagation d'un ébranlement uniforme dans un gaz renfermé dans un tuyau cylindrique. (507).

Il s'agit d'un gaz, primitivement en repos, renfermé dans un tuyau cylindrique fermé à l'une de ses extrémités par un piston auquel on communique brusquement une vitesse V que l'on maintient constante. On suppose que le mouvement s'accomplisse par tranches parallèles.

N° 9; 3 mars.

Sylvester. — Sur une Note récente de M. D. André. (550).

Le dernier résultat signalé par M. André est une conséquence immédiate de la proposition suivante due à M. Sylvester : si u_0, u_1, u_2, ..., u_m sont les coefficients d'une équation du degré m, et si l'on pose

$$G_r = ru_r^2 - (r+1)y_r u_{r-1} u_{r+1},$$

où $y_r = \dfrac{v+r-1}{v+r}$, v étant une quantité réelle quelconque qui n'est pas intermédiaire entre o et $-m$, l'équation aura nécessairement au moins autant de racines imaginaires qu'il y a de variations de signes dans la série G_0, G_1, ..., G_m.

André (D.). — Théorème permettant de constater que certaines équations algébriques n'ont aucune racine positive. (561).

Si, dans le premier membre de l'équation $f(x) = 0$, tous les termes d'un certain signe sont, chacun, le terme moyen d'un trinôme abaisseur de la première espèce, cette équation n'a aucune racine positive.

Picard. — Sur les fonctions hyperfuchsiennes. (563).

Construction de fonctions hyperfuchsiennes qui n'existent que dans l'hypersphère de rayon un.

Autonne. — Sur les groupes d'ordre fini, contenus dans le groupe des substitutions quadratiques Cremona. (565).

Soient deux substitutions quadratiques de Cremona

$$S = [z_i, \varphi_i(z)], \quad S' = [z_i, \varphi'_i(z)],$$

où $\varphi_i(z)$, $\varphi'_i(z)$ sont mis à la place de $\varphi_i(z_1, z_2, z_3)$, $\varphi'_i(z_1, z_2, z_3)$; le produit S'S est la substitution du quatrième ordre

$$S'S = [z_i, \varphi'_i(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)] ;$$

M. Autonne dit que S' et S forment un groupe quadratique Cremona, si les produits S'S, SS' sont aussi des substitutions quadratiques Cremona ; il montre que, pour que diverses substitutions quadratiques, S, S', S'', ..., forment un groupe quadratique, il faut et il suffit que chaque substitution ait deux points fondamentaux communs avec chacune des autres. Ce théorème lui permet de déterminer les types auxquels appartiennent tous les groupes quadratiques Cremona d'ordre fini.

Lefébure. — Sur la décomposition de polynômes qui n'admettent que des diviseurs premiers d'une forme déterminée. (567).

Liouville (*R.*) — Sur les équations linéaires aux différences partielles du second ordre. (569).

L'auteur montre le parti que l'on peut tirer, pour l'intégration de ces équations, du mode de transformation qu'il a précédemment indiqué.

N° 10; 10 mars.

Goursat. — Sur une équation différentielle du troisième ordre. (609).

Suite des recherches de l'auteur sur les solutions rationnelles de l'équation de M. Kummer.

Lefébure. — Sur la décomposition de polynômes qui n'admettent que des diviseurs premiers d'une forme déterminée. (613).

N° 11; 17 mars.

Sylvester. — Sur la solution d'une classe très étendue d'équations en quaternions. (651).

Stieltjes. — Sur quelques applications arithmétiques de la théorie des fonctions elliptiques. (663).

Soit en général $F_7(n)$ le nombre total de décompositions de n en sept carrés et soient

$$f(k) = \frac{40.32^k - 9}{31}, \quad g(k) = \frac{32^{k+1} - 1}{31},$$

on a

$$F_7(4^k m) = f(k) F_7(m),$$
$$F_7(4^k m) = g(k) F_7(m),$$
$$F_7(4^k m) = \frac{28 f(k) + 9}{37} F_7(m).$$

suivant que l'on a $m \equiv 1$ ou 2 (mod. 4), ($m \equiv 3$ (mod 8), $m \equiv 7$ (mod 8).

Picard. — Sur une nouvelle généralisation des fonctions abéliennes. (665).

Si l'on considère un groupe de substitutions effectuées simultanément sur x, y, de la forme

$$\left(x, y, \frac{ax + b}{cx + d}, \frac{a'y + b'}{c'y + d'}\right),$$

et si, les groupes isolés relatifs à chaque variable étant continus, le groupe d'ensemble est discontinu, on peut former des fonctions des deux variables indépendantes x, y qui restent invariables par les substitutions de ce groupe, et l'on est ainsi conduit à un type nouveau de fonctions *hyperabéliennes*; d'une façon plus générale, M. Picard donne ce nom à des fonctions de deux variables x, y qui ne changent pas quand on effectue sur ces variables un groupe dont les substitutions sont de l'une et l'autre forme

$$\left(x, y, \frac{ax+b}{cx+d}, \frac{a'y+b'}{c'y+d'}\right) \quad \text{et} \quad \left(x, y, \frac{\alpha y+\beta}{\gamma y+\delta}, \frac{\alpha' x+\beta'}{\gamma' x+\delta'}\right).$$

Il donne un exemple de telles fonctions, qui tire d'ailleurs son origine de la théorie même des fonctions abéliennes.

Boussinesq. — Sur la poussée d'une masse de sable, à surface supérieure horizontale, contre une paroi verticale ou inclinée. (667).

N° 12; 24 mars.

Menabrea. — Sur la concordance de quelques méthodes générales pour déterminer les tensions dans un système de points réunis par des liens élastiques et sollicité par des forces extérieures en équilibre. (714).

M. le général Menabrea, dans cette Communication, montre, pour le problème dont il s'agit, la concordance de la méthode développée par M. Maurice Lévy dans son *Traité de Statique graphique* et de la méthode déduite du *principe du moindre travail*. Lorsqu'un système élastique se met en équilibre sous l'action de forces extérieures, le travail moléculaire développé dans les liens du système est un minimum. Ce principe, énoncé par Euler, a été l'objet de diverses recherches de la part de M. le général Menabrea

Boussinesq. — Sur la poussée d'une masse de sable, à surface supérieure horizontale, contre une paroi verticale dans le voisinage de laquelle son angle de frottement intérieur est supposé croître légèrement d'après une certaine loi. (720).

Liouville (R.) — Sur l'équation $r = q^{2m}t$. (723).

L'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$r = q^{2m}t,$$

s'intègre, si la constante m qu'elle contient est donnée par la formule suivante

$$m = \frac{i}{i+1},$$

où l'on désigne par i un nombre entier quelconque, positif ou négatif.

Petot. — Sur une extension du théorème de Pascal et de Brianchon aux surfaces du second ordre. (727).

Propriété de dix points d'une surface du second ordre : Si l'on considère deux surfaces quelconques du second ordre S et S′, conjuguées au tétraèdre ayant pour sommets quatre de ces points, les deux plans polaires de chacun des six autres points, par rapport à S et S′, se coupent respectivement suivant six droites qui appartiennent à un même complexe du premier ordre.

Si, menant par le sommet D du tétraèdre DABC, qui a pour sommets quatre des dix points, un plan fixe H et deux droites fixes λ et μ, on fait correspondre à tout point M de l'espace la droite ω, intersection des deux plans menés respectivement par les droites (H — BCM), (H — ACM) et par les points (λ — ABM) (μ — ABM), les six droites correspondant aux derniers points de la surface appartiennent à un même complexe du premier ordre.

N° 13; 31 mars.

Sylvester. — Sur la correspondance entre deux espèces différentes de fonctions de deux systèmes de quantités, corrélatifs et également nombreux. (779).

A i quantités on peut en associer i autres telles que chaque fonction symétrique (qui est une fonction des différences) des premières sera une fonction des sommes puissances du deuxième, du troisième, du $i^{\text{ième}}$ ... ordre des dernières; par somme-puissance, M. Sylvester entend une somme de puissances de quantités données.

Ainsi les quantités $r_1, r_2, \ldots, r_i$; $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i$ étant liées de telle sorte qu'elles soient respectivement racines des équations

$$ar^i + br^{i-1} + cr^{i-2} + dr^{i-3} + \ldots = 0,$$

$$a\rho^i + \frac{b}{i}\rho^{i-1} + \frac{c}{i(i-1)}\rho^{i-2} + \frac{d}{i(i-1)(i-2)}\rho^{i-3} + \ldots = 0,$$

toute fonction des différences des r s'exprimera par une fonction des sommes puissances $\Sigma\rho^2, \Sigma\rho^3, \ldots, \Sigma\rho^i$, en particulier toute fonction symétrique des différences des r sera une fonction rationnelle et entière de ces $i-1$ sommes puissances.

« En prenant $i = \infty$, le théorème revient à dire que tous les sous-invariants, sources des covariants de $(a, b, c)(x, y)^2, (a, b, c, d)(x, y)^3, \ldots$ (à l'infini), seront des fonctions des sommes puissances prises à l'infini, avec la seule exception de la somme linéaire, des racines de l'équation

$$0 = a + bx + \frac{c}{1.2}x^2 + \frac{d}{1.2.3}x^3 + \ldots \qquad \text{(à l'infini)}.$$

Tel est le théorème capital découvert par M. le capitaine Mac-Mahon, de l'artillerie royale anglaise. »

Boussinesq. — Calcul approché de la poussée et de la surface de rupture, dans un terre-plein horizontal homogène, soutenu par un mur vertical. (790).

Poincaré. — Sur une équation différentielle. (793).

Etude de l'équation

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi_0 + x\varphi_1 + x^2\varphi_2 + \ldots + x^m\varphi_m + \ldots,$$

où les φ sont des séries trigonométriques en t, à la période 2π, considérée par MM. Gyldén et Lindstedt.

Chervet. — Distribution du potentiel dans une plaque rectangulaire, traversée par un courant électrique, dont le régime est permanent. (795).

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME VIII.