PAUL TANNERY

Questions héroniennes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 329-344

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_329_1>

QUESTIONS HÉRONIENNES;

PAR M. PAUL TANNERY.

I.

Je crois avoir établi, dans un de mes précédents essais ([1]), que la restitution du mode d'extraction des racines carrées incommensurables dans l'école héronienne est intimement liée au système de représentation des fractions par une suite de *quantièmes*, c'est-à-dire de fractions ayant pour numérateur l'unité, et, pour dénominateurs, des nombres allant en croissant. Je me propose aujourd'hui de réunir quelques observations sur l'histoire de ce système, en remontant à son origine, c'est-à-dire en commençant par l'étudier dans le papyrus égyptien, traduit et commenté par August Eisenlohr (Leipzig, 1877).

A la vérité, les questions que soulève l'emploi de ce système chez les Égyptiens ont été à peu près épuisées, soit par M. Cantor, dans l'exposition qu'il en a faite au premier Chapitre de ses *Vorlesungen* ([2]), soit par F. Hultsch, dans la recension qu'il a faite de cet Ouvrage. Mais, si je dois me borner à très peu près à répé-

([1]) *L'Arithmétique des Grecs dans Heron d'Alexandrie*, pages 161-194 du t. IV (2e série) des *Memoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*.

([2]) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*. Leipzig, 1880, p. 21 et suivantes.

ter ce qui a déjà été dit par ces deux illustres savants, je crois indispensable de le faire pour bien établir le terme de comparaison avec les suites de quantièmes dans l'École héronienne.

Le système dont il s'agit est constamment suivi dans tout le papyrus d'Eisenlohr, ou du moins il ne souffre que deux exceptions.

L'une se rapporte à l'emploi de mesures concrètes, subdivisions de mesures plus grandes. Ainsi le *bescha,* unité de mesure pour les grains et les liquides, se partageait en demi, quart, huitième, et l'on rencontre des signes particuliers pour en représenter les fractions $\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$.

L'autre exception concerne la fraction $\frac{2}{3}$, qui jouissait du privilège singulier d'être considérée comme un *quantième,* privilège que, plus tard, les Grecs lui ont conservé.

Il est à noter, toutefois, que l'équivalence $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ est bien connue et expressément notée dans les règles de calcul qui sont réunies sous le n° 61 du papyrus.

« Prendre les $\frac{2}{3}$ d'une fraction. Si l'on te demande : quels sont les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{5}$, prends sa moitié et son sixième, cela fera ses $\frac{2}{3}$. Fais de même pour toute fraction qui se présente. »

Cette règle est appliquée dans toute sa rigueur, sinon à $\frac{1}{2}$, au moins à $\frac{1}{6}$. Ainsi pour les $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{6}$, on donne non pas $\frac{1}{9}$, mais

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{36}.$$

Après le titre, le papyrus commence immédiatement par une Table qui donne le développement en quantièmes de $\frac{2}{p}$ pour toutes les valeurs impaires de p allant de 5 à 99. L'usage de cette Table suppose naturellement que, pour les fractions de numérateur supérieur à 2, on procédait par opérations successives qu'il est facile d'imaginer.

Mais, si l'on se propose d'étudier suivant quels principes ont été obtenus les développements de cette Table, il convient de distinguer, d'une part, le cas où p est premier, de l'autre, celui où il est composé.

Pour le premier cas, il est avantageux d'employer le mode de représentation de F. Hultsch, qui indique comment sont composés les différents dénominateurs :

$p = 3)\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2p},$	$p = 43)\ \frac{1}{42}\ \frac{1}{2p}\ \frac{1}{3p}\ \frac{1}{7p},$
$= 5)\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3p},$	$= 47)\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{3p}\ \frac{1}{10p},$
$= 7)\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4p},$	$= 53)\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{6p}\ \frac{1}{15p},$
$= 11)\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6p},$	$= 59)\ \frac{1}{36}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{9p},$
$= 13)\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{8p},$	$= 61)\ \frac{1}{40}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{8p}\ \frac{1}{10p},$
$= 17)\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{3p}\ \frac{1}{4p},$	$= 67)\ \frac{1}{40}\ \frac{1}{5p}\ \frac{1}{8p},$
$= 19)\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{6p},$	$= 71)\ \frac{1}{40}\ \frac{1}{8p}\ \frac{1}{10p},$
$= 23)\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{12p},$	$= 73)\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{3p}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{5p},$
$= 29)\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{2p}\ \frac{1}{6p}\ \frac{1}{8p},$	$= 79)\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{3p}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{10p},$
$= 31)\ \frac{1}{20}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{5p},$	$= 83)\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{5p}\ \frac{1}{6p},$
$= 37)\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{3p}\ \frac{1}{8p},$	$= 89)\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{4p}\ \frac{1}{6p}\ \frac{1}{10p},$
$= 41)\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{6p}\ \frac{1}{8p},$	$= 97)\ \frac{1}{56}\ \frac{1}{7p}\ \frac{1}{8p}.$

Si l'on se propose, en thèse générale, de décomposer $\frac{2}{p}$ en deux quantièmes, dans le cas où p est impair, une seule solution est possible,

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p+1}{2}} + \frac{1}{\frac{p+1}{2}p}.$$

La Table ci-dessus montre que ce mode de décomposition n'est employé que pour les valeurs de $\frac{p+1}{2}$ suivantes : 2, 3, 4, 6, 12, c'est-à-dire pour les facteurs de 12.

Toutes les décompositions rentrent d'ailleurs dans la formule générale

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{M} + \frac{1}{ap} + \frac{1}{bp} + \frac{1}{cp},$$

où M est le plus petit multiple commun des facteurs a, b, c, dont le nombre est 1, 2 ou 3.

En dehors des valeurs de M déjà rencontrées, on trouve

$$8 = \frac{2}{3}12, \quad 24 = 2.12, \quad 36 = 3.12,$$

puis 20, 30, 40, 60 qui rentrent de même dans le système sexagésimal; enfin tout à fait isolés $42 = 6 \times 7$ et $56 = 7 \times 8$.

Le procédé général du développement est donc facile à reconnaître; on devait choisir d'abord parmi les nombres ayant plusieurs diviseurs et principalement dans la série des diviseurs ou des premiers multiples de 12 $\left(\frac{3}{2}\right.$ étant compté comme entier$\left.\right)$ ou dans la série des sous-multiples de 60, un nombre M compris entre p et $\frac{p}{2}$; la différence $\frac{2}{p} - \frac{1}{M} = \frac{2M - p}{Mp}$ se développait ensuite facilement en quantièmes, en décomposant $2M - p$ en une somme de diviseurs de M. Naturellement M devait être pris le plus petit possible, et, de la sorte, les Égyptiens ont trouvé accidentellement la division en deux quantièmes pour cinq des fractions $\frac{2}{p}$.

L'exemple de la décomposition de $\frac{2}{13}$,

$$\frac{2}{13} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8.13} = \frac{2}{8.13} + \frac{1}{8.13} = \frac{1}{4.13} + \frac{1}{8.13},$$

montre nettement qu'ils n'ont pas eu la notion de la règle générale que j'ai rappelée plus haut et qui leur eût donné la décomposition plus simple

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7.13}.$$

La décomposition

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2.13} + \frac{1}{5.13}$$

leur eût d'ailleurs donné des dénominateurs moins élevés, s'ils avaient pris M plus grand, toujours en restant d'ailleurs dans la série des nombres qu'ils semblent avoir pu choisir.

Que cette préoccupation d'avoir leurs derniers dénominateurs le moins élevés possible les guidât dans leurs calculs, on le voit d'ailleurs bien clairement dans les décompositions

$$\frac{2}{17} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12.17} = \frac{4}{12.17} + \frac{3}{12.17},$$
$$\frac{2}{19} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12.19} = \frac{3}{12.19} + \frac{2}{12.17}.$$

Il est certain, en effet, que nous aurions plutôt, avec un système semblable, tendance à graduer l'approximation en augmentant le plus possible le second quantième. Nous décomposerions donc 7 en $6 + 1$, et 5 en $4 + 1$.

Au point de vue égyptien, la décomposition de $\frac{2}{17}$ offre donc une particularité à signaler. Si $\frac{p+1}{2} = m^2$, on a

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{mp} + \frac{1}{(m+1)p};$$

les deux facteurs de p ne diffèrent que d'une unité. Cette décomposition se trouve effectivement appliquée pour $p = 31$, et pour $p = 97$.

Dans le premier cas, nous voyons apparaître $M = 20$, alors que $M = 24$ est préféré pour les nombres voisins; dans le second cas, nous avons $M = 7.8$ en dehors de la série sexagésimale; mais, au contraire, la décomposition analogue $\frac{2}{71} = \frac{1}{42} + \frac{1}{6.71} + \frac{1}{7.71}$ n'est pas donnée, quoique 42 soit choisi pour M dans un cas moins favorable.

A partir de $p = 29$, pour le choix de M, il semble y avoir une lutte entre les multiples de 12 et les diviseurs de 60; sauf l'exception signalée pour 20 ($p = 31$), 24 l'emporte d'abord

$$\frac{2}{29} - \frac{1}{24} = \frac{19}{24.29} = \frac{12}{24.29} + \frac{4}{24.29} + \frac{3}{24.29}.$$

On peut remarquer que le choix de 18 aurait donné une décomposition plus simple

$$\frac{2}{29} - \frac{1}{18} = \frac{1}{6.29} + \frac{1}{9.29}.$$

D'autre part,

$$\frac{2}{29} - \frac{1}{20} = \frac{1}{2.29} + \frac{1}{20.29}.$$

On préfère trois facteurs à deux pour avoir des dénominateurs plus simples, tandis que

$$\frac{2}{31}-\frac{1}{24}=\frac{1}{3.31}+\frac{1}{4.31}+\frac{1}{8.31}$$

aurait donné un développement moins avantageux que $\frac{2}{31}-\frac{1}{20}$.

De même

$$\frac{2}{37}-\frac{1}{24}=\frac{8+3}{24.37}=\frac{1}{3.37}+\frac{1}{8.37},$$

contre

$$\frac{2}{37}-\frac{1}{20}=\frac{3}{20.37}=\frac{1}{10.37}+\frac{1}{20.37};$$

puis

$$\frac{2}{41}-\frac{1}{24}=\frac{4+3}{24.41}=\frac{1}{6.41}+\frac{1}{8.41},$$

contre

$$\frac{2}{41}-\frac{1}{30}=\frac{10+6+3}{30.41}=\frac{1}{3.41}+\frac{1}{5.41}+\frac{1}{10.41};$$

au contraire,

$$\frac{2}{47}-\frac{1}{30}=\frac{10+3}{30.47}=\frac{1}{3.47}+\frac{1}{10.47},$$

au lieu de

$$\frac{2}{47}-\frac{1}{24}=\frac{1}{24.47}.$$

Le multiple 36 n'apparaît qu'une fois

$$\frac{2}{59}-\frac{1}{36}=\frac{9+4}{36.59}=\frac{1}{4.59}+\frac{1}{9.59},$$

au lieu de

$$\frac{2}{59}-\frac{1}{30}=\frac{1}{30.59},$$

tandis que

$$\frac{2}{53}-\frac{1}{30}=\frac{2+5}{30.53}=\frac{1}{6.53}+\frac{1}{15.53},$$

au lieu de

$$\frac{2}{53}-\frac{1}{36}=\frac{1}{3.53}+\frac{1}{9.53}+\frac{1}{12.53}.$$

Désormais il n'y a plus de multiple de 12 avant 60 :

$$\frac{2}{61}-\frac{1}{40}=\frac{10+5+4}{40.61},\quad \text{au lieu de}\quad \frac{2}{61}-\frac{1}{36}=\frac{1}{4.61}+\frac{1}{18.61},$$

$$\frac{2}{67}-\frac{1}{40}=\frac{8+5}{40.67},\quad \text{au lieu de}\quad \frac{2}{67}-\frac{1}{36}=\frac{1}{12.67}+\frac{1}{18.67},$$

$$\frac{2}{71}-\frac{1}{40}=\frac{5+4}{40.71},\quad \text{au lieu de}\quad \frac{2}{71}-\frac{1}{36}=\frac{1}{36.71}.$$

Mais 60 apparaît avant qu'il soit nécessaire

$$\frac{2}{73}-\frac{1}{60}=\frac{20+15+12}{60.73} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{2}{73}-\frac{1}{40}=\frac{5+2}{40.73},$$
$$\frac{2}{79}-\frac{1}{60}=\frac{20+15+6}{60.79} \quad \text{au lieu de} \quad \frac{2}{79}-\frac{1}{40}=\frac{1}{40.73}.$$

On a enfin

$$\frac{2}{83}-\frac{1}{60}=\frac{15+12+10}{60,83}=\frac{1}{4.83}+\frac{1}{5.83}+\frac{1}{6.83}$$

et

$$\frac{2}{89}-\frac{1}{60}=\frac{15+10+4}{60.89}=\frac{1}{4.83}+\frac{1}{6.89}+\frac{1}{15.89}.$$

En résumé, il semble bien, d'après tous ces cas, que les Égyptiens ont cherché à résoudre par tâtonnements le problème d'avoir les dénominateurs les plus petits possible, sauf à en augmenter le nombre.

L'introduction de $M=56$ était évidemment avantageuse à ce point de vue pour $p=97$; quant à celle de $M=42$ pour $p=43$,

$$\frac{2}{43}-\frac{1}{42}=\frac{21+14+6}{42.43}=\frac{1}{2.43}+\frac{1}{3.43}+\frac{1}{7.43},$$

il faut la comparer aux décompositions

$$\frac{2}{43}-\frac{1}{24}=\frac{3+2}{24.43}=\frac{1}{8.43}+\frac{1}{16.43}$$

ou bien

$$\frac{2}{43}-\frac{1}{30}=\frac{15+2}{30.43}=\frac{1}{2.43}+\frac{1}{15.43}.$$

On ne peut évidemment se refuser à admettre l'opinion de M. Cantor, que la Table que nous étudions n'a pas été faite d'un coup, suivant un dessein précis et des règles conçues d'avance; d'autre part, la préférence pour les petits dénominateurs, surtout mise en lumière par F. Hultsch, est suffisamment claire, quoique les décompositions correspondantes n'aient pas toujours été atteintes.

Si nous abordons maintenant les fracticns $\frac{2}{a}$, où a est un nombre composé, il est facile de reconnaître en premier lieu que, si 3 y entre comme facteur, on a toujours $\frac{2}{3q}=\frac{1}{2q}+\frac{1}{6q}$, suivant la décomposition $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$.

On serait tenté, dès lors, d'attendre de même toujours : pour les facteurs de 5 non multiples de 3 : $\frac{2}{5q} = \frac{1}{3q} + \frac{1}{15q}$, suivant la décomposition $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$, et pour les facteurs de 7 non multiples de 3 ou de 5 : $\frac{2}{7q} = \frac{1}{4q} + \frac{1}{28q}$, suivant la décomposition $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$.

Mais ces décompositions ne se rencontrent, avec 5, que pour $q = 5, 13, 17$; avec 7, que pour $q = 7, 11$.

Au contraire,

$$\frac{2}{5.11} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{66}\right)\frac{1}{5} \quad \text{et} \quad \frac{2}{5.19} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{76} + \frac{1}{114}\right)\frac{1}{5},$$

au lieu de

$$\frac{2}{5.11} = \frac{1}{33} + \frac{1}{165} \quad \text{et} \quad \frac{2}{5.19} = \frac{1}{57} + \frac{1}{325},$$

qui donnent des dénominateurs cependant plus faibles, mais moins commodes pour les calculs.

Les décompositions de $\frac{2}{35}$ et de $\frac{2}{91}$ forment exception en ce qu'elles ne peuvent se déduire des décompositions de l'un des facteurs premiers des dénominateurs.

Elles correspondent à la formule $\frac{2}{pq} = \frac{1}{p\frac{p+q}{2}} + \frac{1}{q\frac{p+q}{2}}$, dont l'application systématique eût permis de satisfaire, dans certains cas, au *desideratum* des Égyptiens plus complètement que ne le font les développements de la Table.

Ainsi

$$\frac{1}{99} = \frac{1}{90} + \frac{1}{110}, \quad \frac{2}{95} = \frac{1}{60} + \frac{1}{228}, \quad \ldots.$$

L'opinion de M. Cantor se trouve ainsi amplement confirmée.

II.

L'étude des nombreux calculs que renferment les solutions des divers problèmes du papyrus mathématique n'indique aucune divergence par rapport aux règles de décomposition données dans le premier Tableau.

Mais cette étude permet de constater les graves inconvénients que présentait, en thèse générale, le système de numération égyptien pour les fractions.

Ce système ne conduit, en somme, nullement à une représentation définie pour chaque fraction déterminée; suivant la marche des calculs qui conduisent à telle représentation, elle affectera des formes toutes différentes, dont on ne pourra reconnaître l'identité que par une réduction au même dénominateur.

Pour en donner un exemple : $\frac{1}{14}$, conçu comme moitié de $\frac{1}{7}$, se représente par la fraction simple; conçu comme quart de $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$, il se représentera par $\frac{1}{16} + \frac{1}{112}$ (n^os^ **12** et **13**). De même $\frac{1}{28}$ peut aussi se représenter par $\frac{1}{32} + \frac{1}{224}$ (n^os^ **14** et **15**), et ainsi de suite.

En tous cas, les calculs, qu'il s'agisse de la multiplication ou de la division, sont appropriés au système de numération, et l'opération qui revient à la réduction au même dénominateur n'intervient jamais que là ou elle est indispensable.

Dans les calculs de la collection héronienne, le système égyptien est, au contraire, à vrai dire, en pleine décadence; sauf dans les cas simples, on procède d'ordinaire pour les calculs à la réduction des suites en fractions de la forme moderne, et l'on transforme après coup le résultat en une suite de quantièmes. Il y a là incontestablement un progrès considérable réalisé.

Il n'en est pas moins vrai que les inconvénients du système subsistent et que l'on rencontre souvent des décompositions différentes représentant la même fraction.

Je vais analyser, aussi rapidement que possible, les particularités qu'offrent les calculs héroniens pour la décomposition des fractions en quantièmes.

A. *Le dénominateur est une puissance de* 2. — Les décompositions, très fréquentes, se font naturellement toujours suivant le principe de la numération du système binaire.

On doit remarquer la décomposition approximative

$$\frac{327}{512} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{73} \quad (S_2, 20)\,(^1).$$

(1) Les indications de renvoi se rapportent à l'édition *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiæ* de Hultsch, Berlin, 1864. Les lettres dé-

Après la formation des deux premières fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8}$, il reste $\frac{7}{512}$ qui donnerait régulièrement $\frac{1}{128} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512}$. Au lieu de cette décomposition, le dénominateur a été divisé par le numérateur et l'on a pris pour dénominateur d'un nouveau quantième le quotient par défaut. Le reste étant l'unité ($512 = 7 \times 73 + 1$), l'approximation est par excès et l'erreur est de $\frac{1}{73.512}$.

Aucune approximation analogue ne se rencontre dans le papyrus mathématique égyptien.

B. *Le dénominateur est de* 3 *ou son produit par une puissance de* 2. — Nous avons dit que la fraction $\frac{2}{3}$ était considérée comme quantième par les Grecs; toutefois, nous la rencontrons exceptionnellement remplacée par $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ dans le problème S_1, 37.

Nous avons, dans cette même classe, les dénominateurs 6 et 12. Pour le premier, il faut remarquer que l'on trouve $\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ et non $\frac{5}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}$, ce qui nous indique le maintien du principe égyptien, d'avoir les dénominateurs les plus faibles possible.

Au contraire, $\frac{5}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ et non pas $\frac{5}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$, ce qui est l'application du principe inverse.

Pour $\frac{7}{12}$ et $\frac{11}{12}$, nous rencontrons les deux décompositions

$$\frac{7}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} (S_2, 23) \quad \text{et} \quad \frac{7}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} (S_2, 22),$$
$$\frac{11}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} (G, 53) \quad \text{et} \quad \frac{11}{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} (G, 98).$$

C. *Le dénominateur est une puissance de* 3 *ou son produit par une puissance de* 2. — Nous avons les décompositions sui-

---

signent : G, le Traité *Heronis Geometria*, p. 41-140; S_1 = *Heronis introductiones stereometricorum*, p. 153-171; S_2 = *Heronis stereometricorum collectio altera*, p. 172-187; M = *Heronis mensuræ*, p. 188-207; D = *Didymi Alexandrini mensuræ*, p. 238-244. Les nombres suivant les lettres indiquent les numéros du problème de chaque Recueil.

vantes :

$$\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}, \quad \frac{4}{9} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9}, \quad \frac{7}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{9}, \quad \frac{8}{9} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18},$$
$$\frac{11}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9}, \quad \frac{31}{36} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}, \quad \frac{4}{27} = \frac{1}{3} + \frac{1}{27}.$$

Mais, en réalité, la suite qui représente $\frac{31}{36}$ est une approximation substituée à la partie fractionnaire dans le carré de $4\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{32}$; cette partie fractionnaire est $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{32}\ \frac{1}{64}\ \frac{1}{128}\ \frac{1}{1024}$, et $\frac{1}{9}$ est substitué aux fractions qui suivent $\frac{1}{4}$, c'est-à-dire à $\frac{121}{1024}$. Le quotient du dénominateur par le numérateur est ici pris par excès

$$(1024 = 9 \times 121 - 65)$$

et l'erreur est $\frac{65}{9.1024}$; l'approximation eût été un peu plus satisfaisante en prenant le quotient par défaut $(1024 = 8 \times 121 + 56)$; l'erreur n'eût été que de $\frac{7}{1024}$ (S_2, 38).

D. *Le dénominateur est* 5 *ou son produit par une puissance de* 2. — Nous rencontrons

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \quad \frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}, \quad \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20},$$
$$\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5}, \quad \frac{3}{20} = \frac{1}{8} + \frac{1}{40}.$$

La seconde forme du développement pour $\frac{4}{5}$ se rencontre une fois (S_1, 39) contre trois fois pour la première (G, 34, 66; D, 12). Celle-ci est remarquable en ce qu'elle offre encore le choix de dénominateurs aussi petits que possible. On peut observer également que la décomposition de $\frac{2}{5}$ conduirait, par multiplication pour $\frac{4}{5}$, à la décomposition $\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$.

E. *Le dénominateur est une puissance de* 5 *ou son produit* *par une puissance de* 2 :

$$\frac{2}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{75}, \quad \frac{6}{25} = \frac{1}{5} + \frac{1}{25}, \quad \frac{8}{25} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{50},$$

$$\frac{12}{25} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{200}, \quad \frac{16}{25} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{25},$$

$$\frac{104}{125} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50} + \frac{1}{125} + \frac{1}{250},$$

$$\frac{19}{50} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{200}, \quad \frac{31}{50} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{50}, \quad \frac{39}{50} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{40} + \frac{1}{200}.$$

Les décompositions $\frac{8}{25}$, $\frac{12}{25}$, $\frac{16}{25}$ et les trois dernières proviennent, en fait, de divisions par 200, ce qui explique leur nature.

F. *Le dénominateur renferme les facteurs* 3, 5 et 2 :

$$\frac{11}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}, \quad \frac{13}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{10}, \quad \frac{17}{30} = \frac{1}{2} + \frac{1}{15},$$

$$\frac{61}{90} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{90}.$$

G. *Le dénominateur est* 7 :

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28},$$

et exceptionnellement dans une décomposition de $\frac{11}{14}$:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} (S_2, 26),$$

$$\frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14},$$

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} (G, 89; M, 31) \quad \text{et} \quad \frac{5}{7} = \frac{2}{3} + \frac{1}{21} (G, 90),$$

$$\frac{6}{7} = \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} (G, 35, 96; M, 38) \quad \text{et} \quad \frac{6}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42} (G, 89, 102).$$

On remarquera les doubles formes pour les deux dernières fractions.

H. *Le dénominateur est le produit de* 7 *par une puissance* *de* 2 :

$$\frac{3}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14}, \quad \frac{9}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7}, \quad \frac{11}{14} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{28},$$

$$\frac{25}{28} = \frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28},$$

$$\frac{17}{112} = \frac{1}{7} + \frac{1}{112}, \quad \frac{73}{112} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{112},$$

$$\frac{43}{224} = \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{112} + \frac{1}{64}$$

et

$$\left.\begin{aligned}\frac{163}{224} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{112} + \frac{1}{224}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{112}\\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{21} + \frac{1}{112} + \frac{1}{224}\end{aligned}\right\} \text{(G, 90).}$$

Dans la triple forme de cette dernière fraction, on retrouve les deux formes du développement de $\frac{5}{7}$.

On rencontre encore (M, 38) la suite

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{21} + \frac{1}{84} = \frac{9}{14},$$

mais le calcul est erroné : en fait, les manuscrits ajoutent les fractions $\frac{1}{7} + \frac{1}{28}$ de façon à donner la somme inexacte $\frac{23}{28}$.

I. *Le dénominateur contient, soit les facteurs* 7 *et* 3, *soit aussi une puissance de* 2 :

$$\frac{5}{21} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14}\ \text{(M, 29)} \quad \text{et} \quad \frac{5}{21} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{42}\ \text{(G, 54)},$$

$$\frac{11}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{42}\ (\mathrm{S}_1, 9) \quad \text{et} \quad \frac{11}{21} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{21}\ (\mathrm{S}_1, 42),$$

$$\frac{13}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}, \qquad \frac{16}{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21},$$

$$\frac{37}{84} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{42}, \qquad \frac{70}{84} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{84}.$$

J. *Le dénominateur contient les facteurs* 7 *et* 5 :

$$\frac{19}{35} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15}, \quad \frac{57}{175} = \frac{1}{4} + \frac{1}{25} + \frac{1}{28}, \quad \frac{116}{175} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{50}.$$

K. *Le dénominateur contient le facteur* 11 :

$$\frac{6}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{22},\qquad \frac{9}{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{22}+\frac{1}{44},$$
$$\frac{20}{33}=\frac{1}{2}+\frac{1}{11}+\frac{1}{66},\qquad \frac{23}{33}=\frac{2}{3}+\frac{1}{33},$$
$$\frac{35}{66}=\frac{1}{2}+\frac{1}{33},$$
$$\frac{101}{132}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{66}.$$

L. *Le dénominateur contient le facteur* 13 :

$$\frac{4}{13}=\frac{1}{4}+\frac{1}{26}+\frac{1}{52},\qquad \frac{5}{13}=\frac{1}{3}+\frac{1}{26}+\frac{1}{78},$$
$$\frac{8}{13}=\frac{1}{2}+\frac{1}{13}+\frac{1}{26},\qquad \frac{9}{13}=\frac{2}{3}+\frac{1}{39},$$
$$\frac{10}{13}=\frac{2}{3}+\frac{1}{13}+\frac{1}{39},\qquad \frac{12}{13}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{13}+\frac{1}{78},$$
$$\frac{21}{26}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{26}+\frac{1}{52}.$$

Ces décompositions sont remarquables, en ce que pour $\frac{4}{13}$ et $\frac{8}{13}$ elles dérivent évidemment de la forme complexe des Égyptiens, $\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$.

M. *Le dénominateur est* $51 = 17 \times 3$ (G, 57, 58) :

$$\frac{19}{51}=\frac{1}{3}+\frac{1}{34}+\frac{1}{102},\qquad \frac{31}{51}=\frac{1}{2}+\frac{1}{17}+\frac{1}{34}+\frac{1}{51},$$
$$\frac{35}{51}=\frac{1}{3}+\frac{1}{51},\qquad \frac{39}{51}=\frac{13}{17}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{68},$$
$$\frac{41}{51}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{51}+\frac{1}{51}+\frac{1}{68}.$$

L'irrégularité de la dernière décomposition, qui contient deux fois la fraction $\frac{1}{51}$, saute aux yeux; elle dérive évidemment de celle de $\frac{39}{51}$ par l'addition de cette double fraction.

La décomposition égyptienne de $\frac{2}{51}=\frac{1}{34}+\frac{1}{102}$ se retrouve d'ailleurs dans celle de $\frac{19}{51}$.

Il serait facile de multiplier les rapprochements de cette nature, et il apparaît, pour l'ensemble des décompositions héroniennes, que l'antique procédé originaire des bords du Nil a été conservé dans la logistique grecque en subissant, à la vérité, parfois certaines modifications, mais sans recevoir aucun perfectionnement réel, quoiqu'il laissât, comme nous l'avons vu, singulièrement à désirer, et sous le rapport théorique et sous le rapport pratique.

Le système moderne des fractions ordinaires, qui se trouve en fait concurremment employé avec les développements en quantièmes dans la collection des écrits héroniens, fut de bonne heure imaginé par les Grecs, à la suite de leurs spéculations sur les rapports numériques des intervalles musicaux; il semble déjà connu du temps de Platon et il est employé, dès avant Archimède, par Aristarque de Samos, il est vrai seulement sous forme de rapport de deux nombres.

Mais le triomphe du nouveau système n'a jamais été définitif pour la pratique des calculs: il est à remarquer, notamment, que lorsque Ptolémée n'emploie pas la notation sexagésimale, c'est de l'antique procédé qu'il se sert de préférence pour la représentation des fractions. Diophante lui-même semble l'avoir employé autant qu'il lui était possible, alors que cependant la nature des problèmes qu'il traitait le conduisait nécessairement à préférer l'autre système.

A la vérité, les traces de l'emploi du procédé égyptien ont été systématiquement éliminées du texte de Diophante dans l'édition de Bachet, où notamment le signe spécial qui représente la fraction $\frac{1}{2}$ est constamment remplacé par la notation α^{β}, qui n'a jamais été grecque. Dans les manuscrits de Diophante eux-mêmes, surtout ceux qui contiennent les scolies, attribués à Planude, le travail accompli par Bachet avait déjà été poussé très loin.

Je puis citer un exemple frappant; dans un problème de Diophante, la fraction $\frac{3}{5}$ est donnée dans les manuscrits de cette dernière classe sous la forme γ^{ε} ou $\overline{\gamma}\ \varepsilon^{\alpha}$ (1). Mais les manuscrits les

(1) Les manuscrits varient constamment entre l'usage de mettre le dénominateur en exposant, et celui de l'écrire à la suite du numérateur avec des signes spéciaux représentant la finale qui change avec les différents cas, puisque le dé-

plus anciens donnent pour cette fraction S ιγ″, c'est-à-dire $\frac{1}{2} + \frac{1}{13}$, avec la note marginale que c'est à très peu près la valeur de $\frac{3}{5}$.

Il me paraît évident que Diophante avait écrit S ι″, c'est-à-dire $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$, comme l'eût fait un héronien ; plus tard un copiste aura juxtaposé $\bar{\gamma}$ ε^{α}, comme l'expression plus naturelle pour lui; plus tard encore, un autre copiste aura cru que ιγ formait un seul nombre, et supprimant le ε, dont il ne comprenait pas la présence, il aura donné la leçon actuelle avec l'absurde note marginale destinée à la justifier.

Nous avons d'ailleurs une preuve assurée qu'en plein XIVe siècle les Grecs de Byzance conservaient encore le procédé égyptien pour la représentation des fractions; Friedlein a, en effet, publié en 1866 (1) la *Géométrie* de Pediasimos, qui est un des derniers travaux rédigés sur le plan des écrits héroniens. Il est très remarquable que le procédé en question pour la représentation des fractions s'y trouve pour ainsi dire exclusivement employé, et que le système des fractions ordinaires n'y a nullement gardé la place qu'il a déjà prise dans les écrits héroniens.

(*A suivre.*)

---

nominateur se décline en tant que nombre ordinal. Parfois même, on trouve le dénominateur à la fois en exposant et à la suite du dénominateur.

Quant au mode singulier que donnent les manuscrits héroniens utilisés par Hultsch et qui consiste à répéter le dénominateur $\left(p \text{ et } \gamma' \varepsilon'' \varepsilon'' \text{ pour } \frac{3}{5}\right)$, ce me semble être moins une véritable notation mathématique que l'extension abusive d'un usage des copistes de redoubler les signes abréviatifs lorsque le mot abrégé est au pluriel; par exemple, le carré (τετράγωνον) se représente en abrégé par un signe qui a la forme d'un carré; mais au pluriel on répète ce signe, etc. La forme authentique pour $\frac{3}{5}$ me paraît d'ailleurs avoir plutôt été $\bar{\gamma}$ $\varepsilon\varepsilon^{\alpha}$.

(1) *Programm zur öffentlichen Preise-Vertheilung an der Studien-Anstalt Ansbachs.*