BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 281-285

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_281_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GUICHARD (C.). — Théorie des points singuliers essentiels. — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris, 98 pages in-4°; 1883.

La première Partie du travail de M. Guichard a pour objet la théorie générale des fonctions qui ont des points essentiels, et la classification des fonctions uniformes et des points singuliers. L'auteur prend pour point de départ le théorème de Laurent, qui permet de décomposer une fonction $\Pi(z)$, holomorphe dans l'espace annulaire compris entre deux cercles C et C′ ayant pour centre commun l'origine, en une somme de deux séries $Q(z)$, $P\left(\frac{1}{z}\right)$, ordonnées suivant les puissances positives et négatives de la variable. Il existe une fonction $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$, uniforme dans tout le plan qui coïncide avec la série $P\left(\frac{1}{z}\right)$ dans toute l'étendue où elle est convergente. En dehors du cercle intérieur C, cette fonction est représentée par la série $P\left(\frac{1}{z}\right)$, et dans ce cercle par la différence $\Pi(z) - Q(z)$. $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ sera la *fonction caractéristique* du point singulier $z = 0$, et l'on dira que deux fonctions ont le point $z = 0$ pour point singulier de même espèce, quand la différence de ces deux fonctions et par suite des fonctions caractéristiques correspondantes est holomorphe près du point zéro.

Un nouveau théorème, corrélatif de celui de Laurent, permet à M. Guichard d'aborder sous un autre point de vue la théorie des points singuliers : *Toute fonction, holomorphe entre deux cercles* C *et* C′ *ayant pour centre l'origine, est égale dans cette étendue au produit de deux séries, contenant l'une les puissances positives, l'autre les puissances négatives de* z;

$$\Pi(z) = z^n q(z) p\left(\frac{1}{z}\right).$$

Il existe une fonction $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$, uniforme dans tout le plan, qui coïncide avec la série p en dehors du cercle intérieur C. L'exposant entier n peut être choisi de façon que le premier terme de $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ soit indépendant de $\left(\frac{1}{z}\right)$: la fonction $z^n p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ caractérise alors les zéros et les points singuliers situés à l'intérieur de C. M. Guichard l'appelle encore *fonction caractéristique*. De là une nouvelle définition de l'espèce d'un point singulier : deux fonctions ont l'origine pour point singulier de même espèce, lorsque leur quotient, et par suite celui des fonctions caractéristiques correspondantes, est holomorphe au voisinage de l'origine. Cette définition ne concorde pas avec la première : il est impossible que deux fonctions différentes aient l'origine comme point singulier de même espèce dans les deux modes de décomposition.

Le théorème de M. Mittag-Leffler s'étend à tous les points singuliers, définis par la décomposition de la fonction en une somme de deux séries : M. Guichard l'énonce dans sa pleine généralité. A ce théorème correspond une proposition analogue pour la décomposition en un produit de deux séries : cette proposition donne le moyen de décomposer une fonction uniforme en un produit de facteurs primaires contenant soit un zéro, soit un pôle, soit un point essentiel, à distance finie, au plus.

M. Guichard fait marcher de pair la classification des points singuliers et celle des fonctions uniformes. Un point singulier sera de *première classe*, quand la fonction $P_1\left(\frac{1}{z}\right)$ ou $p_1\left(\frac{1}{z}\right)$ qui définit l'espèce du point singulier est holomorphe dans tout le plan, sauf au point $z = 0$. Ces deux définitions, qui correspondent à la décomposition en somme et à la décomposition en produit, conduisent au même résultat. Une fonction uniforme, qui a des points singuliers, sera dite de première classe quand tous ses points singuliers sont de première classe. Le point infini d'une fonction de première classe dont les points singuliers sont en nombre illimité est un point singulier de *deuxième classe*. En général, le point a sera un point singulier de deuxième classe, quand les fonctions $P\left(\frac{1}{z-a}\right)$, $p\left(\frac{1}{z-a}\right)$ sont telles que $P(z-a)$, $p(z-a)$ soient des fonctions uniformes de première classe, ayant une infinité de points singuliers. Une fonction uniforme est de *deuxième classe* quand elle n'a que des points singuliers de première et de deuxième classe. Le point infini d'une fonction uniforme de deuxième classe définit le point singulier de *troisième classe*. En continuant ainsi, on arrive à classer de proche en proche les fonctions uniformes et les points singuliers. Cette classification met en évidence cette double propriété fondamentale des fonctions uniformes : 1° *Toute fonction, de classe n dans une étendue limitée, a dans cette étendue un nombre fini de points singuliers de classe n;* 2° *si une fonction est de classe n sur toute la sphère, le nombre de ses points singuliers de classe n est limité.*

Tous les points singuliers et toutes les fonctions uniformes ne rentrent pas dans la classification précédente. On peut, en effet, former, d'après le théorème de M. Mittag-Leffler, une fonction ayant les points singuliers 1, 2, ..., n d'espèces P_1, P_2, ..., P_n, $P_n\left(\frac{1}{z-n}\right)$ définissant un point singulier de classe n. Cette fonction ne reste dans aucune des classes précédemment énumérées : on dit qu'elle est du *deuxième genre*. Son point infini constitue une nouvelle espèce de discontinuité, que M. Mittag-Leffler appelle un point singulier du *deuxième genre*. Les points singuliers et les fonctions uniformes du deuxième genre se divisent à leur tour en classe, jouissant de la double propriété fondamentale signalée pour les points et les fonctions du premier genre. Si l'on forme une fonction uniforme ayant le point 1 comme point singulier de classe 1, le point 2 comme point singulier de classe 2, ..., le point n comme point singulier de classe n, le point infini d'une telle fonction est une singularité nouvelle, que M. Guichard appelle point singulier du *troisième genre,* et ainsi de suite.

Mais la classification par genres ne suffit pas encore. Il y a lieu de grouper les fonctions uniformes et les points singuliers en *familles,* comprenant chacune une infinité de genres. On pourra former une suite illimitée de familles; on n'aura pas encore formé toutes les fonctions et tous les points singuliers possibles : on peut continuer ainsi indéfiniment.

Dans la deuxième Partie de son travail, l'auteur étudie les fonctions simplement périodiques qui ont des points singuliers essentiels. Il les obtient d'abord sous la forme de produits ou de sommes de termes primaires, puis sous la forme de développements en série qui les représentent d'une façon plus simple.

La dernière Partie est consacrée à l'étude des fonctions doublement périodiques. M. Guichard forme d'abord des fonctions intermédiaires qui jouent dans cette théorie un rôle analogue à celui des fonctions θ dans la théorie des fonctions doublement périodiques méromorphes. En employant la méthode indiquée par M. Appell (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 3 avril 1882), on arrive à développer ces fonctions intermédiaires en séries. Avec ces fonctions intermédiaires, on peut former des fonctions doublement périodiques. En cherchant les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse former une telle fonction, quand l'espèce et la position de ses points singuliers sont données, l'auteur parvient à généraliser un certain nombre de théorèmes relatifs aux fonctions méromorphes doublement périodiques. La méthode de décomposition en sommes généralise le théorème des résidus; la méthode de décomposition en produits généralise les théorèmes de Liouville. Au lieu de passer par l'intermédiaire des fonctions simplement périodiques, on peut arriver directement à la double périodicité par la considération de sommes et de produits doublement infinis. C'est ainsi que M. Guichard étend aux fonctions périodiques les plus générales les résultats obtenus par M. Cayley dans sa théorie des fonctions doublement périodiques méromorphes.

RADAU (R.). — SUR LES DÉVELOPPEMENTS DE L'EXPRESSION $(1-2\alpha z+\alpha^2)^{-k}$ (*Annales de l'Observatoire de Paris,* Partie théorique, t. XVIII). Paris, 1883, in-4° de 20 p.

Les fonctions $P^{n,k}$ qui naissent du développement de

$$(1-2\alpha z+\alpha^2)^{-k},$$

suivant les puissances ascendantes de α, ont été déjà étudiées par un grand nombre de géomètres. Le travail que nous avons sous les yeux se rattache aux recherches de M. Tisserand sur les formes que prend ce développement lorsqu'on fait

$$z=\mu\cos x+\nu\cos y,\quad \mu+\nu=1\quad \text{et}\quad P^{n,k}=4\Sigma\mu^i\nu^j A_{i,j}^{n,k}\cos ix\cos jy.$$

L'auteur commence par démontrer d'une façon nouvelle que, pour $k = \frac{1}{2}$, les coefficients A s'expriment par des séries hypergéométriques, et, pour $k = 1$, par les carrés d'autres séries hypergéométriques, comme l'avait déjà trouvé M. Tisserand. En posant

$$n = i + j + 2f,$$

on a, en effet,

$$A_{i,j}^{n,\frac{1}{2}} = F(-2f,\ 2n-2f+1,\ 2j+1,\ \nu),$$
$$A_{i,j}^{n,1} = F^2(-\ f,\ \ n-\ f+1,\ \ j+1,\ \nu),$$

et ces développements fournissent aussi les coefficients cherchés pour $k = -\frac{1}{2}$ et pour $k = 0$. Dans le cas général, $A^{n-2,k+1}$ peut encore se déduire de $A^{n,k}$ (excepté pour $k = \frac{1}{2}$).

Après avoir formé, en passant, l'équation différentielle du troisième ordre que vérifient les coefficients $A^{n,k}$, l'auteur établit l'expression générale de ces coefficients sous forme de trinôme hypergéométrique

$$A_{i,j}^{n,k} = \frac{(k,1)^n}{i!\,j!\,f!}\left(\frac{\mu^2}{i+1,1} + \frac{\nu^2}{j+1,1} - \frac{1}{k+n-1,-1}\right)^f,$$

formule dont le développement donne la série hypergéométrique à deux variables de M. Appell. La notation employée est celle des factorielles de Vandermonde, qui permet d'écrire la série hypergéométrique ordinaire sous la forme d'un binôme

$$F(-n,\beta,\gamma,x) = \left(1 - \frac{\beta,1}{\gamma,1}\,x\right)^n.$$

L'auteur donne ensuite des expressions nouvelles des coefficients $B_{i,j}^{(k)} = \Sigma\alpha^n A_{i,j}^{n,k}$ du développement

$$(1 - 2\alpha z + \alpha^2)^{-k} = 4\Sigma B_{i,j}^{(k)}\mu^i\nu^j \cos ix \cos jy.$$

Puis, reprenant les coefficients A, il les développe suivant les puissances ascendantes de ν, et il réussit à les représenter, d'une part au moyen d'une suite de binômes (ou séries) hypergéométriques du premier ordre, et de l'autre par une suite de binômes hypergéométriques d'ordre supérieur, qui, en apparence plus compliquée que la première, fournit cependant l'expression la plus simple des coefficients cherchés, et conduit immédiatement aux formes déjà trouvées pour $k = \frac{1}{2}$ et pour $k = 1$. On obtient des résultats analogues en développant suivant les puissances descendantes de ν.