Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 257-263
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_257_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

RESAL (H.). — TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE MÉCANIQUE CÉLESTE. Paris, Gauthier-Villars, xx-459 p. in-4°; 1884.

Nous avons aujourd'hui à appeler l'attention de nos lecteurs sur une nouvelle et importante publication de M. H. Resal. La première édition du *Traité élémentaire de Mécanique céleste*, dans laquelle le savant auteur s'était proposé d'exposer les principes fondamentaux de cette science, en ayant recours aux démonstrations les plus simples, avait été accueillie avec la plus grande faveur et se trouvait depuis longtemps épuisée. Au lieu de la réimprimer purement et simplement, M. Resal lui a fait subir de profondes modifications qui en font un Ouvrage nouveau à bien des égards. Au reste, pour donner une idée de l'ordre adopté et des matières traitées, nous n'aurons qu'à reproduire l'extrait suivant de la Préface de l'Ouvrage :

« Pour déblayer le terrain, et en même temps pour faciliter la lecture du texte proprement dit, nous avons cru devoir placer en tête de l'Ouvrage une Introduction où se trouvent traitées, d'une manière spéciale, la plupart des questions de Mécanique analytique et d'Analyse qui doivent ultérieurement se présenter, et parmi lesquelles nous signalerons les suivantes : dans le Titre I, nous avons donné les équations de la Mécanique analytique dues à Lagrange, Hamilton et Jacobi, suivies de celles auxquelles conduit la méthode de la variation des constantes arbitraires. Le Titre II se rapporte à l'emploi des coordonnées elliptiques dans la solution de certains problèmes relatifs au mouvement d'un point matériel dans un plan.

» Dans le Titre III, nous avons reproduit les intégrales connues des équations du mouvement relatif, par rapport à l'un de ses points, d'un système matériel uniquement soumis à ses actions mutuelles.

» Nous avons eu pour objet, dans le Titre IV, d'établir les équations du mouvement dans l'espace d'un point matériel, exprimées en coordonnées polaires, équations auxquelles on doit avoir recours dans la théorie de la Lune. Le Titre V et dernier de l'Introduction renferme les solutions de quelques questions d'Analyse dont les énoncés ne peuvent pas être traduits en langage ordinaire et pour lesquelles nous renverrons à la Table des matières.

» Nous arrivons maintenant à la partie essentielle de l'Ouvrage.

» Dans le Chapitre I, nous nous sommes occupé du mouvement elliptique des planètes, de la gravitation, de la détermination des masses, de la formule de Lambert et de ses conséquences dans le mouvement parabolique des comètes; de la détermination des constantes introduites dans les formules du mouvement elliptique et notamment par la méthode de Gauss, qui n'est mentionnée ni dans la *Mécanique céleste* de Laplace, ni dans l'*Exposition analytique du système du monde* de Pontécoulant; des développements en séries des coordonnées d'une planète suivant les puissances ascendantes du temps et de leurs applications, ainsi que de la détermination des éléments d'une orbite cométaire. Comme première innovation apportée au programme de la première édition, nous avons terminé le Chapitre dont il s'agit en nous occupant du problème du mouvement plan d'un point matériel attiré par deux centres fixes en raison inverse du carré de la distance; ce problème, posé par Euler, a été complètement résolu par Legendre, puis par Liouville, dont nous avons reproduit la démonstration, en raison de sa simplicité.

» Le Chapitre II est consacré entièrement à la théorie des perturbations. Nous avons pensé que, pour bien faire comprendre le sens du problème que l'on a en vue, il convenait de faire précéder les recherches analytiques de la théorie géométrique des perturbations, dont l'idée première est due à Newton et qui a été reprise plus tard par Lagrange, dans l'hypothèse où les planètes circuleraient dans le plan de l'écliptique. Dans cette seconde innovation, nous avons eu uniquement recours aux propriétés de l'accélération, qui, comme on le sait, n'ont été établies que vers le commencement de la seconde moitié de notre siècle. Nous avons déduit très facilement, des résultats obtenus, les formules de Poisson qui s'appliquent au mouvement d'une planète dans un milieu dont la résistance est proportionnelle au carré de la vitesse. Nous avons exposé ensuite la théorie analytique des perturbations des planètes, en prenant pour point de départ les théorèmes d'Hamilton et de

Jacobi, méthode qui est beaucoup plus simple que celle de Lagrange, lorsqu'on s'est bien assimilé les matières contenues dans l'Introduction. Nous avons terminé le Chapitre en donnant les formules qui se rapportent aux perturbations du mouvement elliptique des comètes.

» Dans le calcul de l'attraction des corps, qui fait l'objet du Chapitre III, nous avons reproduit, à quelques modifications près, les démonstrations géométriques que nous avions données dans la première édition, en vue d'apporter quelque clarté sur cette partie de la Mécanique céleste. Nous avons continué à démontrer *a priori*, au moyen d'une double intégration par parties, la convergence du développement du potentiel en fonctions sphériques dans les cas douteux auxquels Laplace ne s'est pas arrêté. Nous avons employé, pour déterminer la forme de ces fonctions, la méthode de Jacobi, à laquelle nous avons donné plus de développements, et qui est l'une des plus élégantes et des plus simples.

» Parmi les questions traitées dans le Chapitre IV, relatif à la figure des planètes, nous citerons celle de l'ellipsoïde à trois axes inégaux de Jacobi, la discussion des équations qui en résultent, établie d'abord par Meyer, puis modifiée et complétée par Liouville; les hypothèses de Legendre et de É. Roche sur la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre; le théorème de Liouville sur la stabilité de l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, théorème dont nous avons donné une démonstration géométrique et que nous avons ensuite appliqué à la stabilité de l'équilibre des mers.

» Nous avons déduit (Chap. V), de considérations géométriques sur le mouvement d'un point, les propriétés, dues à Laplace, des lignes géodésiques tracées sur la surface d'un sphéroïde.

» Dans le Chapitre VI, où nous nous occupons des atmosphères des corps célestes, nous avons notamment emprunté à É. Roche les considérations qui, en tenant compte de l'hypothèse de la force répulsive due aux radiations calorifiques, imaginée par M. Faye, permettent d'expliquer la forme des comètes.

» En tête du Chapitre VII, intitulé *Des oscillations de la mer et de l'atmosphère,* nous avons établi immédiatement les équations des petits mouvements d'un fluide recouvrant un noyau sphéroïdal, en nous appuyant uniquement sur le théorème de Coriolis dans le mouvement relatif, et sur le principe de l'indépendance des forces centrifuges composées avec les mouvements composants. Nous sommes parvenu à établir la formule pratique relative aux marées, donnée par l'*Annuaire du Bureau des Longitudes,* formule qui paraît être due à Poisson, mais dont nous n'avons trouvé nulle part la démonstration.

» Une interprétation géométrique des propriétés du mouvement d'un solide autour d'un point fixe nous a permis de poser presque immédiatement les équations du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité (Chap. VIII). En ce qui concerne les déplacements séculaires de la Terre, nous avions, dans la première édition, pris pour origine du temps l'année 1750: mais ici nous partons de l'année 1850, et nous mettons à profit les chiffres obtenus par Le Verrier en discutant les résultats des observations de Peters. Une simple considération géométrique basée sur la théorie des mouvements relatifs nous a permis d'établir facilement ce théorème de Laplace : *Les phénomènes de la précession des équinoxes et de la nutation sont absolument les mêmes que si la mer et l'atmosphère formaient une masse solide avec le sphéroïde qu'elles recouvrent.*

» Les équations du mouvement de la Lune et de l'anneau de Saturne, comme celles qui se rapportent à la Terre, ont aussi été déduites de considérations géométriques.

» La publication de notre Ouvrage sur la *Physique mathématique* nous a dispensé de reproduire, dans le Chapitre IX, relatif à la chaleur terrestre, les développements sur le mouvement de la chaleur dans une sphère et sur la chaleur centrale du globe, que nous avions donnés dans la première édition; nous n'avons eu dès lors, à quelques préliminaires près, à nous occuper que de la diminution de la durée du jour due au refroidissement de la Terre.

» Nous avons ajouté au programme que nous avions adopté dans la première édition, et d'après Laplace dont nous nous sommes efforcé de simplifier les démonstrations :

» 1° La théorie des réfractions astronomiques ;

» 2° La théorie des inégalités du mouvement des planètes dues à l'ellipticité du Soleil, avec son application à Mercure;

» 3° Enfin, pour terminer, les principes fondamentaux de la théorie de la Lune, en suivant la voie tracée par Laplace. »

A cet exposé si complet et si intéressant, nous n'ajouterons qu'un seul mot. L'exposition est claire et satisfaisante. Quant à l'impression elle est digne en tout des presses de M. Gauthier-Villars. La seconde édition du *Traité élémentaire de Mécanique céleste* se présente à nous sous la forme d'un beau Volume in-4° où rien ne laisse à désirer, ni les figures, ni les formules, ni le texte.

GLAISHER. — VARIOUS PAPERS AND NOTES (chiefly relating to elliptic functions) that have appeared in the QUARTERLY JOURNAL OF MATHEMATICS and the MESSENGER OF MATHEMATICS during the years 1881 and 1882. 1 vol. in-8°. Cambridge, 1882.

M. Glaisher, par de nombreuses et intéressantes publications, insérées soit dans le *Messenger of Mathematics*, soit dans le *Quarterly Journal,* cherche à populariser en Angleterre la théorie des fonctions elliptiques. Comme M. Cayley, dans son excellent *Elementary Treatise of elliptic functions,* c'est surtout au point de vue de Jacobi qu'il se place. Et, à la vérité, ce point de vue est quelquefois par trop abandonné. Quel que soit l'intérêt propre de la théorie des fonctions d'une variable complexe, quelle que soit la lumière qu'on puisse en tirer pour la théorie des fonctions elliptiques, il ne faudrait point qu'elle absorbât cette dernière jusqu'à en faire oublier les détails et négliger les applications.

Les notes de M. Glaisher, destinées à illustrer quelques passages des *Fundamenta,* à développer quelques formules utiles, à faciliter le maniement des transcendantes elliptiques, à faire ressortir les analogies ou les liaisons de ces dernières avec les fonctions trigonométriques, doivent rendre les plus grands services aux étudiants et aux maîtres qui les lisent. La notation adoptée est celle de Gudermann, un peu compliquée par l'emploi de symboles nouveaux, assez ingénieux d'ailleurs; ainsi les symboles ns, nc, nd sont mis à la place de $\frac{1}{\text{sn}}, \frac{1}{\text{cn}}, \frac{1}{\text{dn}}$; puis la combinaison de deux des lettres s, c, d représente le quotient de deux des transcendantes sn, cn, dn, dont les premières lettres figurent dans la combinaison : ainsi

$$\operatorname{sc} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

On a ainsi neuf transcendantes. M. Glaisher donne le tableau des dérivées et des intégrales de ces fonctions et de leurs puissances entières, la formule d'addition que Jacobi a déduite par analogie de l'identité

$$(u-x)(y-z)+(u-y)(z-x)\quad(u-z)(x-y)=0,$$

et diverses conséquences de cette formule, le développement des expressions

$$\operatorname{sn}(u+v+w),\quad \operatorname{cn}(u+v+w),\quad \operatorname{dn}(u+v+w),$$

les dérivées secondes des logarithmes des neuf transcendantes, la démonstration de la formule

$$\mathrm{Z}(u)+\mathrm{Z}(v)-\mathrm{Z}(u+v)=k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v),$$

tirée des développements des fonctions Z, sn en séries de Fourier; dans un article qui a été analysé dans le *Bulletin* à propos du *Quarterly Journal,* il insiste sur les liens étroits qui unissent les formules d'addition et la théorie du triangle sphérique. Signalons encore les formules

$$\arg \operatorname{sn} a = \frac{1}{\pi}\int_0^{\mathrm{K}'} \log\left[\frac{1+a \operatorname{dn}(u,k')}{1-a \operatorname{dn}(u,k')}\right] du,$$

$$(\arg \operatorname{sn} a)^2 = \frac{2}{\pi}\left\{ \mathrm{K}' \int_0^{\mathrm{K}} \log(1-a^2k^2\operatorname{sn}^2 u)\,du \right.$$
$$\left. - \mathrm{K}\int_0^{\mathrm{K}} \log[1-a^2\operatorname{dn}^2(u,k')]\,du \right\},$$

et un article déjà analysé relatif à la fonction

$$\mathrm{E}i(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u}\,du.$$

Enfin, le petit volume de M. Glaisher se termine par quelques formules relatives aux fonctions sphériques et au logarithme intégral, et par d'intéressants exemples destinés à illustrer la théorie des solutions singulières des équations différentielles, donnée par M. Cayley dans le second Volume du *Messenger of Mathematics*.