BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 177-191

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_177_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

NOETHER (M.). — ZUR GRUNDLEGUNG DER ALGEBRAISCHEN CURVEN. 1 vol. in-4°, 120 p. ; Berlin, 1883.

L'Académie des Sciences de Berlin avait proposé pour le concours du prix Steiner le sujet suivant : « Résoudre quelque question importante se rapportant à la théorie des courbes algébriques dans l'espace ». Deux Mémoires ont été couronnés : l'un d'eux est celui que nous analysons ; l'autre, dû à M. Halphen, a paru dans le *Journal de l'École Polytechnique* et a déjà été analysé dans le *Bulletin*.

Le Mémoire de M. Noether, comme celui de M. Halphen, a un caractère nettement algébrique. Au surplus, c'est assurément dans la théorie des fonctions algébriques qu'il faut, comme le dit l'auteur, chercher une base solide à la théorie des courbes algébriques ; les résultats obtenus pour les courbes planes, résultats à l'accroissement desquels M. Noether a largement concouru, montraient dans quelle voie il convenait de s'engager.

La bibliographie des travaux relatifs à la théorie des courbes gauches algébriques n'est pas très considérable ; il convient de reproduire ici la liste des travaux cités et utilisés par M. Noether.

Cayley. — Considérations générales sur les courbes en espace. (*Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. LIV-LVIII ; 1862, 1864.)

Halphen. — Mémoire sur les courbes gauches algébriques. (*Comptes rendus*, t. LXX ; 1870.) — Recherches de Géométrie à *n* dimensions. (*Bull. de la Soc. Math. de France*, t. II.) — Sur quelques propriétés des courbes gauches algébriques. (*Ibid.*)

Brill und *Noether*. — Ueber die algebraischen Functionen und ihre Anwendung in der Geometrie. (*Mathem. Ann.*, t. VII ; 1873.)

Ed. Weyr. — Ueber algebraische Raumcurven. (*Inaugural-*

Dissert. Göttingen; 1873.) — Notes diverses insérées dans les *Comptes rendus*, t. LXXVI.)

Noether. — Zur Theorie des eindeutigen Entsprechens algebraischer Gebilde. 2. Aufsatz. (*Math. Ann.*, t. VIII; 1878.)

Sturm. — Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung. (*Journal de Borchardt*, t. LXXXVIII; 1879.) — On some new theorems on curves of double curvature. (*Report of the British Assoc.*; 1881.)

Valentiner. — Bidrag til Raumcurvernes Theorie. (*Inaugural Dissert.* Kopenhagen; 1881.)

Le Mémoire de M. Noether comprend trois parties.

Dans la première partie, l'auteur commence par rappeler certaines définitions et propositions qui concernent les courbes algébriques planes : une courbe *adjointe* à une courbe plane f_m^p d'ordre m, de genre p, est une courbe qui admet chaque point i^{uple} de f_m^p pour point $(i-1)^{\text{uple}}$; deux groupes G_Q, G_R de Q et de R points qui (en dehors des points multiples de f_m^p) constituent la totalité des points d'intersection de f_m^p et d'une de ses adjointes sont dits *réciproquement résiduels ;* l'un de ces groupes est le *reste* de l'autre; deux groupes G_R, $G_{R'}$, résiduels à un groupe G_Q, sont dits *corésiduels ;* le *théorème des restes* consiste en ce que, si G_R et $G_{R'}$ sont restes de G_Q, et si G_R est reste de $G_{Q'}$, $G_{R'}$ est aussi reste de $G_{Q'}$; la considération des *faisceaux spéciaux* ou *faisceaux de groupes spéciaux,* c'est-à-dire des faisceaux linéaires de groupes de points déterminés sur f_m^p par des courbes φ_{m-3}, adjointes à f_m^p et d'ordre $m-3$ donne lieu à diverses propositions particulièrements importantes. Ces définitions et propositions sont ensuite étendues aux surfaces et courbes algébriques; soit, en général, F_μ une surface algébrique d'ordre μ, sans point multiple; si deux courbes R, R_1 situées sur F_μ constituent l'intersection complète de cette surface par une autre surface F_ν, elles sont dites réciproquement résiduelles; chacune est le *reste* de l'autre; si deux courbes sont restes d'une troisième, elles sont corésiduelles ; il y a un théorème des restes pour les surfaces : si les deux courbes R, R_1, situées sur F_μ sont restes de R' et si R est reste de R'_1, R_1 est aussi reste de R'_1 ; il y a aussi un théorème des restes pour les courbes dans l'espace; la notion de *faisceaux spéciaux* s'étend aussi aux courbes dans l'espace.

Entre les nombres p, m (genre et ordre), p', m' relatifs à deux courbes R_m^p, $R_{m'}^{p'}$ qui sont réciproquement résiduelles dans l'intersection de deux surfaces F_μ, F_ν, les ordres μ, ν de ces surfaces, les nombres de points doubles apparents des deux courbes, le nombre de leurs points communs, existent diverses relations.

M. Noether développe deux procédés pour la génération d'une courbe algébrique R_m^p; dans le premier, une telle courbe est donnée par l'intersection d'un cône

$$f_m(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

dont le sommet est au point $O(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$ et d'un *monoïde*, c'est-à-dire d'une surface dont l'équation est de la forme

$$x_4 \psi_{n-1}(x_1, x_2, x_3) - \psi_n(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

ψ_{n-1} et ψ_n étant des fonctions entières de degrés $n-1$, n : une telle surface présente évidemment un point multiple d'ordre n en O. Ce mode de génération, qui a été considéré d'abord par M. Cayley, a servi de point de départ aux recherches de M. Halphen.

L'autre procédé repose sur une transformation univoque; on part d'une courbe plane irréductible d'espèce p. Si l'on connaît un faisceau linéaire triplement infini de groupes de m points déterminés sur f par l'intersection de courbes adjointes,

$$\alpha_1 \psi_1 + \alpha_2 \psi_2 + \alpha_3 \psi_3 + \alpha_4 \psi_4 = 0$$

et si l'on suppose que le faisceau ne soit pas spécial, la transformation

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \psi_1 : \psi_2 : \psi_3 : \psi_4$$

définira une courbe algébrique R_m^p.

L'étude des projections sur un plan d'une courbe algébrique R_m^p conduit ensuite l'auteur à diverses propositions, parmi lesquelles nous signalerons la suivante qui a été aussi rencontrée par M. Valentiner : « La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe irréductible plane f_m^p soit la projection d'une courbe R_m^p, projection faite d'un point quelconque de l'espace, consiste en ce que, si l'on a $p \geqq m-2$, les h points doubles de f_m^p ne représentent pour les courbes adjointes à f_m^p du $(m-4)^{\text{ieme}}$ ordre que $h-1$ conditions ; si l'on a $p < m-2$, il n'y a pas de condition.

Les courbes R_m^π données par l'intersection de deux surfaces F_μ, $F_\nu(\mu \leqq \nu)$ et qui admettent comme reste une courbe plane sont ensuite l'objet d'une étude spéciale bien légitimée par la propriété suivante de ces courbes F_μ; elles admettent le plus grand genre possible π.

C'est au début de la seconde section, consacrée à l'étude des courbes considérées comme intersections de surfaces algébriques générales, que M. Noether démontre cette propriété, en partant d'une proposition analogue relative aux courbes. La multiplicité maximum d'un faisceau linéaire déterminant sur une courbe plane f_μ, d'ordre μ, sans points doubles, un groupe de Q points, est égale à celle d'un pareil faisceau de Q points qui admettent comme reste un groupe de points en ligne droite. L'auteur établit ensuite les conditions pour qu'une surface F_μ, d'ordre μ, passe par une courbe R_m^p, de genre p, d'ordre m ; en désignant par

$$N_\mu = \tfrac{1}{6}(\mu+1)(\mu+2)(\mu+3)-1$$

la multiplicité des surfaces F_μ et par λ le plus grand entier positif qui satisfasse aux deux inégalités

$$\mu m < 2(N_\mu - \lambda), \quad p > \mu m - (N_\mu - \lambda),$$

il existera un faisceau linéaire λ fois infini de surfaces F_μ qui passeront par la courbe R_m^p. On peut encore se demander, lorsque l'on connaît déjà une surface irréductible F_μ qui passe par la courbe irréductible R_m^p, s'il existe d'autres surfaces F_ν, d'ordre ν égal ou supérieur à $\mu-3$, qui ne contiennent pas F_μ en facteur et qui passent par la courbe R_m^p ; le théorème suivant donne une réponse à cette question : « Si l'on désigne par λ le plus grand entier positif qui satisfasse aux inégalités

$$\nu m < 2(W_{\nu,\mu} - \lambda), \quad p > \nu m - W_{\nu,\mu} + \lambda,$$

il existe un faisceau linéaire λ fois infini de surfaces F_ν (ne contenant pas F_μ en facteur) qui passent par la courbe irréductible R_m^p ; dans ces inégalités, $W_{\nu,\mu} = N_\nu - N_{\nu-\mu} - 1$ désigne la multiplicité des courbes du $\mu\nu^{\text{ieme}}$ ordre que l'ensemble des surfaces du $\nu^{\text{ième}}$ ordre déterminent sur la surface F_μ. »

Ce théorème, toutefois, en fournissant des conditions suffisantes, ne donne pas une solution complète de la question. M. Noether donne deux méthodes pour reconnaître dans les cas exceptionnels s'il passe ou non par la courbe R_m^p une surface F_ν; l'une de ces méthodes, dite méthode des restes, consiste à substituer à la courbe R_m^p une courbe corésiduelle à laquelle s'applique la méthode générale. L'autre méthode, dite des sections planes, repose sur la considération des groupes de points déterminés sur une section plane irréductible f_μ de F_μ par les surfaces qui passent par R_m^p.

M. Halphen avait donné, dans le Mémoire cité plus haut, un théorème qui permet d'obtenir toutes les courbes irréductibles R_m^p situées sur une surface irréductible F_μ; M. Noether établit ce théorème en le modifiant toutefois sur quelques points.

Le reste de la seconde section est consacré à la démonstration de diverses égalités ou inégalités entre les constantes numériques qui caractérisent les courbes algébriques gauches.

Enfin, la troisième section comprend les applications des théories générales qui précèdent : l'auteur y énumère toutes les courbes algébriques qui peuvent être tracées sur les surfaces des degrés 2, 3, 4, 5, toutes les espèces de courbes algébriques dont l'ordre est au plus égal à 6, les diverses espèces de courbes irréductibles du 7e, du 8e et du 9e ordre; il donne une classification générale des courbes dont l'ordre est compris entre 10 et 17. Enfin, dans les deux derniers paragraphes, il montre sur des cas particuliers le parti que l'on peut tirer de la méthode des sections planes, et comment les méthodes qu'il a développées pour des surfaces algébriques générales peuvent être appliquées dans la géométrie des surfaces spéciales ; il traite, par exemple, des surfaces du 6e ordre, admettant une courbe gauche du quatrième ordre, de genre 1, comme courbe double et une droite double ne coupant point cette courbe : ces surfaces peuvent être représentées d'une façon univoque sur un cône du quatrième degré avec deux génératrices doubles ou sur un cône du troisième degré. Cette représentation univoque est réversible. J. T.

BRUNEL. — Étude sur les relations algébriques entre les fonctions hyperelliptiques de genre 3. — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris et soutenue le 4 juillet 1883. 62 p. in-4°. Paris, 1883.

Göpel et Rosenhain ont étudié les relations algébriques qui existent entre les fonctions hyperelliptiques de genre 2. M. Brunel s'est proposé, dans ce Mémoire, d'étendre au cas du genre 3 les propositions qui avaient ainsi été trouvées dans un cas plus simple.

Les 64 fonctions Θ sont proportionnelles à 64 fonctions P définies comme il suit :

$$P_0 = 1 \qquad\qquad 1 \text{ fonction } P_0$$

$$P_k = \sqrt{(a_k - x_1)(a_k - x_2)(a_k - x_3)} \qquad\qquad 7 \text{ fonctions } P_k$$

$$P_{k.l} = P_k P_l \sum_{i=1}^{3} \frac{\sqrt{R(x_i)}}{(a_k - x_i)(a_l - x_i)\varphi'(x_i)} \qquad k \neq l \qquad 21 \text{ fonctions } P_{kl}$$

$$P_{k.lm} = P_k P_l P_m \sum_{i=1}^{3} \frac{\sqrt{R(x_i)}}{(a_k - x_i)(a_l - x_i)(a_m - x_i)\varphi'(x_i)} \qquad k \neq l \neq m \qquad 35 \text{ fonctions } P_{k.lm},$$

en posant

$$R(x) = \prod_{klmnpqr} (a_k - x)$$

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Toute relation algébrique entre les fonctions P peut, par l'introduction de P_0, être immédiatement rendue homogène et donner, par suite, une relation entre les fonctions Θ.

On peut, avec les fonctions P, former 64 groupes de fonctions tels, qu'entre les carrés de 5 fonctions appartenant à un même groupe existe une relation linéaire. Ces groupes appartiennent à quatre types qui, en n'écrivant que les indices des fonctions P, ont les caractéristiques suivantes :

(I)	o,	k,	l,	m,	n,	p,	q,	r,
(II)	o,	k,	kl,	km,	kn,	kp,	kq,	kr,
(III)	k,	l,	kl,	klm,	kln,	klp,	klq,	klr,
(IV)	klm,	npq.	pqr,	qrn.	rnp,	lm,	mk,	kl;

on peut désigner ces groupes sous les noms de *groupe* o, *groupe k*, *groupe kl*, *groupe klm*. Une permutation quelconque effectuée sur les lettre k, l, m, n, p, q, r transforme, en général, un groupe d'un type en un autre groupe du même type. Par ces permutations, on obtient, pour les différents types respectivement, 1, 7, 21 et 35 groupes.

Les limites de cette analyse ne nous permettent pas de donner la forme des différentes relations correspondant aux différents groupes.

En ce qui concerne encore les relations linéaires entre les carrés, M. Brunel montre comment on peut directement et sans l'emploi des formules signalées précédemment trouver des relations linéaires où apparaissent les carrés de fonctions données.

Passant maintenant aux relations linéaires entre les produits de deux fonctions P, on reconnaît l'existence de neuf types différents. Désignant simplement par ces indices une fonction P et séparant par un point les indices des facteurs des produits, on peut former le tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc}
k.lm, & l.mk, & m.kl, & o.klm. \\
kl.mn, & km.nl, & kn.lm, & o.pqr, \\
k.lmn, & l.mnk, & m.nkl, & n.klm, \\
kl.kmn, & km.knl, & kn.klm, & k.pqr, \\
klm.knp, & kln.kpm, & klp.kmn, & k.qr.
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
l.kl, & m.km, & n.kn, & p.kp, & q.kq, & r.kr, \\
kq.kr, & lq.lr, & mq.mr, & nq.nr, & pq.pr, & q.r, \\
k.kqr, & l.lqr, & m.mqr, & n.nqr, & p.pqr, & o.qr, \\
kln.kmn, & klp.kmp, & klq.kmq, & klr.kmr, & kl.km, & l.m.
\end{array}$$

Trois des produits appartenant à une ligne horizontale, dans le cas des cinq premiers types, quatre de ces produits, s'il s'agit des quatre derniers types, sont linéairement reliés entre eux.

Choisissant, *a priori*, les *fonctions de bases*

$$P_{kln}, P_{klp}, P_{klq}; \quad P_{kmn}, {}_{kmp}, P_{kmq}; \quad P_r, P_{npq},$$

les carrés des cinquante-six autres s'expriment linéairement au moyen des carrés de ces 8 fonctions. De plus, P_r^2 et P_{npq}^2 s'expriment rationnellement en fonction des six autres. Enfin, entre ces six dernières existent deux relations homogènes du quatrième degré en tout point analogues aux relations de Göpel. La dépendance algébrique des 64 fonctions hyperelleptiques et, par suite des 64 fonctions Θ, se trouve donc établie d'une façon précise et complète.

L. RAFFY. — RECHERCHES ALGÉBRIQUES SUR LES INTÉGRALES ABÉLIENNES. — Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris et soutenue le 20 avril 1883. 86 pages in-4°. Paris, 1883.

Quand on étudie certaines questions relatives aux intégrales abéliennes, on est parfois arrêté par l'impossibilité de résoudre les équations algébriques. Traiter quelques-unes de ces questions dans toute leur généralité et sans avoir à résoudre aucune équation irréductible, tel est l'objet du travail que nous analysons. Les méthodes qui y sont exposées ne comportent jamais d'autres opérations algébriques que des divisions et des éliminations, et chacune d'elles est appliquée à des exemples numériques.

Toute intégrale abélienne peut être mise sous la forme

$$z = \int \frac{du}{U},$$

en supposant les variables u et U liées par une équation algébrique $F(u, U) = 0$. L'auteur rattache à cette équation deux séries de paramètres : les paramètres c représentent les valeurs qu'on déduit de l'équation $F(u,U) = 0$ pour le rapport $\frac{u}{U}$ quand l'un des termes de ce rapport ou tous les deux deviennent infinis ; les paramètres c'_0 représentent les valeurs qu'on déduit de cette équation pour la dérivée $\frac{du}{dU}$ quand U est nul. De la définition de ces quantités résultent trois théorèmes qui correspondent aux trois formes différentes que peut présenter l'équation $F(u, U) = 0$, et qui permettent de caractériser une intégrale abélienne quelconque comme intégrale de première, de seconde ou de troisième espèce.

Après ces préliminaires vient un chapitre intitulé : *Sur un cas de réduction des intégrales abéliennes*. Quand une fonction u est liée à sa dérivée $U = \frac{du}{dz}$ par une équation algébrique $F(u, U) = 0$, cette fonction admet en général une infinité de valeurs en chaque point. Dans leurs importantes recherches sur la théorie des fonctions, MM. Briot et Bouquet se sont occupés du cas où la fonction u n'a en chaque point qu'un nombre limité de valeurs, et ils ont prouvé qu'alors elle est racine d'une équation algébrique ayant pour coefficients des fonctions entières, soit de la variable z, soit de l'exponentielle $e^{\rho z}$, soit de la fonction doublement périodique $\operatorname{sn}(\rho z)$. M. Raffy s'est posé ce problème : Supposons que l'intégrale u d'une équation différentielle algébrique $F(u, U) = 0$ n'a en chaque point qu'un nombre limité de valeurs, reconnaître si elle est algébrique, simplement périodique, ou doublement périodique. En voici la solution : Si l'intégrale est doublement périodique, les paramètres c et c_0' sont tous nuls. Si l'intégrale est algébrique, un au moins des paramètres c et c_0' est infini, et aucun d'eux n'est fini et différent de zéro. Si l'intégrale est simplement périodique, les paramètres c et c_0' sont tous finis, mais non pas tous nuls, et ceux qui ne sont pas nuls forment une suite de nombres commensurables entre eux.

On trouve ensuite, pour le cas où l'intégrale u serait algébrique, une détermination nouvelle du degré de l'équation intégrale par rapport à u. La fin du chapitre est consacrée au cas où l'équation à intégrer représente une courbe unicursale. L'auteur montre comment on obtient alors l'équation intégrale, et résout en passant ce problème : Étant donnée une fraction rationnelle dont tous les résidus sont commensurables entre eux, trouver son intégrale sans connaître ses infinis.

Au chapitre suivant, il aborde le problème de la détermination du genre des courbes algébriques. La question est traitée d'une manière purement analytique en partant du célèbre théorème de Riemann, qui s'exprime par l'égalité

$$2(p + m - 1) = \Sigma(r - 1),$$

lorsque l'on désigne par p le genre, par r le nombre des racines qui forment l'un des systèmes circulaires relatifs à un point critique de la fonction y définie par l'équation de la courbe, et par m le degré de cette équation par rapport à y. Ainsi, la détermination du genre revient à celle du nombre $\Sigma(r - 1)$. La méthode de M. Raffy permet d'obtenir ce nombre $\Sigma(r - 1)$, et par suite le genre, sans qu'il soit nécessaire de connaître les points critiques de la fonction y ni les valeurs qu'elle prend en ces points. Cette méthode, que nous ne pouvons exposer ici, est absolument générale : elle s'applique, quelles que soient les singularités de la courbe proposée ; et, si elle paraît exiger parfois des calculs très longs, elle permet toujours de profiter des simplifications qui peuvent se présenter dans les exemples qu'on a à traiter.

Il faut rapprocher de la recherche du genre la discussion des caractères auxquels on reconnaît qu'une fonction liée à sa dérivée par une équation algébrique est une fonction uniforme, caractères qui ont été découverts par MM. Briot et Bouquet. Les procédés que M. Raffy indique pour appliquer, quelle que soit l'équation différentielle proposée, les conditions assignées par MM. Briot et Bouquet, rappellent ceux dont il a fait usage pour déterminer le genre des équations algébriques. C'est qu'en effet il existe entre les deux questions un lien étroit, qui a été aperçu par M. Hermite. Si l'intégrale u d'une équation différentielle algébrique $F(u, U) = 0$ est uniforme, cette équation est du genre zéro ou du genre un. Cette remarque profonde a suggéré à l'auteur une nouvelle solution du prolèème, qu'il expose en terminant.

VAZQUEZ ILLÀ. — Propiedades elementares relativas a la divisibilidad de los numeros enteros. 1 vol. in-8°, 206 p. Valladolid, 1881.

Ce Volume contient, exposées avec détail et clarté, les propositions les plus élémentaires de la théorie des nombres. Après quelques notions sur les congruences, l'auteur expose les propriétés les plus simples des nombres premiers, le formation des diviseurs d'un nombre, la composition des nombres *parfaits* ou *amis ;* il fait ensuite la théorie du plus grand commun diviseur et du plus petit commun multiple, établit les propriétés relatives aux résidus des puissances successives d'un nombre, le théorème de Fermat, introduit les notions de racine primitive et d'indice, montre l'usage qu'on peut faire d'une Table d'indices, et termine en donnant les caractères de divisibilité, en supposant quelconque la base de la numération. De nombreux exercices, souvent accompagnés d'indications sommaires sur la solution, suivent chaque paragraphe.

J. T.

F. AMODEO. — MONOGRAFIA DELLE CURVE TAUTOCRONE. 1 vol. in-8°, 74 p. Avellino, 1883.

L'auteur débute en rappelant les divers travaux dont le problème du tautochronisme a été l'objet; il a utilisé pour cela le travail historique dû à M. C. Ohrtmann, *Das Problem des Tautochronen* (Berlin, 1872), qu'il a pu compléter sur quelques points; nous résumons rapidement dans ce qui suit les principaux résultats de cette étude historique.

M. Amodeo divise les recherches relatives au tautochronisme en trois classes, suivant qu'on ne tient compte ni de la résistance de l'air, ni du frottement de la courbe; ou que l'on tient compte de la première de ces deux causes perturbatrices, ou des deux.

Courbes tautochrones dans le vide. — Huygens (1673) démontre géométriquement la propriété de la cycloïde (*De Horologio oscillatorio*); Newton (1714) part de ce principe, que les courbes, telles que la composante tangentielle de la force soit proportionnelle à l'arc, sont tautochrones; il démontre le tautochronisme de l'épicycloïde pour une force centrale proportionnelle au rayon vecteur; il pose aussi le problème inverse : « Étant donnée une courbe, pour quelle force est-elle tautochrone? » Il le résout pour le cercle (*Philosophiæ naturalis principia mathematica*). Fontaine (1734) démontre analytiquement les résultats de Newton [*Sur les courbes tautochrones* (*Histoire de l'Académie royale des Sciences*)]. Euler (1729) traite le problème de l'isochronisme : Quelle courbe faut-il raccorder à une courbe de descente donnée pour que les oscillations complètes d'un point pesant soient isochrones? (*Commentarii Acad. Petropolitanæ*.) M. Puiseux (1844) reprend avec détail le problème du tautochronisme et discute les diverses solutions pour les forces centrales, proportionnelles à une puissance donnée du rayon vecteur (*Journal de Liouville*). Signalons encore quelques recherches particulières dues à Poisson, au P. Jullien, à Duhamel, à M. Schell, à M. Townsend et cette remarque due à M. Padelletti, que, si une courbe est tautochrone relativement à une certaine force, le tautochronisme subsiste quand il y a une vitesse initiale dont le rapport à l'arc initial est le même que le rapport de la force tangentielle à l'arc

[*Nota sul problema delle tautocrone* (*Giornale di Scienze di Palermo*, 1879)].

Courbes tautochrones quand on a égard à la résistance de l'air. — Newton (*loc. cit.*) montre que la propriété de la cycloïde subsiste dans un milieu qui oppose une résistance proportionnelle à la vitesse. Euler (*Commentarii*), Jean Bernoulli (*Mémoires de l'Académie, Histoire de l'Académie royale*), Fontaine (*ibid.*) étudient le cas d'un milieu résistant comme le carré de la vitesse (1729-1730). Laplace (*Mécanique céleste*, t. I) traite le cas d'une résistance de la forme $v^2 + av$, v étant la vitesse du mobile (1792). M. Puiseux (1844, *loc. cit.*) reprend le problème traité par Bernoulli. M. Meissel (1854) traite le problème de l'isochronisme dans un milieu résistant [*Zur Theorie der Tautochronen* (*Journal de Crelle*)]. M. Lespiault (1860) montre que toute courbe tautochrone dans le vide est encore tautochrone quand la résistance du milieu est proportionnelle à la vitesse [*Théorie géométrique des tautochrones* (*Mém. de la Société des Sciences de Bordeaux*)].

Courbes tautochrones quand on a égard au frottement. — Necker (1763) traite du tautochronisme quand on a égard au frottement et à une résistance proportionnelle au carré de la vitesse (*Mém. de Math. et de Phys. présentés à l'Acad. par divers savants étrangers*, t. IV).

Le P. Jullien établit le tautochronisme de la cycloïde, en tenant compte du frottement et d'une résistance proportionnelle à la vitesse (*Problèmes de Mécanique*).

M. Haton de la Goupillière (1868) prouve que l'épicycloïde est tautochrone, dans des conditions analogues, pour une force centrale proportionnelle au rayon vecteur. Enfin M. Darboux, dans une Note insérée au *Bulletin* (1879), reprend le problème général traité par Necker en suivant l'élégante méthode due à M. Puiseux, et applique la solution à l'épicycloïde. M. Amodeo a démontré que toutes les courbes tautochrones, quand on a égard au frottement pour des forces de direction constante et pour des forces centrales, restent tautochrones dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la vitesse, et que toutes les courbes tautochrones pour une force proportionnelle au rayon vecteur le sont, que l'on tienne compte ou non du frottement.

Un autre ordre de questions a été abordé par Lagrange; celui-ci a en effet cherché une expression générale de la force capable de produire un mouvement tautochrone, en la supposant fonction de l'arc de courbe et de la vitesse (1767); la formule à laquelle il parvint fut l'objet d'une vive polémique avec Fontaine, polémique à laquelle d'Alembert prit part; plus récemment, M. Bertrand (*Journal de Liouville*, 1847; *Annales de Tortolini*, 1852) et M. Brioschi (*Annales de Tortolini*, 1852, 1853) ont repris la question et discuté la généralité de la formule de Lagrange; M. Brioschi a proposé une formule plus générale que celle de Lagrange, et qui semblait devoir clore la discussion; toutefois M. Formenti (*Rendiconti del reale Istituto Lombardo*, 1880) l'a encore rouverte en affirmant que la formule de M. Brioschi n'avait réellement pas plus d'extension que celle de Lagrange, assertion que M. Amodeo conteste à son tour.

La question du mouvement qu'on pourrait appeler, avec M. Amodeo, *hypertautochrone*, où l'on demande que le temps de chute soit une fonction donnée de la position initiale, a été posée par Fontaine; on sait qu'Abel a résolu le problème pour un point pesant en supposant que le temps de chute soit une fonction donnée de la hauteur initiale. M. Meissel s'est occupé du problème analogue en substituant à la pesanteur une force centrale inversement proportionnelle au carré du rayon vecteur; enfin M. Somof a donné une solution nouvelle du problème d'Abel.

M. Amodeo expose la théorie des courbes tautochrones dans l'ordre qu'il a adopté pour l'histoire de ces courbes.

Son point de départ est dans le théorème suivant :

Pour que la dérivée, par rapport à l, de l'intégrale

$$T = \int_0^l \frac{\varphi'(u)\,du}{\sqrt{l-u}},$$

soit nulle, quel que soit l, il faut et il suffit que l'on ait

$$\varphi'(u) = \frac{c}{\sqrt{u}},$$

c étant une constante.

Il est bien digne d'intérêt que l'on puisse déduire de cette proposition, par une méthode uniforme, les propriétés caractéristiques des courbes tautochrones ou isochrones, que l'on ait ou non égard à la résistance du milieu supposée proportionnelle au carré de la vitesse, et au frottement sur la courbe. Pour le cas le plus simple, celui d'une courbe polie et d'un milieu non résistant, l'auteur examine le cas d'une force de direction constante, de la forme μx^n, puis le cas d'une force centrale attractive ou répulsive, constante ou proportionnelle au rayon vecteur : on rencontre ainsi en particulier la chaînette, la cycloïde, l'astroïde, la cardioïde, l'épicycloïde, la droite, la spirale logarithmique. L'auteur montre ensuite comment on peut raccorder une courbe de *montée* à une courbe de descente, de façon à constituer une courbe isochrone, comment on peut trouver une courbe isochrone à elle seule; l'exemple le plus remarquable, dans le cas de la pesanteur, a été donné par Euler.

Quand on a égard à la résistance du milieu, le cas le plus intéressant est celui où l'on suppose cette résistance de la forme Kv^2 ; M. Amodeo donne l'équation générale des courbes tautochrones sous la forme

$$s + 2Kc^2 \int_0^s F_t \, ds = 2c^2 F_t,$$

où F_t est la composante tangentielle de la force; il détermine la courbe de montée β qu'il faut raccorder à la courbe tautochrone de descente α, de manière que le temps pendant lequel le mobile monte en vertu de la vitesse acquise, temps compté à partir du moment où le mobile passe au point de tautochronisme, soit indépendant du point de départ; entre les arcs α et β il y a la relation

$$\beta = \frac{1}{K} \log(2e^{K\alpha} - 1),$$

trouvée par Bernoulli dans le cas d'un point pesant; le point de vitesse maximum est séparé du point de tautochronisme par un arc

$$s = 2\alpha - \frac{1}{K} \log(2e^{K\alpha} - 1);$$

des questions analogues se posent pour les courbes raccordées qui fournissent des oscillations isochrones.

Enfin, en tenant compte du frottement, M. Amodeo retrouve l'équation générale des courbes tautochrones sous la forme obtenue par M. Darboux

$$\frac{\rho}{2c^2} = \lambda(\lambda F_n - F_t) - \frac{d}{d\omega}(\lambda F_n - F_t).$$

F_t, F_n sont les composantes tangentielles et normales, ρ est le rayon de courbure, $\lambda\left(F_n + \frac{v^2}{\rho}\right)$ est le terme introduit par le frottement. Il en conclut avec M. Darboux que les courbes polies qui sont tautochrones dans le vide pour les forces centrales proportionnelles au rayon vecteur sont encore tautochrones quand on tient compte du frottement.

Dans les dernières pages de son travail, l'auteur reproduit la démonstration donnée par M. Somof de la solution obtenue par Abel pour le problème du mouvement hypertautochrone, ainsi que l'ingénieuse analyse par laquelle M. Brioschi est parvenu à l'expression générale de la force tangentielle capable de produire un mouvement tautochrone ou hypertautochrone, savoir

$$p = \frac{v^2}{\psi(s)}\left\{\frac{v}{\psi(s)}\Psi\left[\frac{v}{\psi(s)} - \lambda(s, \alpha)\right] + v\frac{d\lambda}{ds} - \psi'(s)\right\}.$$

ψ et Ψ sont des fonctions arbitraires, λ n'est pas entièrement arbitraire, le mouvement est tautochrone ou hypertautochrone suivant certaines conditions imposées à cette fonction; dans le cas où la fonction λ est nulle, on retombe sur la formule donnée par Lagrange. J. T.