Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, no 1 (1884), p. 145-162
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_145_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

L. KRONECKER. — Festschrift zu Herrn E.-E. Kummer's Doctor-Jubilaeum.

Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.

I.

Nous sommes ici en présence d'une recherche fondamentale. Une étude arithmétique des quantités algébriques, j'entends l'Arithmétique telle que Gauss l'a conçue, a permis à M. Kronecker de ramener l'étude de ces quantités à celle de formes dont les coefficients sont fonctions rationnelles, à coefficients entiers, de plusieurs variables indépendantes.

Le Mémoire se divise en deux Parties. Dans la première, M. Kronecker définit les quantités algébriques par un nombre quelconque d'équations entre un nombre également quelconque de variables; il les réduit et les classe en groupes déterminés. Dans la seconde il introduit une notion plus générale que celle de la divisibilité, une divisibilité de rang supérieur au premier, le rang *un* répondant à la divisibilité ordinaire. En associant aux nombres algébriques entiers les quantités indéterminées, il obtient des formes algébriques entières; l'étude de ces formes comprend la plus grande partie du Mémoire : c'est elle qui amène au résultat remarquable que j'ai énoncé en commençant.

La nature si abstraite des questions traitées, l'abondance des matières et enfin le vif désir qu'a éprouvé M. Kronecker de publier son Mémoire capital à l'occasion du cinquantième anniversaire du doctorat de M. Kummer, contribuent à rendre la lecture des *Grundzüge* particulièrement difficile.

Ce mot *Grundzüge* indique déjà qu'il n'a pu entrer dans la pensée de l'auteur d'écrire un Traité d'Algèbre, ni même un Mémoire dans le sens que l'on attache habituellement à ce mot. Ce qu'il a voulu, il le dit lui-même dans sa Préface, c'est indiquer, à grands traits, le point de vue, en grande partie nouveau, sous lequel il envisage l'Algèbre, et ce but peut être considéré comme atteint.

M. Kronecker a soin d'insister longuement sur plusieurs des points qu'il considère comme essentiels. Il est vrai que d'autres points essentiels sont laissés dans l'ombre ou se traduisent par de simples remarques auxquelles on est d'abord tenté de n'attacher qu'une importance secondaire. Mais ces remarques sont fort nombreuses; elles ont été, pour plus d'un des élèves de M. Kronecker, le point de départ de recherches intéressantes et contiennent sans doute encore le germe de plusieurs développements d'Arithmétique et d'Algèbre; pour pénétrer dans la pensée de l'auteur, il convient donc de les étudier avec soin.

L'introduction systématique des quantités indéterminées en Algèbre permet de simplifier considérablement toutes les recherches : aussi ces quantités jouent-elles un grand rôle d'un bout à l'autre du Mémoire.

Pour juger de la portée du travail de M. Kronecker, il importe beaucoup de remarquer que ses démonstrations sont concrètes, c'est-à-dire que chaque pas fait en avant est toujours accompagné de la représentation concrète, à l'aide de nombres entiers seulement, du résultat obtenu. M. Kronecker attache lui-même une grande importance à ne jamais s'écarter de ce principe.

II.

J'ai déjà dit que toute la première Partie du Mémoire est consacrée à la définition des quantités algébriques et à leur classification.

Nous rencontrons d'abord (§ 1, 4) la définition du *domaine de rationalité* et la réduction du domaine le plus général que l'on puisse concevoir à celui qui est formé par des quantités variables et une seule fonction algébrique de ces quantités. Cette réduction exige déjà la connaissance de la théorie générale de l'élimination (§ 10), c'est-à-dire de la décomposition en variétés d'ordres différents d'un système formé par un nombre quelconque d'équations à un nombre également quelconque d'inconnues, quelque particulières que soient ces équations. Un *domaine* qui ne contient pas de fonctions ou nombres algébriques est dit *naturel*.

Nous trouvons ensuite (§ 5) une classification naturelle des quantités algébriques :

Un GENRE *de quantités algébriques est formé par l'ensemble* *de toutes les quantités algébriques s'exprimant rationnellement les unes par les autres dans un domaine naturel de rationalité donné.*

*L'*ORDRE *d'un genre est le degré des équations irréductibles que vérifient les éléments de ce genre.*

Une ESPÈCE *de quantités algébriques est formée par toutes les fonctions entières à coefficients entiers d'un nombre fini quelconque de quantités algébriques entières d'un genre déterminé.*

Chaque élément d'une espèce peut donc être exprimé par une fonction *linéaire* d'un nombre fini d'éléments de cette espèce, les coefficients de cette fonction linéaire étant entiers dans le domaine naturel de rationalité dont le genre fixé est dérivé.

Ce nombre fini d'éléments forme un *système fondamental* de l'espèce considérée. Toutes les quantités entières, contenues dans un même genre, font partie d'une même espèce, *l'espèce principale du genre* Le nombre d'éléments d'un système fondamental d'une espèce se réduit parfois (§ 7) à l'ordre du genre dans lequel est contenue l'espèce. Cette réduction a lieu, par exemple, dans le cas particulier des *nombres algébriques*, ou encore (§ 12) lorsque l'on considère les espèces contenues dans les différents genres déterminés par les racines d'une équation dont les coefficients forment le domaine de rationalité. On ne sait pas encore si, dans ce dernier cas, les coefficients sont entiers.

La théorie de l'*élimination* (§ 10), qui n'avait jamais été traitée dans toute sa généralité, est esquissée à la suite d'un cas spécial dans lequel on considère le résultant de $n+1$ fonctions d'un nombre égal de variables et, en particulier, celui du système formé par n fonctions et leur déterminant fonctionnel.

Elle aboutit au résultat fondamental que l'idée de fonction algébrique donnée par plusieurs équations n'est pas différente de celle qui est donnée par une seule équation, et elle est suivie (§ 11) d'un exposé détaillé du *principe de Galois*, d'après lequel l'étude d'une équation de degré n, quelque particulière qu'elle soit, est ramenée à celle d'un genre de fonctions entières de n variables (§ 12), l'*affection* de l'équation particulière considérée.

Toutes les équations particulières ayant même affection forment une *classe* d'équations.

Les recherches qui précèdent (§ 8-9), et qui ont trait aux discriminants des genres et espèces, font partie de la théorie générale des invariants.

On nomme *discriminant* d'un genre ou d'une espèce déterminée (§ 8) le plus grand commun diviseur de tous les discriminants d'un système fondamental de cette espèce, et l'on démontre, entre autres, que le plus grand commun diviseur des discriminants de toutes les équations dont les racines font partie d'un même genre, est un diviseur d'une puissance du discriminant de ce genre. Il en résulte (§ 12) que, quelque particulier que soit le domaine de rationalité, dans tout genre dont le discriminant est différent de zéro, il est possible de trouver autant de fonctions que l'on veut, telles que toutes les autres fonctions du même genre puissent être exprimées rationnellement par la fonction choisie.

Ce théorème une fois établi, on ramène facilement (13), en suivant la marche de Gauss (1815), la question de l'existence des quantités algébriques en général, à celle plus simple de l'existence des quantités algébriques vérifiant une équation de degré impair, *à coefficients réels.*

Cette dernière question n'est pas traitée dans le Mémoire de M. Kronecker; mais elle a été exposée à plusieurs reprises dans son cours, et complète ses recherches.

Tel est le résumé de la première Partie du Mémoire.

III.

Dans la seconde Partie nous nous mouvons dans une sphère quelque peu différente. Les quantités algébriques entières sont considérées comme existantes, et c'est leur *divisibilité* dont nous abordons l'étude.

On dit que deux quantités algébriques entières sont divisibles l'une par l'autre, lorsque leur quotient est également une quantité algébrique entière.

En *associant* aux éléments d'une espèce, des fonctions linéaires à coefficients indéterminés de ces éléments, on peut étendre à leur *ensemble* l'idée de divisibilité et représenter (§ 14), sans aucune espèce de difficultés, leur plus grand commun diviseur. On peut donc représenter le plus grand commun diviseur d'un nombre quelconque de quantités algébriques entières données à l'aide de *formes algébriques,* c'est-à-dire de formes dont les coefficients font partie d'un domaine général de rationalité déterminé.

Ce résultat est entièrement conforme au point de vue général de M. Kronecker, d'après lequel il convient d'étudier toujours simultanément les nombres et les fonctions entières, l'Arithmétique et l'Algèbre.

Les paragraphes suivants contiennent une série de définitions et propositions fondamentales se rapportant aux diviseurs algébriques entiers que M. Kronecker nomme aussi *modules,* et aux formes algébriques entières qui sont, comme nous venons de le dire, intimement liées à ces diviseurs.

Nous y trouvons, en particulier, tout d'abord, la définition d'une unité algébrique, celle d'une forme proprement primitive, celle de l'équivalence absolue de deux modules et celle d'un module premier.

Une *unité algébrique* est une quantité algébrique entière dont la norme est égale à l'unité.

Une *forme proprement primitive* est une forme dont les éléments, c'est-à-dire les coefficients, n'ont aucun diviseur commun.

Deux diviseurs algébriques entiers sont *absolument équivalents* lorsqu'ils sont réciproquement contenus l'un dans l'autre.

Dans une espèce déterminée un diviseur algébrique entier est dit *premier* lorsqu'il n'est divisible par aucun des éléments de cette espèce, si ce n'est par ceux qui lui sont absolument équivalents ou encore qui sont absolument équivalents à l'unité. On peut toujours (§ 18) reconnaître si, pour un diviseur algébrique entier donné, cette condition est remplie, ce qui légitime la définition précédente.

Il est facile de s'assurer (§ 16) que les diviseurs algébriques entiers *linéaires,* ayant mêmes éléments, sont absolument équivalents. Deux diviseurs algébriques entiers quelconques, ayant mêmes éléments, sont également absolument équivalents ; mais la démonstration (§ 17) de ce dernier théorème qui ramène l'étude des diviseurs algébriques entiers quelconques à celle des diviseurs algébriques entiers linéaires exige plus d'attention.

On en déduit une propriété fondamentale des diviseurs algébriques entiers premiers qui peut aussi être donnée comme définition de ces diviseurs :

Dans une espèce déterminée, un diviseur algébrique entier est PREMIER *lorsqu'il n'est pas absolument équivalent à un produit de diviseurs algébriques entiers de cette espèce.*

J'insiste sur ce que cette seconde définition de l'irréductibilité eût été illusoire si elle avait été donnée plus haut.

Nous trouvons plus loin un exposé du *principe de Kummer* et la détermination de l'*équivalence relative* de deux diviseurs algébriques entiers répondant exactement à la détermination de l'équivalence des idéaux, telle qu'elle est contenue dans le célèbre Mémoire de M. Kummer (*Journal de Liouville,* 2e série, t. XXXI) :

Deux diviseurs algébriques entiers d'une espèce donnée sont *relativement équivalents* lorsqu'il existe dans la même espèce un troisième diviseur, tel que les deux produits que l'on obtient en le multipliant par chacun des deux premiers soient absolument équivalents.

IV.

Après avoir ainsi exposé les principes de la théorie des diviseurs algébriques entiers, M. Kronecker passe à un autre groupe de recherches qui est entièrement nouveau.

A cet effet, il introduit tout d'abord (§ 20) des diviseurs de *rangs* différents; en d'autres termes, il généralise la notion de la divisibilité et étend à cette généralisation les mots *contenant* et *contenu.*

Une fonction entière de n variables CONTIENT *un système de fonctions entières, lorsqu'elle peut être exprimée par une fonction homogène et linéaire des éléments de ce système, dont les coefficients soient eux-mêmes fonctions entières des mêmes variables; le tout dans un domaine de rationalité déterminé.*

Le théorème fondamental est que la condition nécessaire et suffisante à laquelle doit satisfaire une fonction entière pour s'annuler en même temps qu'un système de fonctions entières qui, égalées à zéro, sont sans solutions multiples, est de *contenir* ce système dans le sens plus général donné maintenant à ce mot.

Le *rang* de divisibilité du système contenu correspond à la variété représentée par ce système égalé à zéro.

J'ai exposé tout au long [1] comment on pouvait être amené par des considérations élémentaires à faire cette généralisation et de quelle utilité elle pouvait être dans la théorie générale de l'élimination.

C'est un résultat important (§ 21) que l'on puisse *décomposer un système quelconque de modules* en ses diviseurs de rangs différents et qu'ensuite, pour un rang quelconque déterminé, on puisse *décomposer* dans un domaine de rationalité donné, chaque diviseur en ses facteurs irréductibles. Cette dernière décomposition est, pour le rang le plus élevé, en rapport intime avec les formules de Jacobi.

L'idée de divisibilité d'un rang quelconque amène à distinguer (§ 22) entre les formes *proprement primitives* dont les coefficients n'ont aucun diviseur commun de rang quelconque, et les formes *improprement primitives* dont les coefficients, tout en n'ayant aucun diviseur commun dans le sens ordinaire attaché à ce mot, ont cependant des diviseurs de rangs supérieurs au premier.

Les définitions et théorèmes relatifs aux diviseurs algébriques entiers sont ensuite traduits en définitions et théorèmes relatifs aux formes algébriques entières de rang un, et étendus aux formes algébriques de rangs quelconques.

M. Kronecker donne deux définitions de l'*équivalence absolue des formes de rang un*, l'une suivant le principe de Gauss, l'autre suivant celui de Kummer, mais en quittant le domaine restreint des nombres entiers, auquel se rapporte ces deux principes pour s'élever dans un domaine plus général, le domaine général de rationalité. Il montre ensuite l'identité de ces deux définitions. Cette identité repose sur le théorème cité (§ 17), que deux diviseurs algébriques entiers quelconques, ayant mêmes éléments, sont absolument équivalents.

Voici ces deux définitions :

1. *Deux formes homogènes et linéaires sont absolument équivalentes lorsqu'une substitution à coefficients entiers permet de les transformer l'une dans l'autre.*

---

(1) *Acta mathematica.*

2. *Deux formes quelconques sont absolument équivalentes lorsqu'elles ne* DIFFÈRENT *que par des facteurs proprement primitifs.*

Cette équivalence est une équivalence de rang un. Pour obtenir une équivalence de rang quelconque, il est nécessaire de généraliser encore l'idée de contenant et de contenu :

Une forme en CONTIENT *une autre, lorsque la première est équivalente, dans le sens précédent, à une fonction entière homogène de la seconde, prise plusieurs fois pour des systèmes différents d'indéterminées.*

Deux formes sont ABSOLUMENT ÉQUIVALENTES *lorsqu'elles sont contenues réciproquement l'une dans l'autre.* Cette définition comprend la précédente.

On démontre que, dans le sens de l'équivalence absolue qui vient d'être fixé, toute forme algébrique entière de rang quelconque peut être mise, et cela d'une seule manière, sous la forme d'un produit de formes premières, ce qui permet d'étendre l'idée d'irréductibilité aux formes algébriques entières de rangs quelconques.

Pour les formes de rang un, il y a identité entre cette idée d'irréductibilité et celle de l'irréductibilité des nombres entiers. Pour les formes de rang supérieur au premier, il y a cette différence, qu'en *composant,* de toutes les manières possibles, les formes premières, on n'obtient pas toutes les formes possibles.

M. Kronecker termine ce § 22, en insistant sur la nécessité de l'association des formes algébriques entières aux quantités algébriques entières pour étudier ces dernières de la manière *la plus simple possible* et à l'aide d'éléments aussi peu étrangers que possible à la nature du sujet.

Le § 23 est très court. Il ne contient que la définition de l'*équivalence relative* des formes algébriques entières. Le mot relatif se rapporte à une espèce déterminée.

Deux formes de rangs quelconques A *et* B *sont* RELATIVEMENT ÉQUIVALENTES *lorsqu'on peut déterminer deux quantités algébriques* a *et* b *telles que les produits* Aa *et* Bb *soient absolument équivalents.* Il importe de remarquer que les formes primitives qui, d'après la définition de l'équivalence absolue donnée plus haut, peuvent paraître arbitrairement dans l'équivalence des produits Aa et Bb, doivent ici nécessairement faire partie de l'espèce déterminée relativement à laquelle on considère l'équivalence des deux formes A et B.

Une FORME FONDAMENTALE (§ 24) *est une forme dont les coefficients sont les éléments du système de diviseurs formé par la composition d'un système de diviseurs quelconque d'un genre déterminé et d'un système fondamental du même genre.*

Toute forme dont les coefficients sont des nombres algébriques entiers est équivalente à une forme fondamentale linéaire. Le § 24 contient un aperçu de la théorie de ces formes et une application des théories générales à ce cas particulier où le domaine de rationalité se réduit à l'unité.

Le dernier paragraphe (§ 25) débute par deux définitions importantes. L'une est celle des formes discriminantes, l'autre celle des équations fondamentales; toutes deux se rapportent à une espèce déterminée.

La *forme discriminante* d'une espèce déterminée d'ordre n est le plus grand commun diviseur de tous les discriminants de n formes algébriques quelconques de cette espèce; c'est l'invariant de l'espèce. Elle est égale au déterminant dont les n premières lignes sont formées par les éléments du système fondamental de l'espèce fixée et les conjugués de ces éléments, tandis que les lignes suivantes ne contiennent que des quantités indéterminées.

L'*équation fondamentale* d'une espèce déterminée est l'équation du degré n dont les n racines sont la forme fondamentale proprement primitive de cette espèce, et les $(n-1)$ conjuguées de cette forme fondamentale.

Nous voici arrivés au théorème fondamental vers lequel convergent toutes les recherches précédentes :

Le discriminant de l'équation fondamentale d'un genre déterminé est absolument équivalent à la forme discriminante du même genre, ou au moins ne contient que des diviseurs de cette forme de rangs supérieurs au premier, ou encore des nombres entiers, mais seulement lorsque le genre donné a des conjugués.

Ainsi, en particulier, pour les nombres algébriques, le discriminant de l'équation fondamentale du genre de Galois est absolument équivalent au discriminant de ce genre.

C'est ce théorème fondamental qui ramène la théorie arithmétique des quantités algébriques à celle de formes de rangs quelconques, dont les coefficients font partie d'un domaine *naturel* de rationalité.

Un résultat capital est donc atteint. La possibilité de s'affranchir de toute irrationalité, en Algèbre, est démontrée.

M. Kronecker n'effectue la démonstration que dans le cas des diviseurs de rang un, et termine son Mémoire en insistant sur l'importance de l'étude des singularités de la forme discriminante, étude commencée par M. Netto, et sur l'identité de cette étude et de celle des séries de Sturm. J. MOLK.

É. MATHIEU, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. — THÉORIE DE LA CAPILLARITÉ. Paris, Gauthier-Villars, 1883, in-4°, 191 p.

Le nouvel Ouvrage de M. É. Mathieu embrasse et complète les découvertes de Laplace, de Gauss et de Poisson dans la théorie de la capillarité. Dans cette branche importante de la Physique mathématique, on se propose d'étudier l'équilibre des liquides mis en contact avec des corps solides. Laplace est le premier qui ait donné de l'action capillaire une explication rationnelle, bien qu'avant lui Thomas Young, assimilant la surface libre d'un liquide à celle d'une membrane également tendue dans tous les sens, eût trouvé l'équation aux différences partielles à laquelle satisfait cette surface. Gauss, à son tour, approfondit les principes de cette théorie : il chercha la fonction des forces qui régit le liquide. Cette fonction renferme, outre un terme qui provient de la pesanteur, deux intégrales sextuples ; mais par des transformations analytiques, Gauss les ramène à la somme de deux termes proportionnels, l'un à la surface libre du liquide, l'autre à la surface du vase touchée par le liquide. On sait que l'analyse de Gauss a été notablement simplifiée par M. Bertrand. Mais ni Laplace ni Gauss n'avaient tenu compte du changement de densité qui se produit à la surface libre et au voisinage des surfaces en contact avec un solide. C'est Poisson qui combla cette lacune, à l'aide d'une analyse très savante, mais très laborieuse. Les équations auxquelles il parvient sont les mêmes que dans la théorie de Laplace ; seulement, les deux constantes qui y figurent prennent une signification plus compliquée. Mais il n'est pas nécessaire, comme le montre M. É. Mathieu, d'avoir recours à des calculs si difficiles pour modifier la signification des constantes capillaires.

Le Livre de M. Mathieu est divisé en cinq Chapitres.

Dans le premier, l'auteur, à l'exemple de Gauss, forme la fonction des forces dont la variation égalée à zéro donne l'équation générale du principe des vitesses virtuelles. Négligeant d'abord les changements de densité dans le voisinage des surfaces terminales, il retrouve par des raisonnements très simples le résultat obtenu par son illustre devancier; puis, à l'aide de très heureuses considérations synthétiques, il s'affranchit de la restriction d'une densité invariable et fait subir à l'équation de Gauss la correction que Poisson avait appliquée aux équations de Laplace. La relation générale ainsi obtenue contient l'explication de tous les phénomènes capillaires; l'auteur en conclut immédiatement l'équation différentielle de la surface libre du liquide, la constance de l'angle de raccordement, l'existence d'une tension superficielle, exerçant sur la paroi une action normale à la ligne d'intersection de la surface libre avec la paroi et tangente à la surface du liquide.

Dans le deuxième Chapitre l'auteur passe aux applications. Il calcule, en reproduisant l'analyse de Laplace, le poids du liquide soulevé dans un tube par l'effet de la capillarité. Il étudie ensuite l'élévation ou la dépression d'un liquide, soit auprès d'une lame verticale, soit entre deux plaques parallèles. Ce dernier cas donne lieu à une discussion intéressante, suivant que le liquide s'élève ou s'abaisse contre chacune des lames prise isolément. Le problème de l'élévation des liquides dans les tubes circulaires et capillaires fournit à M. Mathieu l'occasion de relever une singulière erreur commise par Poisson dans le calcul de la hauteur maximum. L'intégrale de l'équation du ménisque s'obtient facilement, lorsqu'on suppose très petit le rayon du tube : elle est la même pour un tube de révolution quelconque dont l'axe est vertical que pour un tube circulaire. Dans un tube de révolution, il peut y avoir plusieurs états d'équilibre si le rayon diminue par degrés insensibles : ces divers équilibres sont en général alternativement stables et instables; c'est ce que Laplace avait entrepris de prouver : M. É. Mathieu substitue au raisonnement vague de Laplace une démonstration précise fondée sur les propriétés bien connues de la fonction des forces.

Le troisième Chapitre est en majeure partie consacré à l'étude des conditions d'équilibre des liquides en contact. Après avoir trouvé l'équation générale du principe des vitesses virtuelles qui régit le système des deux liquides, l'auteur examine le cas où le premier figure une goutte superposée au second. Une analyse très complète l'a conduit à la démonstration rigoureuse de ce théorème remarquable, admis sans raison suffisante dans les Ouvrages de Physique : les trois tensions superficielles relatives aux deux surfaces libres et à la surface de contact doivent se faire équilibre. Il faut donc que la plus grande de ces quantités soit plus petite que la somme des deux autres; si cette condition n'est pas remplie, le liquide le moins dense se répandra sur l'autre en couche infiniment mince. Le problème général de l'équilibre de deux liquides en contact se simplifie lorsque la densité est la même pour l'un et pour l'autre; c'est le cas des expériences célèbres de Plateau. On réalise ainsi un liquide sans pesanteur : la figure d'équilibre correspond à un minimum de la surface terminale. M. É. Mathieu restreint son analyse au cas des surfaces de révolution : la solution dépend des intégrales elliptiques; les courbes méridiennes des surfaces minima de révolution se composent d'une infinité d'arcs identiques : calculées pour la première fois par Beer, étudiées au point de vue géométrique par Delaunay, ces surfaces ont été divisées par Plateau, suivant leurs formes, en *onduloïdes* et en *nodoïdes*. Le nodoïde donne comme cas particulier la *caténoïde* qui a pour méridienne une chaînette et le cylindre circulaire droit. M. É. Mathieu montre que les conclusions que Plateau a déduites de ses expériences, relativement à la stabilité du cylindre circulaire droit, ne sont pas conformes à la théorie. On ne trouve dans l'Ouvrage de M. Mathieu aucune intégration relative aux surfaces d'aire minimum qui ne sont pas de révolution : l'auteur renvoie le lecteur aux travaux de Monge, de Riemann, de MM. O. Bonnet, Scherk, Schwarz, Enneper. Le Chapitre se termine par des calculs relatifs aux gouttes liquides suspendues dans les tubes capillaires; si l'on applique la théorie au cas d'un tube cylindrique, on trouve que l'équilibre n'est pas possible. La contradiction entre l'expérience et la théorie s'explique par l'intervention du frottement, et M. Mathieu nous apprend à calculer dans ce cas la résistance opposée par la viscosité pour contribuer à l'équilibre.

Les forces qui élèvent ou abaissent un liquide en équilibre contre un corps solide exercent aussi une influence sur la pression supportée par ce corps. La modification de la pression hydrostatique fait l'objet du quatrième Chapitre. On y considère en premier lieu deux lames verticales parallèles plongées dans un liquide. En calculant l'attraction ou la répulsion apparente exercée sur l'une des lames par l'autre, Laplace avait négligé l'action de la couche superficielle du fluide. Poisson a le premier tenu compte de cette action, qui n'est pas nulle dans le cas où les deux faces de la lame sont de nature différente. M. Mathieu a réussi à faire subir à la formule de Laplace la correction voulue, sans modifier essentiellement le raisonnement très simple de l'illustre inventeur. Quand on tient compte de la capillarité, la poussée verticale qui sollicite un corps, immergé en partie dans un liquide, n'est plus donnée exactement par le principe d'Archimède. Pour calculer cette poussée, M. Mathieu fait d'abord usage de considérations synthétiques, qui font concevoir plus facilement le détail des phénomènes; mais la démonstration ainsi présentée est insuffisante : on n'y tient pas compte de certaines forces verticales, qui à la vérité s'entre-détruisent, comme l'auteur le prouve ultérieurement. La démonstration analytique que donne ensuite M. Mathieu ne laisse plus subsister aucun doute sur l'exactitude des résultats. Poisson avait abordé cette question par un côté très difficilement accessible; malgré l'habileté de son analyse, il n'était parvenu à déterminer l'effet des actions capillaires que dans le cas où le corps est de révolution et son axe vertical. M. É. Mathieu donne la solution du problème dans le cas d'un corps de forme quelconque. Cette généralisation est certainement l'un des résultats les plus remarquables de l'ouvrage que nous analysons.

Dans le cinquième et dernier Chapitre, il est question de l'élévation d'un liquide au moyen d'un disque circulaire horizontal. L'auteur donne l'expression connue du poids du liquide soulevé en fonction de la hauteur de la base inférieure du disque au-dessus du plan de niveau, et de l'angle que fait avec l'horizon le plan tangent au bord supérieur du liquide (cet angle n'est pas, comme on serait tenté de le supposer, égal à l'angle de raccordement). Ces deux quantités ne sont évidemment pas indépendantes : elles sont liées par une relation que Laplace a déduite de l'équation approchée de la surface capillaire, dans le cas où le disque est très large, et que M. E. Mathieu obtient avec une approximation plus grande encore. La question précédente conduit naturellement au problème de l'équilibre d'une goutte de liquide posée sur un plan horizontal. On trouvera dans l'Ouvrage de M. Mathieu une démonstration originale du théorème de M. Bertrand sur le volume de la goutte. Dans l'expression de ce volume figurent l'épaisseur de la goutte, sa courbure moyenne au point le plus haut, l'aire et le périmètre de sa base. Afin de mettre en évidence la dépendance mutuelle de ces quantités, il faut faire des hypothèses sur la figure de la goutte. On se restreint au cas d'une goutte de révolution, qu'on suppose d'abord beaucoup plus large que haute. Dans ce cas, on peut intégrer l'équation différentielle de la surface libre, et l'on en déduit aisément les diverses dimensions de la goutte en fonction de son volume. Dans le cas d'une petite goutte, M. É. Mathieu obtient les deux coordonnées d'un point de la courbe méridienne au moyen de développements en série suivant les puissances ascendantes de l'angle φ formé par la tangente au méridien avec l'horizon. Ces développements ne sont suffisamment convergents que pour la partie supérieure de la goutte. A partir d'une certaine valeur φ_1 de l'angle φ, que l'on pourra prendre d'autant plus grande que le rayon de courbure au point le plus haut sera plus petit, on détermine le rayon variable d'un parallèle au moyen d'un autre développement en série : cette nouvelle série procède suivant les puissances ascendantes de la différence entre l'ordonnée verticale du point considéré et celle du point déterminé par l'angle φ_1. Lorsque la goutte a des dimensions moyennes, le calcul des séries ordonnées suivant les puissances de φ devient extrêmement pénible : on peut confondre la partie supérieure du méridien avec une ellipse ayant le même axe de symétrie. La recherche de la figure d'une goutte, suspendue à un solide qu'elle mouille, n'est pour ainsi dire pas un problème différent du précédent au point de vue analytique : il suffit de changer le signe d'une constante capillaire pour passer des formules relatives au cas d'une goutte reposant sur un plan horizontal à celles du problème actuel. L'auteur applique ses développements en série à des exemples numériques. Le problème de la forme d'équilibre d'une goutte moyenne amène M. Mathieu à l'importante question de l'influence de la capillarité sur le baromètre. Laplace avait indiqué une méthode par quadrature pour déterminer la surface du ménisque mercuriel. Son procédé consiste à diviser le méridien en plusieurs parties qu'il assimile à des arcs de cercle. M. É. Mathieu obtient une exactitude plus grande en substituant aux arcs de cercle des arcs d'ellipse. Vers la fin du Chapitre se trouve reproduite une Table des dépressions barométriques, calculée autrefois par Bravais.

Dans tout le cours de cet Ouvrage, on trouvera des indications courtes, mais substantielles, sur les expériences qui confirment la théorie, et l'explication des désaccords apparents entre la théorie et certaines expériences ; dans la plupart des cas, il faut chercher la raison de ces désaccords dans l'altération des surfaces liquides, qui modifie beaucoup l'angle de raccordement. R.

VERONESE. — INTERPRÉTATIONS GÉOMÉTRIQUES DE LA THÉORIE DES SUBSTITUTIONS DE n LETTRES PARTICULIÈREMENT POUR $n = 3, 4, 5, 6$ EN RELATION AVEC LES GROUPES DE L'HEXAGRAMME MYSTIQUE.

Le Mémoire de M. Veronese a été présenté au Concours institué pour 1881 par l'Académie royale de Belgique, Concours dont l'objet était la généralisation des propriétés de l'hexagramme mystique. Le prix n'a pas été accordé au Mémoire du géomètre italien ; celui-ci a publié son travail dans les *Annali di Matematica* et l'a fait précéder de quelques pages assez vives où il reproduit et discute le Rapport de la Commission de l'Académie. Nous n'avons point à entrer ici dans cette polémique. Si la Commission académique n'a pas proposé de décerner le prix au Mémoire de M. Veronese, c'est sans doute que ce Mémoire ne répondait pas aux intentions des membres de la Commission ; mais, d'un autre côté, qu'un Mémoire soit ou non conforme à quelque programme que ce soit, cela n'a rien à faire avec l'importance de ce Mémoire, et les arguments par lesquels M. Veronese cherche à établir qu'il a atteint le but proposé n'ajoutent rien à l'indiscutable valeur de son travail.

Ce n'est pas, à son sens, dans la théorie des courbes ou des surfaces d'ordre supérieur qu'il y a lieu de chercher des généralisations ou des analogies à l'hexagramme mystique : les éléments que l'on peut, dans ces théories, essayer de substituer aux six points de la conique ne sont pas arbitraires comme ces six points, en sorte que les propriétés ne subsistent pas quand on effectue des permutations sur ces éléments, et cette permanence des propriétés des figures déduites de l'hexagramme mystique, quand on effectue une permutation quelconque sur les sommets, est le fonds même de la théorie de l'hexagramme : elle tient essentiellement à ce que la théorie des groupes de l'hexagramme n'est qu'une expression particulière de la théorie des substitutions de six lettres. Reprendre cette dernière théorie au point de vue des diverses interprétations géométriques dont elle est susceptible, montrer les liens de ces diverses interprétations et plus particulièrement comment elles dépendent de la théorie de l'hexagramme, tel est le but que s'est proposé l'auteur. Il débute par une interprétation générale de la théorie des substitutions de n lettres, interprétation faite dans un espace à $n-1$ dimensions, les n lettres étant regardées comme les coordonnées d'un point de cet espace ; à chaque substitution correspond une homographie entre deux espaces à $n-1$ dimensions ; l'étude de ces homographies, des figures qui répondent aux groupes de substitutions, des surfaces obtenues en égalant à zéro la fonction qui représente chaque groupe, conduit M. Veronese à un nombre considérable de propositions. Cette théorie d'une nature fort abstraite peut maintenant être interprétée dans l'espace ordinaire et dans le plan. M. Veronese y parvient en appliquant systématiquement la méthode qu'il a développée dans un Mémoire inséré dans le 29e volume des *Mathematische Annalen*, sous ce titre : *Behandlung der project. Verhältnissen der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens.* Étant donnée une configuration quelconque dans l'espace à $n-1$ dimensions, il en déduit, par projection univoque, sur l'espace et sur le plan des configurations qu'il appelle de même classe et dont les propriétés traduisent en quelque sorte, dans le langage de la Géométrie ordinaire, les propriétés de la première configuration.

Après avoir étudié les substitutions de 3, 4, 5 lettres, leurs groupes et les figures correspondantes dans le plan, dans l'espace à trois et à quatre dimensions, l'auteur arrive à son objet principe, l'étude des groupes des substitutions de six lettres : c'est au moyen de la théorie même de l'hexagramme qu'il forme les substitutions de chaque groupe. Ainsi chacun des 15 triangles dont les côtés contiennent les 6 sommets reste inaltéré par 48 des 720 substitutions que l'on peut effectuer sur les 6 sommets; en d'autres termes, chacun de ces triangles représente un groupe de 48 substitutions; de même chacune des 60 droites de Pascal représente un groupe de 12 substitutions, etc. Le cas le plus intéressant est celui des figures, dites figures Π, formées comme il suit : à l'hexagone 123456 par exemple correspond une droite de Pascal; en négligeant les 6 côtés de cet hexagone, il reste 9 des 15 côtés de l'hexagramme; avec ces 9 côtés, on peut construire 3 hexagones 135264, 136425, 153624; les 3 droites de Pascal qui correspondent à ces 3 hexagones se coupent en un point de *Kirkman*, qui correspond à la première droite de Pascal. Les 60 droites de Pascal et les 60 points de Kirkman correspondants se séparent en 6 groupes de 10 droites de Pascal et de 10 points correspondants de Kirkman, de façon que 3 droites de Pascal passent en chacun des 10 points et que 3 points de Kirkman soient situés sur chacune des 10 droites : chaque groupe constitue une figure Π. Chaque figure Π reste inaltérée par 120 des 720 substitutions qu'on peut opérer sur les 6 sommets et les 120 substitutions sont précisément celles qui constituent le groupe découvert par M. Serret, auquel correspond une fonction de 6 lettres qui n'est susceptible que de 6 valeurs. Les groupes de l'hexagone, ou les groupes correspondants des substitutions de 6 lettres une fois formés, donnent naissance, d'après le procédé qui a été antérieurement expliqué, à des propositions relatives à l'espace à cinq dimensions, propositions qui, par l'application du principe de projection, se traduisent dans l'espace ordinaire et dans le plan. Dans l'espace à cinq dimensions R_5 on fait correspondre à chaque sommet de l'hexagone 123456 un sommet de la pyramide fondamentale à laquelle on rapporte cet espace; par exemple, au sommet 1 de l'hexagone, on fait correspondre le sommet de la pyramide fondamentale, dont les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 sont respectivement x_1, o, o, o, o, o. Dans ce même espace la conique circonscrite à l'hexagramme a des représentants : il suffit de remarquer que cette conique se transforme en elle-même quand on permute les six paramètres des six points; par suite, dans R_5, toute configuration, toute courbe ou surface, à 2, 3, 4 dimensions, qui passe ou non par les six sommets de la pyramide fondamentale et qui se transforme en elle-même par les permutations des six quantités $x_1, \ldots, x_6$, correspond à la conique. On voit ainsi nettement comment dans cet espace, on peut trouver des analogies directes à la théorie de l'hexagramme. Dans cette voie, une application particulière était tout indiquée : on peut regarder les six quantités $x_1, \ldots, x_6$ comme les coordonnées d'une droite de l'espace à trois dimensions, en prenant comme figure fondamentale les six complexes linéaires deux à deux en involution de M. Klein. Une droite quelconque donne alors lieu en général à un groupe de 720 droites, un point à un groupe de 360 points auquel correspond un groupe de 360 plans; M. Veronese met cette figure en correspondance directe avec l'hexagramme et parvient ainsi à des propositions nouvelles dont le développement forme la fin de son Mémoire.

J. T.