BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 97-103

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_97_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HOÜEL (J.). — Cours de Calcul infinitésimal. Tomes III et IV. 2 vol. in-8°. 1880-1881. Paris, Gauthier-Villars.

Nous venons, un peu en retard, rendre compte de la fin du grand Traité de notre savant collaborateur; mais nous ne le regrettons pas. L'accueil si favorable qu'ont partout reçu dans nos Facultés et à l'étranger les quatre Volumes de M. Hoüel prêtera plus d'autorité à nos appréciations et nous dispensera d'une analyse détaillée. Nous allons parcourir rapidement le contenu des deux derniers Volumes, en indiquant pour chaque Partie les passages qui nous ont le plus frappé.

La suite du Livre IV, qui commence le troisième Volume, est encore consacrée à la théorie des équations différentielles. L'auteur commence par quelques généralités sur les équations différentielles simultanées; puis il traite, avec de grands détails, le cas particulier des équations linéaires. Il fait connaître les Méthodes de Lagrange, de Cauchy et de d'Alembert et les applique à différents exemples. Il consacre ensuite un Chapitre spécial au Calcul des Variations, dans lequel il ne considère, bien entendu, que les intégrales simples. Parmi les applications, nous avons remarqué ce qui concerne la ligne géodésique, tracée sur une surface. M. Hoüel emploie les coordonnées curvilignes et démontre le théorème de Gauss sur les triangles géodésiques. On a ici, avec ce qui se trouve dans les autres parties de l'Ouvrage, les éléments d'une théorie à la fois très complète et très satisfaisante des coordonnées curvilignes et des surfaces courbes dans la voie ouverte par Gauss. Le Livre IV se termine par un Recueil extrêmement étendu d'exercices.

Le Livre V traite des équations différentielles à plusieurs variables indépendantes, c'est-à-dire des équations aux différentielles totales et des équations aux dérivées partielles. Nous y avons remarqué un Chapitre très complet sur les équations aux dérivées partielles des diverses familles de surfaces et des développements assez étendus sur les équations linéaires d'ordre supérieur.

Le Livre VI est consacré à la théorie des fonctions d'une variable complexe, traitée d'abord en général et ensuite considérée dans ses applications aux fonctions elliptiques. M. Hoüel a, depuis longtemps, fait connaître en France les recherches de Riemann et de Neumann. La publication de son Ouvrage sur les variables complexes l'avait bien préparé à écrire cette partie de son Traité qui s'occupe du même objet. Il n'a même eu, pour le début de son exposition, qu'à reproduire avec de très légères modifications le commencement de la deuxième Partie de la *Théorie élémentaire des quantités complexes,* publiée en 1868. Il a seulement ajouté la belle démonstration que nous devons à Dirichlet de la série de Fourier.

Le Chapitre III a pour objet l'étude des fonctions multiformes. Pour définir la fonction inverse de l'intégrale elliptique, M. Hoüel a suivi une méthode toute particulière, qui est due à M. Éd. Weyr et qu'il avait déjà signalée dans la Préface générale de l'Ouvrage. Cette méthode est exposée avec de grands détails et nous croyons que les élèves n'auront aucune peine à la comprendre.

Le Chapitre IV contient une théorie élémentaire, mais assez complète, des fonctions elliptiques. Après avoir exposé ce qui concerne la réduction aux trois formes normales, avec beaucoup de simplicité et d'élégance, M. Hoüel revient sur l'addition des fonctions elliptiques. Il établit, en suivant la méthode de MM. Briot et Bouquet, leur décomposition en séries de fractions simples et en produits infinis. Puis il fait connaître les propriétés élémentaires des fonctions $\mathfrak{J}$ et leurs développements en séries trigonométriques, ainsi que ceux des fonctions elliptiques elles-mêmes. Il étudie ensuite la transformation de Landen et montre, avec des exemples à l'appui, comment on peut l'appliquer au calcul numérique des intégrales de première espèce.

L'Ouvrage est terminé par l'exposition des propriétés élémentaires des intégrales elliptiques de deuxième et troisième espèce. L'auteur donne le théorème d'addition, le théorème de Legendre sur les intégrales complètes de première et de seconde espèce. Il fait connaître les propriétés élémentaires des intégrales de troisième espèce, leurs périodes, leur expression due à Jacobi, au moyen de la transcendante $\mathfrak{I}$. Enfin il nous donne des Tables abrégées propres au calcul numérique.

On le voit, le Traité de M. Hoüel constitue un développement consciencieuxet digne du plus haut intérêt des éléments du Calcul infinitésimal. Alors même que l'on n'adopterait pas toutes les méthodes de l'auteur, et en particulier celles qu'il a empruntées à M. Weyr, pour l'inversion de l'intégrale elliptique, il est certain que son Ouvrage ne fait nullement double emploi avec les Traités de même nature, qu'il a sa place marquée dans les bibliothèques de nos élèves et de nos professeurs, qu'il est susceptible de devenir un guide excellent et de contribuer aux progrès des études de Mathématiques élevées, aussi bien dans nos Facultés que dans les Universités de l'Étranger. G. D.

NEOVIUS (E.-R.). — Bestimmung zweier speciellen periodischen Minimalflächen, auf welchen unendlich viele gerade Linien und unendlich viele ebene geodätische Linien liegen. Helsingfors, Frenkell und Sohn. In-8°, viii-117 p.; 1883.

Dans un Mémoire inséré aux *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin, 1872 [1], M. Schwarz a donné la solution générale du problème suivant :

On donne une suite continue fermée composée de lignes droites et de plans et l'on demande de trouver une surface minima à connexion simple, n'ayant aucun point singulier, dans son intérieur, qui passe par les droites et qui coupe les plans à angle droit.

Il a considéré, en particulier, le cas où la suite se réduit à deux droites et un plan. Alors la portion de surface minima comprise

---

[1] H.-A. Schwarz, *Forgesetzte Untersuchungen über specielle Minimalflächen.*

entre les droites et le plan admet comme prolongement analytique la surface symétrique par rapport au plan ; on peut donc la considérer comme la moitié d'une portion de surface minima limitée aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche, admettant un plan de symétrie qui passe par deux de ses sommets.

Le premier exemple de la détermination analytique d'une surface minima passant par les côtés d'un quadrilatère gauche est contenu dans une Note de M. Schwarz communiquée en 1865 à l'Académie de Berlin (¹).

En 1866, M. Weierstrass a donné la détermination analytique des surfaces minima qui sont assujetties à contenir *les côtés d'un polygone rectiligne quelconque.*

Le même problème a été résolu aussi par Riemann dans son Mémoire posthume : *Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung,* publié par M. Hattendorff. La première édition de ce Mémoire, qui a paru dans le treizième Volume des *Mémoires de l'Académie de Göttingue,* contient, en ce qui concerne le problème précédent, plusieurs inexactitudes. Une rédaction nouvelle et plus correcte du même Mémoire a été comprise dans les *Œuvres complètes* de Riemann.

En 1867, l'Université de Göttingue a proposé comme question de prix le problème suivant :

Parmi les surfaces qui s'étendent entre les quatre côtés de deux triangles isoscèles ayant une base commune, déterminer celle qui a la plus petite étendue, de telle manière que les coordonnées d'un point quelconque de cette surface soient exprimées en fonction de deux variables, soit par des intégrales définies, soit par des séries suffisamment simples.

M. Schondorff obtint le prix et sa pièce de concours a été imprimée en 1868.

Le même problème est aussi traité dans la Iʳᵉ Partie d'un Mémoire de M. Schwarz : *Bestimmung einer speciellen Minimalfläche* qui a été couronné en 1867 par l'Académie de Berlin et qui a été publié en 1871 (Berlin, Harwitz et Gossmann).

(¹) H.-A. Schwarz, *Ueber die Minimumsfläche, deren Begrenzung als ein*

Dans le travail dont nous rendons compte, et auquel nous empruntons les renseignements qui précèdent, M. Neovius s'est proposé de traiter un cas particulier du problème général résolu en 1872 par M. Schwarz, celui où le contour de la portion de surface minima est déterminé par deux droites et par un plan qu'elle coupe à angle droit. Ce cas particulier offre un grand intérêt; M. Neovius l'a étudié d'une manière détaillée, en le traitant directement par une méthode très simple. Nous allons d'abord donner un aperçu des divisions de son travail et de la méthode qu'il a suivie.

Considérons deux droites se coupant en un point P et rencontrant un plan (Σ) en deux points Q et R. Le segment de surface minima cherché qui doit contenir les droites PQ, PR doit couper à angle droit le plan (Σ) suivant une courbe QR qui, bien entendu, n'est pas donnée à l'avance, mais qui doit être déterminée. L'auteur achève de préciser le problème en s'imposant les conditions suivantes :

1° Le segment de surface minima cherché M ne contiendra aucun point singulier dans son intérieur;

2° La normale de la surface variera d'une manière continue;

3° Enfin le long de chacune des trois parties PQ, QR, RP du contour, la normale en se plaçant tournera toujours dans le même sens.

Cette dernière hypothèse, par exemple, exclut le cas où la courbe inconnue QR aurait un ou plusieurs points d'inflexion.

Le principe de la solution peut être donné en quelques mots. Il est aisé de voir que le segment de surface minima M admet une représentation sphérique, formée par les points à l'intérieur d'un triangle sphérique, dont les angles sont connus. D'autre part, si l'on suppose la surface minima représentée d'une manière conforme sur un plan, de telle manière qu'aux lignes de courbure correspondent des droites parallèles, on démontre facilement qu'au segment M devra correspondre une portion du plan comprise à l'intérieur d'un triangle rectangle isoscèle. Si la surface M était connue, on voit donc que l'on aurait, par son intermédiaire, la

---

von vier Kanten eines regularen Tetraeders gebildetes, windschiefes Viereck gegeben ist.

représentation conforme de la surface d'un triangle sphérique sur celle d'un triangle plan isoscèle et rectangle. Réciproquement, si l'on détermine les formules qui permettent de réaliser cette représentation conforme, ce que fait l'auteur en suivant les méthodes de M. Schwarz, il est facile de voir que l'on aura tous les éléments nécessaires pour déterminer la surface minima, ou, si l'on veut, la fonction arbitraire qui figure dans les formules de M. Weierstrass. Telle est la solution, complètement développée par M. Neovius, dans le Chapitre Ier de son travail. L'auteur vérifie d'ailleurs *a posteriori* que la surface satisfait à toutes les conditions qui ont été imposées.

La surface ainsi obtenue peut être prolongée analytiquement; il suffit pour cela de prendre sa symétrique, soit par rapport au plan (Σ), soit par rapport aux droites PQ, PR, et de répéter indéfiniment ces opérations. Dans le second Chapitre de son travail, M. Neovius se propose de déterminer tous les cas dans lesquels la surface sera en quelque sorte périodique, c'est-à-dire dans lesquels la répétition des opérations précédentes ne donnera qu'un nombre fini de segments dans chaque portion finie de l'espace. Le résultat de cette recherche peut être énoncé comme il suit :

La surface obtenue par les répétitions congruentes et symétriques du segment M ne sera périodique que si les droites PQ, PR sont parallèles aux arêtes ou aux diagonales des faces d'un cube, le plan Σ étant parallèle à l'un des neuf plans de symétrie de ce cube.

Cela conduit à considérer 5 cas différents. Les cas 1 et 4 aussi bien que les cas 2 et 3 conduisent à une même surface. De plus, les deux surfaces ainsi obtenues sont dans la relation obtenue par M. O. Bonnet, c'est-à-dire que l'on peut faire correspondre les lignes de courbure de l'un aux lignes asymptotiques de l'autre, de telle manière que la représentation soit conforme. Elles ont été complètement étudiées par M. Schwarz. L'une d'elles est celle dont le contour est limité par quatre arêtes d'un tétraèdre régulier.

Après avoir rappelé ces résultats, l'auteur passe dans le troisième Chapitre à l'étude du cinquième cas, qui est faite d'une manière très détaillée. Il montre comment on peut exprimer les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface par des intégrales elliptiques et il établit que l'on pourrait obtenir, si cela était nécessaire, une équation de la surface rationnelle par rapport à des fonctions elliptiques des coordonnées. Enfin il étudie la forme de la surface et de celle que l'on en déduit par la déformation de M. O. Bonnet. Deux photographies donnent une idée nette de ces deux surfaces.

On voit avec quel soin cette étude du problème a été poursuivie dans les plus petits détails. Il serait à désirer que l'on eût beaucoup de travaux du même genre : ils sont très propres à éclairer et à faciliter l'application et l'interprétation des théories générales.

Du reste, la question étudiée par M. Neovius a assez d'intérêt par elle-même pour mériter un examen aussi approfondi.

G. D.