BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

KOENIGS

Recherches sur les substitutions uniformes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 340-357

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_340_0>

MÉLANGES.

RECHERCHES SUR LES SUBSTITUTIONS UNIFORMES;

PAR M. KŒNIGS,

Professeur à la Faculté des Sciences de Besançon.

I. — PRÉLIMINAIRES.

1. Je m'occupe dans ces recherches des points limites vers lesquels on peut tendre par l'application indéfinie d'une substitution uniforme. Je n'étudierai que les points-limites pour lesquels la fonction uniforme $\varphi(z)$ que l'on substitue à z n'offre pas de singularité essentielle : tel serait le cas de la fonction $e^{-\frac{1}{z}}$, dont le point singulier essentiel *zéro* est un point limite, lorsque l'on attribue à la valeur initiale z une détermination réelle.

2. La division des premiers résultats que je veux présenter est fondée sur une distinction que je vais expliquer tout de suite.

Étant donnée une suite de quantités en nombre illimité

$$(\alpha) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots,$$

je dis que cette suite *converge régulièrement* vers zéro, lorsque, à tout nombre positif ε, si petit qu'il soit, on peut faire correspondre un nombre N_ε, tel que, sous la seule condition $p > N_\varepsilon$, on ait

$$\operatorname{mod} \alpha_p < \varepsilon.$$

Si, au contraire, la suite α ne présente pas ce caractère, mais que, pour si grand que soit N, pour si petit que soit ε, on puisse *toujours* vérifier les inégalités simultanées $p > N$, $\operatorname{mod} \alpha_p < \varepsilon$, je dirai que la suite (α) *converge irrégulièrement* vers zéro.

Une suite étant donnée, si, en retranchant de chacun de ses termes une même quantité λ, on peut former une nouvelle suite convergent régulièrement ou irrégulièrement vers zéro, je dirai que la suite primitive converge régulièrement ou irrégulièrement vers λ.

3. Si une suite ne présente aucun des caractères de convergence régulière ou irrégulière vers zéro, à partir d'un certain rang les modules de ses termes restent supérieurs à un nombre fixe.

Dans le cas de la convergence régulière, la condition $p > N_\varepsilon$ suffit pour assurer l'inégalité $\bmod \alpha_p < \varepsilon$. Dans le cas de la convergence irrégulière, il faut à la première condition en adjoindre une seconde, pour être sûr d'avoir $\bmod \alpha_p < \varepsilon$, et c'est cette seconde condition qui caractérise les diverses espèces de convergence irrégulière, et pourrait permettre de les classer.

II. — Points racines et groupes circulaires.

4. Soit $\varphi(z)$ une fonction uniforme : je pose, pour abréger,

$$z_1 = \varphi_1(z) = \varphi(z), \quad z_2 = \varphi_2(z) = \varphi(z_1), \quad \ldots, \quad z_p = \varphi_p(z) = \varphi(z_{p-1}).$$

Il est clair que l'on a, n et n' étant positifs,

$$\varphi_n(z_{n'}) = \varphi_{n+n'}(z).$$

Le problème que je traite ici est étroitement lié avec la considération des racines des équations du type

$$(E_p) \qquad z - \varphi_p(z) = 0.$$

A l'égard de ces racines j'établirai les propositions suivantes :

Théorème I. — *Si l'entier p divise l'entier n, l'équation E_n admet toutes les racines de l'équation E_p.*

Théorème II. — *Si c est le reste de la division de a par b, toute racine commune aux équations E_a, E_b vérifie aussi l'équation E_c.*

Théorème III. — *Si l'on désigne par d le plus grand commun diviseur des deux nombres a et b, les racines communes aux équations E_a, E_b vérifient l'équation E_d.*

Pour démontrer le premier théorème, je prends p fois la fonction φ des deux membres de la relation

$$\varphi_p(x) = x,$$

qui exprime que x est racine de l'équation E_p ; il vient

$$\varphi_{2p}(x) = \varphi_p(x) = x;$$

en prenant encore p fois la fonction φ de la relation $\varphi_{2p}(x) = x$, on trouve $\varphi_{3p}(x) = x$, et ainsi de suite; plus généralement on a $\varphi_{kp}(x) = x$, où k est un entier quelconque.

Le second théorème se démontre ainsi : soit $a = bq + c$; x étant une racine de E_b est aussi racine de E_{bq}, en vertu du premier théorème, et l'on a

$$\varphi_{bq}(x) = x;$$

en prenant alors c fois la fonction φ des deux membres, on trouve

$$\varphi_{bq+c}(x) = \varphi_c(x) \quad \text{ou} \quad \varphi_a(x) = \varphi_c(x);$$

donc, si x est aussi racine de E_a, on a $\varphi_a(x) = x$ et par suite aussi $\varphi_c(x) = x$, c'est-à-dire que x vérifie l'équation E_c.

Le troisième théorème est une conséquence directe du premier si b divise a, et du second dans le cas contraire.

En rapprochant les théorèmes I et III, on voit que le système des racines communes à E_a et à E_b est formé de l'ensemble des racines de l'équation E_d.

5. D'après cela, les racines d'une équation E_p se divisent en deux catégories : les unes vérifient des équations dont l'indice, *inférieur* à p, divise p; les autres ne vérifient aucune équation dont l'indice soit inférieur à p, et alors elles ne peuvent vérifier que les équations dont l'indice est divisible par p. De ces dernières racines je dirai qu'elles *appartiennent à l'indice p*.

Posons, x étant racine de E_p,

$$x_1 = \varphi_1(x), \quad x_2 = \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad x_{p-1} = \varphi_{p-1}(x);$$

la substitution $[z, \varphi(z)]$ permute circulairement les quantités

$$x, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}.$$

Je vais en outre démontrer les propositions suivantes :

Théorème I. — *Les quantités x, x_1, x_2, ..., x_{p-1} sont toutes des racines de l'équation E_p.*

Théorème II. — *Si x appartient à l'indice p, il en est de même des autres racines x_1, x_2, ..., x_{p-1}.*

De la relation

$$x_1 = \varphi_1(x),$$

je déduis, en prenant p fois la fonction φ des deux membres,

$$\varphi_p(x_1) = \varphi_{p+1}(x) = \varphi_1[\varphi_p(x)];$$

or $\varphi_p(x) = x$: donc $\varphi_p(x_1) = \varphi_1(x) = x_1$. On démontrerait de même que x_2 vérifie l'équation E_p, puis x_3, etc. Le premier théorème est ainsi établi.

Si l'on suppose maintenant que x_1 appartienne à l'indice q, comme x_1 vérifie E_p, il faudra que q divise p; soit $p = nq$. La substitution $\varphi(z)$ permute alors circulairement les quantités $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_q$ et l'on a

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_{q+1} = x_{2q+1} = \ldots = x_{(n-1)q+1},\\
x_2 &= x_{q+2} = x_{2q+2} = \ldots = x_{(n-1)q+2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
x_q &= x_{2q} \;\;= x_{3q} \;\;= \ldots = x_{nq} = x.
\end{aligned}$$

Donc, puisque $x = x_q$, x fait partie d'un groupe circulaire de q racines; il vérifie donc l'équation E_q, et appartient nécessairement à un indice inférieur à p si q n'est pas égal à p. Il suit de là que, si x appartient à l'indice p, x_1 appartient au même indice et par suite, de proche en proche, $x_2, x_3, \ldots, x_{p-1}$ appartiennent tous à l'indice p.

En résumé : *Les racines appartenant à l'indice p se distribuent en groupes de p racines permutables circulairement par la substitution* $\varphi(z)$.

III. — Des points limites a convergence régulière.

6. En désignant par z un point du plan, formons la suite des quantités

$$(1) \qquad \varphi_1(z),\ \varphi_2(z),\ \varphi_3(z),\ \ldots,\ \varphi_p(z);$$

dans l'hypothèse où cette suite offre des caractères de convergence vers une limite x, il y a lieu de distinguer suivant que cette convergence est régulière ou irrégulière. Je commence par le premier cas. Je pose

$$\varphi_p(z) = x + \alpha_p;$$

on a

$$x + \alpha_{p+1} = \varphi(x + \alpha_p).$$

Je suppose le module de x fini, et de plus j'écarte le cas où x serait un pôle de $\varphi(z)$. A partir d'un rang suffisamment élevé de l'indice p, α_p est assez petit pour que le second membre soit développable suivant la série de Taylor et l'on a

$$x + \alpha_{p+1} = \varphi(x) + \alpha_p \varphi'(x) + \frac{\alpha^2{}_p}{1.2} \varphi''(x) + \ldots.$$

En vertu de la convergence régulière de la suite (1), α_p et α_{p+1} tendent simultanément vers zéro lorsque p croît indéfiniment, et il reste à la limite

$$x = \varphi(x).$$

En outre, en tenant compte de ce résultat dans la relation qui lie α_{p+1} et α_p, on trouve

$$\lim \frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} = \varphi'(x).$$

Si le module de $\varphi'(x)$ était supérieur à l'unité, à partir d'un certain rang, le module de α_p irait en croissant avec p, et α_p n'aurait pas zéro pour limite. Nous avons donc le théorème suivant :

Les points limites, à convergence régulière, qui sont pour $\varphi(z)$ *des points non singuliers, sont nécessairement des points racines appartenant à l'indice* 1 ; *et de plus ils doivent rendre le module* $\varphi'(z)$ *au plus égal à l'unité.*

7. La réciproque de cette proposition peut être établie ; mais il existe dans cette question un cas douteux, absolument comme dans le cas des séries : c'est lorsque le point racine rend le module de $\varphi'(z)$ précisément égal à l'unité. Je ne traiterai pas dans ces premières recherches ce cas particulier, qui prête à des développements très étendus. J'énonce ainsi la réciproque de la proposition précédente :

Si l'on appelle x un point racine appartenant à l'indice 1, *et rendant le module de* $\varphi'(z)$ *inférieur à l'unité, il existe un cercle* C_x *de centre x, de rayon fini, tel que tout point z intérieur conduit au point x par des points qui vont sans cesse en s'en rapprochant.*

En effet, en posant

$$\varphi(z) = \varphi(x) + (z - x)\varphi'(x) + (z - x)^2 \psi(z),$$

la fonction $\psi(z)$ est holomorphe à l'intérieur d'un cercle C de centre x. Je désigne par A le maximum du module de $\psi(z)$ dans ce cercle, et j'appelle C′ un cercle concentrique au cercle C et ayant pour rayon

$$\frac{1 - \operatorname{mod} \varphi'(x)}{A}.$$

Soit C_x celui des deux cercles C ou C′ qui est intérieur à l'autre; à l'intérieur de C_x $\psi(z)$ est holomorphe, et en même temps on a

$$\operatorname{mod}(z - x) < \frac{1 - \operatorname{mod} \varphi'(x)}{A},$$

d'où

$$\operatorname{mod}[(z - x)\psi(z)] < \operatorname{mod}(z - x)A < 1 - \operatorname{mod}\varphi'(x),$$

et *a fortiori*

$$\operatorname{mod}[\varphi'(x) + (z - x)\psi(z)] < 1,$$

c'est-à-dire

$$\operatorname{mod} \frac{\varphi(z) - \varphi(x)}{z - x} < 1$$

ou, en mettant x au lieu de $\varphi(x)$ et z_1 au lieu de $\varphi(z)$

$$\operatorname{mod} \frac{z_1 - x}{z - x} < 1,$$

c'est-à-dire que z_1 est plus rapproché de x que z; de même, z_2 sera plus rapproché de x que z_1, et ainsi de suite. Donc les points $z_1, z_2, z_3, \ldots$, vont en s'approchant *sans cesse* de x et ont x pour limite.

8. Je compléterai ces propositions par le théorème suivant :

En supposant que x soit un point limite à convergence régulière rendant le module de $\varphi'(z)$ inférieur à l'unité et ne l'annulant pas, tandis que la différence $\varphi_p(z) - x$ tend vers zéro, le rapport

$$\frac{\varphi_p(z) - x}{[\varphi'(x)]^p}$$

tend vers une limite finie et différente de zéro.

En effet, de l'expression $\alpha_p = \varphi_p(x) - x$ on tire, par la loi de récurrence,

$$\alpha_{p+1} = \varphi'(x)\alpha_p + \frac{\varphi''(x)}{1.2}\alpha_p^2 + \ldots,$$

d'où

$$\frac{\alpha_{p+1}}{\alpha_p} = \varphi'(x)(1 + \alpha_p^k \mathrm{A}_p).$$

Dans cette expression, k est un entier autre que zéro, et A_p une fonction entière de α_p; nous pouvons, en effet, supposer que nous partions d'un point z intérieur au cercle C dans lequel $\varphi(z)$ est développable suivant la série de Taylor. En faisant varier p depuis 1 jusqu'à $(m-1)$, nous aurons, si nous effectuons le produit

$$\frac{\alpha_m}{\alpha_1} = [\varphi'(x)]^{m-1} \prod_1^{m-1} (1 + \alpha_p^k \mathrm{A}_p).$$

Je pose

$$\mathrm{P}_m = \prod_1^{m-1} (1 + \alpha_p^k \mathrm{A}_p);$$

en prenant les logarithmes, je trouve

$$\log \mathrm{P}_m = \sum_1^{m-1} \log(1 + \alpha_p^k \mathrm{A}_p).$$

Dans la série $\sum_1^{\infty} \log(1 + \alpha_p^k \mathrm{A}_p)$, le rapport d'un terme au précédent a pour expression

$$\frac{\log(1 + \alpha_p^k \mathrm{A}_p)}{\log(1 + \alpha_{p-1}^k \mathrm{A}_{p-1})}.$$

Ce rapport peut s'écrire, lorsque p est suffisamment grand,

$$\frac{\alpha_p^k}{\alpha_{k-1}^p} \, \frac{\mathrm{A}_p}{\mathrm{A}_{p-1}} \, \frac{1 + \varepsilon_p}{1 + \varepsilon_{p-1}},$$

où ε_p et ε_{p-1} tendent simultanément vers zéro.

La limite de ce rapport est égale au produit des limites des trois fractions : la première tend vers $[\varphi'(x)]^k$ dont le module est inférieur à l'unité, les deux autres tendent vers l'unité. Donc, dans la série

$$\sum_1^{\infty} \log(1 + \alpha_p^k \mathrm{A}_p),$$

le rapport d'un terme au précédent tend vers une limite dont le module est inférieur à l'unité ; cette série est absolument convergente, et en appelant ω sa somme, on a, par conséquent,

$$\lim \mathrm{P}_m = e^{\omega}.$$

Mais, en posant $\frac{\alpha_1}{\varphi'(x)} e^{\omega} = \mathrm{B}$, la quantité B est finie et différente de zéro, et l'on a

$$\lim \frac{\alpha_m}{[\varphi'(x)]^m} = \mathrm{B}:$$

c'est la proposition que je voulais démontrer.

IV. — Des points limites a convergence irrégulière.

9. J'ai dit dans les préliminaires que chaque espèce de convergence irrégulière était caractérisée par la deuxième condition qu'il faut adjoindre à la condition $p > \mathrm{N}$ pour être assuré de l'inégalité $\bmod \alpha_p < \varepsilon$. Je considérerai le cas où la suite

$$(1) \qquad \varphi_1(z),\quad \varphi_2(z),\quad \varphi_3(z),\quad \ldots,$$

converge irrégulièrement vers une limite x, de telle sorte que, si l'on prend seulement les termes dont les indices sont divisibles par un entier p, la condition que l'indice m soit supérieur à un nombre convenable suffise pour que le module de $\varphi_m(z) - x$ soit inférieur à un nombre positif ε pris aussi petit qu'on voudra. Autrement dit, je suppose qu'en ne prenant dans la suite (1) que les termes dont l'indice est divisible par p, la suite ainsi obtenue,

$$(p) \qquad \varphi_p(z),\quad \varphi_{2p}(z),\quad \varphi_{3p}(z),\quad \ldots,$$

offre les caractères d'une convergence régulière vers x.

Il est clair que rien ne justifie *a priori* l'arbitraire qui préside à notre choix. Mais la suite montrera jusqu'à quel point il est fondé.

10. Si nous posons $\varphi_p(z) = f(z)$, nous remarquons d'abord que la suite (p) et la suite (1) du n° 6 ne diffère qu'en ce que f remplace φ : on est donc en droit d'appliquer les théorèmes des n$^{\text{os}}$ 6, 7 et 8.

Ainsi :

Dans le cas actuel, le point limite x est une racine de l'équation E_p rendant le module de $\frac{d\varphi_p(z)}{dz}$ au plus égal à l'unité.

Et réciproquement :

En appelant x une racine de l'équation E_p, qui rende le module de $\frac{d\varphi_p(z)}{dz}$ inférieur à l'unité, il existe un cercle de C_x de centre x, tel que tous ses points conduisent au point x, de façon que la suite (p) *converge régulièrement vers x.*

Enfin :

Lorsque k croît indéfiniment, le rapport

$$\frac{\varphi_{kp}(z) - x}{\left[\frac{d\varphi_p(x)}{dx}\right]^k}$$

converge vers une limite finie et différente de zéro.

11. Mais il importe d'approfondir davantage la question, de façon à mettre bien en lumière la raison pour laquelle la suite (p) converge régulièrement vers x, tandis que la suite (1) converge irrégulièrement.

Soit μ l'indice auquel la racine x appartient : μ divise p, on a

$$p = \mu . q\,;$$

soit

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\mu-1}$$

le groupe circulaire de racines dont x fait partie. On a *pour* $z = x$

$$\frac{d\varphi_p(z)}{dz} = [\varphi'(x)\,\varphi'(x_1)\ldots\varphi'(x_{\mu-1})]^q.$$

Si l'on suppose que x rende le module de $\frac{d\varphi_p(z)}{dz}$ inférieur à l'unité, on aura donc

$$\text{mod}\,[\varphi'(x)\,\varphi'(x_1)\ldots\,\varphi'(x_{\mu-1})] < 1,$$

c'est-à-dire que, *pour* $z = x$, le module de $\frac{d\varphi_\mu(z)}{dz}$ est inférieur à l'unité et, par conséquent, en vertu de la réciproque énoncée dans le numéro précédent, la suite

$$(\mu) \qquad \varphi_\mu(z),\ \varphi_{2\mu}(z),\ \varphi_{3\mu}(z),\ \ldots$$

présente les caractères d'une convergence régulière vers x. D'ailleurs, la suite (μ) renferme tous les termes de la suite (p); de plus, il n'est pas possible de trouver une suite (μ')

$$\varphi_{\mu'}(z),\ \varphi_{2\mu'}(z),\ \varphi_{3\mu'}(z),\ \ldots,$$

offrant les caractères d'une convergence régulière vers x et dans laquelle on aurait $\mu' < \mu$: autrement x appartiendrait à un indice inférieur à μ, et non à μ lui-même.

Ainsi, en excluant le cas limite douteux où le module de $\frac{d\varphi_p(z)}{dz}$ est égal à l'unité pour $z = x$, on peut énoncer la proposition suivante :

Si, en prenant dans la suite (1) *les termes dont les indices sont divisibles par l'entier p, on peut former une suite* (p) *convergent régulièrement vers x, en appelant μ l'indice auquel x appartient, on peut toujours supposer $p = \mu$ et, de plus, μ est la valeur la plus petite que puisse prendre le nombre p.*

12. Prenons donc une racine x appartenant à l'indice μ et, vérifiant la condition

$$\mathrm{mod}[\varphi'(x)\varphi'(x_1)\varphi'(x_2)\ldots\varphi'(x_{\mu-1})] < 1,$$

je forme les suites

$$\begin{array}{llllll}
z, & \varphi_\mu(z), & \varphi_{\mu 2}(z), & \ldots, & \varphi_{k\mu}(z), & \ldots, \\
\varphi_1(z), & \varphi_{\mu+1}(z), & \varphi_{2\mu+1}(z), & \ldots, & \varphi_{k\mu+1}(z), & \ldots, \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots, \\
\varphi_{\mu-1}(z), & \varphi_{\mu+\mu-1}(z), & \varphi_{2\mu+\mu-1}(z), & \ldots, & \varphi_{k\mu+\mu-1}(z), & \ldots.
\end{array}$$

La première suite converge régulièrement vers x. D'ailleurs, la substitution $\varphi(z)$ permet de passer de la première suite à la deuxième, de la deuxième à la troisième, etc. Il en résulte donc que la deuxième suite converge régulièrement vers x_1, la troisième vers x_2, etc., la dernière vers $x_{\mu-1}$, pourvu qu'on suppose qu'aucune des quantités $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$ n'est un pôle de $\varphi(z)$, cas que j'examinerai tout à l'heure. Si l'on remarque d'ailleurs que x est une racine quelconque du groupe circulaire $x, x_1, \ldots, x_{\mu-1}$, on peut énoncer la proposition suivante :

Un groupe circulaire de μ racines, vérifiant la condition

$$\mathrm{mod}[\varphi' x)\ \varphi'(x_1)\ldots\varphi'(x_{\mu-1})] < 1,$$

étant donné, chaque racine du groupe, par exemple x_i, est le centre d'un cercle C_{x_i} : z étant un point intérieur à ce cercle, $\varphi_p(z)$, pour p indéfiniment croissant, tendra vers l'une ou l'autre des racines du groupe suivant le reste de la division de p par μ.

Les termes dont les indices sont tous congrus à $(h-i)$ suivant le module μ forment une suite qui converge régulièrement vers la racine x_h.

13. Je ne m'arrêterai pas à la démonstration du fait suivant :

On peut toujours entourer chaque point du groupe, par exemple x_i, d'un cercle Γ_i ayant son centre en ce point, de sorte qu'il suffise de partir d'un point intérieur à l'un de ces cercles pour sauter successivement des uns aux autres, et de telle façon que, dans un passage dans un cercle, on soit plus rapproché de son centre que dans le passage qui précédait.

On se rend ainsi très bien compte de cette convergence irrégulière de la suite (1) que nous avions, dès l'abord, arbitrairement définie.

V. — L'infini envisagé comme point limite.

14. Un pôle de $\varphi(z)$ ne peut être un point limite à convergence régulière : cela est évident. Mais, si le point O' de la sphère qui représente l'infini est un pôle de $\varphi(z)$, ce point peut être, sous une condition très simple, envisagé comme un point limite à convergence régulière.

Je pose

$$z' = \frac{1}{z}, \quad z'_1 = \frac{1}{z_1}, \quad z'_2 = \frac{1}{z_2}, \quad \ldots;$$

on a

$$z'_1 = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{z'}\right)}.$$

En supposant que m soit le degré de multiplicité du pôle, on a

$$\varphi\left(\frac{1}{z'}\right) = \frac{\psi(z')}{z'^m}$$

et $\psi(z')$ est holomorphe, ainsi que son inverse, dans l'intérieur d'un cercle C entourant le point $z'=0$: j'ai d'ailleurs

$$z'_1 = \frac{z'^m}{\psi(z')}.$$

Le point $z'=0$ est un point limite pour la substitution $\left[z', \frac{z'^m}{\psi(z')}\right]$, pourvu que pour $z'=0$ le module de la dérivée

$$m\frac{z'^{m-1}}{\psi(z')} - \frac{z'^m\psi'(z')}{[\psi(z')]^2}$$

soit inférieur à l'unité. Si $m>1$, il est nul; si $m=1$, ce module est égal à mod $\frac{1}{\psi(0)}$, c'est-à-dire au module de $\frac{1}{\varphi'(\infty)}$; il faut donc que le module de $\varphi'(\infty)$ soit supérieur à l'unité.

Dans le cas où $\varphi'(\infty)$ a un module supérieur à l'unité, il existe dans le plan où se meut la variable z un cercle C_∞, tel que tout point z extérieur à ce cercle conduit à l'infini, par voie de convergence régulière.

Cette expression de convergence régulière vers l'infini s'explique assez par ce qui précède, et n'a rien de choquant si l'on fait usage de la représentation à l'aide de la sphère.

Ajoutons que, tandis que $\varphi_p(z)$ croît indéfiniment, le rapport $\frac{\varphi_p(z)}{\varphi'(\infty)^p}$ tend vers une limite finie et différente de zéro, pourvu que $\varphi'(\infty)$ ne soit pas infini.

15. Enfin, l'infini peut faire partie d'un groupe circulaire. En effet, soit le groupe

$$x,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{h-1};\ x_h,\ x_{h+1},\ \ldots,\ x_{\mu-1}.$$

Il peut arriver que x_{h-1} soit un pôle de $\varphi(z)$, il suffit que l'infini soit un point ordinaire de $\varphi(z)$, tel que $\varphi(\infty)=x_{h+1}$. La représentation à l'aide de la sphère permet, dans ce cas comme dans le précédent, de ramener l'étude de l'infini à celle d'un point quelconque de la sphère. Au lieu de l'intérieur d'un cercle C_{x_h}, nous aurons à en considérer l'extérieur.

VI. — Exemples.

16. Je donnerai quelques exemples des propositions générales qui précèdent.

Une substitution linéaire (z_1, z) peut toujours se définir par la relation

$$\frac{z_1-a}{z_1-b} = K\frac{z-a}{z-b},$$

pourvu que les deux points doubles a et b soient distincts : on peut alors supposer que le module de K est inférieur à l'unité. Si l'on appelle c la valeur de z qui rend z_1 infini, on a alors

$$\frac{c-a}{c-b} = \frac{1}{K};$$

donc $\operatorname{mod}(c-a) > \operatorname{mod}(c-b)$, et *la racine a est la plus éloignée du pôle de z_1*. Les deux racines a et b appartiennent à l'indice 1, et il n'y a pas de racine appartenant à un indice supérieur. En différentiant, on trouve

$$\frac{dz_1}{dz} = K\left(\frac{z_1-b}{z-b}\right)^2 = \frac{1}{K}\left(\frac{z_1-a}{z-a}\right)^2.$$

Pour $z=a$ il vient

$$\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_a = K;$$

pour $z=b$

$$\left(\frac{dz_1}{dz}\right)_b = \frac{1}{K}.$$

Le *point* a est donc *seul* un point limite.

Si le module de K est égal à l'unité, on a

$$K = e^{i\theta} \quad \text{et} \quad \frac{z_p-a}{z_p-b} = e^{ip\theta}\frac{z-a}{z-b};$$

et, à moins que θ ne soit commensurable avec π, il n'y a pas de limite. Si θ est commensurable avec π, on retombe sur z après un nombre fini d'opérations. J'ai écarté ce cas dans mes recherches.

Enfin, reste le cas où les deux racines a et b coïncident; on peut écrire alors

$$\frac{1}{z_1-a} = \frac{1}{h-a} + h:$$

on a

$$\frac{dz_1}{dz} = \left(\frac{z_1-a}{z-a}\right)^2,$$

qui, pour $z=a$, donne l'unité. Il y a doute dans ce cas. Mais on voit tout de suite que

$$\frac{1}{z_p-a} = \frac{1}{z-a} + ph,$$

qui pour p infini donne limite $(z_p - a) = 0$. Le point double est donc un point limite pour tous les points du plan.

17. Je prendrai encore l'exemple de la substitution (z_1, z) définie par l'équation

$$z_1 = -\frac{1}{z}\,\frac{mz^2+1}{z^2+m}.$$

Cette substitution trouve une application dans le mode de correspondance par lequel on associe à un point d'une conique à centre le point où la normale à la conique rencontre pour la seconde fois la courbe.

Les racines appartenant à l'indice 1 sont données par l'équation

$$(z^2+m)^2 = m^2 - 1.$$

Aucune d'elles n'est limite.

Pour avoir celles qui appartiennent à l'indice 2, il suffit d'envisager les deux équations

$$z_1 = -\frac{1}{z}\,\frac{mz^2+1}{z^2+m}, \quad z = -\frac{1}{z_1}\,\frac{mz_1^2+1}{z^2+m}.$$

De ces équations, on tire $z_1^2 - z^2 = (z_1 - z)(z_1 + z) = 0$; la relation $z_1 - z = 0$ donnerait les racines appartenant à l'indice 1, ce qui est conforme au théorème I du n° 4. La relation $z_1 + z = 0$ conduit à l'équation $z^4 - 1 = 0$ et, par suite, aux deux groupes circulaires

$$\begin{cases} z = 1, \\ z = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} z = i, \\ z = -i. \end{cases}$$

En posant

$$m = a + ib,$$

on trouve que le premier couple est limite si $a > 1$: c'est au contraire le second si $a < -1$. Aucun n'est limite si a est compris entre $+1$ et -1; il y a doute pour $a = \pm 1$.

18. Je ne puis passer sous silence l'application de cette théorie à la règle de Newton pour le calcul approché des racines.

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe; prenons

$$\varphi(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)};$$

on a

$$\varphi'(z) = \frac{f(z)f''(z)}{[f'(z)]^2}.$$

Toutes les racines simples de $f(z) = 0$ sont des points limites à convergence régulière.

Il en est d'ailleurs de même pour les racines multiples, car dans l'expression de $\varphi'(z)$ on trouve, en prenant le rapport des dérivées $(2p - 2)^{\text{iemes}}$ des deux termes de la fraction, pour une racine multiple d'ordre p de $f(z)$,

$$\varphi'(z) = \frac{1}{p}.$$

19. Si l'on prend, au lieu de $f'(z)$, une fonction holomorphe $g(z)$, la substitution $\varphi(z) = z - \frac{f(z)}{g(z)}$ admettra pour point limite tout zéro de $f(z)$ pour lequel le module de $1 - \frac{f'g - g'f}{g^2}$ sera inférieur à l'unité.

Dans cette hypothèse, si cette inégalité du module est vérifiée pour tous les zéros de $f(z)$, et que ceux-ci soient simples, enfin si $f(z)$ et $g(z)$ sont deux polynômes à coefficients réels, il est assez curieux de remarquer que l'on peut remplacer $f'(z)$ par $g(z)$ dans la formation de la suite de Sturm. La raison en est que, pour toute racine réelle de $f(z)$, le rapport $\frac{f'(z)}{g(z)}$ est forcément positif.

20. Grâce à des coupures, on peut faire en sorte qu'une fonction algébrique de la variable z n'ait en chaque point du plan qu'une valeur, et se comporte comme une fonction uniforme. On peut appliquer à ce cas la théorie générale.

Je prends pour exemple la substitution (z, z_1), où z_1 est lié à z par l'équation

$$z_1^p - z - a = 0.$$

Si l'on introduit une coupure indéfinie issue du point critique $-a$, une fois fixée une valeur de z_1 pour une valeur de z, en s'assujettissant à ne rencontrer jamais la coupure, l'équation précédente définit une valeur unique pour z_1 en chaque point du plan.

Ainsi, que a soit réel et positif, de même que z, nous pourrons prendre pour z_1 la valeur réelle positive racine de l'équation et poser alors

$$z_1 = \sqrt[p]{z + a},$$

puis

$$z_2 = \sqrt[p]{z_1 + a} = \sqrt[p]{a + \sqrt[p]{a + z}},$$

puis

$$z_3 = \sqrt[p]{a + \sqrt[p]{a + \sqrt[p]{a + z}}}, \quad \ldots.$$

D'après la théorie générale, le point limite doit être la racine positive de l'équation

$$z^p - z - a = 0,$$

et l'on vérifie sans peine que c'est ce qui a lieu.

Si l'on appelle x cette quantité limite, on a pour $z = x$

$$\frac{dz_1}{dz} = \frac{1}{p x^{p-1}}.$$

La racine x est plus grande que l'unité, il en résulte que $\frac{1}{p x^{p-1}} < 1$. Conformément au théorème du n° 8, le produit

$$(p x^{p-1})^k (z_k - x)$$

tend vers une limite finie et différente de zéro lorsque k croît indéfiniment.

Si, en particulier, on fait $p = 2$, $a = 2$, ce théorème conduit à l'expression bien connue de π, que l'on rencontre dans la méthode des périmètres.

VII. — Essai d'extension a des substitutions plus générales.

21. Il reste encore bien des points que nous n'avons pas abordés : je citerai d'abord le cas douteux que j'ai signalé dans le n° 7, et la question des points limites à convergence irrégulière autres que ceux que j'ai étudiés. Enfin, au point de vue géométrique, la division du plan en régions d'après les points limites auxquels conduisent ses divers points reste à être traitée tout entière.

22. Envisagée au point de vue géométrique, la question que j'ai traitée est susceptible d'une grande généralisation.

Si l'on pose

$$x_1 = \varphi(x, y),$$
$$y_1 = \psi(x, y),$$

φ où et ψ sont des fonctions uniformes des variables réelles x et y, on a le mode le plus général de transformation qui fait correspondre un point $P_1(x_1, y_1)$ à un point $P(x, y)$. On peut même alors étendre la théorie à un champ à plusieurs variables, et chercher les points limites.

Je prendrai trois variables et les trois fonctions uniformes :

$$x_1 = \varphi(x, y, z),$$
$$y_1 = \psi(x, y, z),$$
$$z_1 = \theta(x, y, z).$$

Soit $M(a, b, c)$ un point limite, ρ la distance de ce point au point $P(x, y, z)$, ρ_1 sa distance au point $P_1(x_1, y_1, z_1)$, ... Je dirai que le point P_k, pour k infini, tend régulièrement vers le point M si la suite

$$\rho, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots, \rho_k, \ldots$$

converge régulièrement vers zéro.

En écartant le cas où M serait un point de discontinuité par les fonctions φ, ψ, θ, on trouve que (a, b, c) vérifient les équations simultanées

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(x, y, z), \\ y = \psi(x, y, z), \\ z = \theta(x, y, z). \end{array} \right.$$

En posant

$$x_k = a + \alpha_k, \quad y_k = b + \beta_k, \quad z_k = c + \gamma_k,$$

on a

$$\alpha_{k+1} = \frac{\partial\varphi}{\partial a} \alpha_k + \frac{\partial\varphi}{\partial b} \beta_k + \frac{\partial\varphi}{\partial c} \gamma_k + \Phi(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k),$$

$$\beta_{k+1} = \frac{\partial\psi}{\partial a} \alpha_k + \frac{\partial\psi}{\partial b} \beta_k + \frac{\partial\psi}{\partial c} \gamma_k + \Psi(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k),$$

$$\gamma_{k+1} = \frac{\partial\theta}{\partial a} \alpha_k + \frac{\partial\theta}{\partial b} \beta_k + \frac{\partial\theta}{\partial c} \gamma_k + \Theta(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k).$$

Posons

$$F(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial a} \alpha_k + \frac{\partial\varphi}{\partial b} \beta_k + \frac{\partial\varphi}{\partial c} \gamma_k\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial a} \alpha_k + \ldots\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial a} \alpha_k + \ldots\right)^2,$$

on a

$$\rho_{k+1}^2 = F(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k) + \Lambda(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k).$$

F est une forme quadratique ternaire de α_k, β_k, γ_k et Λ une forme cubique dont les coefficients sont des fonctions entières de ces mêmes quantités. On a

$$\left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right)^2 = \frac{F}{\rho_k^2} + \frac{A}{\rho_k^2}.$$

Lorsque α_k, β_k, γ_k tendent vers zéro, on a

$$\lim\left(\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}\right)^2 = \lim\frac{F}{\rho_k^2} = \lim\frac{F(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)}{F(\alpha_k^2, \beta_k^2, \gamma_k^2)}.$$

Soient ξ, η, ζ des variables finies proportionnelles à α_k, β_k, γ_k. Je forme le rapport

$$\frac{F(\xi, \eta, \zeta)}{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Il faut que la limite de ce rapport soit au plus égale à l'unité : donc, si dans tous les cas ce rapport est inférieur à l'unité, on sera sûr que $\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}$ tend vers une limite inférieure à 1.

Or ce rapport est au plus égal à la plus grande des racines de l'équation en S. Si donc les racines de l'équation en S sont toutes inférieures à l'unité en valeur absolue, on est sûr que le rapport $\frac{\rho_{k+1}}{\rho_k}$ tend vers une limite inférieure à l'unité.

On est dès lors conduit à ce théorème, que j'énonce sans démonstration :

Si le point (a, b, c) *vérifie les équations* (1) *et si de plus la forme quadratique* $F(\xi, \eta, \zeta) - \xi^2 - \eta^2 - \zeta^2$ *est définie et négative, il existe une sphère* S *de centre* $M(a, b, c)$, *telle que tout point intérieur conduit au point* M *par convergence régulière.*

On applique aisément ce théorème à la transformation homographique de l'espace qui conserve le plan de l'infini.

Enfin, on reconnaîtra la possibilité de définir aussi dans ce cas des groupes circulaires limites, comme je l'ai fait dans ces recherches.