

# BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

P.-H. SCHOUTE

## **Application de la transformation par droites symétriques à un problème de Steiner**

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2<sup>e</sup> série,*  
tome 7, n° 1 (1883), p. 314-324

[http://www.numdam.org/item?id=BSMA\\_1883\\_2\\_7\\_1\\_314\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_314_1)

© Gauthier-Villars, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

## MÉLANGES.

### APPLICATION DE LA TRANSFORMATION PAR DROITES SYMÉTRIQUES A UN PROBLÈME DE STEINER;

PAR M. P.-H. SCHOUTE,

Professeur à l'Université de Groningue (Hollande).

Dans un travail précédent <sup>(1)</sup>, j'ai donné la théorie de la transformation par droites symétriques; dans ce qui suit, je l'applique à un théorème de Steiner <sup>(2)</sup>.

1. LEMME. — *Dans la transformation par droites symétriques, dont les points A, B, C sont les points fondamentaux simples, la série des coniques semblables entre elles et circonscrites au triangle ABC correspond au système des tangentes à un cercle déterminé concentrique au cercle D circonscrit au triangle ABC.*

Cas *a.* — Les coniques semblables sont des *hyperboles*.

Cherchons la droite qui correspond à une des hyperboles H

---

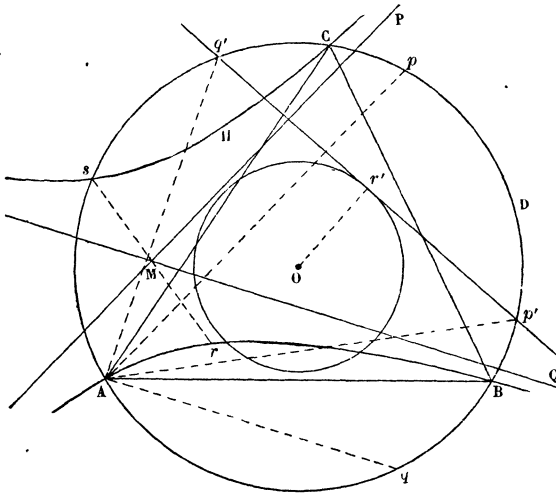
<sup>(1)</sup> Voir *Bulletin*, 2<sup>e</sup> série, VI<sub>2</sub>.

La réduction de la transformation par cercles symétriques à la transformation par droites symétriques, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, que j'ai indiquée dans cette étude, n'est qu'une application particulière d'un théorème général, le théorème qui dit que chaque transformation birationnelle peut être décomposée en une combinaison de transformations quadratiques.

<sup>(2)</sup> *Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, 1832 (problème 39 du Supplément) et encore dans le *Journal de Borchardt*, t. LV, *Vermischte Satze und Aufgaben*, III, 3.

(fig. 1) de la série, en déterminant les points qui correspondent aux points infiniment éloignés de la courbe. Ces points se trouvent sur le cercle  $D$  circonscrit au triangle, ce cercle étant la courbe qui correspond à la droite située à l'infini,  $l_{\infty}$ . Donc on détermine ces deux points en menant par  $A$  des droites  $Ap$  et  $Aq$  parallèles aux asymptotes  $MP$  et  $MQ$  de l'hyperbole  $H$ , et les droites symétriques  $Ap'$  et  $Aq'$  par rapport aux bissectrices de l'angle  $A$ ; car les points d'intersection  $p'$  et  $q'$  de ces dernières droites et du cercle  $D$  sont évidemment les points en question, et

Fig. 1.



la droite  $p'q'$  correspond à l'hyperbole  $H$ . Eh bien, un coup d'œil sur la figure montre immédiatement l'égalité des arcs  $p'q'$  et  $pq$  du cercle  $D$ . Mais le dernier étant le double de l'angle  $PMQ$ , qui est le même pour toutes les hyperboles de la série, à cause de la similitude des coniques, l'arc  $p'q'$  est constant en même temps, c'est-à-dire que les droites qui correspondent aux hyperboles semblables enveloppent un cercle concentrique et intérieur au cercle  $D$ .

CAS  $a'$ . — Les hyperboles sont équilatères.

Dans ce cas, l'angle des asymptotes étant droit, l'arc  $p'q'$  est la moitié de la circonférence du cercle  $D$ ; les droites qui correspon-

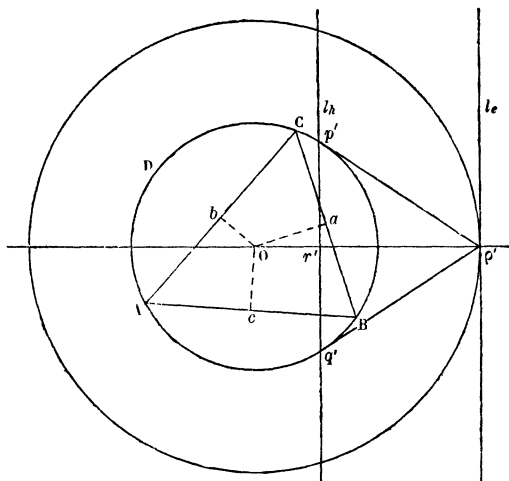
dent aux hyperboles équilatères enveloppent donc un point, le centre du cercle D.

Cas *b*. — Les coniques semblables sont des *ellipses*.

Dans ce cas, les droites correspondantes enveloppent un cercle déterminé concentrique et extérieur au cercle D. D'abord on trouve ce résultat au moyen du principe de continuité en étendant le raisonnement donné pour le cas des coniques à asymptotes réelles à celui des coniques à asymptotes imaginaires. Mais, en définissant les asymptotes de l'ellipse comme les rayons doubles imaginaires de l'involution des diamètres conjugués, on évite l'emploi du principe de continuité par la démonstration suivante.

Si  $l_e$  (fig. 2) est la droite qui correspond à une ellipse donnée E

Fig. 2.



circonscrite au triangle ABC, et  $l_h$  celle qui correspond à l'hyperbole H également circonscrite au triangle ABC et dont les asymptotes sont parallèles aux diamètres conjugués égaux de l'ellipse E, les droites  $l_e$  et  $l_h$  sont parallèles; car l'ellipse E, l'hyperbole H et le cercle D appartiennent à un même faisceau, de manière que le quatrième point d'intersection des courbes E et H se trouve sur le cercle D, et le point correspondant, le point d'intersection des droites  $l_e$  et  $l_h$ , est situé sur  $l_\infty$ . Et les trois courbes E, H et D appartiennent à un même faisceau, parce qu'elles passent par trois

points A, B, C et qu'elles coupent la droite  $l_\infty$  suivant trois couples de points en involution, une involution dont les points situés sur les axes des courbes E et H sont les points doubles; car, suivant le théorème de Desargues, la conique qui passe par les points d'intersection des courbes D et E et qui passe par un des points infiniment éloignés de l'hyperbole H, doit aussi contenir l'autre, etc.

De plus, les tangentes au cercle D dans les points d'intersection  $p'$  et  $q'$  de cette courbe et de  $l_h$  se rencontrent en un point  $\rho'$  de  $l_e$ . En effet, aux tangentes en  $p'$  et  $q'$  correspondent des coniques qui touchent la droite  $l_\infty$ , des paraboles circonscrites au triangle ABC et plus spécialement les paraboles circonscrites au triangle ABC dont l'axe est parallèle à l'une ou à l'autre des asymptotes de l'hyperbole H, c'est-à-dire à l'un ou à l'autre des diamètres conjugués égaux de l'ellipse E. D'où l'on déduit que ces deux paraboles et l'ellipse E appartiennent à un même faisceau, encore parce qu'elles passent par les trois points A, B, C et qu'elles déterminent sur  $l_\infty$  trois couples de points en involution, une involution dont les points situés sur les diamètres conjugués égaux de l'ellipse E sont les points doubles. Donc le quatrième point d'intersection des deux paraboles se trouve sur E, c'est-à-dire que le point d'intersection  $\rho'$  des droites correspondantes  $p'\rho'$  et  $q'\rho'$  se trouve sur  $l_e$ .

Enfin on trouve que la droite  $l_e$  enveloppe un cercle concentrique et passant par  $\rho'$  quand l'ellipse E se meut en restant circonscrite et semblable à elle-même, parce que, dans ce cas, l'hyperbole H se meut complètement de la même manière et que sa droite correspondante enveloppe le cercle concentrique qui passe par  $\rho'$ , etc.

CAS  $b'$ . — Les *ellipses* sont des *cercles*.

Il n'y a qu'un seul cercle circonscrit au triangle ABC et une seule droite correspondante, la droite  $l_\infty$  (1).

(1) Dans la considération des coniques semblables circonscrites au triangle ABC le cercle D fait partie de la série, qui se compose des deux faisceaux de coniques, dont l'un a pour points de base A, B, C,  $\omega$  et l'autre A, B, C,  $\omega'$ , où, comme d'ordinaire,  $\omega$  et  $\omega'$  représentent les points circulaires à l'infini.

Dans cet ordre d'idées, les droites qui correspondent aux coniques de la série forment deux faisceaux, les faisceaux dont  $\omega'$  et  $\omega$  sont les sommets.

CAS  $c'$ . — Les courbes semblables sont des *paraboles*.

Évidemment, les droites correspondantes enveloppent le cercle circonscrit D lui-même.

2. THÉORÈME DE STEINER. — *La série des coniques semblables entre elles et circonscrites à un triangle donné ABC est enveloppée d'une courbe  $C^4$ ; cette quartique a trois points doubles, les sommets du triangle ABC, et n'admet donc que quatre tangentes doubles, dont l'une est la droite  $l_\infty$ . Chacune des coniques de la série touche l'enveloppe à l'autre extrémité du diamètre de la conique, qui passe par son quatrième point d'intersection avec le cercle circonscrit D. Un point quelconque du cercle D se trouve sur deux des coniques de la série et les points de contact de ces deux coniques avec l'enveloppe  $C^4$  sont deux points d'une même hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC. La série des coniques semblables ne contient pas deux coniques homothétiques.*

CAS  $a$ .

*Des hyperboles.*

Parce que les droites qui correspondent aux coniques enveloppent un cercle concentrique au cercle D, les coniques elles-mêmes enveloppent la courbe qui correspond à ce cercle, une quartique dont les points fondamentaux A, B, C sont des points doubles. Le cercle concentrique ayant un contact double imaginaire avec le cercle D sur la droite  $l_\infty$ , la courbe  $C^4$  a un contact double imaginaire avec la droite  $l_\infty$  sur le cercle D, c'est-à-dire dans les ombilics  $\omega$  et  $\omega'$  du plan.

Si  $r$  (*fig. 1*) est le point de contact de l'hyperbole H et de l'enveloppe  $C^4$ , et  $s$  le quatrième point d'intersection du cercle D et de l'hyperbole H, la droite  $rs$  doit être diamètre de l'hyperbole H. Mais on prouve qu'en effet les tangentes en  $r$  et  $s$  à cette courbe se coupent sur  $l_\infty$ , en démontrant que les deux coniques qui correspondent à ces tangentes déterminent un faisceau de coniques dont le cercle D fait partie. Eh bien, les coniques qui correspondent à ces tangentes, ce sont les coniques circonscrites au triangle ABC, dont l'une touche la droite  $p'q'$  au point milieu  $r'$  de  $p'q'$ , et l'autre au point infiniment éloigné  $s'$ . Et ces deux coniques déterminent

un faisceau qui contient le cercle  $D$ , parce que la courbe du faisceau qui passe par  $p'$  passe en même temps par  $q'$  eu égard à l'involution que les courbes du faisceau déterminent sur la droite  $p'q'$ ; de manière que cette courbe coïncide avec le cercle  $D$ , etc. (<sup>1</sup>).

Un point quelconque du cercle  $D$  se trouve sur deux coniques de la série; car le point correspondant de  $l_{\infty}$  détermine la direction de deux tangentes au cercle concentrique. Les deux points de contact de ces deux tangentes étant situés sur un même diamètre du cercle  $D$ , les deux points de contact des deux coniques avec la courbe  $C'$  se trouvent sur une même hyperbole équilatère circonscrite au triangle  $ABC$ .

On prouve de la même manière qu'un point quelconque  $P$  du plan se trouve sur deux hyperboles de la série.

La série des hyperboles semblables ne contient pas deux coniques homothétiques; car les points infiniment éloignés de l'hyperbole  $H$  correspondent aux points d'intersection  $p'$  et  $q'$  de la droite correspondante et du cercle  $D$ , et le cercle concentrique n'a pas un couple de tangentes qui coupent le cercle  $D$  aux mêmes points. Ce dernier résultat est bien évident, du reste; car, par cinq points, on ne peut faire passer qu'une conique unique.

#### CAS $a'$ .

##### *Des hyperboles équilatères.*

Les hyperboles<sup>1</sup> enveloppent un point, le point qui correspond au centre du cercle  $D$ , le point de concours des hauteurs du triangle  $ABC$ . Nous retrouvons donc un théorème connu.

Pour chacune des hyperboles du faisceau le diamètre du quatrième point d'intersection  $s$  avec le cercle  $D$  passe par ce point de concours  $r$  des hauteurs du triangle  $ABC$ ; le lieu des centres de ces hyperboles est donc le cercle qu'on obtient par la division des rayons vecteurs du cercle  $D$ , qui partent du point  $r$ , par deux, le cercle des neuf points par rapport au triangle  $ABC$ . Par chaque point  $s$  du cercle  $D$  ne passe qu'une hyperbole équilatère, et le système ne contient pas un seul couple de courbes homothétiques.

---

(<sup>1</sup>) On trouve le même résultat au moyen de la condition que la droite  $rs$  passe par le point d'intersection des asymptotes de l'hyperbole  $H$ ; mais ce raisonnement ne peut s'étendre aussi facilement au cas des ellipses semblables.

CAS *b*.*Des ellipses.*

Dans ce cas, les raisonnements sont tout à fait égaux à ceux du cas des hyperboles. Seulement, les deux points  $p'$  et  $q'$  sont imaginaires. Mais la seconde partie du théorème subsiste, parce que  $r'$  reste le point milieu du segment imaginaire  $p'q'$ .

CAS *b'*.*Des cercles.*

L'enveloppe est le cercle circonscrit D, etc. (<sup>1</sup>).

CAS *c'*.*Des paraboles.*

L'enveloppe est la droite  $l_\infty$ . Pour chaque parabole, la droite  $rs$  est un diamètre, le point  $r$  étant le point infiniment éloigné de la courbe. La troisième partie du théorème est en partie un cas particulier du théorème connu, que chaque faisceau de coniques contient deux paraboles, etc.

3. ADDITION AU THÉORÈME DE STEINER. — *Les enveloppes  $C^4$  des séries différentes des coniques semblables, circonscrites au triangle ABC, forment un faisceau, dont les points A, B, C sont des points de base doubles, et les ombilics  $\omega$  et  $\omega'$  des points de base simples à tangente commune  $l_\infty$ . Une droite quelconque est touchée par quatre des courbes  $C^4$  du faisceau, etc.*

Les enveloppes des systèmes des droites correspondantes formant un faisceau de cercles concentriques, les enveloppes des séries de coniques semblables forment un faisceau dont on détermine sans peine les points de base. Parce que du centre commun des cercles on peut mener quatre normales à une co-

---

(<sup>1</sup>) C'est le résultat métaphorique de Steiner. Mais la courbe  $C^4$  de la série des coniques semblables circonscrites aux triangles ABC, qui contient le cercle D, se réduit aux deux ombilics  $\omega$  et  $\omega'$ .



nique quelconque qui est circonscrite au triangle ABC, il y a quatre courbes  $C^4$  qui touchent la droite qui correspond à cette conique, etc.

4. D'abord Steiner a ajouté deux problèmes à son théorème, dont le premier s'occupe du lieu des centres, et le second du lieu des foyers de la série des coniques semblables circonscrites à un triangle donné <sup>(1)</sup>. Ensuite il a indiqué <sup>(2)</sup> le premier lieu et engagé à l'étude de l'enveloppe des axes de ces courbes. Je terminerai donc par l'énumération des lieux et des enveloppes principales, qui ont un rapport intime avec les séries des coniques semblables, quoique les découvertes générales de Chasles aient fait connaître l'ordre de ces lieux et la classe de ces enveloppes pour une série de coniques  $(\mu, \nu)$  <sup>(3)</sup>. Mais, pour ne pas abuser de la bienveillance de la rédaction du *Bulletin*, je ne donnerai que les résultats.

**THÉORÈME FONDAMENTAL.** — *Pour une série de coniques semblables circonscrites à un triangle ABC, les caractéristiques  $\mu$  et  $\nu$  ont les valeurs de 2 et 4; seulement, dans le cas a' des hyperboles équilatères, ces valeurs s'abaissent à 1 et 2 et dans le cas b' du cercle circonscrit on considère la série composée des deux faisceaux auquel appartient ce cercle.*

*Je remarque que les deux coniques par A, B, C, qui touchent  $l_\infty$  en un des deux points  $\omega$  et  $\omega'$ , appartiennent deux fois à chacune des séries de coniques semblables; seulement la série qui est composée de deux faisceaux ne les contient qu'une fois.*

Le lieu des centres des coniques semblables est une courbe  $C^4$  qui a trois points doubles, les points milieux  $a, b, c$  des côtés du triangle ABC (*fig. 2*) et quatre tangentes doubles, dont une est la droite  $l_\infty$  qui touche la courbe en  $\omega$  et  $\omega'$ . Dans le cas a' des hyperboles équilatères, le lieu est un cercle, le cercle des neuf points par rapport au triangle ABC. Et dans le cas c' des paraboles,

(1) *Systematische Entwicklung, etc.. loc. cit.*

(2) *Journal de Borchardt, loc. cit.*

(3) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1864.*

la courbe  $C^4$  dégénère en quatre droites, la droite  $l_\infty$  et les trois droites qui passent par deux des trois points  $a, b, c$  <sup>(1)</sup>.

Toutes les courbes  $C^4$  qui correspondent aux séries différentes des coniques semblables circonscrites à un même triangle ABC forment un faisceau; chacun des points  $a, b, c$  compte pour quatre et chacun des points  $\omega$  et  $\omega'$  pour deux des seize points de base. Toutefois cette considération exige que l'on compte double le cercle des neuf points.

L'enveloppe des asymptotes est une courbe  $\Gamma^6$  (de la sixième classe) qui a trois tangentes doubles, les côtés du triangle ABC, et une tangente quadruple  $l_\infty$  dont les points de contact coïncident deux à deux avec les points  $\omega$  et  $\omega'$ . Dans le cas des hyperboles équilatères, l'enveloppe est une courbe  $\Gamma^3$  qui touche une fois les côtés du triangle ABC, et deux fois, en  $\omega$  et  $\omega'$ , la droite  $l_\infty$  <sup>(2)</sup>. Et dans le cas des paraboles, toutes les asymptotes coïncident avec  $l_\infty$ , si l'on ne considère comme asymptotes les six droites des trois paraboles dégénérées.

Quand on compte double l'enveloppe  $\Gamma^3$ , toutes les enveloppes  $\Gamma^6$  forment un faisceau tangentiel; chacun des trois côtés du triangle représente quatre et la droite  $l_\infty$  vingt-quatre <sup>(3)</sup> des trente-six tangentes de base.

L'enveloppe des axes est encore une courbe  $\Gamma^6$  qui a trois tangentes doubles, les normales  $aO, bO, cO$  aux côtés du triangle ABC par leurs points milieux, et une tangente quadruple  $l_\infty$ , dont les points de contact coïncident deux à deux avec  $\omega$  et  $\omega'$ . Dans le cas des hyperboles équilatères, l'enveloppe est une courbe  $\Gamma^3$  qui touche une fois les droites  $aO, bO, cO$ , et deux fois, en  $\omega$  et  $\omega'$ ,

(1) Je laisse de côté les résultats simples qui se rapportent au cas de la série qui contient le cercle D, série qui se compose de deux faisceaux, parce que les lieux géométriques et les enveloppes sont tous imaginaires.

(2) Cette courbe est l'hypocycloïde de module  $\frac{1}{3}$  étudiée par M. Steiner (*Journal de Borchartt*, t. LIII, p. 231) et par beaucoup d'autres géomètres, comme Cremona, Ferrers, P. Serret, Brocard, etc.

(3) La droite  $l_\infty$  compterait pour seize des tangentes communes, si ses points de contact avec les courbes étaient différents pour les différentes courbes; la coïncidence de deux de ces points avec  $\omega$  augmente la multiplicité de la droite  $l_\infty$  comme tangente commune avec quatre, etc.

la droite  $l_\infty$ . Et dans le cas des paraboles, l'enveloppe se compose d'une courbe  $\Gamma^3$  qui de même touche une fois les droites  $aO, bO, cO$  et deux fois, en  $\omega$  et  $\omega'$ , la droite  $l_\infty$  et trois points, les points infiniment éloignés de  $aO, bO, cO$ .

En comptant double la première des deux enveloppes  $\Gamma^3$ , on peut dire que les courbes  $\Gamma^6$ , qui correspondent aux séries différentes de coniques semblables, forment un faisceau tangentiel, dont les droites  $aO, bO, cO$  représentent quatre, et  $l_\infty$  vingt-quatre tangentes de base.

Le lieu des foyers est une courbe  $C^{12}$  qui a deux points doubles sur chacun des côtés du triangle  $ABC$ , les points doubles de la série des coniques et deux points quadruples sur  $l_\infty$ , les points  $\omega$  et  $\omega'$ ; dans chacun des six points doubles, les tangentes sont les bissectrices de l'angle formé par les deux droites de la conique dégénérée, et dans chacun des deux points quadruples deux des tangentes coïncident avec  $l_\infty$ , les deux autres avec une autre droite. Dans le cas des hyperboles équilatères, le lieu est une courbe  $C^6$  qui a un point double sur chaque côté du triangle, le pied de la hauteur et deux points doubles  $\omega$  et  $\omega'$ , dont une des tangentes coïncide avec  $l_\infty$ . Et dans le cas des paraboles, le lieu est la droite  $l_\infty$  et une courbe  $C^3$ , dont les points d'intersection avec  $l_\infty$  sont les points  $\omega$  et  $\omega'$ , et les points infiniment éloignés des trois côtés du triangle  $ABC$ .

Les différents lieux  $C^{12}$  ne forment pas un faisceau, mais une série dont  $\mu = 4$ .

L'enveloppe des directrices est une courbe  $\Gamma^8$  qui touche une fois les douze bissectrices des six angles formés par les coniques de la série qui dégénèrent en deux droites, et quatre fois la droite  $l_\infty$ ; des quatre points de contact de cette droite, deux coïncident avec  $\omega$  et deux avec  $\omega'$ . Dans le cas des hyperboles équilatères, l'enveloppe est une courbe  $\Gamma^4$  qui touche une fois les six bissectrices des trois angles formés par les coniques dégénérées de la série, et deux fois la droite  $l_\infty$ , en  $\omega$  et  $\omega'$ . Et dans le cas des paraboles, l'enveloppe est une courbe  $\Gamma^4$  dont  $l_\infty$  est une tangente triple, les points de contact étant les points infiniment éloignés des côtés du triangle  $ABC$ .

Les différentes enveloppes  $\Gamma^8$  ne forment pas un faisceau tangentiel, mais une série dont  $\nu = 2$ .

Le *lieu des sommets* est une courbe  $C^{10}$  qui a trois points sextuples, les points A, B, C, et six points doubles qui se trouvent deux à deux sur les trois côtés du triangle, les six points doubles de la série; les tangentes de ces points doubles sont les bissectrices, etc. Dans le cas des hyperboles équilatères, le lieu est une courbe  $C^8$  qui a trois points triples, les points A, B, C, et trois points doubles, les pieds des hauteurs. Et le lieu des sommets des paraboles est une courbe  $C^7$  dont A, B, C sont des points triples, et les points infiniment éloignés des côtés du triangle ABC des points simples.

Les différents lieux  $C^{10}$  ne forment pas un faisceau, mais une série dont  $\mu = 3$ .

