Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Association française pour l’avancement des sciences

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 181-192

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_181_1>

MÉLANGES.

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES.

SESSION DE LA ROCHELLE.

I[re] ET II[e] SECTIONS. — MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIE, GÉODÉSIE ET MÉCANIQUE.

Président d'honneur.... M. P. TCHEBYCHEF, Membre de l'Académie de Saint-Pétersbourg.
Président.............. M. ÉDOUARD COLLIGNON, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.
Secrétaire.............. M. STEPHANOS (D[r] CYPARISSOS).

Séance du 25 août 1882.

M. P. TCHEBYCHEF fait une Communication *Sur la rectification des courbes*. L'illustre géomètre montre le parti que l'on peut tirer pour la rectification des courbes de l'emploi des points dont les coordonnées servent à trouver l'*aire*, d'après la méthode exposée par lui au Congrès de Lyon, méthode qui vient d'être enrichie par des recherches fort intéressantes de M. Radau. En traitant de cette manière le cas le plus simple, on parvient à reconnaître que l'arc d'une courbe peut être représenté, avec une approximation notable, par la somme des deux côtés égaux du triangle isoscèle construit sur la corde de l'arc comme base et ayant pour hauteur les $(\sqrt{\frac{4}{3}})^{\text{ièmes}}$ de la flèche élevée perpendiculairement au milieu de la corde jusqu'à sa rencontre avec l'arc. La courbe symétrique autour de l'axe des x, dont les arcs compris entre deux points symétriques se rectifient exactement de cette manière, se trouve avoir pour équation $3ay^2 = x(a-x)^2$.

M. le général Parmentier parle *Sur certaines formules de quadrature.* On doit à M. Parmentier une formule d'approximation pour la quadrature des courbes planes, qui constitue un heureux perfectionnement de la méthode de Poncelet. Cette formule, comme l'auteur l'a déjà fait remarquer (*Nouv. Ann.*, t. XV, 1876), peut aussi être obtenue en cherchant à simplifier celle de Simpson. M. Parmentier fait connaître maintenant deux autres formules qu'on obtient en suivant le même ordre d'idées, et qui ont la propriété de fournir la valeur exacte de l'aire toutes les fois qu'il s'agit de paraboles du deuxième ou du troisième degré. Ces nouvelles formules sont, il est vrai, un peu moins simples que la première, mais conduisent à une plus grande approximation.

M. le Dr Prompt, de Nice, expose ses recherches *Sur la signification mathématique de l'Atlantide.* En racontant, dans le dialogue de Timée, la fable de l'*Atlantide*, Platon avait donné une description minutieuse de la métropole d'un des royaumes qui se trouvaient sur cette île. M. Prompt a pensé que les dimensions attribuées par Platon aux différentes parties de cette ville ne seraient que des symboles numériques, analogues à ceux dont il est question dans d'autres parties de Timée. Il a donc cherché à découvrir leur signification en recourant à des interprétations astronomiques, musicales, etc.

La Communication de M. Prompt a donné lieu à plusieurs observations de la part de MM. Collignon, Tchebychef, Parmentier.

M. Collignon présente, au nom de M. G. Jung, professeur à l'Institut technique supérieur de Milan, des *Propositions relatives à la détermination des centres de gravité de solides ou de surfaces de révolution complets ou incomplets*. La principale de ces propositions, qui constitue un complément utile de la règle de Guldin, est la suivante : « Si l'aire plane F (ou la courbe plane S) tournant d'un angle θ autour d'une droite a, située dans son plan, engendre une portion de solide (ou de surface) de révolution, le centre de gravité du solide engendré (ou de la surface engendrée) coïncide avec le centre de gravité de l'arc de cercle décrit par le point A, antipôle de la droite a par rapport à l'ellipse centrale de l'aire plane F (ou de la courbe plane S). »

M. Collignon fait ensuite une Communication *sur un problème de Géométrie*. M. Collignon cherche les courbes planes dont l'aire polaire (c'est-à-dire en coordonnées polaires) est une fonction donnée de l'arc. Il fait voir d'abord que la détermination de ces courbes équivaut à celle des courbes dont l'arc s est égal à une fonction donnée $\psi(p)$ de la distance p du pôle à la tangente de la courbe. Le problème se ramène ainsi à l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 p}{d\alpha^2} - \psi'(p)\frac{dp}{d\alpha} + p = 0,$$

α étant l'angle polaire sous-tendu par l'arc s. M. Collignon considère diverses transformations de cette équation différentielle, qui conduisent, les unes à des procédés graphiques, les autres à des développements en fonctions continues, permettant d'obtenir des solutions approximatives de la question. Il fait voir enfin comment, étant donnée une courbe plane rapportée à des coordonnées polaires, la connaissance de la relation $s = \psi(p)$ correspondante, ou bien de celle qui existe entre l'arc et l'aire polaire de cette courbe, peut servir à mettre en évidence les propriétés géométriques ou mécaniques de la courbe.

Séance du 26 août.

M. Domenico Ragona, directeur de l'Observatoire de Modène parle de certaines *Nouvelles formules relatives à la détermina-*

tion de la déclinaison magnétique absolue. Dans le Congrès de Montpellier (1879), M. Ragona avait fait connaître une méthode pour la détermination de la déclinaison magnétique absolue. M. Ragona présente maintenant une nouvelle formule relative au cas où l'on observe, avant et après la détermination de l'azimut magnétique, un nombre quelconque d'étoiles. La grandeur cherchée s'obtient alors par l'emploi de la méthode des moindres carrés.

M. Ferrero, colonel d'état-major, directeur de l'Institut géographique militaire italien (à Florence), fait un *Rapport sur les progrès des travaux géodésiques en Italie et sur l'Institut géographique militaire italien.*

D'après M. Ferrero, les travaux géodésiques qu'on exécute en Italie, depuis son unification, ont pour base les méthodes d'observation et de calcul les plus récentes; mais ce qui peut constituer le mérite spécial des travaux italiens, c'est une organisation qui fait concourir dans un même but toutes les forces utiles dont dispose le pays.

Il existe, en Italie, une Commission géodésique composée de membres appartenant au ministère de la guerre, au ministère de la marine et à celui des travaux publics, et des directeurs des principaux Observatoires astronomiques. Les travaux de la Commission sont très variés et comprennent des travaux trigonométriques et géométriques, des travaux astronomiques, des travaux mixtes, enfin des publications. Plusieurs établissements scientifiques prennent part à ces travaux, auxquels ils apportent un précieux concours par des moyens intellectuels et matériels. Tels sont l'Institut géographique militaire, le Bureau hydrographique de la marine et les Observatoires astronomiques de Milan, Padoue, Rome et Naples.

La triangulation de premier ordre constitue un réseau qui couvre toute l'étendue de l'Italie et de ses îles. Le réseau est déjà établi en grande partie. Dans trois ans il le sera en totalité et, dans six ou sept ans, il sera tout calculé et compensé. La précision des observations exécutées atteint le plus haut degré que comportent les instruments et les méthodes actuelles. Quant au nombre et à la distribution des bases, ils ont été établis de manière à assurer aux côtés les plus éloignés une erreur moyenne ne dépassant pas le $\frac{1}{100000}$ de la longueur.

A côté des triangulations de premier ordre, on exécute des nivellements géométriques et trigonométriques. On fait aussi des observations maréographiques au moyen de maréographes installés dans différents ports du royaume.

M. Ferrero insiste, en finissant, sur la part qui revient à l'Institut géographique militaire. Cet Institut, qui ne compte pas moins de deux cent cinquante employés, a pour mission de faire la triangulation du royaume ainsi que tous les travaux cartographiques qui intéressent l'armée et les administrations. La carte italienne sera terminée en 1892, c'est-à-dire trente ans après son commencement.

A la suite de cette Communication, M. le commandeur Alex. Betocchi parle *Des maréographes existant en Italie et des observations maréographiques italiennes.*

Séance de l'après-midi.

M. Tchebychef présente à la section une *Machine arithmétique à mouvement continu.* Cette machine est composée d'un *additionneur,* pouvant être employé séparément, pour opérer l'addition et la soustraction et d'un mécanisme auxiliaire servant à effectuer, avec le concours de l'*additionneur,* la multiplication et la division. Dans l'additionneur, les échappements qu'on emploie ordinairement pour produire brusquement les changements des chiffres de la somme provenant du report sont remplacés par des trains épicycloïdaux qui produisent ces changements *graduellement.* La composition de l'additionneur est rendue ainsi fort simple. Quant à l'ambiguïté qui se présente lorsqu'on voit dans une même lucarne deux chiffres à la fois, elle est écartée au moyen de bandes que l'on voit dans ces lucarnes. Parmi ces bandes, on distingue aisément la principale, laquelle ne contient que les vrais chiffres de la somme. Le mécanisme servant à opérer la multiplication et la division est composé d'un cylindre denté et de pignons qui peuvent glisser le long de leurs axes. Les dents du cylindre et celles des pignons ont une forme telle que les pignons ne puissent jamais rester libres. On rend ainsi complètement impossibles les fautes qui auraient pu résulter de ce que les pignons ne s'arrêtent pas toujours assez vite quand les dents du cylindre cessent de les pousser.

M. Baehr, professeur à l'École Polytechnique de Delft (Hollande) fait une Communication *Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre, à coefficients constants et sans second membre, dans le cas où l'équation caractéristique a des racines égales.*

M. Andréief, professeur à l'Université de Kharkof (Russie), parle *Sur les polygones de Poncelet.* Dans son *Traité des propriétés projectives des figures,* Poncelet avait ramené la démonstration de son fameux théorème, sur les polygones inscrits à une conique et circonscrits à une autre, à celle de la proposition suivante : « Étant données deux coniques dans un plan et que l'on considère un polygone de m côtés inscrit dans l'une et dont $m - 1$ côtés soient tangents à l'autre, le dernier côté de ce polygone enveloppe une conique appartenant au faisceau déterminé par les deux coniques considérées. » C'est de cette proposition importante que M. Andréief présente une nouvelle démonstration. Sa démonstration présente cet avantage, qu'elle satisfait aux exigences de la géométrie de situation et aussi qu'elle n'est fondée que sur la considération de figures qui restent toujours réelles tant que les deux coniques considérées sont réelles.

MM. Collignon et Vazeilles ajoutent quelques remarques sur le même sujet.

M. Cyparissos Stéphanos fait ensuite une communication *Sur le mouvement d'une figure de forme invariable.* Dans cette communication, M. Stephanos expose les principes d'une nouvelle méthode pour l'étude géométrique du déplacement d'une figure plane de forme invariable dans son plan ou d'un corps solide autour d'un point fixe de l'espace. Cette méthode est fondée sur la représentation, par des points de l'espace, des diverses positions que peut prendre la figure plane dans son plan ou le corps solide autour du point fixe de l'espace, positions qui sont en nombre simplement infini. Un mouvement, comprenant une simple infinité de positions de la figure mobile, est ainsi représenté par une certaine courbe, lieu des points qui représentent les positions successives de cette figure. La considération de cette courbe est d'une grande utilité pour l'étude du mouvement correspondant.

Le procédé de la représentation des positions d'un corps solide autour d'un point de l'espace est intimement lié à la théorie des quaternions de Hamilton. M. Stephanos fait voir, à ce propos, dans quel genre de recherches le Calcul des quaternions est particulièrement approprié.

M. Marcel Deprez, *Sur le dynamomètre hydraulique de M. Froude.*

Séance du 28 août.

M. Laisant, député, parle d'abord *Sur un théorème d'Algèbre.* Ce théorème constitue une généralisation d'une proposition donnée à peu près simultanément par MM. Biehler et Laguerre (*Nouv. Ann.*, 1880). Le nouveau théorème peut être énoncé de la manière suivante : « Soit $x = f(s, t)$ une fonction réelle quelconque de deux variables s, t. Remplaçons-y s et t par $\frac{z^2+1}{z}$ et $\frac{z^2-1}{iz}$. Supposons maintenant qu'en résolvant par rapport à z l'équation ainsi obtenue

$$f\left(\frac{z^2+1}{z}, \frac{z^2-1}{iz}\right) = x,$$

on tire pour une des racines $z = \varphi(x, i)$. L'équation

$$[\varphi(x, i)]^m = \mathrm{A} + \mathrm{B}i,$$

où A et B représentent deux quantités réelles telles que $\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 = 1$, et $m'i = \sqrt{1}$, aura m racines égales. » En prenant pour la fonction $f(s, t)$ simplement $\frac{t}{s^2}$, on obtient la proposition de MM. Biehler et Laguerre.

M. Laisant présente ensuite une *Remarque sur les podaires.* Lorsqu'on a une courbe (X), on peut considérer ses podaires successives $(\mathrm{P}_1), (\mathrm{P}_2), \ldots (\mathrm{P}_{m-1}), (\mathrm{P}_m) \ldots$, inclinées d'un certain angle α, et prises par rapport à un pôle fixe O. Si l'on considère sur ces courbes un système de points $P_1, P_2, \ldots, P_{m-1}, P_m$ correspondant à un même point P de la courbe (X), on trouve que les triangles

$$OXP_1,\ OP_1P_2,\ \ldots,\ OP_{m-1}P_m$$

sont tous directement semblables entre eux. La même proposition a évidemment lieu pour le système plus complet de courbes qu'on obtient en adjoignant aux courbes précédentes les *antipodaires* successives de (X) inclinées du même angle α et prises par rapport au même pôle O.

M. Laisant communique enfin certaines *Propriétés du mouvement d'une figure plane qui reste semblable à elle-même.*

M. Laisant s'occupe d'abord du cas où tous les points de la figure mobile décrivent des droites, puis il donne cette proposition :

« Si l'on considère une figure plane qui se meut sur un plan en restant semblable à elle-même, et que, pour un moment quelconque du mouvement, on trace les vitesses (ou les accélérations d'un même ordre quelconque) des divers points qui la composent, les extrémités de ces vitesses (ou de ces accélérations) formeront une figure semblable à la première. »

M. Stephanos ajoute quelques remarques sur le même sujet.

M. Tchebychef fait une Communication *Sur le choix du rayon dans les intégrales définies prises le long d'un cercle par lesquelles on exprime les probabilités d'après leurs fonctions génératrices.* M. Tchebychef montre comment on doit choisir la valeur du rayon dans les intégrales qui donnent la valeur des probabilités d'après leurs fonctions génératrices, pour faciliter la détermination de leurs valeurs limites dans le cas où le nombre des épreuves est infiniment grand.

M. Émile Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique, communique plusieurs *Théorèmes de Géométrie.* Ces théorèmes se rapportent, les uns à certains points remarquables du plan d'un triangle, les autres à certains lieux définis par des propriétés des droites menées parallèlement aux côtés d'un triangle par un point de son plan.

M. Collignon expose ses recherches sur certains *Problèmes de Mécanique*. Dans cette Communication, M. Collignon traite d'abord le mouvement d'un point pesant sur une corde de la sphère terrestre. Il suppose pour cela que la densité du globe soit partout la même, et que, par conséquent, la pesanteur varie à l'intérieur proportionnellement à la distance au centre. Il suppose, en outre, que le glissement du point développe un frottement proportionnel à la pression normale exercée par ce point sur la droite directrice et que le coefficient f de ce frottement soit connu.

Le point qui se meut, sous ces conditions, sur une corde terrestre AB, en partant de l'extrémité A de cette corde, doit s'arrêter à une certaine distance de l'autre bout B de cette corde. Il est bien remarquable que la durée de ce trajet serait égale à $\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$, R étant le rayon de la Terre et g l'accélération, due à la pesanteur, à la surface du globe. Cette durée est donc indépendante de la direction de la corde AB et ne dépend pas davantage du coefficient f. S'il n'y avait point de frottement, le mobile irait jusqu'à B et atteindrait ce point après le même laps de temps. Si l'on voulait appliquer ce mode de locomotion souterrain, dont la pesanteur ferait à peu près tous les frais, on pourrait aller d'un point quelconque du globe à un autre en 42 minutes 11 secondes. Cependant, en dehors de différentes causes qui rendent ce système impraticable, M. Collignon remarque que les pressions énormes que l'air atmosphérique devrait exercer aux profondeurs qu'on serait obligé d'atteindre pour des parcours d'une certaine étendue seraient un obstacle absolu.

M. Collignon passe ensuite à la considération du mouvement d'un point M assujetti à glisser sans frottement sur une courbe fixe et attiré vers un centre O par une force proportionnelle à la distance OM. Il examine en particulier cette question : « Quelles sont les courbes pour lesquelles ce mouvement est *pendulaire*, c'est-à-dire identique, quant à la relation qui existe entre les arcs parcourus et le temps, au mouvement d'un point sur une droite fixe quand il est attiré par un point fixe de la droite proportionnellement à la distance à ce point? » Les courbes ayant cette propriété, et que M. Collignon appelle *pendulaires*, sont telles que le rayon vecteur r et l'arc s sont liés par une relation de la forme

$$r^2 = as^2 + bs + c,$$

a, b, c étant des constantes. Si, par une ligne AB pendulaire par rapport à un point O, l'on fait passer un cône ayant son sommet en O, on aura encore les courbes pendulaires par rapport au même point en déroulant ou en enroulant, comme on voudra, cette surface conique. La recherche des courbes pendulaires dans l'espace se ramène donc à la même recherche dans le plan. M. Collignon donne en finissant l'équation générale en termes finis des courbes pendulaires planes.

La *section* procède ensuite à l'élection de son Président et de ses délégués pour l'année prochaine. M. Collignon est élu président à l'unanimité. M. Mannheim, délégué sortant, est élu de nouveau.

Séance de l'après-midi.

M. Casalonga fait une Communication *Sur la transformation de la chaleur en travail mécanique et réciproquement.*

M. le Dr Guébhard expose un *Procédé expérimental pour la résolution du problème des isothermes dans le plan.* M. Guébhard a été conduit, par ses expériences, à ce résultat que lorsqu'on place à une petite distance d'une feuille horizontale de métal, exactement limitée aux parois perpendiculaires d'une auge électrique, un système cylindrique quelconque d'électrodes verticales, les anneaux colorés (de Nobili) qui prennent naissance figurent avec une très grande approximation le système théorique des lignes équipotentielles que donnerait l'application directe de ces mêmes électrodes sur un plan conducteur du même contour que la feuille. Cela permet de réaliser divers systèmes de lignes équipotentielles ou isothermes de ce plan.

MM. Collignon, Hennessy et Stephanos présentent des observations sur le sujet de cette Communication.

M. Baehr parle *Sur une question d'optique.* Le problème traité par M. Baehr est le suivant : « Étant donné un cylindre circulaire sur la surface duquel se réfléchissent des rayons lumineux issus d'un point, trouver sur le cylindre des courbes telles que les rayons réfléchis suivant les points de ces courbes forment des surfaces développables.

M. Hennessy, membre de la Société royale de Londres, professeur à Dublin, fait une Communication *Sur une question de Géodésie*. M. Hennessy parle de la méthode à suivre pour déterminer la valeur la plus probable de la longueur de l'axe polaire de la Terre en partant des mesures faites de divers méridiens terrestres.

M. Tchebychef fait quelques remarques à propos de cette Communication.

M. le Président présente ensuite à la section les travaux manuscrits suivants : ·

Essai sur une génération géométrique des raies de Fraunhofer, par M. Escary, professeur au Prytanée militaire;

Note sur un des principes de la Géométrie, par M. Laquière, ancien élève de l'École Polytechnique;

Sur les sphères assujetties à rester tangentes à deux surfaces données, par M. Pellet;

Sur les équations résolvantes, par le même.

Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, par M. Turquan, docteur ès Sciences.

Séance du 30 août.

M. Tchebychef fait une Communication *Sur les fonctions dont la dérivée d'un certain ordre s'éloigne le moins possible de zéro*. — M. Tchebychef montre le rôle que jouent ces fonctions dans la question d'interpolation et dans le problème de raccordement, fait voir comment on peut les déterminer dans le cas le plus simple, et indique enfin un théorème d'Analyse qui en résulte.

M. Bouquet de la Grye, ingénieur hydrographe de la marine, parle *Sur l'intensité de la pesanteur*.

M. Cornu, membre de l'Institut, ajoute quelques observations sur le sujet de cette Communication.

M. Cyparissos Stephanos fait une Communication *Sur les invariants des formes du cinquième et du sixième ordre*. M. Stephanos indique les principaux résultats auxquels on arrive dans la théorie des invariants d'une forme binaire du sixième ordre, lorsque l'on considère cette forme comme la jacobienne d'un faisceau de formes binaires du quatrième ordre. Il fait ensuite l'application de ces résultats à la théorie des invariants de la forme du cinquième ordre. Une forme binaire f du sixième ordre admet, comme on sait, cinq invariants, A, B, C, D, R, qui sont respectivement des degrés 2, 4, 6, 10, 15, par rapport aux coefficients de cette forme. D'un autre côté, un faisceau de formes biquadratiques ayant f pour jacobienne admet comme invariants, à côté de A, B, C, deux autres invariants, plus simples que D et R, dont l'un, D_θ, est du second degré, et l'autre, E, du neuvième degré, par rapport aux coefficients des *covariants élémentaires* f et $\theta = \theta_x^2$ du faisceau. Par suite de cela, les invariants D et R peuvent être exprimés en fonction entière de A, D_θ, B, C et E. Ainsi, l'invariant D est égal à une fonction de A, D_θ, B et C. Cependant R se décompose en deux facteurs, dont l'un coïncide avec E, tandis que l'autre peut être exprimé en fonction de A, D_θ, B, C. En dehors de cet invariant R, il y a aussi d'autres combinaisons entières des invariants A, B, C, D qui se décomposent en deux facteurs, fonctions des invariants A, D_θ, R, C. Tel est le discriminant de la forme f. Il en est de même pour l'invariant de f dont l'évanouissement exprime la condition pour que, parmi les cinq faisceaux de formes biquadratiques ayant f pour jacobienne, il y en ait deux qui coïncident. Dans le cas où la forme f coïncide avec la hessienne d'une forme φ du cinquième ordre, et que, de plus, le faisceau considéré, ayant f pour jacobienne, est formé par les premières polaires de φ, la seule particularité qui s'introduit dans le système des cinq invariants A, D_θ, B, C, E consiste en ce que D_θ devient égal à un multiple numérique de A. Les quatre invariants de la forme φ du cinquième ordre coïncident alors avec les quatre invariants A, B, C, E du faisceau dont il s'agit.

M. le colonel Ferrero fait une Communication *Sur la nécessité de coordonner les travaux cartographiques et géométriques de toutes les administrations de l'État et sur l'institution, dans ce but, d'un Conseil central.*

C. S.