

# BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

T.-J. STIELTJES

## Sur la théorie des résidus biquadratiques

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2<sup>e</sup> série,*  
tome 7, n° 1 (1883), p. 139-141

<[http://www.numdam.org/item?id=BSMA\\_1883\\_2\\_7\\_1\\_139\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_139_1)>

© Gauthier-Villars, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

J. STIELTJES

---

## SUR LA THÉORIE DES RÉSIDUS BIQUADRATIQUES;

PAR M. T.-J. STIELTJES.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. Hermite.)

Vous savez que, dans son second Mémoire, Gauss a déterminé le caractère biquadratique du nombre  $1 + i$  par rapport à un nombre premier  $M$ , ou, d'après Jacobi, la valeur du symbole  $\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right)$ . Cette détermination se fonde sur le théorème de l'art. 71, théorème analogue à celui qui sert de fondement à la troisième et à la cinquième des démonstrations de Gauss, de la loi de réciprocité pour les résidus quadratiques.

Or j'ai remarqué qu'on peut obtenir la valeur de  $\left(\left(\frac{1+i}{M}\right)\right)$  à l'aide de raisonnements complètement analogues à ceux que Gauss développe dans son *premier* Mémoire, pour obtenir le caractère du nombre 2 dans la théorie réelle.

Il suffira de considérer le cas

$$\begin{aligned} M &= a + bi, \quad a \equiv 1 \pmod{4}, \\ b &\equiv 0, \quad \mu = aa + bb = 8n + 1. \end{aligned}$$

D'après la valeur du symbole  $\left(\left(\frac{k}{M}\right)\right)$ , on peut diviser les  $\mu - 1$  nombres incongrus  $k$ , non divisibles par  $M$ , en quatre classes, savoir :

$$\begin{aligned} \text{(A)} \quad & \alpha, \alpha', \alpha'' \dots \left(\left(\frac{\alpha}{M}\right)\right) = 1, \\ \text{(B)} \quad & \beta, \beta', \beta'' \dots \left(\left(\frac{\beta}{M}\right)\right) = i, \\ \text{(C)} \quad & \gamma, \gamma', \gamma'' \dots \left(\left(\frac{\gamma}{M}\right)\right) = -1, \\ \text{(D)} \quad & \delta, \delta', \delta'' \dots \left(\left(\frac{\delta}{M}\right)\right) = -i. \end{aligned}$$

Alors, il est évident qu'on a identiquement

$$(x - \delta)(x - \delta')(x - \delta'') \dots \equiv x^{\frac{\mu-1}{k}} + i \pmod{M},$$

d'où l'on tire, en posant  $x = -1$ ,

$$(1 + \delta)(1 + \delta')(1 + \delta'') \dots \equiv 1 + i \pmod{M};$$

ce qui fait voir qu'il suffira de savoir combien des nombres  $1 + \delta, 1 + \delta', 1 + \delta'', \dots$  appartiennent aux classes (A), (B), (C), (D).

Si l'on désigne maintenant par

$$\text{(S)} \quad \left\{ \begin{array}{l} (0, 0) \ (0, 1) \ (0, 2) \ (0, 3) \\ (1, 0) \ (1, 1) \ (1, 2) \ (1, 3) \\ (2, 0) \ (2, 1) \ (2, 2) \ (2, 3) \\ (3, 0) \ (3, 1) \ (3, 2) \ (3, 3) \end{array} \right.$$

combien des nombres

$$\begin{aligned} & 1 + \alpha, \ 1 + \alpha', \ 1 + \alpha'' \dots, \\ & 1 + \beta, \ 1 + \beta', \ 1 + \beta'' \dots, \\ & 1 + \gamma, \ 1 + \gamma', \ 1 + \gamma'' \dots, \\ & 1 + \delta, \ 1 + \delta', \ 1 + \delta'' \dots \end{aligned}$$

appartiennent à (A), (B), (C), (D), on pourra déterminer les valeurs de tous ces nombres ( $i, k$ ) à l'aide des considérations employées par Gauss dans son *premier* Mémoire.

Dans le cas actuel, on trouve que le tableau (S) a la forme suivante :

$$\begin{array}{lll} k j & k l & 8h = 4n - 3a - 5, \\ j l & m m & 8j = 4n + a - 2b - 1, \\ k m & k m & 8k = 4n + a - 1, \\ l m & m j & 8l = 4n + a + 2b - 1, \\ & & 8m = 4n - a + 1. \end{array} \quad \left( n = \frac{aa + bb - 1}{\delta} \right).$$

On a maintenant

$$\left( \left( \frac{1+i}{M} \right) \right) = i^{3m+3j} = i^{-m-j} \quad (-m-j = -n + \frac{1}{4}b).$$

Or (mod. 4),

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - 1}{\delta} &\equiv \frac{-a + 1}{4}, \\ \frac{b^2}{\delta} &\equiv \pm \frac{1}{2}b; \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} n &\equiv \frac{1}{4}(-a + 1 + 2b), \\ -m - j &\equiv \frac{1}{4}(a - 1 - b). \end{aligned}$$

Enfin

$$\left( \left( \frac{1+i}{M} \right) \right) = i^{\frac{1}{4}(a-1-b)}.$$

Les autres cas peuvent se traiter d'une manière analogue.

La même méthode réussit pour déterminer le caractère cubique de  $1 - \rho$ , et encore pour trouver les théorèmes sur le nombre 2 dans la théorie des résidus quadratiques. Dans ce dernier cas, après avoir déterminé les nombres  $(i, k)$ , il n'est pas nécessaire de recourir à ces congruences identiques, comme plus haut celle-ci :

$$(x - \delta)(x - \delta')(x - \delta'' \dots \equiv x^{\frac{\mu-1}{4}} + i \quad (\text{mod. } M).$$

Mais on arrive au but par une considération arithmétique, qui ne diffère pas de celle que Gauss a employée dans son premier Mémoire pour le nombre 2, dans la théorie des résidus biquadratiques. On a, de cette manière, une démonstration assez simple et purement arithmétique de ces théorèmes :

$$\begin{aligned} \left( \frac{2}{p} \right) &= +1, & p &= 8n \pm 1, \\ \left( \frac{2}{p} \right) &= -1, & p &= 8n \pm 3. \end{aligned}$$