Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

J. Molk

Sur les unités complexes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 133-136

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_133_1>

MÉLANGES.

SUR LES UNITÉS COMPLEXES;

PAR M. J. MOLK.

M. Kronecker vient de communiquer à l'Académie des Sciences un Mémoire *Sur les unités complexes* (*Comptes rendus*, 8, 15, 22 janvier 1883). Les recherches de Lejeune-Dirichlet y sont développées et présentées sous un jour tout nouveau. Mais M. Kronecker ne se contente pas de démontrer le théorème énoncé par Lejeune-Dirichlet, en 1846; il approfondit les recherches auxiliaires faites par le grand géomètre en 1842, et parvient ainsi à la notion importante de réduction approximative des équations algébriques.

On peut, cependant, se proposer d'obtenir directement les résultats concernant les unités complexes seulement. Ils se déduisent d'un théorème fondamental énoncé à la fin du n° 9 du Mémoire cité; il suffit donc de démontrer ce théorème. En se plaçant à ce point de vue les recherches se simplifient beaucoup. On abandonne, il est vrai, le point de vue général auquel M. Kronecker s'est placé et l'on perd ainsi l'uniformité des développements qui fait ressortir l'esprit même des méthodes employées; mais le mécanisme des formules est par contre moins compliqué.

Je me propose d'exposer le plus simplement possible la démonstration abrégée de M. Kronecker.

Soient

$$z_\alpha = x_\alpha + y_\alpha i \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots n)$$

les n racines d'une équation irréductible, à coefficients réels et entiers;

$$z', \quad z'', \quad \ldots, \quad z^{(n)}$$

un système fondamental d'une *espèce* de nombres algébriques entiers du genre z, par exemple z^{n-1}, z^{n-2}, $\ldots$, z, 1; et

$$u_\alpha + v_\alpha i = (w, z_\alpha) = w' z'_\alpha + w'' z''_\alpha + \ldots + w^{(n)} z_\alpha^{(n)}$$

une fonction linéaire et homogène à coefficients entiers de z'_α, z''_α, $\ldots$, $z_\alpha^{(n)}$. Supposons que l'équation ait $2\varkappa$ racines imaginaires et posons $h = n - \varkappa$.

Il peut se présenter trois cas. L'équation peut n'avoir aucune racine réelle, ou une seule, ou au moins deux.

Dans ce dernier cas, z_{n-1} et z_n étant deux racines réelles, on peut exprimer les nombres $w^{(k)}$ en fonctions linéaires et homogènes de deux d'entre eux et des u_α, v_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-2)$, les coefficients étant des fonctions rationnelles réelles des x_α et y_α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-2)$.

Nous pouvons donc écrire

$$w^{(k)} = \xi_1^{(k)} w' + \xi_2^{(k)} w'' + \rho^{(k)} \qquad (k = 3, 4, \ldots, n)$$

en désignant par $\rho^{(k)}$ des fonctions linéaires et homogènes des $(n-2)$ quantités u_α et v_α, dont les coefficients sont fonctions rationnelles réelles des x_α et y_α. Mais, quelles que soient les valeurs que nous donnions à w' et w'', nous pourrons toujours prendre pour $w^{(k)}$ le nombre entier le plus rapproché de $\xi_1^{(k)} w' + \xi_2^{(k)} w''$; nous pouvons donc supposer que chaque $\rho^{(k)}$ est en valeur absolue au plus égal à $\frac{1}{2}$. D'ailleurs, en remplaçant $w^{(k)}$ par l'expression précédente, nous obtenons

$$(w, z_n) = w' z'_n + w'' z''_n + \sum_{k=3}^{n} (\xi_1^{(k)} w' + \xi_2^{(k)} w'' + \rho^{(k)}) z_n^{(k)}.$$

Si nous supposons que w' et w'' prennent toutes les valeurs 0, 1, 2, $\ldots$, t, nous obtenons $(t+1)^2$ expressions (w, z_n), toutes plus petites, en valeur absolue, que $\mathrm{A}t + \mathrm{B}$, où

$$\mathrm{A} = \left| z'_n + \sum_{k=3}^{n} \xi_1^{(k)} z_n^{(k)} \right| + \left| z''_n + \sum_{k=3}^{n} \xi_2^{(k)} z_n^{(k)} \right|, \quad \text{et} \quad \mathrm{B} = \frac{1}{2} \sum_{k=3}^{n} |z_n^{(k)}|.$$

Nous partageons l'intervalle compris entre $-(\mathrm{A}t+\mathrm{B})$ et $\mathrm{A}t+\mathrm{B}$ en t^2 parties égales. Il y aura alors nécessairement une de ces parties contenant les valeurs de deux au moins des expressions (w, z_n); désignons ces dernières par (w_0, z_n) et (w_1, z_n) et formons leur différence,

$$(b, z_n) = b' z'_n + b'' z''_n + \ldots + b^{(n)} z_n^{(n)};$$

$|(b, z_n)|$ est plus petit que $\dfrac{2(\mathrm{A}t+\mathrm{B})}{t^2}$;

$$b^{(k)} = w_0^{(k)} - w_1^{(k)} = \xi_1^{(k)} b' + \xi_2^{(k)} b'' + \sigma^{(k)};$$

$|b'|$ et $|b''|$ ne dépassent pas $2t$ et $\sigma^{(k)}$ étant la différence de deux $\rho^{(k)}$ ne dépasse pas l'unité.

Mais $|(b, z_{n-1})|$ est plus petit que $2(\mathrm{A}'t+\mathrm{B}')$, où A' et B' sont formés à l'aide de z_{n-1} de la même manière que A et B à l'aide de z_n. Nous obtenons donc l'inégalité

$$|(b, z_{n-1})(b, z_n)| < \frac{4(\mathrm{A}t+\mathrm{B})(\mathrm{A}'t+\mathrm{B}')}{t^2} < 4\mathrm{A}\mathrm{A}'+1$$

pour des t suffisamment grands.

D'autre part, les quantités $\sigma', \sigma'', \ldots, \sigma^{(n-2)}$ étant comprises entre (-1) et $(+1)$, nous savons que les valeurs de $(n-2)$ fonctions linéaires et homogènes des $(n-2)$ parties réelles et imaginaires de $(b, z_1), (b, z_2), \ldots, (b, z_{n-2})$, sont comprises entre des limites finies, indépendantes de t; il en résulte que les valeurs de $(b, z_1), (b, z_2), \ldots, (b, z_{n-2})$ sont elles-mêmes comprises entre des limites finies. Comme nous avons déjà démontré que le produit $|(b, z_{n-1})(b, z_n)|$ est plus petit que $4\mathrm{A}\mathrm{A}'+1$, nous voyons donc que la norme de (b, z) est également plus petite qu'un nombre indépendant de t.

Remarquons que, parmi les $(n-2)$ expressions (b, z_1), $(b, z_2), \ldots, (b, z_{n-2})$, $(h-2)$ seulement sont différentes en valeur absolue.

Après avoir trouvé un système $b'_1, b''_1, \ldots, b_1^{(n)}$, pour lequel $|(b_1, z_n)| < \dfrac{2(\mathrm{A}t_1+\mathrm{B})}{t_1^2}$, nous pouvons en former un second b'_2, $b''_2, \ldots, b_2^{(n)}$, pour lequel $|(b_2, z_n)|$ est plus petit que $\dfrac{2(\mathrm{A}t_2+\mathrm{B})}{t_2^2}$; en choisissant t_2 assez grand, $|(b_2, z_n)|$ sera plus petit que $|(b_1, z_n)|$, et par suite les deux systèmes $b'_1, b''_1, \ldots, b_1^{(n)}$ et $b'_2, b''_2, \ldots, b_2^{(n)}$ seront différents.

Il existe donc une infinité de nombres complexes (b, z) dont la norme et $(h-2)$ conjugués en valeur absolue sont compris entre des limites finies.

Dans les deux premiers cas, il suffit de modifier légèrement la démonstration pour parvenir au même résultat. Si l'équation n'a qu'*une* racine réelle z_n, et si z_{n-1} et z_{n-2} sont imaginaires conjuguées, nous prendrons, dans les formules précédentes, α égal à $1, 2, \ldots, (n-3)$; nous exprimerons ensuite les $w^{(k)}$ en fonction de *trois* d'entre eux, et nous obtiendrons ainsi une expression (b, z_n) ne dépassant pas, en valeur absolue, $\frac{2(\mathrm{A}t+\mathrm{B})}{t^3}$, tandis que le produit $(b, z_{n-1})(b, z_{n-2})$ est proportionnel à t^2. Si enfin toutes les racines de l'équation sont imaginaires et si z_n, z_{n-1} sont conjuguées, ainsi que z_{n-2}, z_{n-3}, nous prendrons, dans les formules précédentes, α égal à $1, 2, \ldots, n-4$, nous exprimerons les $w^{(k)}$ en fonction de *quatre* d'entre eux, et nous obtiendrons ainsi $|(b, z_n)(b, z_{n-1})| < \frac{4(\mathrm{A}t+\mathrm{B})^2}{t^4}$ et $(b, z_{n-2})(b, z_{n-3})$ proportionnel à t^2. Dans ces deux cas, nous voyons donc que $|(b, z_n)(b, z_{n-2})|$ et les $(h-2)$ premières expressions différentes $|(b, z_\alpha)|$ sont comprises entre des limites finies.

Le théorème précédent est ainsi complètement démontré. On en déduit immédiatement qu'il existe une infinité de nombres complexes ayant même norme et congrus entre eux suivant cette norme; en formant le quotient de deux de ces nombres, nous obtenons des unités complexes dont $(h-2)$ conjuguées en valeur absolue sont comprises entre des limites déterminées par celles des (b, z_n).

Il existe donc dans chaque espèce de nombres algébriques un nombre infini d'unités ayant chacune en valeur absolue toutes ses conjuguées, à l'exception de deux, comprises entre des limites finies.