BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 129-133

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_129_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

TAIT (P.-G.). — TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DES QUATERNIONS, traduit sur la seconde édition anglaise, avec Additions de l'auteur et Notes du traducteur, par G. PLARR. — PREMIÈRE PARTIE : *Théorie. — Applications géométriques.* 1 vol. in-8°. Paris, 1882.

La seconde édition du *Traité* de M. Tait a été analysée dans le *Bulletin* (1re Partie, t. VI, p. 151); nous n'avons qu'à signaler la traduction française que M. Gauthier-Villars vient d'éditer, en indiquant la nature des additions faites par l'auteur et le traducteur.

M. Plarr a traduit le texte de M. Tait littéralement : c'est une marque de respect envers l'auteur; il y a toutefois introduit, entre accolades, diverses Notes qui éclaircissent et complètent un certain nombre de passages. Quant aux articles nouveaux, dus à M. Tait, en voici l'énumération :

Le n° 269 *bis*, relatif au mouvement d'une droite dont trois points décrivent trois plans fixes ; cette addition fait partie du Volume qui vient de paraître ;

Le n° 378 *bis*, traitant, à l'aide de la méthode des Quaternions, la question de Cinématique qui a conduit Minding au théorème portant son nom (*Journal de Crelle,* t. 14 et 15);

Le n° 446, reproduisant un Mémoire de l'auteur intitulé : *Notes sur les expressions diverses par lesquelles on peut représenter la force exercée par un élément de courant linéaire sur l'élément d'un autre courant de même genre.*

Quelques perfectionnements dans la méthode d'intégration des équations qui dépendent de l'opérateur quaternionique ∇, au Chapitre XI.

Enfin les énoncés d'un certain nombre de propositions ajoutées aux questions à résoudre qui se trouvent annexées au Chapitre XI.

POINCARÉ. — THÉORIE DES GROUPES FUCHSIENS (1).

M. Mittag-Leffler, l'éminent professeur à l'Université de Stockholm, dont les travaux sur la théorie des fonctions ont eu, dans ces dernières années, un si grand retentissement, vient de fonder sous ce titre : *Acta mathematica*, un journal dont le premier fascicule (2) contient, comme premier article, un Mémoire de M. Poincaré sur la théorie des groupes fuchsiens.

Nous avons eu souvent à signaler, dans le *Bulletin*, les importants résultats obtenus par M. Poincaré; il eût été bien regrettable que l'auteur se fût borné aux communications succinctes éparses dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* la brève analyse de l'ensemble de ses découvertes qu'il a publiée dans le XIX^e Volume des *Mathematische Annalen* ne pouvait qu'augmenter le désir qu'on avait de lui voir enfin publier une suite de Mémoires développés où les détails nécessaires et les démonstrations complètes eussent leur place. Le premier de ces Mémoires, consacré à la théorie des groupes fuchsiens, est aujourd'hui publié, et il y a tout lieu de croire qu'il sera suivi de plusieurs autres, présentant le même développement. Une analyse détaillée de ce Mémoire ferait nécessairement double emploi avec les pu-

(1) *Acta mathematica*, t. I, p. 1-66.

(2) Les *Acta mathematica* sont édités à Stockholm, chez MM. Beija; le dépositaire à Paris est M. Hermann, 8, rue de la Sorbonne; le format est in-4°; le premier fascicule, qui a paru à la fin de l'année 1882, comprend 96 pages, et contient, outre le travail de M. Poincaré, des Mémoires de MM. Malmsten, Gyldén et Reye qui seront analysés ultérieurement. La rédaction est composée de MM. Bäcklund, Daug, Gyldén, Holmgren, Malmsten, Mittag-Leffler, Bjerknes, Broch, Lie, Sylow, Lorenz, Petersen, Zeuthen, Lindelöf. La publication est dédiée à S. M. Oscar II, qui l'a largement subventionnée; plusieurs associations et divers savants, parmi lesquels nous devons citer M. Hermite, ont, en outre, contribué à la fondation. Nous relevons le passage suivant de la Préface :

« L'époque à laquelle nous commençons notre publication est certainement une des plus fécondes dans l'histoire des Mathématiques, par le grand nombre et l'importance des découvertes qui touchent aux principes les plus essentiels de l'Analyse. On sait combien, en divers pays, ce mouvement a été puissamment secondé par des journaux mathématiques qui contiennent les œuvres des plus grands géomètres de notre temps. Nous nous sommes proposé le même but de servir la Science, en réunissant et associant les recherches nouvelles qui concourent à son progrès par la nouveauté des résultats ou l'originalité des méthodes. »

blications antérieures de M. Poincaré; nous devons nous borner à renvoyer le lecteur au travail original en indiquant brièvement les matières qui y sont contenues.

L'auteur considère des substitutions de la forme $\left(z, \dfrac{az+b}{cz+d}\right)$, où a, b, c, d sont des nombres réels assujettis à la condition

$$ad - bc = 1,$$

appliquées à la variable imaginaire z; une telle substitution change une figure plane quelconque en une autre figure plane qui est dite *congruente* à la première.

Soit maintenant une infinité de substitutions de cette nature :

$$\left(z, \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}\right), \quad i = 0, 1, \ldots, \infty$$
$$a_0 = d_0 = 1, \quad b_0 = c_0 = 0;$$

ces substitutions formeront un *groupe* si l'inverse de chaque substitution et le produit de deux substitutions quelconques du système donne encore une substitution du système; on suppose que toutes ces substitutions puissent être obtenues par la combinaison d'un nombre fini de substitutions du groupe, dites *fondamentales*, et que, en outre, le groupe soit *discontinu*, c'est-à-dire qu'il ne contienne aucune substitution qui change z en une quantité $\dfrac{az+b}{cz+d}$ qui diffère infiniment peu de z; un groupe qui jouit de ces propriétés est dit groupe *fuchsien*. M. Poincaré montre que définir un groupe fuchsien revient à définir la décomposition du plan (ou d'une portion du plan) en une sorte de *damier* composé d'une infinité de régions $R_0, R_1, \ldots, R_i, \ldots$ qui répondent aux diverses substitutions du groupe, en sorte que, quand z parcourt la région R_0, le point correspondant $\dfrac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}$ parcourt la région R_0; ainsi les diverses permutations du groupe permuteront en quelque sorte les régions R, les bases du damier, sans en altérer l'ensemble. Ces régions peuvent être réduites à des polygones curvilignes situés en entier au-dessus de l'axe X des quantités réelles et ayant des côtés de deux sortes : 1° des arcs de cercle ayant leur centre sur l'axe X; 2° des segments de cet axe. Les substitutions *fondamentales* changent le polygone R_0 en un polygone *limitrophe*, c'est-à-dire ayant un côté commun avec R_0; le groupe fuchsien est évidemment donné quand ces substitutions fondamentales sont elles-mêmes données. Les sommets du polygone R_0, ou les extrémités des arcs de cercle qui le composent, sont de trois sortes : 1° les sommets situés au-dessus de l'axe X; 2° les sommets situés sur l'axe X et séparant deux côtés de la première espèce; 3° les sommets situés sur l'axe X et séparant deux côtés de différentes sortes. Chaque substitution fondamentale changeant R_0 en un polygone limitrophe change un côté (ab) de la première sorte de ce polygone en un côté (cd), de première sorte aussi, du même polygone; les deux côtés congruents (ab), (cd) sont dits conjugués; pour qu'il existe une substitution du type considéré qui change ainsi (ab) en (cd), il faut et il suffit qu'on ait

$$\frac{a-a'}{a-b'} : \frac{b-a'}{b-b'} = \frac{c-c'}{c-d'} : \frac{d-c'}{d-d'}, \tag{1}$$

a', b', c', d' étant les quantités conjuguées de a, b, c, d; d'ailleurs cette substitution est déterminée; ainsi les sommets de côtés de première sorte sont en nombre pair et se décomposent en couples de côtés conjugués. Deux points intérieurs à R_0 ne peuvent être correspondants, tandis que, comme on vient de le dire, un point situé sur un côté de première sorte admet toujours un point correspondant sur le côté conjugué; relativement aux sommets, il peut arriver que deux ou plusieurs sommets se correspondent; l'ensemble des sommets qui se correspondent constitue un cycle. L'auteur donne une règle pour former les cycles et les décompose en trois catégories; en particulier les cycles de la première catégorie sont composés de sommets de la première sorte; la considération de ces diverses catégories de cycles permet de classer les polygones R_0. Ces définitions posées, on peut dire que le nœud du Mémoire de M. Poincaré se trouve dans la proposition capitale que voici : « Un groupe fuchsien, s'il existe, peut être regardé comme engendré par la considération d'un polygone R_0, formé d'arcs de cercle et de segments de droite comme il a été expliqué plus haut; chaque substitution fondamentale du groupe étant fournie par la substitution qui change un côté de ce polygone en son conjugué; ces deux côtés conjugués doivent être congruents; en d'autres termes, la relation (1) doit être vérifiée; en outre, la somme des angles d'un

même cycle de la première catégorie doit être une partie aliquote de 2π; réciproquement, si le polygone R_0 satisfait à ces deux conditions, il donne *effectivement* naissance à un groupe fuchsien. »
L'auteur développe divers exemples. Il indique, en outre, une classification des groupes fuchsiens en *genres*.

J. T.