AXEL HARNACK

Théorie de la série de Fourier

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 282-313

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_282_1>

MÉLANGES.

THÉORIE DE LA SÉRIE DE FOURIER.

PAR M. LE D[r] AXEL HARNACK, A DRESDE.

(SUITE ET FIN.)

IV.

De la convergence d'une série en une place déterminée.

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que la

(¹) Dont une première partie vient déjà de paraître chez Dunod.

somme

$$S_n(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} a_k \sin kx + b_k \cos kx$$

est égale à

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha.$$

Cette intégrale se partage en deux parties

$$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha)\cos n(a - x)\,d\alpha.$$

La limite du second membre pour $n = \infty$ est à déterminer.

La seconde intégrale converge *uniformément*, c'est-à-dire indépendamment de x, vers o, si l'on choisit n aussi grand qu'on le veut, parce que la fonction $f(x)$, ainsi que son carré, est intégrable.

Dans la première intégrale, on prend un petit intervalle quelconque à partir de $\alpha = x - \delta$ jusqu'à $\alpha = x + \delta$; à l'extérieur de cet intervalle, la fonction $f(\alpha)\,\dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}$ est, ainsi que son carré, intégrable, et de là l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{x+\delta} + \frac{1}{\pi}\int_{x+\delta}^{+\pi} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha$$

converge *uniformément* vers o pour une valeur constante de δ.

Nous n'avons plus qu'à considérer l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(\alpha)\,\frac{\sin n(\alpha - x)\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{2\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}\,d\alpha$$

et nous aurons prouvé le théorème suivant :

Théorème XXII. — *La valeur de la série de Fourier en une place quelconque ne dépend que de la nature de la fonction $f(x)$ aux environs aussi rapprochés qu'on le veut de cette place.*

Après la substitution $\alpha - x = \beta$, l'intégrale prendra la forme

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{+\delta} f(x+\beta)\,\frac{\sin n\beta \cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta} [f(x+\beta)+f(x-\beta)]\,\frac{\sin n\beta\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}\,d\beta.$$

La limite de cette intégrale décide dans tous les cas sur la valeur $\varphi(x)$ de la somme de la série, et la série de Fourier convergera uniformément vers cette valeur, si l'intégrale peut être, indépendamment de x, amenée aussi près qu'on le veut de sa limite par un choix convenable de n, pendant que δ est invariable.

Mais $\cos\frac{1}{2}\beta\,\frac{\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}$ est une fonction continue de β, et égale à l'unité pour $\beta = 0$; de plus, cette fonction est positive dans l'intervalle de $\beta = 0$ à $\beta = \delta$, et possède des valeurs décroissantes. On pourra alors, à l'aide d'un théorème connu, donner une autre forme à l'intégrale. J'emploie ici ce théorème dans sa forme la plus simple donnée par Bonnet ([1]).

Dans le cas où $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont intégrables et $\varphi(x)$ une fonction continue, constamment positive ou négative, dont les valeurs absolues décroissent, on a l'égalité

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi(a)\int_a^{a+\theta(b-a)} \psi(x)\,dx \quad (0 \leqq \theta \leqq 1).$$

Par le renversement des limites on obtient, si les valeurs croissent, pendant que x parcourt l'intervalle de a à b, l'égalité

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = -\int_b^a \varphi(x)\psi(x)\,dx = \varphi(b)\int_{a+\theta(b-a)}^{b} \psi(x)\,dx.$$

On peut alors, au lieu de notre intégrale, substituer directement

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta'} [f(x+\beta)+f(x-\beta)]\,\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta,$$

δ' étant une valeur entre 0 et δ. La limite supérieure δ' est variable,

---

([1]) *Journal de Mathématiques*, t. XIV, p. 249. — Du Bois-Reymond, *Journal für Mathematik*, t. LXIX.

elle dépend de n, mais l'intégrale

$$\int_0^\delta [f(x+\beta)+f(x-\beta)]\left(\frac{\cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}-\frac{1}{\beta}\right)\sin n\beta\, d\beta$$

a toujours la valeur limite o.

Il faut alors, dans le cas où l'intégrale primitive donne une valeur limite déterminée, que l'autre intégrale possède la même valeur limite et réciproquement.

En posant, dans l'hypothèse que $f(x+\beta)+f(x-\beta)$ ait une valeur déterminée pour $\beta = 0$,

$$[f(x+\beta)-f(x-\beta)]-[f(x+0)+f(x-0)] = \lambda(\beta),$$

on aura

$$\lim S_n(x) = [f(x+0)+f(x-0)]\lim\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$
$$+\lim\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta,$$

$$\lim_{n=\infty}\int_0^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \lim_{n=\infty}\int_0^{n\delta}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta = \frac{\pi}{2}.$$

L'énoncé de ce résultat sera le suivant :

Théorème XXIII. — *La série ne converge en une place déterminée d'après la valeur* $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *que si*

$$\lim_{n=\infty}\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = 0.$$

Les recherches nombreuses et pleines de valeur qu'ont faites MM. du Bois-Reymond [1] et Dini [2], sur les conditions pour la convergence de cette intégrale, vont être discutées.

Nous ne prendrons que les théorèmes les plus importants, qui se trouvent directement dans l'équation ainsi formée, et qui sont indispensables pour ce qui suit.

1. Si la fonction continue $\lambda(\beta)$, qui disparaît par $\beta = 0$, ne

---

(1) *Abhandlungen d. K. Bay. Akad.*, 2 Kl. L. XII, Abth. II.
(2) *Serie di Fourier.* Pisa, 1880.

possède pas aux environs de la place o un nombre infini de maxima et de minima (condition de Dirichlet), on a, d'après le théorème de Bonnet,

$$\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \lambda(\delta)\int_{\theta\delta}^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \lambda(\delta)\int_{n\theta\delta}^{n\delta}\frac{\sin\beta}{\beta}\,d\beta.$$

Cette dernière intégrale reste toujours finie indépendamment de θ, si grand que soit n, pendant que $\lambda(\delta)$ est aussi petit qu'on le veut. Il se trouve alors démontré que, par un choix convenable de n, la valeur de $S_n(x)$ diffère aussi peu qu'on le veut de

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2},$$

c'est-à-dire que

$$b_0+\sum_{k=1}^{k=\infty}(a_k\sin kx + b_k\cos kx) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

On obtient en même temps que la série de Fourier converge partout uniformément, si la fonction $f(x)$ est partout continue, et ne possède pas un nombre infini de maxima et de minima.

Car, dans ce cas, on peut choisir une valeur de δ, telle que, *pour toutes les valeurs de x*, la valeur absolue de $\lambda(\delta)$ soit plus petite que tout petit nombre déterminé. Si la fonction $f(x)$ ne subit de brusques discontinuités qu'aux points discrets, on renferme ceux-ci dans des intervalles aussi petits qu'on le veut; à l'exception de ces places, la série convergera uniformément.

2. *La série converge en une place x où les valeurs absolues du quotient $\frac{\lambda(\beta)}{\beta}$ sont intégrables aux environs du point* o, *même si $\lambda(\beta)$ contient un nombre infini de maxima et de minima.*

Car, dans ce cas, $\int_0^\delta \frac{\lambda(\beta)}{\beta}\sin n\beta\,d\beta$ est aussi petit qu'on le veut, par un choix convenable de δ pour toutes les valeurs de n, et cela parce que la valeur de cette intégrale est plus petite que l'intégrale

$$\int^\delta \text{abs}\left[\frac{\lambda(\beta)}{\beta}\right]d\beta.$$

Cette condition contient celle qu'a donnée M. Lipschitz ([1]). La

([1]) *Journal fur Mathematik*, t. 63.

série de Fourier converge, si la valeur de $\lambda(\beta)$ reste toujours plus petite que le produit $C\beta\alpha$, où C est une constante et α un nombre quelconque positif aussi petit qu'on le désire.

Cette condition sera en particulier remplie si

$$\frac{\lambda(\beta)}{\beta} = \frac{f(x+\beta)-f(x+0)}{\beta} - \frac{f(x-\beta)-f(x-0)}{\beta}$$

reste finie pour $\beta = 0$, c'est-à-dire *si la fonction $f(x)$ au point x possède des valeurs finies du quotient différentiel pris en avant et en arrière.*

3. Ce théorème peut être généralisé. Si la fonction $\lambda(\beta)$ possède dans l'intervalle de 0 à δ une dérivée $\lambda'(\beta)$ intégrable, on a, d'après la règle de l'intégration partielle,

$$\int_0^\delta \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$
$$= \int_0^\delta \lambda'(\alpha)\,d\alpha \int_\alpha^\delta \frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta = \int_0^\delta \lambda'(\alpha)\,d\alpha \int_{n\alpha}^{n\delta} \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Si les valeurs absolues de $\lambda'(\alpha)$ sont intégrables, on a

$$\operatorname{abs}\int_0^\delta \lambda'(\alpha)\,d\alpha \int_{n\alpha}^{n\delta} \frac{\sin y}{y}\,dy < \int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\,dy \int_0^\delta \operatorname{abs}[\lambda'(\alpha)]\,d\alpha,$$

car la valeur de $\int_{n\alpha}^{n\delta} \frac{\sin y}{y}\,dy$ reste toujours plus petite que

$$\int_0^\pi \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Le second membre peut être fait aussi petit qu'on le veut par le choix de δ, et comme $\lim_{n=\infty} \int_\delta^h \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$ devient sûrement à 0, on aura

$$\lim_{n=\infty} \int_0^h \lambda(\beta)\frac{\sin n\beta}{\beta}\,d\beta$$

aussi petit qu'on le veut, c'est-à-dire nul. Nous nous trouvons alors avoir démontré que : *Si pour la fonction $f(x)$, au point x, $f(x+\beta)+f(x-\beta)$ est une fonction continue de β qui possède une dérivée absolument intégrable par rapport à β, la série de Fourier converge en ce point vers la valeur*

$$\tfrac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)].$$

V.

Des fonctions dont le carré n'est pas intégrable.

Dans les recherches du § III, la propriété nécessaire pour la convergence, c'est-à-dire la disparition de $\lim a_n$, $\lim b_n$ pour $n=\infty$, était la suite de l'intégrabilité de $[f(x)]^2$. Si nous laissons de côté cette hypothèse, et que nous considérions une fonction qui aux points discrets est infinie, de telle façon qu'elle-même reste intégrable, mais pas son carré, nous nous poserons nécessairement la question : pour quelles conditions dans ce cas la série de Fourier nous donnera-t-elle une représentation des valeurs moyennes?

Désignons l'intégrale de la fonction donnée $f(x)$, qui a $-\pi$ comme limite inférieure, par

$$\int_{-\pi}^{x} f(x)\,dx = \mathrm{F}(x),$$

de sorte que $\mathrm{F}'(x)$ concorde avec $f(x)$ à l'exception des points discrets (théorème VIII); on a alors, d'après le théorème de l'intégration partielle,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{F}(x)\sin nx\,dx = \left[-\frac{1}{n}\mathrm{F}(x)\cos nx\right]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx$$
$$= (-1)^{n+1}\frac{1}{n}\mathrm{F}(+\pi) + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

et

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{F}(x)\cos nx\,dx = \left[\frac{1}{n}\mathrm{F}(x)\sin nx\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx$$
$$= -\frac{1}{n}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Multiplions ces égalités par $\sqrt{n}$, on aura

$$\sqrt{n}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{F}(x)\sin nx\,dx = (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{F}(+\pi) + \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx,$$
$$\sqrt{n}\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{F}(x)\cos nx\,dx = -\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

D'après le théorème XIX le premier membre de ces égalités converge vers 0 pour $n=\infty$, et le théorème suivant se trouve être démontré :

Théorème XXIV. — *Pour chaque fonction intégrable, on a*

$$\lim \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad et \quad \lim \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx \, dx,$$

égal à o *pour* $n = \infty$.

Du reste, ce théorème n'a de valeur, comme il a été remarqué au théorème XIX, que dans l'hypothèse que la série des intégrales est complète. Si ce n'était pas le cas, le théorème subsistera toujours si l'on introduit au lieu de $\frac{1}{\sqrt{n}}$ le facteur $\frac{1}{n}$.

Les intégrales mêmes peuvent devenir infinies pour $n = \infty$, et Riemann en a donné un exemple.

Mais la disparition de ces intégrales est la suite nécessaire de l'intégrabilité de $f(x)$ dès que l'intégrale $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \, dx$ est absolument convergente, c'est-à-dire, dans le cas où elle est finie et déterminée, si l'on remplace $f(x)$ par ses valeurs absolues. Car la disparition des intégrales par rapport à un intervalle d'intégration où se trouvent les points d'infinis peut être prouvée de sorte que l'on fait la décomposition suivante :

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{c-\delta} + \int_{c-\delta}^{c+\delta} + \int_{c+\delta}^{c_1-\delta} + \int_{c_1-\delta}^{c_1+\delta} + \ldots$$

Chaque intégrale de la forme $\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x) \sin nx \, dx$ est en valeur absolue plus petite que $\int_{c-\delta}^{c+\delta} \operatorname{abs}[f(x)] \, dx$ et peut être faite aussi petite qu'on le veut en choisissant δ; les autres intégrales disparaissent pour $n = \infty$.

Théorème XXV. — *Si la fonction* $f(x)$ *est absolument intégrable, on a* $\lim a_n$ *et* $\lim b_n = 0$.

La condition de la convergence absolue est remplie d'elle-même, dès que $f(x)$ est partout infinie d'une manière déterminée; car, pour devenir infinie d'une manière déterminée en une place c, il faut qu'on puisse déterminer aux environs de cette place un intervalle où la fonction ne change plus son signe. Elle peut pourtant de chaque côté du point posséder des signes différents. On peut alors formuler le corollaire suivant :

Si la fonction intégrable n'est infinie que d'une manière déterminée, on a $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$.

La représentation des valeurs moyennes de la fonction $f(x)$ demande que l'on ait

$$\lim \int_x^{x+h} S_n(x)\,dx = b_0 h + \lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{k=n} -a_k \frac{\cos k(x+h) - \cos kx}{k}$$
$$+ b_k \frac{\sin k(x+h) - \sin kx}{n} = \int_x^{x+h} f(x)\,dx,$$

pour des valeurs quelconques de x à $x+h$.

Mais, d'après les égalités développées plus haut, on a

$$\frac{a_n}{n} = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos nx\,dx,$$
$$\frac{b_n}{n} = (-1)^n \frac{1}{n\pi} F(+\pi) + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin nx\,dx,$$
$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi} F(+\pi);$$

de là

$$\int_x^{x+h} S_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi} F(+\pi)\left[\frac{x+h}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k \sin k(x+h)}{k}\right]$$
$$- \frac{1}{\pi} F(+\pi)\left[\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^k \sin kx}{k}\right]$$
$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=n} \cos k(x+h) \int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos kx\,dx$$
$$+ \sin k(x+h) \int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin kx\,dx$$
$$- \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{k=n} \cos kx \int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos kx\,dx$$
$$+ \sin kx \int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\sin kx\,dx.$$

Soient x et $x+h$ deux places, où la dérivée de la fonction $F(x)$ ne devient pas infinie, d'après les recherches du § IV (n° 2); le second membre de l'égalité convergera vers la valeur $F(x+h) - F(x)$, car on a

$$\frac{x}{2} = \lim \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k-1} \frac{\sin kx}{k}.$$

Il en est de même (§ IV, n° 3) en une place où la dérivée devient infinie, mais reste absolument intégrable. L'énoncé de ce résultat sera le suivant :

Théorème XXVI. — *Chaque fonction intégrable $f(x)$ est représentée dans ses valeurs moyennes par la série de Fourier; et cela de telle façon que dans chaque intervalle pour les points finals duquel la fonction ne devient pas infinie, ou bien reste absolument intégrable, la valeur moyenne de la fonction se trouve représentée, avec une approximation d'une grandeur quelconque, par la valeur moyenne formée à l'aide d'un grand nombre quelconque de membres de la série.* (Tous les points pour lesquels la condition exprimée plus haut n'est pas remplie ne forment qu'une masse discrète.)

Dans le cas où les coefficients de la série deviennent à la fois infiniment petits, le théorème XXII subsiste, et la convergence de la série en une place unique ne dépend que du cours de la fonction aux environs aussi rapprochés qu'on le veut de cette place.

VI.

Des rapports d'une série trigonométrique avec la série de Fourier.

Si la fonction $f(x)$ est définie dès le commencement par une série trigonométrique qui n'est pas connue comme étant une série de Fourier, on peut facilement montrer que la série trigonométrique sera la série de Fourier chaque fois que la fonction ainsi définie est intégrable. C'est ce qu'on peut facilement prouver à l'aide des recherches de Riemann.

L'égalité qui donne la définition de la fonction est la suivante :

$$f(x) = b_0 + \sum_{k=1}^{k=n} (a_k \sin kx + b_k \cos kx).$$

Les coefficients ne sont pas donnés comme étant des intégrales, $f(x)$ est une fonction intégrable; voilà pourquoi $\lim a_n = 0$ et $\lim b_n = 0$, car la série doit converger *en général.* Nous formons alors l'égalité

$$F(x) = \frac{1}{2} b_0 x^2 - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{a_k \sin kx + b_k \cos kx}{k^2},$$

et

$$F_1(x) = \int_{-\pi}^{x} d\alpha \int_{-\pi}^{\alpha} f(\beta)\, d\beta = \int_{-\pi}^{x} f(\beta)(x-\beta)\, d\beta.$$

$F(x) - F_1(x)$ est une fonction qui, d'après Riemann, remplit les conditions du théorème XIV et qui, par conséquent, est linéaire.

On aura alors l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} F_1(x) + C + C'(x) &= \int_{-\pi}^{x} f(\beta)(x-\beta)\, d\beta + C + C'x \\ &= \frac{1}{2} b_0 x^2 - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{a_k \sin kx + b_k \cos kx}{k^2}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme du second membre de l'égalité est une fonction périodique; on a alors

$$F_1(x+2\pi) + C + C'(x+2\pi) - \tfrac{1}{2} b_0 (x+2\pi)^2 = F_1(x) + C + C'x - \tfrac{1}{2} b_0 x^2$$

ou

$$F_1(x+2\pi) = F_1(x) - 2C'\pi + b_0(2x\pi + 2\pi^2),$$

et pour $x = -\pi$, comme $F_1(-\pi) = 0$,

$$F_1(\pi) = -2c'\pi,$$

On tire de la même égalité, en différentiant par rapport à x,

$$F'_1(x+2\pi) = F'_1(x) + 2b_0\pi,$$

et pour $x = -\pi$

$$F'_1(\pi) = 2b_0\pi.$$

Si nous multiplions par $\sin kx$ ou $\cos kx$ et que nous intégrions chaque terme du second membre de l'égalité, on trouve les relations

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [F_1(x) + C + C'x] \sin kx\, dx = -\frac{1}{k^2} a_k \pi,$$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} [F_1(x) + C + C'x] \cos kx\, dx = -\frac{1}{k^2} b_k \pi + (-1)^k \frac{2b_0}{k^2} \pi.$$

$F_1(x)$ est différentiable, et la valeur de la première intégrale est égale à

$$\left\{-\frac{\cos kx}{k}\left[F_1(x)+C+C'x\right]\right\}_{-\pi}^{+\pi}+\frac{1}{k}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[F'_1(x)+C'\right]\cos kx\,dx$$

$$=\left\{-\frac{\cos kx}{k}\left[F_1(x)+C+C'x\right]\right\}_{-\pi}^{+\pi}+\left\{\frac{\sin kx}{k^2}\left[F'_1(x)+C'\right]\right\}_{-\pi}^{+\pi}$$

$$-\frac{1}{k^2}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx.$$

Les valeurs entre parenthèses disparaissent, et l'on a

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\sin kx\,dx \quad \text{et} \quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(x)\cos kx\,dx.$$

Théorème XXVII. — *Chaque série trigonométrique, qui définit une fonction intégrable, est une série de Fourier;* ou bien : *une fonction intégrable, si l'on peut la représenter par une série trigonométrique, ne peut être représentée que par une série de Fourier.*

L'exemple donné par Riemann (art. 13) d'une fonction intégrable, qu'on ne peut pas développer en une série de Fourier, est en même temps un exemple d'une fonction qu'on ne peut pas représenter par une série trigonométrique.

Par les recherches de Riemann, le théorème suivant est aussi démontré :

Théorème XXVIII. — *Si la série de Fourier converge en un point, où* $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *a une valeur déterminée, elle convergera toujours vers cette valeur.*

Car la série de Fourier a, en chaque place où elle converge, la valeur

$$\lim_{\Delta x=0}\frac{F(x+\Delta x)-2F(x)+F(x-\Delta x)}{\Delta x^2},$$

(1) Ce théorème a été démontré pour la première fois par M. du Bois-Reymond : *Abhandlungen der K. Bayer. Akad.*, 2 Cl. Vol. XII, Abth. I. — *Voir* aussi Ascoli, *Atti della Accademia dei Lincei*, ser. 3, Vol. II, p. 584. — *Math. Annalen*, t. VI.

et cette valeur est $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, par suite de l'égalité

$$\begin{aligned}F(x+\Delta x)-2F(x)+F(x-\Delta x) &= \int_x^{x+\Delta x} f(\beta)(x+\Delta x-\beta)\,d\beta \\ &\quad -\int_{x-\Delta x}^{x} f(\beta)(x-\Delta x-\beta)\,d\beta \\ &= \int_0^{\Delta x}[f(x+\alpha)+f(x-\alpha)](\Delta x-\alpha)\,d\alpha \\ &= [f(x+\theta\alpha)+f(x-\theta\alpha)]\frac{\Delta x^2}{2},\end{aligned}$$

même si $f(x+0)$ et $f(x-0)$, considérés séparément, ne représentent aucune valeur déterminée.

Réciproquement, il est possible que la série de Fourier converge en un point α pendant que la fonction qui a donné naissance à cette série, $f(x+\delta)+f(x-\delta)$ pour $\delta=0$, soit indéterminée; de pareils exemples ont été donnés par M. du Bois-Reymond.

Il se présente des cas semblables dans le Calcul intégral, où la dérivée de l'intégrale a une valeur déterminée, et la fonction à intégrer est au même point indéterminée.

Il faut encore remarquer que les théorèmes précédents de ce paragraphe et ceux du § V peuvent être étendus aux fonctions, qui ne sont pas en général intégrables, dans le cas où il n'existe que des valeurs singulières de l'intégrale.

Le cas le plus simple de cette espèce est le suivant, donné par Riemann.

L'intégrale principale

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\,dx = \int_0^{\delta}[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\,d\alpha$$

peut donner une valeur déterminée finie qui, pour $\delta=0$, tend vers 0, pendant que $f(x)$, au point c, devient infinie sans avoir un nombre infini de maxima et de minima et que la fonction $f(x)$ n'est pas intégrable.

Dans ce cas $[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\alpha$ doit être égal à zéro pour $\alpha=0$.

Si c'est le cas, et si, en outre

$$\lim_{n=\infty}\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\sin n(x-c)\,dx = \lim_{n=\infty}\int_0^{\delta}[f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\sin n\alpha\,d\alpha = 0,$$

$$\lim_{n=\infty}\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)\cos n(x-c)\,dx = \lim_{n=\infty}\int_0^{\delta}[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\cos n\alpha\,d\alpha = 0,$$

tous les théorèmes précédents auront lieu, si dans le calcul des coefficients de la série de Fourier on se sert des valeurs de l'intégrale principale.

Ces conditions se trouvent remplies, si les produits $\alpha f(c+\alpha)$ et $\alpha f(c-\alpha)$ tendent chacun vers o. Cette condition est aussi nécessaire; car, la fonction $f(c+\alpha)+f(c-\alpha)$ étant intégrable d'une manière absolue, on a

$$\operatorname{abs}\int_0^{\delta}[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\cos n\alpha\,d\alpha < \int_0^{\delta}\operatorname{abs}[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\,d\alpha,$$

si grand que devienne x.

La deuxième des intégrales trouvées plus haut peut alors devenir aussi petite que l'on veut pour toutes les valeurs de x par un choix convenable de δ. De plus, afin que

$$\int_0^{\delta}[f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\sin n\alpha\,d\alpha = \int_0^{\delta}[f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\alpha\,\frac{\sin n\alpha}{\alpha}\,d\alpha$$

devienne aussi petit qu'on le veut, le § IV nous dit que la fonction

$$[f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\alpha$$

doit nécessairement disparaître. Cette fonction n'a pas un nombre infini de maxima et de minima. Il s'ensuit que

$$\lim[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\alpha \quad\text{et}\quad [f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\alpha = 0,$$

ce qui prouve notre affirmation.

Théorème XXIX. — *Si la fonction devient infinie en quelques points sans oscillation, de telle façon que son intégrabilité se trouve touchée, cette fonction pourra être encore représentée par une série de Fourier, dans le cas où aux environs de tels points $f(c+\alpha)+f(c-\alpha)$ pour $\alpha = 0$ reste intégrable et de plus $\alpha f(c+\alpha)$ et $\alpha f(c-\alpha)$ disparaissent. Les coefficients de la série se calculent d'après la formule*

$$\begin{aligned}\pi a_k = \int_{-\pi}^{c-\delta} f(x)\sin nx\,dx &+ \sin nc\int_0^{\delta}[f(c+\alpha)+f(c-\alpha)]\cos n\alpha\,d\alpha\\ &+ \cos nc\int_0^{\delta}[f(c+\alpha)-f(c-\alpha)]\sin n\alpha\,d\alpha + \int_{c+\delta}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\end{aligned}$$

et d'une manière analogue pour b_k.

VII.

Règles pour la différentiation et l'intégration d'une série trigonométrique.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans tout l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, et représentée par série trigonométrique convergente en général

$$b_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx.$$

Supposons qu'on sache que cette fonction possède une différentielle intégrable, que cette différentielle soit intégrable absolument (en particulier, finie ou déterminée infinie aux points discrets). D'après les théorèmes précédents, la série pour $f(x)$ converge partout sans exception, et donne la valeur $\int^x f'(x)\,dx$.

De plus, les valeurs moyennes de la fonction intégrable $f'(x)$ peuvent être représentées par celles d'une série

$$\beta_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \alpha_k \sin kx + \beta_k \cos kx,$$

où

$$\beta_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}[f(+\pi)-f(-\pi)],$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}[f(x)\sin kx]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx$$
$$= -kb_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f'(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}[f(x)\cos kx]_{-\pi}^{+\pi} + \frac{k}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin kx\,dx$$
$$= \frac{(-1)^k}{\pi}[f(+\pi)-f(-\pi)] + ka_k.$$

La valeur moyenne de la fonction $f'(x)$ sera alors représentée par la série trigonométrique

$$\frac{1}{2\pi}[(f+\pi)-f(-\pi)] + \sum_{k=1}^{k=\infty} -kb_k \sin kx$$
$$+ \left\{ \frac{(-1)_k}{\pi}[f(+\pi)-f(-\pi)] + ka_k \right\} \cos kx.$$

Partout où cette série converge, elle converge aussi vers la valeur

$$\tfrac{1}{2}[f'(x+0)+f'(x-0)].$$

Pour le cas où $f(+\pi)=f(-\pi)$, on aura la forme plus simple

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} -kb_k \sin kx + ka_k \cos kx,$$

qui sera obtenue par une différentiation directe de chaque terme de la série primitive. Si cette condition n'est pas remplie, cette série ne convergera pas, car $\lim ka_k$ ne devient pas nulle. On aura pourtant une représentation de la valeur moyenne de la fonction $f'(x)$, car la série

$$f\frac{(+\pi)-f(-\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{k=\infty}(-1)^k \cos kx\right]$$

a la valeur moyenne o. Il n'y a à excepter que les intervalles dont les derniers points se confondent avec les limites $-\pi$ et $+\pi$.

Il existe, par conséquent, pour la fonction avec la valeur constante o deux représentations à l'aide d'une série trigonométrique : l'une nous est donnée par la série dont tous les coefficients disparaissent; l'autre est la série nommée plus haut, qui ne converge pour aucune valeur de x.

La première forme prévaut partout par un intervalle de x à $x+h$, la deuxième manque aux points finals $-\pi$ et $+\pi$ de l'intervalle. Il n'existe pas d'autre représentation sans exception de la valeur o; car, dans le cas où la série trigonométrique

$$b_0+\sum_{k=1}^{k=\infty}(a_k \sin kx + b_k \cos kx),$$

a la propriété que, pour toutes les valeurs de x et de $x+h$ (inclusivement $-\pi$ et $+\pi$),

$$0 = b_0[(x+h)-x]+\sum_{k=1}^{k=\infty} -a_k\frac{\cos k(x+h)-\cos kx}{k}$$
$$+b_k\frac{\sin k(x+h)-\sin kx}{k},$$

tous les coefficients b_0, a_k, b_k doivent disparaître.

D'après ce théorème, on voit qu'il n'existe qu'une seule forme pour représenter une fonction intégrable par une série trigonométrique, forme qui reste valable aux points finals $-\pi$ et $+\pi$ (dans le cas où la fonction à représenter possède en ces points une valeur finie ou est au moins intégrable sans restriction). A cause de cette exception possible, je veux spécialiser un peu ce théorème et dire :

Théorème XXX. — *Pour toute fonction intégrable absolument, il n'existe qu'une seule représentation trigonométrique des valeurs moyennes, qui est valable pour chaque intervalle. Cette forme nous est donnée par la série de Fourier.*

La règle pour l'intégration a la forme suivante :

Une série trigonométrique

$$b_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} a_k \sin kx + b_k \cos kx,$$

qui représente une fonction intégrable périodique $f(x)$, est une série de Fourier.

Si l'on veut former l'intégrale

$$\int_a^x f(x)\,dx \equiv F(x) - F(a),$$

où les limites a et x tombent dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, il existe pour cette fonction, en tant qu'elle est partout continue, une série de Fourier.

Posons

$$F(x) - F(a) = B_0 + \sum_{k=1}^{k=\infty} A_k \sin kx + B_k \cos kx,$$

on a

$$B_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx - F(a),$$

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x) \sin kx\,dx = \frac{-1}{k\pi}\,[F(x)\cos kx]_{-\pi}^{+\pi}$$

$$+ \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{(-1)^{k-1}}{k\pi}\,[F(+\pi) - F(-\pi)] + \frac{1}{k}\,b_k,$$

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{k\pi}\,[F(x)\sin kx]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{k\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin kx\,dx$$

$$= -\frac{1}{k}\,a_k;$$

$F(x)$ sera alors, en général, représentée par la série

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{(-1)^{k-1}}{k\pi}\,[F(+\pi)-F(-\pi)] + \frac{1}{k}\,b_k \right\} \sin kx$$
$$- \frac{1}{k}\,a_k \cos kx.$$

Cette série se partage en deux parties, car la valeur de

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k\pi}\,[F(+\pi)-F(-\pi)]\sin kx;$$

est convergente et égale à

$$\frac{x}{2\pi}\,[F(+\pi)-F(-\pi)] = b_0 x;$$

car

$$b_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\,[F(+\pi)-F(-\pi)];$$

seulement aux points finals de l'intervalle

$$\sum_{k=1}^{k=} (-1)^{k-1}\,\frac{\sin kx}{k} = 0.$$

La fonction $F(x)$ est alors, en général, égale à

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx + b_0 x + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k}\,b_k \sin kx - \frac{1}{k}\,a_k \cos kx.$$

C'est aux points discrets que la valeur de la série peut différer de cette valeur.

Si la fonction est intégrable absolument, la valeur de la série doit se confondre sans exception avec la valeur de $F(x)$, et dans cette forme, pas tout à fait purement trigonométrique, on a aussi

$$F(+\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx + b_0\pi + \sum_{k=1}^{k=\infty} -\frac{1}{k}\,a_k(-1)^k,$$

$$F(-\pi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx - b_0\pi + \sum_{k=1}^{k=\infty} -\frac{1}{k}\,a_k(-1)^k,$$

comme

$$\frac{F(+\pi)+F(-\pi)}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(x)\,dx + \sum_{k=1}^{k=\infty} -\frac{1}{k}\,a_k(-1)^k,$$

et

$$\frac{F(+\pi)-F(-\pi)}{2} = b_0\pi.$$

La différence $F(x) - F(a)$ est égale à

$$b_0(x-a) + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k}\,b_k(\sin kx - \sin ka) - \frac{1}{k}a_k(\cos kx - \cos ka),$$

c'est-à-dire égale à la série qu'on obtient par intégration terme à terme entre les limites a et x de la série primitive.

Pour plus de clarté, nous formulerons brièvement les deux règles :

Théorème XXXI. — *Toute série trigonométrique qui définit en général une fonction continue, avec une dérivée intégrable absolument, est elle-même une fonction partout continue, dont la dérivée peut être représentée en moyenne par une série trigonométrique. Celle-ci sera tirée de la série primitive par une différentiation terme à terme, en ayant soin d'ajouter après chaque terme de la série à former le membre*

$$(-1)^k[f(+\pi)-f(-\pi)]\cos kx.$$

En chaque point où la série converge, elle donne la valeur de la dérivée $f'(x)$, ou la valeur moyenne

$$\tfrac{1}{2}[f'(x+0)+f'(x-0)].$$

Théorème XXXII. — *L'intégrale de toute série trigonométrique, entre des limites quelconques tombant dans l'intervalle de $-\pi$ à $+\pi$, est représentée en général par une intégration terme à terme ; il est sous-entendu que la série définit une fonction intégrable. Si la série donnée définit une fonction intégrable absolument, la série formée par intégration sera égale sans exception à l'intégrale.*

SCHLEGEL (V.), Oberlehrer am Gymnasium in Waren. — LEHRBUCH DER ELEMENTAREN MATHEMATIK. — Wolfenbüttel, Druck und Verlag von Julius Zwissler, 1878-1880. — 4 vol. in-8°.

Nous sommes habitués depuis longtemps à considérer l'apparition d'un Traité élémentaire de Mathématiques comme un événement pédagogique ou commercial n'ayant rien de commun avec la Science pure. Si l'on met à part quelques honorables exceptions, c'est toujours le même Livre qui reparaît sous une couverture de couleur différente, avec quelques pages transposées, quelques propositions secondaires introduites ou supprimées, quelques démonstrations modifiées sinon perfectionnées, quelques développements de plus suivant les tendances des programmes officiels. Quant à la manière d'exposer les principes fondamentaux de la Science, rien n'est changé. Les découvertes qu'on a faites dans les hautes Mathématiques depuis un siècle et qui ont si admirablement éclairci les difficultés que présentaient encore les éléments d'Algèbre semblent étrangères à nos auteurs, qui expliquent les imaginaires comme au temps de Bézout et de Lacroix, et présentent parfois à leurs lecteurs des notions géométriques en arrière de beaucoup sur celles qu'exposait Euclide il y a plus de deux mille ans.

Cet état de choses est commun à tous les peuples de l'Europe. En Angleterre, l'enseignement est resté ce qu'il était au temps de Barrow et de Simson; heureusement le vieil Euclide a été choisi et fidèlement conservé à l'abri des prétendus perfectionnements des Traités modernes. En Allemagne, les auteurs cherchent encore leur voie, et, malgré quelques Traités hors ligne, comme celui de M. Baltzer, l'esprit du haut enseignement ne pénètre qu'avec peine dans l'enseignement élémentaire.

Dans ces dernières années, un disciple de H. Grassmann, M. Victor Schlegel, déjà auteur d'une lumineuse exposition de la doctrine de son illustre maître, a entrepris de lancer les Mathématiques, et la Géométrie en particulier, dans une autre voie plus courte et plus sûre, et il a publié, en s'inspirant des vues originales et hardies de l'auteur de l'*Ausdehnungslehre*, un Cours élémentaire en quatre minces volumes, comprenant, en 712 pages, l'Arithmétique et l'Algèbre, la Géométrie plane et solide et la Trigonométrie tant rectiligne que sphérique.

I.

Nous ne nous arrêterons pas longtemps sur le contenu du premier Volume, intitulé *Arithmetik und Combinatorik* (182 pages), et traitant de l'Algèbre élémentaire et de la Théorie des combinaisons. La première Partie comprend d'abord les principes du calcul littéral, la résolution des équations des quatre premiers degrés, les séries, les fractions continues, le calcul décimal et les calculs d'intérêts. Puis, dans l'autre Partie, il est question des combinaisons et des permutations, et des premières notions sur le Calcul des probabilités. Le tout est exposé avec une concision qui n'exclut pas la clarté, et avec une rigueur irréprochable.

II.

Nous nous occuperons avec plus de détails des Volumes suivants, qui forment la partie vraiment originale de l'Ouvrage, et d'abord du tome II, *Geometrie,* où l'auteur expose, en 222 pages, les principes de la Géométrie *plane.* C'est ici que l'on peut apprécier la révolution dans l'enseignement préparée par les idées de Grassmann, et dont nous essayerons de présenter un résumé. Comme la Géométrie des Anciens, la nouvelle méthode repose aussi sur des hypothèses, suggérées par l'expérience, mais différentes, au moins par la forme, des axiomes euclidiens.

Un *corps* ou *volume* est une portion limitée de l'espace; sa limite est une surface.

Une *aire* (*Figur*) est une portion limitée de surface.

Une *figure* (*Gebilde*) limitée complètement par des aires est un *volume.*

La limite d'une aire est une *ligne.* — Une portion de ligne est un *segment* (*Strecke*).

Une figure limitée complètement par des segments est une *aire.*

Les limites d'un segment sont des points.

Un point est un *lieu* dans l'espace.

Un point, en se mouvant, décrit une ligne; de même un segment décrit une surface; une aire décrit un corps. — Ces figures sont limitées ou illimitées, suivant que le mouvement lui-même est limité ou illimité.

De la loi du mouvement dépend la *forme* (*Gestalt*) de la figure engendrée. Un point n'a pas de forme. Deux figures de même forme sont dites *semblables*.

Le mouvement par lequel une figure est engendrée devient une propriété inhérente à cette figure, et s'appelle *dimension*. — Le point n'a aucune dimension, le segment en a une, l'aire deux, le volume trois.

Suivant que le mouvement est continué plus ou moins loin, la dimension correspondante sera dite *plus* ou *moins grande*. La grandeur d'un segment est sa *longueur;* la grandeur d'une aire dépend de sa *longueur* et de sa *largeur;* celle d'un volume, de sa *longueur,* de sa *largeur* et de son *épaisseur*.

Deux figures de même grandeur sont dites *égales* ([1]).

Sommes et différences de deux segments, de deux aires, de deux volumes.

Mouvement simple; mouvement composé. — Un point, au moment où il commence à changer de lieu, a le choix entre une infinité de mouvements qui se distinguent entre eux par leur *direction*.

Si un point conserve toujours la direction qu'il a choisie au départ, son mouvement est dit un *mouvement simple,* et le segment qu'il parcourt est une *ligne droite*. — Le caractère distinctif d'un mouvement simple est donc sa *direction*.

Si un segment de droite se meut de telle manière que chacun de ses points exécute un mouvement simple, c'est-à-dire parcourt lui-même une ligne droite, le mouvement total du segment sera un mouvement simple, et l'aire résultante sera une aire *plane*.

Si un point mobile change à chaque instant de direction, il décrit une ligne *courbe,* et son mouvement est dit *composé*.

Toute surface non plane est une surface *courbe*.

Une figure ne peut se transporter par un mouvement simple d'une position à une autre que d'une seule manière, au plus. Un

---

([1]) Ou, conformément aux habitudes françaises, *équivalentes*. Les Allemands expriment la relation d'égalité par congruence par les deux mots *gleich und ähnlich*.

même déplacement peut s'effectuer par une infinité de mouvements composés différents.

De la loi particulière du mouvement qui engendre une *construction* résulte pour celle-ci la propriété d'avoir une *forme* déterminée. Le point n'a pas de forme; toutes les lignes droites, ainsi que toutes les surfaces planes, ont la même forme; il en est de même pour les lignes ou les surfaces engendrées par la même loi de mouvement.

Le mouvement est limité ou illimité; il en est de même des figures qu'il engendre.

Le mouvement est fini ou infini. Un mouvement illimité peut engendrer une ligne ou une surface finie, lorsque ce mouvement est rentrant sur lui-même.

Toute figure illimitée peut être considérée comme un *domaine* pouvant contenir des figures limitées d'un nombre de dimensions égal ou inférieur, ainsi que des figures illimitées d'un nombre de dimensions inférieur.

Un domaine est *simple,* lorsqu'il est engendré par des mouvements simples. Les domaines simples sont le point, la droite, le plan et l'espace.

Un domaine est *libre,* lorsqu'il peut se mouvoir sur lui-même d'une manière quelconque. Tels sont les domaines simples de la droite, du plan et de l'espace et les domaines non simples du cercle, de l'hélice et de la sphère.

La science de l'espace se divise en deux parties : la science des figures planes (*reine Geometrie*), et la science des figures dans l'espace (*Stereometrie*). A ces deux parties se rattachent les deux parties correspondantes de la Trigonométrie.

Le tome II s'occupe de la *Géométrie* (*plane*).

PREMIÈRE SECTION. — *Géométrie des figures en mouvement.*

I. *Géométrie de la droite.* — Le point et son mouvement sur la droite.

(α) *Mouvement unique d'un point.* — Un point se distingue d'un autre par sa *position.* — Un point mobile équivaut à une série de points fixes quelconques.

Lorsqu'un point A décrit une droite, celle-ci est déterminée :

1° par la *position* (*Lage*) du point mobile; 2° par la *direction* du mouvement de ce point. — Deux droites de même position et de même direction coïncident entre elles ([1]).

La direction suivant laquelle un point A, animé d'un mouvement *simple*, commence à se mouvoir, détermine d'avance tous les points qu'il doit rencontrer dans son mouvement. Réciproquement, l'un de ces derniers points B suffit, avec le premier A, pour déterminer la direction de la droite. — Un point quelconque de la droite pouvant être pris pour le point initial A, la droite est déterminée *en position et en direction* par deux quelconques de ses points.

Une droite est dite avoir *même position* qu'un point, lorsqu'elle passe par ce point.

(β) Mouvement multiple d'un point. — Mouvement d'un segment sur une droite.

1° Opérations géométriques sur les segments : addition, soustraction, multiplication, partition (division par un nombre), mesure (division par un segment).

2° Les deux directions opposées d'une droite. — Segments positifs et négatifs.

3° Mouvement d'un segment le long d'une droite. — Relation $MA + MB = 0$; généralisation; centre de gravité d'un segment.

II. *Géométrie du plan.*

[*a*] *La droite et ses mouvements dans le plan.*

(α) *Mouvement unique de la droite.* — Détermination de la droite.

1° Changement de position de la droite. Lorsqu'une droite change de *position* sans changer de *direction*, les deux situations obtenues sont dites deux droites *parallèles*.

Dans ce cas, tous les points de la droite primitive ont aussi changé de position, en éprouvant tous des déplacements identiques en grandeur et en direction.

([1]) La donnée de la direction équivaut à ce que la Géométrie moderne appelle le point à l'infini de la droite; de sorte que la détermination actuelle peut être envisagée comme un cas particulier de la détermination de la droite au moyen de deux points.

Par un point donné on ne peut mener qu'une seule parallèle à une droite. — Deux droites parallèles à une troisième sont parallèles entre elles.

De la considération du mouvement d'un point sur une droite mobile parallèlement à elle-même, ce mouvement étant tel qu'à des déplacements égaux de la droite correspondent toujours des déplacements égaux du point, on conclut facilement le théorème de la proportionnalité des segments.

2° Changement de direction de la droite. L'*angle*. — Relations entre deux droites : Deux droites de même position ont la même direction. Deux droites de même direction ont des positions différentes. Deux droites de position différentes ont la même direction. Deux droites de direction différente ont la même position.

Lorsqu'une droite fait le tour complet autour d'un de ses points, elle décrit un *angle fermé*. Tous les angles fermés sont égaux, ainsi que leurs moitiés et que leurs quarts. Le quart de l'angle fermé est l'unité angulaire (angle droit), pour laquelle l'usage a conservé l'incommode division babylonienne.

La direction d'un segment redevient la même lorsque le segment a fait un nombre n quelconque de tours autour d'une de ses extrémités, n étant positif et entier. Le résultat sera donc le même que si on l'avait multiplié par $(+1)^n$, ou, ce qui revient au même, par $(-1)^{2n}$. S'il fait un nombre impair $2n+1$ de demi-tours, il s'arrêtera sur la direction opposée à la première et sera multiplié par -1 ou par $(-1)^{2n+1}$. Ainsi, dans tous les cas, une révolution d'un demi-tour équivaut à une multiplication par -1.

Si x est le facteur qui correspond au quart de tour, on devra avoir

$$x \times x = -1,$$

d'où

$$x = \sqrt{-1} = i.$$

En général, si x est le facteur qui correspond à la $n^{\text{ième}}$ partie de l'angle droit, on aura

$$x^{2n} = -1 = i^2,$$

d'où

$$x = i^{\frac{1}{n}}.$$

On peut donc représenter la rotation d'un segment par la multiplication de ce segment par une puissance du facteur i qui est le symbole d'une rotation d'un angle droit.

Lorsqu'une droite tourne autour d'un de ses points, chacun des autres points décrit un cercle. Centre, angles au centre, etc.

(β) *Mouvement double de la droite.* — Changement de direction et de position.

Opérations élémentaires sur les angles.

Les deux côtés d'un plan; ces deux côtés diffèrent en ce que les rotations de sens positif pour l'un de ces côtés sont négatives pour l'autre côté. — Angles positifs et négatifs.

Mouvement d'un angle dans un plan. — Angles ayant leurs côtés parallèles chacun à chacun.

Angles autour d'un point, opposés, supplémentaires.

Angles de deux parallèles avec une sécante.

Point à l'infini sur une droite.

Le triangle. — Somme de ses angles. Démonstration de Thibaut.

Sens du triangle. — Relation entre les angles. Angles extérieurs. Extension aux polygones.

Détermination du triangle par ses éléments. — Nous ne pouvons nous empêcher de mettre en doute la légitimité de la démonstration de l'égalité de deux triangles équilatéraux entre eux, fondée sur ce que la position d'un sommet est déterminée par l'intersection de deux cercles décrits des deux autres sommets comme centres, tant que l'on n'aura pas montré, autrement que par l'*évidence,* l'impossibilité de la rencontre de deux cercles en plusieurs points situés d'un même côté de la ligne des centres. La tendance de la nouvelle école à remplacer le raisonnement par le coup d'œil nous semble éminemment dangereuse. Le sentiment de la forme est un précieux auxiliaire, auquel les illustres inventeurs de la Géometrie pure ont dû une grande partie de leurs découvertes; mais rien en Mathématiques ne peut dispenser de la démonstration, d'autant plus que cette partie de la tâche est en général la plus aisée. Dans le cas actuel, la marche d'Euclide n'est pas plus longue, et ne laisse aucun doute dans l'esprit.

Triangle isoscèle. — Il eût mieux valu, selon nous, commencer par les figures les plus régulières auxquelles on ramène ensuite l'étude des figures irrégulières; d'autant plus, ici, que l'étude du triangle isoscèle est absolument identique à celle des propriétés du cercle. On aurait pu ainsi démontrer rigoureusement la proposition sur l'égalité des triangles de côtés égaux, sans sacrifier en rien la brièveté et l'évidence.

(γ) *Mouvement triple de la droite.* — Le quadrilatère. — Le parallélogramme.

(δ) *Mouvement multiple des segments.* — Opérations géométriques sur les parallélogrammes. — Côtés opposés d'un parallélogramme. — Théorème de Pythagore.

Changement de direction des segments. — Le cercle. — Angles dans le cercle. — Polygones réguliers. — Deux cercles.

Deuxième Section. — *Géométrie des figures en repos.* — Deux figures sont dans une situation *perspective,* lorsque les lignes qui joignent les points correspondants de ces deux figures passent par un même point.

Deux figures qui peuvent être amenées à une situation perspective sont dites *projectives.*

(*a*) Si les lignes de jonction passent par un point infiniment distant, et que 1° les droites homologues se rencontrent sur une droite infiniment distante, les deux figures sont *congruentes.* — 2° Si les droites homologues se coupent sur une droite à distance finie, les figures sont seulement *affines.*

(*b*) Si les lignes de jonction se coupent en un point à distance finie, et que 1° les droites homologues se rencontrent sur une droite infiniment distante, les deux figures sont *semblables.* — 2° Si les droites homologues se coupent sur une droite à distance finie, les figures sont *collinéaires.*

I. *Similitude.* — Triangles semblables. — Division harmonique. — Similitude inverse. — Polygones. — Cercles.

II. *Collinéation.* — Quadrilatère complet. — Double rapport. — Triple rapport. — Quadruple rapport. — Pôles et polaires dans le cercle.

Calcul géométrique. — Espace superficiel et produit de segments. — Comparaison des aires de plusieurs figures. — Construction des racines d'une équation. — Le polygone régulier et le cercle.

Appendice. — Les courbes du second ordre. — Ces courbes sont définies par la relation focale $r_1 \pm r_2 = r$, r étant une constante, qui est infinie dans le cas de la parabole.

Le Volume est terminé par un recueil de 737 problèmes et exercices divers sur la Géométrie plane.

III.

Le troisième Volume contient la Trigonométrie rectiligne, et l'auteur l'a rédigé en prenant pour modèle un Traité publié par Grassmann en 1865.

Après une courte Introduction, où il explique la notion de *fonction,* l'auteur aborde la Trigonométrie, en commençant par l'étude des fonctions angulaires sous forme finie. Il traite d'abord des fonctions d'un angle aigu, en prenant pour point de départ le cosinus. Il nous semble que cette dérogation à l'usage établi est conforme au rôle prépondérant que joue le cosinus dans les calculs, comme exprimant la partie réelle du déplacement e^{ip} : la seule objection que l'on nous oppose, c'est la dénomination de *sinus du complément* sous laquelle il est universellement connu; mais on peut dire avec une grande probabilité qu'on lui donnerait un autre nom si la nomenclature était à refaire aujourd'hui.

Cosinus de la somme de deux angles aigus. — Calcul des cosinus des angles aigus, suivi d'une Table des cosinus à trois décimales, pour chaque demi-degré du quadrant.

Les autres fonctions angulaires se déduisent du cosinus. — Sens de l'accroissement de chaque fonction. — Valeurs limites. — Détermination des fonctions au moyen les unes des autres.

Fonctions d'un angle quelconque. — Formules diverses.

Les fonctions angulaires sous forme transcendante et sous forme de série. — L'auteur démontre, du moins avec autant de rigueur qu'en peuvent comporter les notions que le lecteur a dû puiser dans le Tome I du présent Ouvrage, qu'il existe une série infinie

$$F_x = 1 + a_1 x + \frac{a_1^2}{2!} x^2 + \frac{a_1^3}{3!} x^3 + \ldots,$$

qui jouit de la propriété que

$$F_x \times F_y = F_{x+y}.$$

En particularisant cette série, on définit le nombre e, qui correspond à $a_1 = x = 1$.

Si l'on remplace x par ix, on a une série complexe, que l'on peut écrire sous la forme

$$e^{ix} = f_x + i\varphi_x.$$

La partie réelle f_x est le cosinus de x et la partie imaginaire est $i \sin \lambda$.

Représentation des fonctions angulaires inverses sous la forme de logarithmes. — Développement de arc sin en série. — Séries logarithmiques. — Calcul des logarithmes. — Calcul de π.

Maintenant vient la Trigonométrie proprement dite :

Calcul des triangles. — Triangle rectangle.

Le triangle obliquangle. — Nous ne pouvons nous empêcher de remarquer que l'auteur pense, comme la majorité, que l'on gagne *toujours* du temps dans les calculs numériques, en les effectuant tous au moyen des logarithmes, après avoir transformé toutes les sommes en produits. Rien n'est plus inexact et nous avons plus d'une fois montré, par une supputation rigoureuse du nombre de lectures auquel oblige chaque formule, que *le plus souvent,* tant dans les calculs de Trigonométrie rectiligne que dans ceux de Trigonométrie sphérique, ce sont les formules sous la forme de somme qui, contrairement au préjugé régnant, sont les plus avantageuses dans le calcul.

M. Schlegel énumère les diverses méthodes sur lesquelles reposent les formules trigonométriques.

Première méthode. — (a) Procédé géométrique. — Théorème des sinus. — Théorème des cosinus.

(b) Procédé algébrique. — Nous n'y trouvons pas la formule

$$a = b \cos \gamma + c \cos \beta,$$

d'où les autres se tirent avec tant de facilité, et qui, mise sous la forme

$$a = be^{i\gamma} + ce^{i\beta},$$

contient la Trigonométrie presque tout entière.

Deuxième méthode. — (a) Théorème du cercle circonscrit.

(b) Théorème des tangentes.

(c) Théorème du cercle inscrit.

Résolution des équations du deuxième et du troisième degré.

Résumé synoptique des formules et des règles.

Appendice. — Exercices et problèmes.

Une addition très précieuse, et que nous voyons ici pour la première fois dans un Ouvrage élémentaire, consiste dans une Table des triangles *rationnels,* tant rectangles qu'obliquangles, où l'on peut puiser d'excellents exercices de calcul numériques. Cette Table est précédée d'un exposé des méthodes pour la recherche des triangles rationnels.

L'Ouvrage est terminé par un recueil de Tables logarithmiques à quatre décimales, savoir, une Table des logarithmes des nombres jusqu'à 2000 et une Table trigonométrique de minute en minute. La première de ces Tables est très commodément disposée et d'un usage facile. Nous sommes moins satisfaits de la seconde; bien qu'elle ait le grand avantage de procéder par intervalles très rapprochés, elle a l'inconvénient grave de donner seulement les logarithmes des tangentes et des sinus, sans suppléer, par une graduation complémentaire, à l'absence des logarithmes des fonctions cotangente et cosinus.

IV.

La quatrième Partie, consacrée à la Géométrie de l'espace, est précédée d'une Introduction où l'auteur indique les méthodes les plus convenables pour représenter clairement les figures dans l'espace. Ces méthodes consistent soit dans l'emploi de modèles en relief, soit dans celui des images stéréoscopiques. On trouve à la fin du Volume quatre planches destinées à être vues au stéréoscope, et représentant des polyèdres plus ou moins compliqués.

L'auteur aborde ensuite son sujet, en exposant la génération du plan. Un plan est déterminé par trois éléments : la *position,* déterminée par un point; la *direction,* déterminée par une droite passant par ce point, et enfin le *côté* (*Seite*), qui distingue entre eux les plans de même *position* et de même *direction.*

(α) Mouvement simple du plan.

Diverses manières de déterminer par d'autres éléments la position d'un plan.

Changements de *position* et de *direction* du plan.

Changement de côté du plan. — Angle dièdre (*Raumwinkel*).

Mouvement d'une droite entraînée par un plan mobile. Génération du cône et du cylindre de révolution.

Droites et plans perpendiculaires ou parallèles.

Inclinaison d'une droite sur un plan.

Lieux d'un point assujetti à certaines conditions. — Sphère.

(β) Double mouvement du plan.

Intersection de trois plans.

Angles trièdres. — Leur mesure au moyen de la sphère. — Angles trièdres, considérés comme analogues aux triangles (triangles sphériques).

Le tétraèdre.

La pyramide.

Le cône (droit ou oblique, à base circulaire).

Le pentaèdre (pyramide quadrangulaire, tronc de pyramide triangulaire, prisme triangulaire à bases parallèles ou non).

Les figures et leurs mouvements dans l'espace. — Mouvement du triangle (prisme triangulaire). — Mouvement du parallélogramme (parallélépipède, *Säule*), d'un polygone (prisme), du cercle (cylindre).

Mouvement du parallélogramme. — Parallélépipède et prisme triangulaire. — Prisme et pyramide triangulaires (le volume de la pyramide est le tiers de celui du prisme, etc.).

Variation du *côté* des figures. — Corps de révolution. — Sphère, ses propriétés.

Polyèdres réguliers.

Application du calcul à la Stéréométrie. — Mesures des volumes et des surfaces.

Trigonométrie sphérique. — Triangles sphériques rectangles.

Triangles obliquangles. — Les formules sont établies par trois méthodes : 1° méthode géométrique; 2° méthode algébrique; 3° méthode des angles auxiliaires.

Appendice. — Les surfaces du second degré. — Elles sont considérées comme engendrées par le déplacement des courbes du second ordre.

L'Ouvrage est terminé par un Recueil de 434 problèmes sur les matières traitées dans le tome IV.

D'après l'exposé rapide que nous avons donné de cet intéressant

Traité, on peut déjà se faire une idée de la nouveauté des méthodes et des avantages qu'elles peuvent présenter dans un grand nombre de cas. Un auteur se disposant à écrire un Traité classique ne saurait trouver une meilleure préparation que la lecture du Livre de M. Schlegel, où il apercevrait tant d'horizons nouveaux, inconnus à la routine et qui eux-mêmes peuvent conduire à des découvertes ultérieures.

Peut-être certaines méthodes sembleront-elles reposer sur des innovations trop hardies. Par exemple, est-il bien sûr que l'on gagne beaucoup en rapidité et en clarté lorsqu'on remplace l'axiome euclidien des parallèles par la notion vague et un peu nuageuse de la *direction* d'une droite, et qu'on substitue la démonstration de Thibaut à la classique démonstration qui sert depuis deux mille ans? Dans la Géométrie à trois dimensions, les éléments qui fixent la position du plan présentent-ils aux commençants des idées parfaitement nettes et plus rigoureuses que celles que présente la méthode ancienne? C'est ce que nous n'oserions affirmer.

Quoi qu'il en soit, nous sommes si peu accoutumés à rencontrer dans les Manuels de Géométrie des idées neuves et hardies, que nous n'hésitons pas à saluer comme un heureux événement dans la littérature géométrique l'apparition de ce Traité, où le disciple fidèle de Grassmann s'est fait le sagace interprète des idées du maître sur l'enseignement élémentaire.

A côté des innovations que les partisans du passé pourront trouver téméraires, combien ne trouve-t-on pas dans ce Livre de chapitres traités avec une supériorité incontestable et par des méthodes qui sont au fond celles de tout le monde, mais plus largement comprises! Combien de passages qui deviennent clairs quand on s'est habitué au style un peu trop laconique de l'auteur! Nous ne pouvons donc trop recommander l'étude du *Lehrbuch* de M. Schlegel, et surtout celle des deux Volumes de la Géométrie à l'attention des maîtres qui désirent rajeunir et perfectionner leurs méthodes d'enseignement, et même aux bons élèves, qui pourront y apprendre à penser et s'exercer à la discussion des doctrines scientifiques.

J. H.