Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

P.-H. Schoute

Deux cas particuliers de la transformation birationnelle

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 174-188

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_174_1>

MÉLANGES.

DEUX CAS PARTICULIERS DE LA TRANSFORMATION BIRATIONNELLE;

PAR M. P.-H. SCHOUTE,

de Groningue (Hollande).

(SUITE.)

III. — *La relation entre les deux transformations.*

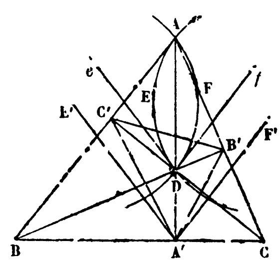
39. La transformation par cercles symétriques est déduite de la transformation par droites symétriques au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques ([1]).

En effet, quand A, B, C, D (*fig.* 6) sont les points fondamentaux réels de la transformation par cercles symétriques, que le point D est le centre des rayons vecteurs réciproques et que le produit $DA.DA' = DB.DB' = DC.DC'$ représente la puissance négative des rayons vecteurs, de manière que dans cette transformation auxiliaire les points A′, B′, C′ correspondent aux points A, B, C, il est évident que les cercles DEA et DFA qui sont symétriques par rapport à DA se transforment dans les droites A′E′ et A′F′ par A′ également symétriques par rapport à DA′; car, suivant

([1]) Pour la transformation par rayons vecteurs réciproques on peut conseiller : Reye, *Leçons sur la Géométrie de position,* t. I, p. 206, ou Geiser, *Einleitung in die synthetische Geometrie,* p. 159-183.

la théorie de la transformation par rayons vecteurs réciproques, ces droites sont parallèles aux tangentes De et Df menées à ces cercles au point D et ces tangentes sont symétriques elles-mêmes par rapport à DA′. Ce qui prouve que la transformation auxiliaire fait changer la correspondance entre les points d'intersection O et O′ des trois couples de cercles symétriques décrits sur AD, BD, CD comme cordes, de l'article 28, en la correspondance entre les points d'intersection P et P′ de trois couples de droites par A′, B′, C′ symétriques par rapport aux mêmes droites A′D, B′D, C′D. Et cette dernière correspondance ne diffère dans le moindre détail de celle de la transformation par droites symétriques, dont le triangle

Fig. 6.



A′B′C′ est le triangle de référence, parce que les droites A′D, B′D, C′D sont les bissectrices des angles du triangle A′B′C′. A la vérité, les cercles fondamentaux BCD, CAD, ABD et ABC des points fondamentaux A, B, C, D de la transformation par cercles symétriques se transforment dans les droites B′C′, C′A′, A′B′ et le cercle A′B′C′ qui correspondent dans la transformation par droites symétriques aux trois points fondamentaux A′, B′, C′ et à la droite l_∞; tandis qu'on retrouve les points A′, B′, C′ et la droite l_∞, qui coïncident avec leurs éléments correspondants dans la transformation des cercles en A, B, C, D, les quatre points qui jouissent de la même propriété dans la transformation des droites.

40. D'après ce qui précède, il est évident qu'on doit pouvoir trouver le point O′ correspondant dans la transformation par cercles symétriques à un point quelconque O au moyen de la transformation par droites symétriques en passant deux fois par la transformation par rayons vecteurs réciproques. D'abord on cherche

le point P correspondant au point O dans la transformation par rayons vecteurs réciproques; ensuite on cherche le point P′ correspondant au point P dans la transformation par droites symétriques et enfin on cherche le point O′ correspondant au point P′ dans la transformation des rayons vecteurs réciproques. Ce point O′ est en même temps le point correspondant du point O dans la transformation par cercles symétriques.

Par ce détour on trouve encore que la courbe correspondante d'une droite l dans la transformation des cercles est une courbe du cinquième ordre, qui a des points doubles aux six points A, B, C, D, ω, ω_1. A la vérité, la transformation par rayons vecteurs réciproques étant elle-même une transformation birationnelle en involution qui forme un cas particulier de la transformation générale avec trois points fondamentaux simples (ici les points D, ω, ω_1) indiquée à la fin de l'article 13, la courbe des points P correspondant aux points O d'une droite l quelconque est un cercle par D (ω, ω_1). La courbe des points P′, correspondant dans la transformation par droites symétriques aux points P du cercle par D(ω, ω_1), est une courbe du quatrième ordre passant une fois par D, ω, ω_1 et deux fois par A′, B′, C′. Et la courbe des points O′, correspondant dans la transformation par rayons vecteurs réciproques aux points P′ de la courbe du quatrième ordre, est une courbe du cinquième ordre avec des points doubles aux six points A, B, C, D, ω, ω_1. Réciproquement on peut trouver la courbe des points P′, correspondant aux points P d'une droite l quelconque dans la transformation des droites, au moyen de la transformation des cercles en passant deux fois par la transformation auxiliaire; je laisse cette vérification aux lecteurs.

41. Les courbes des deux transformations considérées qui correspondent à eux-mêmes se transforment les unes dans les autres au moyen de la transformation auxiliaire. Cette vérité mène sans peine à de nouveaux résultats. D'abord les coniques passant par les points A, B, M, M_c de la transformation par droites symétriques, c'est-à-dire les coniques passant par les points A′, B′, D, C de la *fig.* 6, se transforment dans les courbes du troisième ordre qui passent une fois par A, B, ω, ω_1, C′ et deux fois par D; on trouve donc les courbes $3(ABD^2\omega\omega_1, c)$, qui correspondent à elles-mêmes

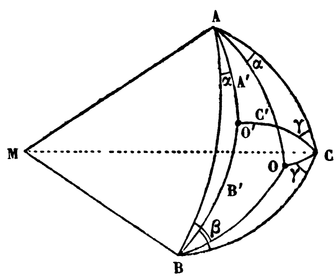
dans la transformation par cercles symétriques. D'un autre côté, les hyperboles équilatères passant par A, B, C, D dans la transformation par cercles symétriques deviennent des courbes du troisième ordre qui passent une fois par A', B', C', ω, ω_1 et deux fois par D; ces courbes sont les courbes $3(ABC, M^2, \omega\omega_1)$ dans la transformation par droites symétriques, etc.

IV. — *La transformation par plans symétriques.*

42. La transformation par droites symétriques peut être étendue à l'espace de la manière suivante :

Si dans le triangle sphérique ABC (*fig.* 7) sur la sphère dont M est le centre, on renverse dans chaque angle les parties α et $A - \alpha$, β et $B - \beta$, γ et $C - \gamma$, déterminées par les arcs AO, BO, CO,

Fig. 7.



on obtient trois arcs nouveaux AA', BB', CC', qui passent encore par un même point O'. On copie sans peine la démonstration de ce théorème de l'article 1. Eh bien, si l'angle trièdre M fait partie d'un tétraèdre irrégulier ABCD et qu'on renverse dans ce tétraèdre les parties déterminées dans les angles dièdres par les six plans qui passent par un point quelconque O et chacune des arêtes, on obtient six autres plans qui passent encore par un même point O'; car le théorème du triangle sphérique montre que ces six plans passent trois à trois par quatre droites et ces droites se coupent deux à deux sans qu'elles se trouvent toutes dans un même plan, etc.

43. Les points O et O' forment dans l'espace une transformation birationnelle en involution, que j'appelle la transformation par plans symétriques (par rapport aux plans bissecteurs des angles dièdres du tétraèdre).

44. Les sommets A, B, C, D du tétraèdre de référence sont des points fondamentaux simples de la transformation; ils ont pour surfaces fondamentales les faces opposées du tétraèdre.

45. A un plan passant par une des arêtes du tétraèdre correspond évidemment un autre plan passant par cette arête. De même à une droite quelconque passant par un des sommets du tétraèdre correspond une autre droite passant par ce sommet.

Si à un plan passant par une des arêtes AB du tétraèdre correspond un autre plan passant par la même arête, ce dernier plan n'est que la partie essentielle de la surface correspondante, qui contient en outre encore les deux plans accessoires BCD et CDA qui correspondent aux points fondamentaux A et B. A un plan quelconque correspond donc une surface F^3 du troisième ordre qui, comme je le démontrerai tout de suite, a des points doubles aux quatre points fondamentaux. Et si la surface F^3 a des points doubles aux points fondamentaux, elle est coupée par chaque arête du tétraèdre en quatre points; d'où il suit qu'elle doit contenir les six arêtes.

On démontre de la manière suivante que les points A, B, C, D sont des points doubles de la surface correspondante F^3. Si l représente la droite d'intersection d'un plan quelconque π avec la face ABC du tétraèdre et qu'on mène un plan $\overline{lD}$ par l et le sommet opposé D, il est clair que la surface correspondante du plan $\overline{lD}$ est une surface F^2 du second ordre. Parce qu'à une droite passant par D correspond une autre droite passant par ce point, cette surface F^2 doit être un cône, dont D est le sommet. D'où l'on dérive qu'à la droite l correspond l'ensemble des points du cône F^2 situés à une distance infiniment petite du sommet D (parce que la droite l se trouve dans le plan fondamental de D) et que ce cône F^2 contient les tangentes à la surface F^3 au point D, c'est-à-dire que le point D est un point double de la surface F^3 correspondant au plan π, etc.

46 La courbe correspondante d'une droite quelconque l est une courbe gauche cubique R^3 passant par les quatre sommets A, B, C, D; car un plan quelconque π coupe cette courbe en trois points, parce que sa surface correspondant F^3 est coupée en trois points par l. Ou bien, parce que les surfaces F^3, qui correspondent à deux plans quelconques passant par l, passent déjà par les six arêtes du tétraèdre, elles se coupent encore en une courbe R^3. Ou bien encore, parce que les plans BCO, CAO, ABO engendrent trois faisceaux de plans projectifs quand O décrit une droite quelconque l et que cette propriété convient aussi aux trois faisceaux des plans symétriques BCO′, CAO′, ABO′, il est clair que le lieu du point O′ est l'ensemble des points d'intersection des plans homologues de trois faisceaux de plans projectifs, c'est-à-dire une courbe gauche cubique passant par A, B, C (et D).

Quand l coupe une des arêtes du tétraèdre, la courbe correspondante est une conique passant par les deux points fondamentaux situés sur cette arête. Dans ce cas, la courbe correspondante R^3 de l se compose d'une partie accessoire qui correspond au point d'intersection de l avec l'arête, l'arête opposée, et d'une partie essentielle, la conique. On voit sans peine, en effet, que la conique peut être considérée comme la partie complémentaire de l'intersection du plan correspondant au plan par l et l'arête et de la surface F^3 correspondant à un plan quelconque passant par l, l'autre partie étant l'arête même.

Si la droite l coupe deux arêtes opposées du tétraèdre, la courbe correspondante est encore une droite qui s'appuie sur les mêmes arêtes.

Le résultat qu'à un point quelconque d'une des arêtes correspond l'arête opposée tout entière forme la clef des dégénérations de la courbe R^3. Il explique de même pourquoi chaque surface F^3, qui correspond à un plan quelconque π, contient les six arêtes, ces arêtes étant les éléments qui correspondent aux points d'intersection de π avec les arêtes opposées.

47. La transformation contient douze plans, vingt-huit droites et huit points, qui coïncident avec leurs éléments correspondants. Les plans, ce sont les douze plans bissecteurs des angles dièdres du tétraèdre. Les droites, ce sont les droites d'intersection des

plans bissecteurs, ayant mis à part les arêtes. Et les points, ce sont les points d'intersection des plans bissecteurs ayant mis à part les sommets, c'est-à-dire les centres des huit sphères qui touchent les quatre faces du tétraèdre.

Le nombre des droites qui coïncident avec leurs droites correspondantes est vingt-huit; car les arêtes figurent parmi les soixante-six droites d'intersection des douze plans bissecteurs et les soixante droites restantes, contenant trois fois les mêmes seize droites, doivent être diminuées de trente-deux. D'ailleurs ces droites sont les droites qui passent par deux des huit points qui correspondent à eux-mêmes.

Si l'on indique le centre de la sphère inscrite par M, ceux des sphères exinscrites par M_a, M_b, M_c, M_d et ceux des sphères qui se trouvent dans un des deux combles opposés par M_{ab} (ou M_{cd}), M_{ac} (ou M_{bd}), M_{ad} (ou M_{bc}), on peut distinguer cinq types différents de droites qui coïncident avec leurs droites correspondantes, dont MM_a, MM_{ab}, M_aM_b, M_aM_{ab}, $M_{ab}M_{ac}$ sont des représentants. Les droites du premier et du quatrième type se trouvant à la fois en trois des douze plans bissecteurs sont les droites qui figurent trois fois parmi les droites d'intersection de ces plans; on voit sans peine que la droite MM_a se trouve dans les plans AB_+, AC_+, AD_+ et la droite M_aM_{ab} dans les plans AB_+, BC_-, BD_- où les signe $+$ et $-$ ont la signification établie dans l'article 5.

48. La surface correspondante d'une surface G^2 du second ordre, qui passe par les quatre points fondamentaux, est encore une surface G' du second ordre passant par ces points; car la surface correspondante d'une surface quelconque du second ordre est une surface du sixième ordre qui a des points quadruples en A, B, C, D et passe donc deux fois par chaque arête du tétraèdre. Et dans le cas particulier d'une surface G^2 par les points A, B, C, D, cette surface correspondante du sixième ordre doit contenir quatre plans accessoires, les faces du tétraèdre; d'où l'on dérive que la partie essentielle complémentaire est une surface du second ordre qui passe par A, B, C, D.

Chaque surface G^2 par A, B, C, D, qui contient encore quatre des huit points M, choisis de manière qu'aucun des points A, B, C, D n'est en ligne droite avec deux de ces quatre points, c'est-à-dire les points M_a, M_b, M_c, M_d ou les points M, M_{ab}, M_{ac} M_{ad}, correspond à elle-même; car une surface G^2 par A, B, C, D et M_a, M_b, M_c, M_d est coupée par le plan AB_+ suivant une conique par A, B, M_a, M_b, et à leur tour toutes ces coniques sont coupées par la droite MM_{ab} suivant une involution qui ne diffère guère de l'involution des points correspondants sur cette droite, ces deux involutions ayant les mèmes points doubles, les points M et M_{ab}. D'où l'on voit que les deux surfaces du second ordre par A, B, C, D et M_a, M_b, M_c, M_d, qui correspondent l'une à l'autre, sont coupées par chacune des six droites qui passent par deux des points M, M_{ab} M_{ac}, M_{ad}, aux mêmes points. Ainsi l'on a obtenu déjà vingt points communs aux deux surfaces. Et parce que ces vingt points se trouvent six à six dans les douze plans bissecteurs, ils ne peuvent être situés sur une courbe gauche du quatrième ordre, qui est la courbe d'intersection totale de deux surfaces du second ordre. Donc les deux surfaces doivent coïncider, etc.

49. A la gerbe de rayons l, dont un des points M est le centre, correspond le réseau des courbes gauches cubiques R^3, dont A, B, C, D et M sont les points de base. Les tangentes à ces courbes au point M forment une gerbe de rayons l' projective à la gerbe l; car à une droite l correspond une droite l' et aux droites l situées dans un plan π correspondent des droites l' également situées dans un plan π', le plan tangent en M à la surface correspondante F^3 de π. Mais ces deux gerbes coïncident, parce que les quatre rayons MA, MB, MC, MD correspondent à eux-mêmes. Donc, chaque courbe et chaque surface qui passent par un point M sont touchées en ce point par leur courbe et leur surface correspondantes, etc.

Ainsi l'on retrouve le résultat de l'article précédent. Chaque surface G^2 par A, B, C, D et M_a, M_b, M_c, M_d doit coïncider avec sa surface correspondante G', ces deux surfaces se touchant en quatre de ces huit points, tandis que les plans de contact sont indépendants de la position des huit points.

50. Dans chacun des douze plans bissecteurs la correspondance des points est la correspondance générale dont il était question à la fin de l'article 13; car le plan ABM coupe le tétraèdre suivant

le triangle de référence de la correspondance du plan ; mais le point M n'est centre du cercle inscrit ni centre de gravité et peut être placé en un point quelconque du triangle par une altération convenable du tétraèdre qui n'affecte pas le triangle.

51. Le lieu des droites qui passent par un point donné P et qui contiennent deux points correspondants est un cône H^3 du troisième ordre par A, B, C, D dont P est le sommet; car un plan quelconque π par P coupe sa surface correspondante F^3 suivant une courbe du troisième ordre C^3, dont les points se correspondent deux à deux. Eh bien, les droites qui joignent un point quelconque Q de cette courbe aux couples de ses points correspondants forment un faisceau de rayon en involution; ce qui prouve que trois de ces droites passent par le point Q, les deux rayons doubles de cette involution et la droite qui lie le point Q à son point correspondant Q'. Mais cela prouve encore que les droites en question enveloppent une courbe de la troisième classe, une courbe qui admet trois tangentes passant par P; donc le plan π par P contient trois arêtes du cône H^3, etc.

La considération d'un plan par P et par une des arêtes du tétraèdre mène encore à l'ordre du cône ; car ce plan ne peut contenir que trois arêtes du cône, les droites qui lient P aux deux points fondamentaux de l'arête et la droite par P qui s'appuie sur l'arête et sur l'arête opposée.

Le cône H^3 peut être considéré sous un autre point de vue. On sait qu'à la gerbe de rayons par P correspond le réseau des courbes R^3, dont A, B, C, D et P' sont les points de base. Tandis qu'une droite menée au hasard par P ne coupe pas sa courbe correspondante R^3, le cône H^3 est le lieu des droites l par P qui s'appuient sur leurs courbes correspondantes en deux points correspondants.

Considérons les dégénérations du cône H^3. Quand le point P est situé dans un des plans bissecteurs, le cône se compose de ce plan et d'un cône du second degré. Quand P est situé dans deux des plans bissecteurs à la fois, ce qui arrive quand P se trouve sur une des arêtes ou sur une des droites qui correspondent à elles-mêmes du deuxième, troisième ou cinquième type, le cône se compose de trois plans, les deux plans bissecteurs et le plan par P et les deux points M qui ne se trouvent pas dans un des deux plans bissecteurs.

Quand P se trouve en trois des plans bissecteurs, le cône se compose de ces trois plans. Et quand P se trouve en plus de trois de ces plans, c'est-à-dire quand il coïncide avec un des sommets du tétraèdre ou avec un des points M, le cône est indéterminé, parce que dans ce cas il doit contenir chaque droite passant par P.

52. Le lieu des points correspondants, qui sont en ligne droite avec un point P quelconque, est une courbe R^7, qui passe par les sommets, les points M et le point P; car chaque plan par P coupe la courbe en sept points, le point P et les trois couples de points situés sur les trois arêtes du cône H^3 de P contenues dans le plan. Cette courbe est touchée en P par la droite qui joint le point P au point correspondant P'. J'engage le lecteur à étudier les dégénérations de la courbe R^7.

53. Suivant la théorie générale de la transformation birationnelle dans l'espace, la surface qui correspond au cône H^3 du point P est une surface K^5 dont A, B, C, D et P' sont des points triples. Cette surface qui passe une fois par les arêtes du tétraèdre, par les droites P'A, P'B, P'C, P'D et par les points M est le lieu des courbes R^3 par P' qui sont coupées en deux points par leurs droites correspondantes. Les dégénérations du cône H^3 amènent des dégénérations de la surface correspondante K^5, dont je recommande l'étude au lecteur.

54. En continuant mon sujet, j'aurais à examiner les surfaces d'un ordre plus élevé qui coïncident avec leurs surfaces correspondantes. Cependant cet examen me mènerait trop loin à présent. Je termine donc ce Chapitre avec l'observation bien simple que les courbes qui correspondent à elles-mêmes sont trouvées aussitôt qu'on a trouvé les surfaces qui jouissent de cette propriété; car la courbe d'intersection de deux surfaces qui correspondent à elles-mêmes est une courbe de la qualité désirée. Ainsi la courbe d'intersection R^4 de deux surfaces G^2 qui correspondent à elles-mêmes est une des courbes en question, etc.

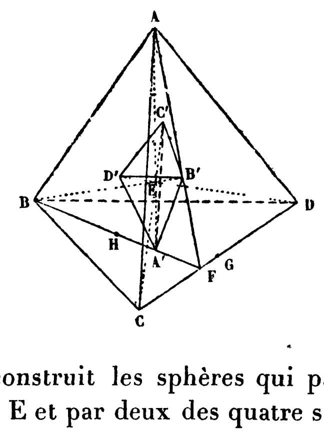
V. — *La transformation par sphères symétriques.*

55. La transformation par rayons vecteurs réciproques mène à l'extension de la transformation par cercles symétriques à l'espace.

En effet, quand ABCD (*fig.* 8) représente un tétraèdre, dont les quatre perpendiculaires AA′, BB′, CC′, DD′ abaissées des sommets sur les faces opposées ont un point E commun, les produits AE.AE′, BE.BE′, CE.CE′, DE.DE′ sont égaux. Donc, dans la transformation par rayons vecteurs réciproques, dont E est le pôle et le produit constant la puissance négative, aux points A′, B′, C′, D′ correspondent les points A, B, C, D et aux plans passant par deux des points A′, B′, C′, D′ correspondent des sphères passant par E et les deux points correspondants parmi A, B, C, D. Eu égard à l'invariabilité des angles dièdres dans la transformation auxiliaire, le théorème de l'article 4 se transforme dans le suivant, où, à ce qu'il me semble, les expressions « angle dièdre formé par deux sphères » et « sphères bissectrices de cet angle dièdre » n'auront pas besoin d'explication.

Dans un tétraèdre ABCD à perpendiculaires concourantes (dans

Fig. 8.



un point E) on construit les sphères qui passent par un point quelconque O, par E et par deux des quatre sommets A, B, C, D. Ensuite par rapport à chacune de ces sphères on construit une sphère adjointe passant par E et le même couple de sommets, de telle manière que les sphères bissectrices de l'angle dièdre formé par ces deux sphères sont en même temps les sphères bissectrices de l'angle dièdre d'un autre couple de sphères par E et par les mêmes deux sommets, dont l'une passe par l'un et l'autre par l'autre des deux sommets restants. Les six sphères adjointes ainsi obtenues qui passent déjà par E ont encore un point O′ commun.

56. Quand le plan passant par E et deux des quatre points A, B, C, D figure comme une des deux sphères bissectrices de l'angle dièdre formé par une sphère quelconque, par E et ces deux sommets et par sa sphère adjointe, ces deux sphères sont symétriques l'une à l'autre par rapport au plan par E et les deux sommets. Démontrons que la transformation précédente ne mérite le nom de transformation par sphères symétriques que quand le tétraèdre de référence est un tétraèdre régulier.

La droite CD est perpendiculaire au plan ABE. Prolongeons le plan ABE jusqu'à ce qu'il coupe la droite CD au point F. Il y a deux cas à considérer, que le point milieu G de CD coïncide avec F, ou que ce point se trouve ailleurs. Eh bien, il va sans dire que les sphères ABEC et ABED sont symétriques l'une à l'autre par rapport au plan ABE dans le premier de ces deux cas, c'est-à-dire que la transformation par sphères adjointes est une transformation par sphères symétriques quand le tétraèdre de référence est régulier. Et, d'un autre côté, les sphères ABEC et ABED ne sauraient être symétriques l'une à l'autre par rapport au plan ABE, dans le cas contraire où F ne coïncide pas avec le point milieu G de CD; car il est impossible que la sphère ABEC coupe CD encore en un point D″ symétrique de D par rapport à F, parce que ce deuxième point d'intersection D″, qui n'est pas indiqué dans la *fig.* 8, se trouve bien au même côté que C de F, mais à une distance D″F qui est toujours le double de FD.

En effet, le deuxième point d'intersection H de BF avec la sphère ABEC est déterminé par l'équation

$$A'E . A'A = A'B . A'H,$$

tandis que dans le triangle ABF on a

$$A'E . A'A = A'B . FA';$$

ce qui donne

$$A'H = FA'.$$

On a donc encore sur les deux cordes par F l'égalité

$$2A'F.BF = CF.D''F,$$

tandis que le triangle BCD donne la relation

$$A'F.BF = CF.FD;$$

on trouve donc enfin

$$D''F = 2FD.$$

Ainsi, il est évident que, seulement dans le cas d'un tétraèdre de référence régulier, la transformation par sphères adjointes est en même temps une transformation par sphères symétriques.

57. L'ordre de la transformation par sphères symétriques se trouve par la considération de la surface correspondante d'un plan passant par E et deux des sommets, du plan ABE par exemple. La partie accessoire de cette surface se compose des surfaces fondamentales des trois points A, B, E, tandis que la partie essentielle est le plan ABE lui même. Aux points A et B correspondent les sphères BCDE et CDAE; comme nous le verrons d'abord, la surface fondamentale du point E est du sixième ordre; donc la transformation en question est du onzième ordre, c'est-à-dire que la surface correspondant à un plan quelconque est une surface F^{11}.

La surface fondamentale du point E se trouve au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques. Dans cette transformation, le plan π_∞, situé tout entier à l'infini, correspond au point E. Dans la transformation par plans symétriques, la surface correspondante de π_∞ est une surface F_3; et à cette surface F_3 doit correspondre dans la transformation auxiliaire une surface F_6 qui n'abaisse pas son ordre, parce que la surface F_3 ne passe ni par le point E, ni par le cercle imaginaire situé dans le plan π_∞, qui est commun à toutes les sphères. En effet, le plan π_∞ ne passant pas par E, la surface F_3 ne saurait contenir ce point; et la surface F_3 coupe π_∞ suivant trois droites, les droites d'intersection de π_∞ avec les trois plans passant par deux des trois axes de l'octaèdre dont les sommets sont les points milieux des arêtes du tétraèdre régulier de référence.

58. Au premier abord, on peut croire qu'il soit possible de déter-

miner la transformation par sphères symétriques d'une manière plus simple en s'appuyant sur le théorème suivant, qui semble être une extension tout évidente du théorème de l'article **14**.

Étant donné un tétraèdre quelconque ABCD et un point O, on construit d'abord les quatre sphères passant par BCDO, CDAO, DABO, ABCO et ensuite les quatre sphères symétriques par rapport aux faces BCD, CDA, DAB, ABC du tétraèdre; les sphères symétriques ainsi obtenues passent encore par un même point O'.

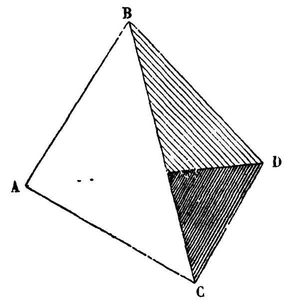
A la vérité, ce théorème mènerait à des considérations plus simples par rapport à la transformation en question, s'il était vrai; seulement il est faux, comme nous allons le voir tout à l'heure.

D'abord je remarque que l'extension de la démonstration du théorème de l'article **14** a des difficultés qui lui sont propres, la sphère n'étant pas dans l'espace le lieu des points d'où l'on voit un cercle donné par trois points sous un angle solide donné : ce qui cependant ne prouve pas encore la fausseté du théorème.

Si le théorème était vrai, les points O et O' formeraient une transformation birationnelle en involution dans l'espace, où les sphères, dont les cercles circonscrits aux triangles BCD, CDA, DAB, ABC sont de grands cercles, correspondraient à elles-mêmes : ce qui exige que le deuxième point d'intersection de trois de ces quatre sphères qui passent par A se trouve aussi sur la quatrième. Eh bien, dans le cas en question d'un tétraèdre régulier de référence, ce point commun aux quatre sphères doit être le centre du tétraèdre. Mais cela est impossible, parce que le quart de la hauteur du tétraèdre n'égale pas les deux tiers de la hauteur du triangle équilatéral des faces du tétraèdre.

59. Le raisonnement précédent mène encore à une autre transformation par sphères symétriques au moyen d'un trièdre A limité (*fig.* 9), c'est-à-dire d'un tétraèdre ABCD ouvert par une de ses faces BCD. Construisons d'abord les sphères qui passent par ACDO, ADBO, ABCO, et ensuite les sphères symétriques à celles-ci par rapport aux faces ACD, ADB, ABC; ces trois sphères symétriques, qui passent déjà par A, ont encore un point commun O', qui forme avec O une transformation par sphères symétriques, plus générale que celle des articles précédents. De même que, suivant la dernière remarque de l'article **23**, deux groupes de cercles symétriques suffisent pour la détermination de la transformation par cercles symétriques, on voit que les trois groupes de sphères symétriques suffisent pour la détermina-

Fig. 9.



tion de la transformation par sphères symétriques. L'omission du plan BCD et des sphères passant par B, C, D a donc enlevé toutes les difficultés.

60. En continuant mon sujet, j'aurais à examiner de plus près les deux transformations par sphères symétriques, dont je viens de donner l'énoncé. D'abord j'aurais à rechercher l'ordre de la deuxième, qui très probablement est différent de onze. Mais l'examen minutieux de ces deux transformations, présentant des difficultés tout à fait différentes de celles que nous avons rencontrées jusqu'ici, doit être ajourné à présent, ce petit travail étant déjà plus volumineux que je ne m'étais proposé de le faire.