BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 169-174
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_169_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HERMITE (C.). — COURS PROFESSÉ PENDANT LE 2^e SEMESTRE DE L'ANNÉE 1881-1882, rédigé par M. ANDOYER, élève de l'École Normale supérieure. — Paris, 1882. Hermann, libraire, rue de la Sorbonne, 1 vol. in-4°, 202 p. lith.

M. Hermite a rendu un grand service à ceux qui étudient les Mathématiques en autorisant la publication du Cours qu'il professe avec tant d'éclat à la Faculté des Sciences de Paris.

Ce n'est pas sans étonnement qu'on trouvera, dans les *vingt-cinq* Leçons que comporte ce Cours, tant de matières touchées ou approfondies; il convient, avant d'en faire l'énumération, de rappeler la nature de l'enseignement donné par M. Hermite.

Le programme de la licence ès sciences mathématiques est, chaque année, entièrement développé à la Faculté des Sciences de Paris : cinq professeurs, deux maîtres de conférences suffisent à cette tâche. Deux chaires sont, en fait, consacrées à l'enseignement du Calcul différentiel et intégral; M. Bouquet occupe l'une pendant deux semestres, M. Hermite occupe l'autre pendant un seul semestre. Leur enseignement est strictement élémentaire et ne dépasse pas les limites du programme de la licence; mais on jugera qu'il ne peut être complet et au courant de la Science que grâce au rare talent et aux efforts extraordinaires de ceux qui le donnent, si l'on veut bien penser à l'étendue du programme et au développement considérable que les découvertes récentes ont donné à quelques-uns de ses Chapitres.

M. Hermite s'est chargé d'enseigner ce qui concerne les applications du Calcul intégral à la quadrature et à la rectification des courbes, à l'évaluation des aires des surfaces courbes et des volumes; la théorie générale des fonctions d'une variable imaginaire; l'application de cette théorie à l'étude des intégrales eulériennes et des fonctions elliptiques.

Cinq Leçons sont consacrées à la partie géométrique; les applications sont naturellement choisies en vue de ce qui suivra; ainsi la rectification des coniques, ou la quadrature des cubiques planes conduisent à la considération des intégrales de la forme $\int f(x,y)\,dx$, où $f(x,y)$ est une fonction rationnelle de x et de y, et où y est la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré en x : c'est, pour le professeur, l'occasion d'exposer, d'après Legendre, la réduction des intégrales de cette espèce aux intégrales elliptiques, d'indiquer quelques-uns des résultats si simples obtenus à ce propos par M. Tchebychef, de signaler enfin quelques cas de réduction d'intégrales elliptiques à des fonctions algébrico-logarithmiques (¹). Dans la même partie de son Cours, M. Hermite trouve l'occasion de préparer l'introduction des intégrales prises entre des limites imaginaires en considérant des intégrales de la forme $\int_{t_0}^{t_1} f(x,y)\,dt$, où x et y sont des fonctions réelles de la variable réelle t.

Trois Leçons sont ensuite employées à l'exposition des propriétés les plus simples des fonctions d'une variable imaginaire, à la définition des intégrales prises entre des limites imaginaires, à la démonstration du théorème fondamental de Cauchy relatif à ces intégrales. Dans ces Leçons et celles qui suivent, M. Hermite tire le plus grand parti de l'expression simple donnée par M. Darboux dans le *Journal de M. Resal* (²) pour les intégrales de la forme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{F}(x)\,dx$, où $f(x)$ est une fonction continue de la forme $\varphi(x)+i\psi(x)$ de la variable réelle x, où a et b sont des quantités réelles, où $f(x)$ enfin est une fonction constamment positive entre les limites de l'intégration ; il signale une autre expression des intégrales de cette nature due à M. Weierstrass. La méthode suivie pour établir le théorème de Cauchy est celle que M. Carl Neumann a développée au début de ses Leçons sur les intégrales abéliennes. Dans les quatre Leçons qui suivent, M. Hermite expose les conséquences immédiates du théorème de Cauchy et les principes, dus à M. Weierstrass et à M. Mittag-Leffler, de la théorie des fonctions uniformes ; il y donne la décom-

(¹) Voir *Sur une formule d'Euler* (*Journal de M. Resal*, t. VI, p. 5); *Bulletin*, 2ᵉ série, t. IV, IIᵉ Partie, p. 267, et t. III, Iʳᵉ Partie, p. 226.

(²) *Sur les développements en série des fonctions d'une variable*. IIIᵉ Série, t. II, p. 291. — Voir *Bulletin*, 2ᵉ série, t. I, IIᵉ Partie, p. 333.

position d'une fonction transcendante entière en facteurs primaires et l'expression générale des fonctions uniformes admettant un nombre infini de points singuliers, isolés, essentiels ou non, dont l'ensemble admet le point ∞ pour limite unique, expression donnée par MM. Mittag-Leffler dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* pour l'année 1882. La marche suivie par M. Hermite est celle qu'il a ouverte dans sa lettre au géomètre suédois (¹), insérée dans le tome XII des *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ.* Dans cette lettre, à la vérité, le théorème de M. Mittag-Leffler n'est établi que dans le cas où tous les points singuliers sont des pôles; mais la même méthode conduit au théorème général.

Le professeur s'arrête ensuite un peu (Leçons XIII, XIV et XV) sur les intégrales eulériennes : la forme donnée par M. Weierstrass à la fonction $\frac{1}{\Gamma(x)}$, celle que M. Prym a obtenue pour la fonction $\Gamma(x)$ elle-même, fournissent des applications immédiates des résultats établis dans les Leçons précédentes; outre les propriétés élémentaires de la fonction $\Gamma(x)$, déduites de la considération de la série qui représente la dérivée seconde de $\log\Gamma(x)$, M. Hermite démontre la formule de Laplace, relative au calcul approché de $\Gamma(x)$, quand x est un nombre entier très grand.

Dans les deux Leçons qui suivent, il développe, comme dans la lettre déjà citée à M. Mittag-Leffler, cette idée si simple et si naturelle que la notion de coupure et ce genre spécial de discontinuité auquel elle correspond s'offrent d'eux-mêmes, au début du Calcul intégral, dans la considération d'une intégrale définie où figure un paramètre variable.

Le théorème de Cauchy sur le nombre de racines d'un polynôme contenues à l'intérieur d'un contour, l'établissement de la série de Lagrange, quelques indications sur la nature des séries qui proviennent de la résolution par rapport à y d'une équation algébrique entre y et x, en particulier la démonstration du célèbre théorème d'Eisenstein à ce sujet et l'énoncé de la curieuse proposition de M. Tchebychef sur les séries à coefficients rationnels qui peuvent représenter des fonctions composées de fonctions algé-

(¹) Voir *Bulletin*, 2ᵉ série, t. V, Iʳᵉ Partie, p. 260.

briques, exponentielles et logarithmiques, sont l'objet de la XVIII^e et de la XIX^e Leçon. Les deux Leçons suivantes sont consacrées à l'étude de la nature des fonctions multiformes qui proviennent de l'intégration soit de fonctions uniformes, soit de fonctions multiformes, ainsi qu'aux moyens de rendre ces fonctions uniformes par l'introduction d'un système convenable de coupures.

Enfin les éléments de la théorie des fonctions doublement périodiques sont l'objet des dernières Leçons.

Le professeur montre comment on peut construire une fonction transcendante entière satisfaisant aux équations fonctionnelles

$$\Phi(x+a) = \Phi(x),$$
$$\Phi(x+b) = e^{-\frac{ki\pi b}{a}(2x+b)}\Phi(x),$$

où k est un nombre entier; la solution trouvée est la solution la plus générale possible et permet de construire la fonction uniforme la plus générale qui admette les deux périodes a et b et qui n'ait pas d'autres points singuliers que des pôles. De cette solution se déduisent immédiatement les quatre fonctions de Jacobi, qui conduisent elles-mêmes aux fonctions sn, cn, dn. La formule de décomposition en éléments simples donne ensuite les propriétés les plus essentielles des fonctions doublement périodiques; en particulier, son application aux fonctions $k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{sn}(x+a)$... conduit immédiatement aux formules d'addition; enfin l'étude attentive de la marche des valeurs de la fonction $\operatorname{sn} x$, quand la variable x décrit les côtés du rectangle dont les sommets ont pour affixes les points o, K, K′, K + iK′, où l'on suppose les quantités K et K′ réelles, conduit, de la façon la plus claire, à l'inversion de l'intégrale de première espèce

$$\xi = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

lorsqu'on suppose k réel et plus petit que l'unité. On remarquera la façon dont M. Hermite a traité le même problème dans le cas général : il prend pour point de départ les résultats obtenus par M. Fuchs [1] relativement à la façon dont va-

[1] *Die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale als Functionen eines Parameters aufgefasst.* (*Journal de Borchardt,* t. 57, p. 91).

rient les intégrales

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k'^2z^2)}},$$

quand on fait décrire au point dont l'affixe est k^2 un contour fermé quelconque; les quantités K et iK' sont alors remplacées par les quantités $L = \alpha K + \beta i K'$, $iL' = \gamma K + \delta i K'$; α, β, γ, δ sont des entiers assujettis à la condition $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, β et γ étant pairs, tandis que α et δ sont impairs et $\equiv 1 \pmod 4$; par la substitution des quantités L et L', aux quantités K et K', les transcendantes de Jacobi se reproduisent multipliées par des facteurs constants, les fonctions sn, cn, dn se reproduisent sans changement; enfin les quantités $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k'}$ se reproduisent multipliées par une racine quatrième de l'unité. Ces résultats, joints à ce qui a été dit sur l'inversion de l'intégrale de première espèce quand le module est réel et plus petit que 1, et à ce fait que, au moyen des quantités K et K' définies par les intégrales rectilignes

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(a+ib)\sin^2\varphi}},$$

$$K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-(1-a-ib)\sin^2\varphi}},$$

on peut, la partie réelle du quotient $\frac{K'}{K}$ étant positive, construire les quatre transcendantes de Jacobi, permettent de résoudre le problème de l'inversion, quel que soit le module k.

Enfin, en terminant son Cours, M. Hermite a donné l'expression, due à M. Appell (*Comptes rendus*, 5 avril 1882), des fonctions doublement périodiques uniformes admettant des points singuliers essentiels.

Ces Leçons ont été rédigées avec le plus grand soin par M. Andoyer, élève distingué à l'École Normale supérieure. On y retrouvera cet enchaînement artistique des idées, ces rapprochements inattendus et pourtant naturels, cette clarté qui ne s'arrête pas à la surface, mais pénètre au fond du sujet, cette richesse de souvenirs, ce coloris et cette chaleur communicative du langage, toutes ces rares qualités dont l'ensemble émerveille les auditeurs de notre grand Géomètre.

M. Hermann s'est chargé de l'exécution matérielle, qui est fort satisfaisante. L'écriture est élégante et se lit facilement; quelques fautes devaient nécessairement se glisser dans ces feuilles, lithographiées après chaque Leçon; mais elles sont peu nombreuses et ne peuvent dérouter le lecteur. J. T.