P.-H. SCHOUTE

Deux cas particuliers de la transformation birationnelle

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 152-168

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_152_1>

MÉLANGES.

DEUX CAS PARTICULIERS DE LA TRANSFORMATION BIRATIONNELLE;

PAR M. P.-H. SCHOUTE,

de Gröningue (Hollande).

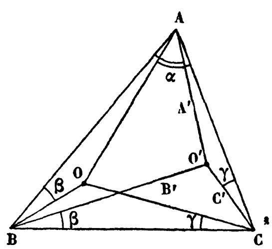
Dans ce qui suit, je m'occupe de deux cas particuliers bien simples de la transformation birationnelle. Je commence dans le plan par la transformation par droites symétriques et je continue par celle par cercles symétriques. Ensuite, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, j'indique la relation intime qui existe entre les deux transformations considérées. Enfin j'étudie dans l'espace la transformation par plans symétriques et j'indique dans quel cas la transformation par sphères symétriques est possible (¹).

Je suppose que le lecteur s'est familiarisé avec la théorie générale de la transformation birationnelle de M. Cremona, comme on le trouve dans le Mémoire excellent de M. le colonel du génie Dewulf (*Bulletin*, t. III, p. 200).

I. — *La transformation par droites symétriques.*

1. On joint les sommets A, B, C d'un triangle de référence (*fig.* 1) à un point quelconque O du plan de ce triangle par les droites AO, BO, CO et l'on construit les droites AA′, BB′, CC′ situées symé-

Fig. 1.



triquement à AO, BO, CO par rapport aux bissectrices des angles A, B, C du triangle. Ces droites AA′, BB′, CC′ passent par un même point O′, car l'équation

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}\,\frac{\sin\beta}{\sin(B-\beta)}\,\frac{\sin\gamma}{\sin(C-\gamma)}=1,$$

qui est vérifiée, parce que les droites AO, BO, CO passent par un même point, indique en même temps que les droites AA′, BB′, CC′ concourent en un même point.

(¹) A l'occasion de la solution d'une question d'équilibre, l'équilibre d'un triangle donné, dont les sommets s'appuient sur les faces d'un angle trièdre donné, M. F.-J. van den Berg, professeur à Delft, a trouvé, principalement par l'analyse, en se servant des coordonnées trilinéaires, quelques-uns des théorèmes suivants : les théorèmes des articles 1, 4, 6, 14, 29 et 30. Ils m'ont engagé à étudier la même matière au moyen de la théorie des transformations birationnelles.

2. Les points O et O′ forment une transformation birationnelle, parce qu'à un point quelconque O du plan correspond un point déterminé O′, et réciproquement; de plus, cette transformation est une transformation birationnelle en involution, parce que les points O et O′ se correspondent doublement, c'est-à-dire que le point O′ se place en O quand on a mis le point O en O′.

Les points O et O′ pouvant être les deux foyers d'une conique qui touche les côtés du triangle ABC, la correspondance est celle qui existe entre les deux foyers de toutes les coniques qui touchent ces trois droites ([1]).

3. Chaque point d'un des côtés du triangle ABC correspondant au sommet opposé, ce côté tout entier doit correspondre au sommet opposé. Les sommets du triangle de référence sont donc des points fondamentaux simples de la transformation et les côtés opposés en sont les courbes fondamentales.

On voit sans peine que les trois points A, B, C sont les seuls points fondamentaux, parce qu'à chaque autre point du plan correspond un point déterminé.

4. A une droite AO passant par un des trois points fondamentaux que nous venons de trouver, correspond évidemment une droite AO′ passant par le même point fondamental. D'où l'on déduit que la courbe qui correspond à une droite quelconque est une conique passant par les sommets du triangle ABC et que le réseau des coniques passant par A, B, C correspond au réseau des droites du plan.

([1]) La théorie des coniques présente encore bien d'autres transformations birationnelles. Je n'en cite que deux exemples, qui forment des transformations birationnelles tangentielles en involution, la correspondance des deux axes d'une conique qui passe par trois points fixes ou qui touche trois droites fixes.

Dans les deux cas cités, la transformation a une droite fondamentale triple, la droite l_∞ située tout entière à l'infini, et six droites fondamentales simples qui sont : dans le premier cas, les trois perpendiculaires aux côtés du triangle formé par les trois points aux points milieux de ces côtés et les trois droites qui joignent ces points milieux entre eux ; dans le second cas, les six bissectrices des trois angles du triangle formé par les trois tangentes.

Dans les deux cas, l'enveloppe correspondant à un point quelconque est de la quatrième classe, etc.

Plus directement on trouve le dernier résultat de la manière suivante. Quand le point O parcourt une droite quelconque l, les faisceaux de rayons [1] AO et BO sont perspectifs; donc les faisceaux des rayons symétriques AO′ et BO′ sont projectifs. L'ensemble des points d'intersection de leurs rayons homologues, c'est-à-dire le lieu des points O′ qui correspondent aux points O de la droite quelconque l, est donc une conique qui passe par les points A et B. Mais si, dans les raisonnements, on remplace un des deux faisceaux AO et BO par le faisceau CO, on trouve que cette conique passe de même par le point C; donc, la conique qui correspond à une droite quelconque l passe par les trois points fondamentaux A, B, C.

En particulier, on trouve que le cercle circonscrit au triangle ABC correspond à la droite l_∞ du plan qui se trouve tout entière à l'infini, car, les faisceaux de rayons AO et BO des points O de l_∞ étant congruents, les faisceaux des rayons symétriques AO′ et BO′ le sont aussi, etc. Eu égard à la fin de l'article 2, ce cas particulier démontre un théorème connu : *Le lieu des foyers des paraboles qui touchent trois droites données est le cercle circonscrit au triangle formé par ces droites.*

5. Il y a quatre points et six droites qui coincident avec leurs éléments correspondants. Les points, ce sont le centre du cercle inscrit et les centres des cercles exinscrits au triangle ABC; les droites, ce sont les six droites qui passent par deux de ces quatre points, les six bissectrices des angles du triangle ABC. J'indique les points par M, M_a, M_b, M_c et les droites par A_+, A_-, B_+, B_-, C_+, C_-, le signe $+$ représentant la bissectrice d'un angle même du triangle, le signe $-$ représentant la bissectrice d'un angle adjacent.

Eu égard à la fin de l'article 2, les résultats de cet article-ci sont bien évidents.

6. La courbe correspondante d'une conique C^2, qui passe par deux des trois points fondamentaux, A et B par exemple, est

(1) Par rapport à la terminologie, j'ai suivi M. O. Chemin dans sa traduction du travail excellent de M. Th. Reye, *Leçons sur la Géométrie de position.*

encore une conique par ces deux points. Car à une conique quelconque correspond une courbe quartique, dont A, B, C sont des points doubles. Et quand la conique passe par A et B, la courbe correspondante se compose d'une partie accessoire, les droites BC et CA qui correspondent aux points A et B, et d'une partie essentielle, une conique qui passe par A et B.

Quand la conique C^2 par A et B contient encore deux des points M, qui ne sont pas en ligne droite avec A et B, c'est-à-dire M et M_c ou M_a et M_b, elle coïncide avec sa conique correspondante. Car le faisceau des coniques qui passent par A, B, M, M_c coupe la droite $M_a M_b$ ou C_- suivant une involution, qui ne diffère guère de l'involution des points correspondants de cette droite, puisque ces deux involutions ont les mêmes points doubles, les points M_a et M_b. D'où il s'ensuit que les deux coniques doivent coïncider, parce qu'elles passent par les mêmes six points, les quatre points A, B, M, M_c et les deux points d'intersection de C^2 avec C_-. Le centre de l'involution des points correspondants sur cette conique C^2 est situé sur la droite C_-, parce que les deux points d'intersection de C^2 avec C_- correspondent l'un à l'autre. La droite C_- est donc le lieu des centres d'involution des points correspondants de toutes les coniques C^2 du faisceau, déterminé par les points de base A, B, M, M_c. Ce qui se démontre de la même manière de chacune des six droites A_+, A_-, etc., par rapport à un faisceau déterminé de coniques.

7. Au faisceau de rayons l, dont un des points M est le centre, correspond le faisceau de coniques C^2, dont A, B, C et le point M en question sont les points de base. Les tangentes à ces coniques au point M forment un faisceau de rayons l', qui est projectif au faisceau de rayons l. Mais ces deux faisceaux projectifs coïncident, parce qu'ils ont trois éléments correspondants communs, les droites MA, MB, MC. Donc, chaque courbe qui passe par un des points M est touché en ce point par sa courbe correspondante. Et quand un des points M est un point multiple d'une courbe C^n, ce point se trouve avec le même degré de multiplicité sur la courbe correspondante, tandis que les tangentes aux deux courbes en ce point coïncident.

On retrouve donc le résultat de l'article précédent, que chaque conique qui passe par A, B, M et M_c correspond à elle-même. Car les deux coniques ont communs les quatre points A, B, M, M_c et les tangentes en M et M_c. Réciproquement, l'article précédent aurait pu conduire au résultat que nous venons de trouver.

8. Chaque droite contient deux points qui correspondent l'un à l'autre, les points d'intersection de cette droite et sa conique correspondante. En particulier la droite l_∞ coupe le cercle circonscrit au triangle ABC en deux points correspondant l'un à l'autre. D'où l'on déduit qu'à chaque cercle qui passe par deux des trois points A, B, C correspond encore un cercle passant par ces deux points.

Comme on le voit sans peine, le précédent contient la solution de la question suivante : *Déterminer les foyers d'une conique, qui touche trois droites données et dont un des axes est donné en position.*

9. Le lieu des points correspondants, qui sont en ligne droite avec un point donné P, est une courbe du troisième ordre D^3, qui correspond à elle-même. Car cette courbe passant une fois par P, chaque droite par P en contient le point P et les deux points d'intersection de la droite avec sa conique correspondante. En P la courbe est touchée par la droite qui joint le point P à son point correspondant P'; elle passe par les points A, B, C (parce que le point d'intersection de PA avec BC correspond au point A, etc.) et par les quatre points M.

La courbe D^3 est encore l'ensemble des points d'intersection des courbes homologues de deux faisceaux projectifs, dont l'un est le faisceau de rayons ayant P pour centre et l'autre le faisceau des coniques correspondantes ayant les points A, B, C et P' pour base. D'où l'on déduit d'une manière non moins simple les propriétés du lieu.

D'un autre côté, chaque courbe du troisième ordre qui passe par A, B, C et les quatre points M ne peut différer de sa courbe correspondante, parce que ces deux courbes ont au moins onze points communs, les trois points A, B, C et les quatre points M où elles se touchent. Le réseau des courbes D^3 qui passent par les sept points (les points A, B, C et les points M) est donc projectif au réseau des points P du plan.

Autrefois j'ai étudié en général la correspondance entre les deux points de base mobiles d'un faisceau de courbes planes du troisième ordre ayant sept points de base fixes (Association française, congrès de Montpellier, *Annuaire* de 1879, p. 194-206). De cette correspondance la transformation par droites symétriques forme un cas très particulier (voir *loc. cit.*, p. 100, *fig.* 15, colonne 2, case du milieu, où les trois points 1 correspondent aux points A, B, C, tandis que les quatre points sans chiffre correspondent aux points M).

10. L'indication de courbes L^n d'un ordre plus élevé n, qui coïncident avec leurs courbes correspondantes L', n'offre en général plus de difficulté. On n'a qu'à observer que :

1° La courbe L' doit s'accorder à la courbe L^n en ordre (à cette fin on doit faire passer L^n une ou plusieurs fois par les points A, B, C);

2° Le nombre des conditions simples équivalent à celles qui expriment que la courbe L^n passe par les points simples et multiples assignés ne doit pas surpasser $\frac{n(n+3)}{2}$;

3° Les points simples et multiples qui déterminent L^n doivent être choisis de manière qu'ils ne déterminent qu'une seule courbe L^n de l'ordre désiré;

4° Le nombre des points communs à L^n et sa courbe correspondante doit surpasser n^2.

Ainsi l'on trouve les courbes suivantes :

(a) Chaque courbe E^4 (du quatrième ordre) qui passe deux fois par A et M et une fois par B, C, M_b, M_c et deux points correspondants O et O'. J'indique ces courbes par le symbole

$$4(A^2BC,\ M^2M_bM_c,\ OO');$$

(b) Chaque courbe F^5 caractérisée par

$$5(A^2B^2C,\ M^2M_a^2M_b^2M_c,\ OO');$$

(c) Chaque courbe G^6 avec le symbole

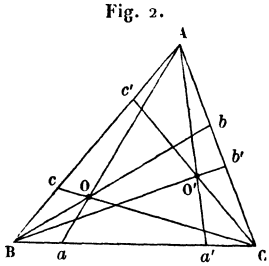
$$6(A^2B^2C^2,\ M^2M_a^2M_b^2M_c^2,\ OO'),\ \ldots.$$

J'observe encore qu'on peut remplacer les deux points O et O' par les points où chaque cercle est coupé par la droite l_∞ pour obtenir comme cas particuliers des courbes circulaires, des quartiques, des quintiques, des sextiques circulaires, qui coïncident avec leurs courbes correspondantes.

Il va sans dire que les droites qui joignent les points correspondants des courbes E^4, F^5, G^6 ne passent pas par un même point comme dans le cas des courbes D^3, mais qu'elles enveloppent des courbes nouvelles.

11. Pour la construction des droites symétriques, on a renversé dans chaque angle du triangle ABC les deux parties α et $A - \alpha$, β et $B - \beta$, γ et $C - \gamma$ déterminées par les droites AO, BO, CO. Si, au lieu de renverser ces parties des angles, on renverse les segments déterminés par les prolongements de AO, BO, CO sur les côtés opposés, on trouve encore trois droites passant par un même point O′.

Fig. 2.



Car le théorème du marquis de Céva donne par rapport aux droites Aa, Bb, Cc (*fig.* 2), qui passent par un point O, l'équation

$$\frac{Ab}{bC}\,\frac{Bc}{cA}\,\frac{Ca}{aB} = 1,$$

qui dans la forme

$$\frac{b'C}{Ab'}\,\frac{c'A}{Bc'}\,\frac{a'B}{Ca'} = 1$$

exprime que les droites Aa', Bb', Cc' passent par un même point O′. Ainsi l'on trouve encore une transformation birationnelle en involution. Parce qu'il y a une grande analogie entre cette transformation nouvelle et celle par droites symétriques, j'indiquerai seulement les différences entre les deux transformations.

12. La démonstration directe de l'article 4 doit subir un petit changement de nomenclature. De plus, à la droite l_∞ correspond,

au lieu du cercle circonscrit au triangle ABC, une ellipse qui touche en A, B, C les droites menées par ces points parallèlement aux côtés opposés BC, CA, AB. Seulement, si le triangle de référence ABC est équilatère, cette ellipse est encore un cercle. Mais dans ce cas les deux transformations sont identiques.

Quand la droite l_∞ correspond à une ellipse, les points où cette droite est coupée par un cercle quelconque ne correspondent plus l'un à l'autre; à un cercle par A et B ne correspond donc plus un cercle, etc. De plus, les points M qui correspondent à eux-mêmes sont, dans la nouvelle transformation, le centre de gravité du triangle ABC et les trois points d'intersection des droites par A, B, C parallèles aux côtés opposés, etc.

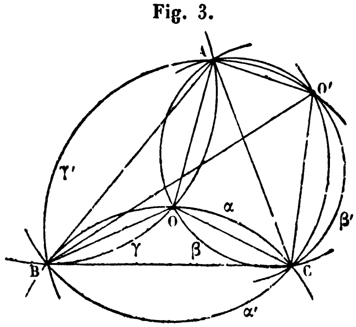
13. Une combinaison des deux constructions, le renversement des parties des angles et le renversement des segments sur les côtés du triangle, conduit encore à une transformation qui présente beaucoup d'analogie avec celles que nous avons étudiées. A la droite l_∞ correspond une autre ellipse et les points M y ont une autre signification, etc.

Les transformations considérées ne sont toutes que des cas particuliers de la transformation quadratique générale où les trois points simples A, B, C sont les seuls points fondamentaux.

II. — *La transformation par cercles symétriques.*

14. Si trois cercles α, β, γ (*fig.* 3) décrits sur les côtés d'un

Fig. 3.



triangle ABC comme cordes ont un point commun O et que l'on fasse subir à chaque cercle une demi-révolution autour de la corde sur laquelle il a été décrit, on obtient trois cercles α', β', γ' symétriques aux premiers par rapport aux côtés du triangle; ces cercles passent encore par un même point O'.

Si l'on représente par a, b, c les angles BOC, COA, AOB contenus dans les cercles α, β, γ par rapport aux côtés du triangle, on a

$$a + b + c = 360°,$$

parce que les trois cercles α, β, γ passent par un même point O. Mais, sous la forme

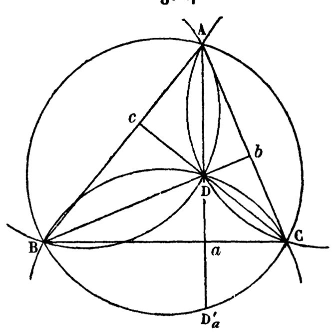
$$b = (180° - a) + (180° - c),$$

cette équation exprime également que le point d'intersection O' des cercles α' et γ' se trouve aussi sur β', etc.

15. Les points O et O' forment une transformation birationnelle en involution.

16. A chacun des points A, B, C correspond un cercle, le cercle qu'on obtient en faisant subir au cercle circonscrit au triangle ABC une demi-révolution autour du côté opposé du triangle. Ces cercles passent par un même point D (*fig.* 4), le point d'intersection des

Fig. 4.



trois hauteurs du triangle; car, dans le cercle circonscrit et dans le triangle, on a

$$Ba.aC = Aa.aD'_a$$
$$Ba.aC = Aa.Da;$$

ce qui prouve que les deux segments aD'_a et Da sont égaux et que le cercle symétrique au cercle circonscrit par rapport à BC passe par D, etc. Mais ce raisonnement prouve en même temps que les cercles symétriques à BCD par rapport à BC, à CAD par rapport à CA et à ABD par rapport à AB, coïncident avec le cercle circonscrit au triangle, c'est-à-dire que ce cercle circonscrit tout entier correspond au seul point D. Les quatre points A, B, C, D sont donc des points fondamentaux doubles, ayant des cercles pour courbes fondamentales.

17. Les points d'intersection de deux courbes fondamentales ne pouvant être que des points fondamentaux, les points circulaires à l'infini ω et ω_1 sont deux points fondamentaux imaginaires, dont le degré de multiplicité sera indiqué plus loin.

18. Si le point O s'est éloigné infiniment dans une direction donnée, le point O' se trouve aussi à l'infini, mais au premier abord la direction de ce dernier point n'est pas évidente.

19. Les trois côtés du triangle correspondent à eux-mêmes. Sur chacune de ces droites les points correspondants forment une involution, dont un des points doubles est situé à l'infini (suivant l'article précédent), une involution hyperbolique équilatère, dont l'autre point double, le pied de la perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur le côté en question, est le milieu des segments formés sur la droite par les points correspondants.

20. Quand à chaque point de la droite l_∞ correspond un point bien déterminé (de cette même droite), ce qui est la seule supposition admissible, la transformation birationnelle ne connaissant pas un lieu de points fondamentaux, chaque point de l_∞ doit coïncider avec son point correspondant; car ces points déterminent sur cette droite une involution avec trois points doubles, les points d'intersection de l_∞ avec les côtés du triangle, etc.

21. Les points A, B, C, D, ω, ω_1 sont les seuls points fondamentaux de la transformation.

22. La courbe correspondante d'une droite quelconque l est une courbe C^5 dont les points A, B, C, D sont des points doubles. Elle passe un nombre de fois encore indéterminé par ω et ω_1 et a une asymptote parallèle à l.

La courbe a des points doubles aux points A, B, C, D, ces points étant des points doubles de la transformation. Elle est du cinquième ordre, parce qu'elle est coupée par un côté AB du triangle en cinq points, les deux points doubles A, B et le point O' correspondant au point d'intersection O de l et AB.

23. Les points ω et ω_1 sont des points fondamentaux doubles de la transformation et des points doubles de chaque courbe C^5 (qui est donc une quintique bicirculaire); car deux courbes C^5 ne se coupent en dehors du point O', correspondant au point d'intersection O des droites correspondantes, qu'en des points fondamentaux; et les quatre points doubles communs A, B, C, D équivalent à seize points simples communs, les deux points communs ω et ω_1 équivalant à huit points simples communs, résultat qui n'est d'accord qu'autant que ω et ω_1 sont des points doubles de chaque courbe C^5, etc.

24. La transformation en question admet donc six points fondamentaux doubles, les points A, B, C, D, ω, ω_1. La courbe fondamentale de chacun des quatre points réels est la conique passant par les cinq autres points; la courbe fondamentale d'un des points ω, ω_1 est la conique passant par le point même et par les quatre points réels.

25. La courbe correspondante d'une droite l par un des points A, B, C, D, ω, ω_1 est une courbe C^3, qui passe deux fois par le point fondamental sur l et une fois par les autres points fondamentaux; et chaque droite qui joint deux des points fondamentaux correspond à elle-même.

26. Les points correspondants forment sur chacune des droites AD, BD, CD, qui correspondent à elles-mêmes, une involution hyperbolique équilatère; de ces involutions les points a, b, c (*fig.* 4) sont les points doubles non situés sur l_∞. Donc les six côtés du quadrangle complet ABCD correspondent à eux-mêmes et contiennent des involutions hyperboliques équilatères ayant pour

point double le point d'intersection du côté en question avec le côté opposé.

27. La courbe correspondante d'une conique qui passe par quatre des six points fondamentaux est encore une conique : car la courbe C^{10}, qui correspond à une conique quelconque, se compose, quand la conique passe par quatre points fondamentaux, d'une partie accessoire, les quatre courbes fondamentales de ces quatre points, et d'une partie essentielle. une conique. En général, cette conique correspondante passe par les mêmes points fondamentaux que la conique donnée ; seulement quand celle-ci contient ω sans ω_1, celle-là contient ω_1 sans ω.

28. A chaque cercle passant par deux des quatre points A, B, C, D correspond donc encore un cercle par ces mêmes points. Ce théorème, évident pour les combinaisons BC, CA, AB, est nouveau pour les combinaisons AD, BD, CD ; et l'on voit sans peine que ces cercles correspondants sont symétriques l'un à l'autre par rapport aux droites AD, BD, CD, car deux cercles correspondants par C et D coupent AB en deux couples de points correspondants dont c est le point milieu, etc. On retrouve donc la même transformation, quand on remplace le triangle de référence ABC par un des triangles BCD, CAD, ABD : ce que l'on ne peut pas encore déduire du seul fait que chaque sommet du quadrangle ABCD est le point de rencontre des hauteurs dans le triangle formé par les trois autres sommets.

De plus, au lieu des trois groupes symétriques de cercles BC, CA, AB, on peut se servir des trois groupes symétriques de cercles décrits sur AB, BD, CD, pour déterminer la correspondance en question ; ce qui nous sera utile au Chapitre suivant.

Toutefois la correspondance est déjà déterminée par deux quelconques des six groupes de cercles symétriques.

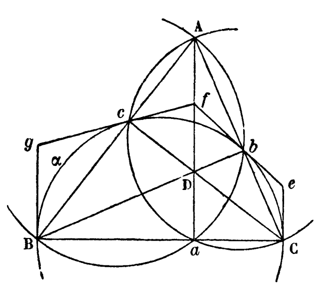
29. A chaque conique passant par A, B, C, D (et, comme on sait, cette conique est toujours une hyperbole équilatère), correspond encore une hyperbole équilatère qui contient les mêmes points fondamentaux. Mais ces courbes coïncident, parce qu'elles ont six points communs, les quatre points A, B, C, D et deux points sur l_∞.

30. Les droites qui lient les points correspondants d'une hyperbole équilatère par A, B, C, D passent par le centre de cette courbe. Car ces droites passent par un point, parce que les points correspondants forment une involution sur la courbe, et ce centre d'involution doit coïncider avec le centre de figure de la courbe, parce qu'il doit se trouver sur les deux asymptotes, eu égard à l'article 20.

31. Le lieu des centres d'involution, c'est-à-dire des centres de figure des hyperboles équilatères passant par les points A, B, C, D, c'est le cercle circonscrit au triangle *abc*, le cercle des neuf points par rapport au triangle de référence ABC; car le point correspondant à D sur une de ces hyperboles, c'est le quatrième point d'intersection de l'hyperbole avec le cercle circonscrit au triangle ABC, et l'on voit sans peine que le lieu des points milieux des rayons vecteurs du cercle circonscrit au triangle ABC par rapport au point D comme pôle est le cercle des neuf points du triangle ABC, le milieu du rayon vecteur DD'_a (*fig.* 4) étant le point *a*, etc.

32. De plus, les cercles décrits sur les côtés du triangle ABC comme diamètre correspondent à eux-mêmes, chacun de ces cercles étant symétrique à soi-même par rapport au côté corres-

Fig. 5.



pondant du triangle. Et l'article 28 montre que la même propriété convient aux cercles décrits sur AD, BD, CD comme diamètre.

Dans chacun des cercles décrits sur un des côtés du quadrangle complet ABCD comme diamètre, le centre d'involution des points correspondants est le point milieu du côté opposé; car sur le cercle α, décrit sur BC comme diamètre, les points b et c sont les points doubles de l'involution (*fig.* 5) et les tangentes en ces points au cercle α se coupent au point milieu de AD. Car le triangle Cbe formé par la corde Cb de α et les deux tangentes à α aux deux extrémités de cette corde étant isoscèle, le triangle semblable Abf est aussi isoscèle, etc.; ce qui montre que les tangentes en b et c au cercle α s'intersectent en un point f de AD situé à égale distance de A, b, c. Mais le cercle passant par A, b, c passe aussi par D; donc f est le point milieu de AD.

33. Cherchons les courbes d'un ordre plus élevé qui correspondent à elles-mêmes.

La courbe qui correspond à une courbe du troisième ordre passant par les six points fondamentaux est encore une courbe du troisième ordre par ces points; car, dans ce cas, la courbe C^{15} avec six points sextuples se compose des six coniques fondamentales et d'une courbe du troisième ordre passant par les points fondamentaux.

Les courbes D^3 symbolisées par $3(\mathrm{ABCD}\,\omega\omega_1,\, abc)$ correspondent à elles-mêmes; car les deux courbes correspondantes ont dix points communs, les neuf points indiqués et le troisième point d'intersection des deux courbes avec l_∞. Au premier abord il peut sembler paradoxal qu'on parle d'une pluralité de courbes D^3 passant par neuf points donnés, tandis que neuf points quelconques déterminent une courbe unique du troisième ordre. Mais les neuf points entre parenthèses dans le symbole donné peuvent être les neuf points de base d'un faisceau de courbes du troisième ordre; car on démontre sans peine que les courbes $3(\mathrm{ABCD}\,\omega\omega_1, a, \mathrm{OO}')$ passent en même temps par b et c, parce que la supposition contraire mène à l'un des deux résultats absurdes suivants : ou que cette courbe contient les points d'intersection de l_∞ avec AB, AC, BD et CD, ou qu'elle coupe encore un de ces côtés en deux points correspondants. On voit donc qu'il y a une infinité de courbes du troisième ordre passant par les six points fondamentaux et les trois points a, b, c; mais que cette infinité ne saurait être qu'un faisceau, toutes les courbes passant par neuf points fixes.

Les courbes E^4 avec le symbole $4(A^3BCD\omega\omega_1, OO')$ coïncident avec leurs courbes correspondantes; car la courbe correspondante est une courbe de la même nature et les deux courbes ont dix-huit points communs, neuf au point A, cinq aux autres points fondamentaux, les deux points O et O′ et deux points sur l_∞, etc.

Nous trouverons plus loin des courbes du cinquième ordre, qui correspondent à elles-mêmes.

34. Chaque droite l contient deux couples de points correspondants, car elle coupe sa courbe correspondante C^5 en dehors de l_∞ en quatre points.

35. Les points correspondants qui sont en ligne droite avec un point donné P se trouvent sur une courbe F^5 par P qui touche en ce point la droite PP′; car chaque droite par P coupe cette courbe au point P et aux quatre points indiqués dans l'article précédent. Les points A, B, C, D sont des points doubles de la courbe (car la droite PA coupe deux fois la courbe fondamentale de A, le cercle BCD). Elle passe une fois par les points a, b, c, ω, ω_1 et touche la droite l_∞ en ω et ω_1.

Il va sans dire que les courbes F^5 coïncident avec leurs courbes correspondantes. Leur symbole est $5(A^2B^2C^2D\,\omega\omega_1, abc)$ et elles forment un réseau correspondant au réseau des points P.

36. La courbe F^5, dont le point P se trouve sur le cercle des neuf points du triangle ABC (le cercle abc), se compose de deux parties; car elle doit contenir l'hyperbole équilatère par A, B, C, D et P, et, par suite, encore une courbe du troisième ordre par les six points fondamentaux et par a, b, c. Cette courbe du troisième ordre est une des courbes D^3 trouvées plus haut.

La courbe F^5, dont le point P est le point milieu d'un des six côtés du quadrangle complet ABCD, se compose de trois parties, une hyperbole équilatère, un cercle et une droite.

37. Les droites qui lient entre eux les points correspondants situés sur une courbe D^3 passent par un même point de cette courbe, le sixième point d'intersection de la courbe avec le cercle

abc. Ce théorème est une conséquence immédiate de l'article précédent; car les courbes D^3 qui font partie d'une courbe F^5 se présentent en nombre infini, chaque point du cercle *abc* donnant lieu à une de ces courbes, ce qui prouve qu'elles forment un faisceau ayant les mêmes points de base que le faisceau trouvé à l'article 33.

Mais le théorème en question peut être démontré d'une manière plus directe; car les points correspondants d'une des courbes D^3 de l'article 33 sont les points d'intersection mobiles de D^3 avec une hyperbole équilatère par A, B, C, D (cette hyperbole correspondant aussi à elle-même); et la génération d'une courbe du troisième ordre au moyen de deux faisceaux projectifs, un faisceau de rayons et un faisceau de coniques, apprend par inversion du raisonnement que les droites en question passent par un point fixe de la courbe D^3, le point opposé (*punto opposto*) du quadrangle ABCD par rapport à la courbe D^3.

Les points correspondants d'une courbe E^4 sont bien les points d'intersection mobiles de cette courbe avec une hyperbole équilatère par A, B, C, D; mais les droites qui lient les points correspondants de E^4 enveloppent une courbe au lieu de passer par un point fixe.

Quand on représente les points d'intersection d'une droite quelconque l avec le cercle *abc* par r et s, on trouve qu'un des deux couples de points correspondants situés sur l appartient à l'hyperbole équilatère de r et à la courbe D^3 de s, tandis que l'autre couple fait partie de l'hyperbole équilatère de s et de la courbe D^3 de r; et réciproquement, les deux points d'intersection mobiles d'une hyperbole équilatère par A, B, C, D et d'une des courbes D^3 se trouvent sur la droite qui joint les deux centres d'involution de ces deux courbes.

38. Au moyen des hyperboles équilatères, des courbes D^3, E^4, F^5, nous trouverions sans peine des courbes d'un ordre plus élevé qui correspondent à elles-mêmes. Mais cet examen ne jouissant pas de cette simplicité qui a caractérisé les résultats obtenus, je passe à un autre sujet. (*A suivre.*)