Comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 145-152

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_145_0>

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

J.-L. HEIBERG. — LITERARGESCHICHTLICHE STUDIEN ÜBER EUKLID. — Leipzig, Teubner, 1882. In-8°, 224 pages.

Le savant danois qui vient de s'illustrer par une édition critique d'Archimède a entrepris d'accomplir la même tâche pour Euclide ; dès aujourd'hui, comme prémisse de cette œuvre qui réclamera un travail assidu de plusieurs années, il publie un important ensemble d'études historiques et philologiques sur l'auteur des *Éléments*.

La première des six Sections qui composent le Volume est consacrée aux renseignements fournis par les Arabes. M. Heiberg arrive à reconstituer, d'une façon probante, l'origine des données historiques sur la vie d'Euclide qui nous viennent de cette source ; il démontre que ces données ne peuvent dériver d'une tradition grecque en dehors des documents que nous possédons, que par conséquent elles sont tout à fait inutilisables. Quant aux écrits du géomètre grec, il établit que désormais l'on ne peut guère espérer de recherches dans les manuscrits arabes, ni quelque réforme importante pour le texte des ouvrages qui subsistent, ni la découverte de quelqu'un de ceux qui ont été perdus. Cependant il reconnaît une traduction du Livre Περὶ διαιρεσέων (*Sur les divisions*), non pas dans le Traité de Mahomet de Bagdad, qu'a recueilli l'édition de Gregory, mais bien dans un écrit du Ms supplément arabe 952, 2, de la Bibliothèque Nationale, sur lequel Woepcke a donné une notice très complète (*Journal asiatique*, 1851, p. 233 et suiv.).

La seconde Section (sur la vie et les écrits d'Euclide) est également traitée avec un sens critique qu'on ne saurait trop louer. Pour la vie, malheureusement, on ne saura jamais sans doute qu'une chose : c'est qu'Euclide vivait à Alexandrie sous Ptolémée Ier, qu'il florissait par conséquent vers l'an 300 avant Jésus-Christ. Quant aux écrits que nous possédons et dont l'authenticité est contestée, je remarque que M. Heiberg nie celle du fragment *De levi et ponderoso* et de l'*Introduction harmonique*. Il admet, au contraire, que ni les *Phénomènes* ni les *Optiques* ne sont supposés; mais il constate que le texte connu s'écarte notablement de la rédaction originaire. Toutefois il espère que celle-ci peut être à très peu près retrouvée, en particulier dans le manuscrit de Vienne, gr. 103. Comme spécimen, il publie, dans la quatrième Section de son Volume, le texte des *Optiques* d'après ce manuscrit. Quant aux *Catoptriques,* sans se prononcer définitivement, il fait sérieusement valoir les raisons qui militent contre l'authenticité.

La troisième Section, relative aux écrits perdus, réunit tous les renseignements que l'on peut trouver sur les *Porismes*, les *Lieux en surface* et les *Coniques*. La discussion relative au premier de ces Ouvrages est particulièrement remarquable; j'y reviendrai du reste plus loin, me contentant, pour le moment, d'en mentionner la conclusion, à savoir que la restitution tentée par Chasles ne peut certainement, quelle qu'en soit la haute valeur, être considérée comme définitive.

Des deux dernières Sections, la première est consacrée à des recherches sur les anciens commentateurs d'Euclide. Hypsiclès ouvre la marche comme auteur du Livre XIV des *Éléments;* pour le Livre XV, il doit être attribué à un condisciple d'Eutocius, élève de l'architecte-ingénieur Isidore de Milet. Viennent ensuite Héron d'Alexandrie (1), Porphyre, Pappus, Proclus, les Scoliastes et les Byzantins, Isaac Argyrus, Barlaam et Psellus.

M. Heiberg établit, sans réplique possible, à mon sens, que Proclus n'a pas continué, comme il s'était proposé de le faire, son prolixe commentaire, borné au premier Livre des *Éléments*. Les scolies qui se rapportent aux autres Livres doivent en général remonter au travail de Pappus, lequel, au contraire, semble bien avoir été complet. Son étude sur le Livre X, particulièrement détaillée, subsiste peut-être, traduite en arabe, dans le manuscrit de la Bibliothèque Nationale dont nous avons déjà parlé. Woepcke, il est vrai, a lu pour le nom de l'auteur grec « B. l. s. » ou « B. n. s. le Roumi », et l'a identifié avec l'astrologue Vettius Valens. M. Heiberg démontre que cette identification est insoutenable. En tout cas, la traduction complète du Traité est très

(1) *Mémoires présentés à l'Académie des Sciences,* 1856, t. XIV, p. 673.

désirable, et, seule, elle peut permettre de résoudre la question d'attribution.

La dernière Section enfin (pour l'histoire du texte) renferme un recueil, soigneusement fait, des citations d'Euclide par les auteurs grecs jusqu'au XIV^e siècle après Jésus-Christ. Ce recueil n'a pas la prétention d'être complet, mais, pour ma part, je n'ai pu y découvrir qu'une seule lacune (¹).

En résumé, le travail de l'illustre érudit, par le soin avec lequel il est composé et par la publication de tous les textes intéressant son sujet, sera désormais indispensable à quiconque voudra faire des recherches sur Euclide et ses œuvres.

Je pourrais, à la vérité, faire quelques réserves sur quatre ou cinq points sur lesquels je ne partage pas l'opinion de M. Heiberg. Mais comme j'ai déjà eu l'occasion de les discuter ici-même, et que l'Ouvrage que j'examine n'apporte pas en réalité de nouveaux arguments que j'aie à combattre, je préfère me borner, avant d'aborder la question des Porismes, à quelques remarques qui me sont suggérées par les abondantes citations et les lumineux développements du savant philologue. Qu'il me permette d'essayer d'apporter ainsi mon humble pierre à l'édifice qu'il élève.

On considère l'écrit des Ψευδάρια comme absolument perdu. Or, M. Heiberg fait remarquer (p. 38, note) qu'il a été connu d'Alexandre d'Aphrodisias; celui-ci le mentionne dans son commentaire sur Aristote σοφιστ. ἐλέγχ., sous le titre : les Ψευδογραφήματα d'Euclide. Il me semble dès lors que c'est à cet Ouvrage qu'Alexandre a dû emprunter ce qu'il dit de la fausse quadrature du cercle par Antiphon, et de celle par les lunules, fragments conservés par Simplicius (²). On expliquerait ainsi la conservation des faux théorèmes attribués à tort à Hippocrate de Chios, et qu'Aristote connaissait déjà. Peut-être pourrait-on faire aussi remonter à la même source ce que l'on sait de la quadrature de Bryzon (³).

Dans les citations de Pappus qu'il est amené à faire, M. Heiberg propose d'importantes corrections au texte de l'excellente édition

(¹) Pour la mention de la proposition III, 3, dans *Simplicii in Aristotelis physicorum libros quatuor priores,* ed. Diels. Berlin, Reimer, 1882, p. 651.
(²) Ouvrage cité, p. 54, 55, 56, 57, peut-être 58.
(³) *Alexand. Aphrod. comment. in Aristot. sophist. elench.,* fol. 30.

de M. Hultsch. En présence de ses conjectures hardies et de ses heureuses explications, j'ai été quelque peu surpris de le voir s'arrêter devant quelques passages et y reconnaître une corruption, sans essayer d'y porter remède.

Pour l'un d'eux, relatif à l'analyse des *Données* d'Euclide, la difficulté est, à la vérité, très sérieuse. Après avoir dit que six théorèmes (les propositions 56-61) concernent des parallélogrammes et des *paraboles* de figures données d'espèce, Pappus continue : « Des cinq suivants, le premier (62) est γραφόμενον (*écrit*); les quatre autres concernent des triangles. » (Hultsch, p. 638, 11; Heiberg, p. 222, note 4.)

Hultsch traduit avec Commandin γραφόμενον « *in lineis* » (*en lignes*), comme s'il y avait ἐν γραμμαῖς. M. Heiberg se contente de remarquer qu'il faudrait alors ἐν εὐθείαις (*en lignes droites*). Je me demande si le texte n'est pas intact et si Halley ne l'a pas bien traduit « *primum jam descriptum est* », c'est-à-dire : « le premier théorème rentre dans ceux dont je viens de parler. »

Il est certain, en effet, que la proposition 62 des *Données* dont il s'agit a un rapport intime avec la précédente, 61; Pappus aurait donc dû la classer avec les six antérieures. Toutefois le début de l'énoncé a pu le tromper au premier regard, et il aura mis à part cette proposition 62. Puis, quand, l'ayant mieux lue pour la bien qualifier, il a reconnu son erreur, il aura constaté celle-ci dans les termes que nous avons vus, au lieu de corriger ce qu'il avait déjà écrit. Si cette hypothèse implique une assez singulière précipitation de rédaction, elle ne m'en semble pas moins la plus plausible que l'on puisse faire.

Quoi qu'il en soit, je proposerai avec plus de confiance l'explication des deux autres passages dont M. Heiberg signale l'obscurité. Le premier est au début de l'analyse du Traité des *Lieux plans* d'Apollonius (Hultsch, p. 662, 5-10).

Pappus vient d'exposer qu'Apollonius classe les lieux en *éphectiques* (quand un point est lieu d'un point, une ligne d'une ligne, etc.), en *diexodiques* (quand une ligne est lieu d'un point, une surface d'une ligne, etc.), et en *anastrophiques* (quand une surface est lieu d'un point, un volume d'une surface). Il continue ensuite dans un passage quelque peu corrompu, mais que

M. Hultsch ne me paraît pas avoir eu bien raison de considérer comme interposé :

« Des lieux traités dans l'ἀναλυόμενος (c'est-à-dire dans la collection des ouvrages d'Analyse à laquelle Pappus consacre son Livre VII), les *éphectiques* sont ceux des *données* de position. »

Pappus veut dire, sans doute, que les points, lignes, figures, déterminés de position dans les *Données* d'Euclide, doivent être considérés comme des lieux éphectiques. Mais à ces propositions des *Données* on peut joindre celles qui présentaient le même caractère dans d'autres ouvrages d'Analyse, dans les *Porismes* notamment.

« Les lieux dits *plans* (droites et cercles), les lieux *solides* (coniques) et les lieux *grammiques* (courbes plus complexes; il faut ajouter au texte καὶ οἱ avant γραμμικοί, l. 7) sont les lieux *diexodiques* de points. Les *lieux en surface* (les surfaces traitées comme lieux dans les Livres qui portaient l'intitulé : τόποι πρὸς ἐπιφανείᾳ) sont *anastrophiques* de points, *diexodiques* de lignes : toutefois les *grammiques* se démontrent d'après les *lieux en surface*. »

Si l'on se reporte aux définitions des lieux *diexodiques* et *anastrophiques*, ce passage n'offre aucune difficulté. Il suffit de remarquer que, tandis que l'ἀναλυόμενος comprenait des Traités intitulés : *Lieux plans*, *Lieux solides*, ou *Lieux en surface*, il n'en avait pas pour les *Lieux grammiques ;* c'est ce qui motive la remarque finale, que ces derniers lieux apparaissaient comme divisés (par intersection) des *Lieux en surface*, traités par Euclide.

Voici de même la traduction du premier lemme donnée par Pappus sur les *Lieux en surface* (Hultsch, p. 1004, 17-22) :

« Soit une droite AB, une autre CD donnée de direction, si le rapport de $AD \times DB$ à DC^2 est donné, C se trouvera sur une conique.

» Si maintenant AB cesse d'être donnée de position (par conséquent reste donnée de longueur) et que les points A, B, au lieu d'être fixes, soient assujettis à se trouver sur des droites (lire εὐθείαις au lieu de εὐθεῖᾳ) données de position AE, EB; si enfin C n'est pas dans le même plan, il se trouvera sur une surface donnée de position. Cela a été démontré. »

La figure des manuscrits, reproduite par Hultsch, est absurde, mais on voit immédiatement de quoi il s'agit. Une droite AB de longueur fixe a ses extrémités glissant sur deux droites AE, EB (qui se coupent en E); elle entraîne dans son mouvement une conique dont elle est le diamètre, et dont les cordes conjuguées restent parallèles à une direction donnée en dehors du plan AEB. Le lieu de cette conique est évidemment une surface, d'ailleurs passablement complexe.

Il semble probable qu'Euclide avait considéré le cylindre engendré dans le cas où les droites AE, EB, au lieu de se couper, sont parallèles. Pappus aura cru bon de mentionner dans toute sa généralité une proposition dont l'auteur des *Lieux en surface* avait implicitement fait une application toute restreinte.

J'arrive enfin à la question si discutée du sens à attribuer au mot *porisme*. M. Heiberg l'a traitée avec une clarté bien rare dans ce qui a été écrit sur cette matière; l'exposé des résultats auxquels il arrive mérite donc d'intéresser le lecteur. Cependant, peut-être n'a-t-il pas toujours été jusqu'au bout de sa pensée; si j'essaye, dans ce qui suit, de la préciser, peut-être m'arrivera-t-il à mon tour de la dépasser. J'espère, cependant, qu'il ne me démentira point.

Le mot *porisme* a eu dans l'antiquité deux sens essentiellement différents, qui n'ont entre eux aucun rapport, quoique leur origine soit suffisamment explicable par la racine du mot. L'un de ces sens a été celui de corollaire; l'autre a désigné une certaine forme de propositions intermédiaires entre les théorèmes et les problèmes.

La distinction de cette classe de propositions doit remonter à l'époque immédiatement antérieure à celle d'Euclide, alors que l'on discutait, dans l'École après Platon, si tout était théorème ou si tout était problème. La constitution de cette classe des *porismes* pour les propositions d'un caractère ambigu fut le moyen terme qui servit à résoudre la difficulté.

C'est à cette époque qu'il faut rapporter les anciennes définitions que donnent Proclus et Pappus; si obscures qu'elles soient, elles s'interprètent au mieux de la façon suivante.

Dans le théorème, la figure est tracée; il s'agit de *démontrer* qu'une certaine relation énoncée existe entre les éléments; dans le problème, une partie au moins de la figure est à *construire,* d'après certaines conditions énoncées; dans le porisme enfin, la figure est tracée comme dans le théorème, mais il y a à *trouver* entre ses éléments une relation non énoncée, et qui permette de déterminer l'un d'eux d'après les autres.

En d'autres termes, le porisme peut être considéré comme un théorème dont l'énoncé est incomplet ou bien comme un problème qui, par sa position même, est supposé résolu.

En choisissant ce terme de *porisme* comme titre de propositions touchant un ensemble de matières relativement restreint, Euclide s'astreignit-il exactement à les énoncer sous la forme correspondant au concept que nous avons essayé de définir? On ne peut le savoir, puisque son Ouvrage est entièrement perdu, et que Pappus peut avoir dénaturé sensiblement la forme des deux seuls énoncés qu'il nous ait conservés.

Mais, si Euclide a pu laisser incomplètes, dans ses énoncés, certaines constructions se déduisant immédiatement des autres données, et en dehors de la solution même de la question proposée, il n'en est pas moins clair qu'il a dû conserver le caractère général des porismes, essentiellement approprié à la recherche analytique.

Les porismes d'Euclide devaient donc présenter des questions dont la solution s'offrait comme nécessairement possible, et comme absolument déterminée. Sur ces deux points, ils différaient essentiellement des problèmes, dont l'énoncé pouvait être soumis à contenir des conditions relatives à leur possibilité (διορισμός), et auxquels les anciens regardaient toujours comme suffisant de satisfaire par une solution unique, sans s'inquiéter de savoir s'il y en avait d'autres.

En tous cas, la rédaction même des trois Livres des *Porismes* semble avoir entraîné une modification ultérieure du concept originaire, et Pappus nous apprend que ce concept avait été dénaturé par des auteurs plus récents. Il leur reproche, d'une part, d'avoir cru suffisant d'établir la possibilité d'une construction supposée, sans déterminer la relation pouvant servir à la faire, d'un autre côté de s'être attachés à une circonstance particulière et accidentelle en définissant le porisme « un théorème de lieu dont les données sont incomplètes ».

Le sens de cette définition, deviné par Chasles sous une traduction vraiment incompréhensible en elle-même : « Le porisme est inférieur, par l'hypothèse, au théorème local », ressort suffisamment de ce que nous avons dit. Mais notre illustre compatriote s'est trompé en admettant que le mot *lieu* avait pour les anciens le même sens que pour nous. Si l'on se reporte à la définition des *lieux éphectiques,* que nous avons donnés plus haut, il est clair que pour nous ce ne sont nullement des lieux géométriques, et que, pour les anciens, une proposition concluant : « Telle droite passe par un point déterminé » était une proposition de lieu.

Si la situation du point est donnée dans l'énoncé de cette proposition, elle constituera d'ailleurs un théorème; si, au contraire, il est demandé de trouver le point fixe par lequel doit passer la droite mobile, on aura un porisme.

Il convient également de remarquer que le problème *local,* tel que le définit Chasles : « Trouver la nature, la grandeur et la position du lieu commun à une infinité de points soumis à une loi commune », ne semble jamais avoir été posé sous cette forme chez les anciens, au moins pour les questions de *lieux plans* ou *solides.* Ils ont toujours défini, dans les énoncés, si le *lieu diexodique* à trouver était une droite, un cercle ou une des trois coniques. Leurs propositions de lieux étaient donc, en général, de véritables porismes.

P. T.