Première partie, comptes rendus et analyses

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^{e} série, tome 5, nº 1 (1881), p. 5-25

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_5_0>

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LIPSCHITZ (R.). — LEHRBUCH DER ANALYSIS. Zweiter Band : DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG. 1 vol. in-8°, 734 pages. Bonn, 1880.

M. Lipschitz donne, dans ce second Volume de son *Lehrbuch der Analysis,* un Traité élémentaire de Calcul différentiel et intégral; toutes les questions qui touchent aux principes y sont développées avec un soin et une rigueur qui lui donnent un intérêt particulier.

Des deux sections qui le composent, la plus considérable de beaucoup concerne les quantités réelles (p. 1-626); l'ordre suivi est intéressant à connaître.

Après la définition de la dérivée et les règles usuelles de dérivation, l'auteur introduit la notion d'intégrale définie et démontre, pour les fonctions continues ou à nombre fini de discontinuités, l'existence de la limite vers laquelle converge la somme dont la considération sert de point de départ pour l'établissement de cette notion.

Cette notion suffit pour établir, au moyen de l'intégration par parties, la formule de Taylor; le reste complémentaire se présente alors sous la forme d'une intégrale définie; de cette forme on déduit sans difficulté la forme de Lagrange, en supposant toutefois que la dérivée qui y figure est continue; cette restriction n'est pas nécessaire lorsqu'on emploie le mode de démonstration qu'a fait connaître M. Ossian Bonnet. L'auteur déduit du théorème de Taylor les développements en série les plus simples et les applique ensuite à la solution des questions de maxima et de minima pour les fonctions d'une seule variable.

Passant ensuite aux fonctions de plusieurs variables, il développe la notion d'une *multiplicité* (*Mannigfaltigkeit*) à extension simple, double, triple, etc., discontinue ou continue, de façon à éclaircir le concept de fonctions de plusieurs variables et à préparer la définition des intégrales multiples; puis il s'occupe des différentielles partielles et totales, du développement au sein des fonctions de plusieurs variables, des maxima et minima de ces mêmes fonctions, et des applications géométriques du Calcul différentiel.

M. Lipschitz donne ensuite les règles concernant l'intégration des fonctions rationnelles par rapport à la variable d'intégration et à la racine carrée d'un polynôme entier par rapport à cette même variable, etc. Il examine le cas où la fonction sous le signe d'intégration devient infinie, où les limites d'intégration deviennent infinies, les conditions sous lesquelles il est permis de différentier sous le signe $\int$; il consacre un Chapitre à la démonstration du théorème de Lejeune-Dirichlet sur la possibilité de développer en série de Fourier une fonction qui n'a qu'un nombre fini de discontinuités, de maxima et de minima. La considération des séries trigonométriques fournit l'occasion d'expliquer la distinction si profonde, introduite aussi par Lejeune-Dirichlet, entre les séries qui convergent uniformément et celles qui ne jouissent pas de cette propriété.

Les lecteurs du *Bulletin* (¹) connaissent l'ingénieuse démonstration que M. Lipschitz a donnée de l'existence d'un système de fonctions satisfaisant à un système d'équations différentielles du premier ordre, en supposant certaines conditions remplies. Cette démons-

---

(¹) 1re série, t. X, p. 149.

tration, qui est de nature à pénétrer dans l'enseignement, avait une place marquée dans son Livre.

La notion d'intégrale multiple est développée avec les détails nécessaires pour la rendre claire et précise ; la transformation de ces intégrales est traitée au double point de vue de la Géométrie et de l'Analyse. Enfin le Chapitre qui termine cette première Section est consacré à l'inversion d'un système de fonctions.

Quant à la deuxième Section (p. 627-734), on y trouvera les principes de la théorie des variables complexes.

SCHELL (W.). — THEORIE DER BEWEGUNG UND DER KRÄFTE. Zweite Auflage. II Band. — 1 vol. in-8°, 618 pages. Leipzig, 1880.

Nous avons rendu compte récemment (¹) du premier Volume de la seconde édition du Traité de Mécanique de M. Schell; cette œuvre, maintenant complète, rendra assurément les plus grands services ; en la comparant à la première édition, on voit combien l'auteur a été préoccupé du désir de ne rien omettre d'important. Les travaux récents de M. Ball sur la dynamique d'un corps solide, de M. Darboux sur l'équilibre astatique lui ont fourni de nouveaux et intéressants Chapitres. Les améliorations de détail sont trop nombreuses pour être relevées.

Le premier Volume était consacré à la Cinématique, ce mot étant toutefois entendu dans un sens plus large qu'on ne fait d'habitude : le second roule sur la Statique et la Dynamique.

Il convient de faire quelques réserves sur la façon dont l'auteur introduit l'idée de masse et passe de la notion d'accélération à celle de force ; au surplus, on est obligé de reconnaître qu'il y a là une difficulté qui est dans le fond des choses et que jusqu'à présent on n'a guère résolue. On regrettera peut-être aussi que, dans un Ouvrage de cette nature, habituellement si riche en renseignements de toute sorte, le problème de la composition des forces appliquées à un point matériel n'ait pas été traité avec les

(¹) *Voir* le *Bulletin*, 2ᵉ série, t. IV, Iʳᵉ Partie, p. 33.

développements qu'il comporte ; sur ce point, les renseignements bibliographiques eux-mêmes font défaut : c'est là un reproche que, d'habitude, on n'a pas à faire à M. Schell.

L'étude de la composition des rotations ayant été faite avec détail dans le premier Volume, le problème analogue de la réduction d'un système de forces appliquées à un corps solide libre est traité ici brièvement ; toutefois, l'auteur trouve là l'occasion naturelle de développer quelques-uns des résultats géométriques obtenus par M. Sylvester et M. Cayley touchant la solution de ce problème : *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que n droites données puissent être les lignes d'action de n forces qui maintiennent un corps solide en équilibre.* Il s'occupe ensuite du cas où l'on a affaire à un corps solide ou à un système de corps solides dont les mouvements possibles doivent satisfaire à certaines conditions ; il donne de nombreuses applications, il développe particulièrement la théorie du polygone funiculaire, des ponts suspendus, des chaînettes, et expose en détail les analogies entre le problème de l'équilibre d'un fil flexible et celui du mouvement d'un point matériel, analogies déjà signalées par Galilée et développées par Möbius. Vient ensuite l'exposition du principe des vitesses virtuelles, établi successivement dans des cas de plus en plus généraux, éclairci par de nombreux exemples.

Un Chapitre est consacré aux recherches de M. Ball sur la statique d'un corps solide. M. Schell propose de revenir à l'expression *dyname,* déjà introduite par Plücker, pour désigner l'ensemble de la force et du couple, de plan normal à cette force, qui équivalent à l'ensemble des forces appliquées à un corps solide, au lieu d'employer les mots *Wrench* et *Winder,* proposés par M. Ball et M. Fiedler ; l'élément cinématique correspondant est la vitesse de torsion (*Windungsgeschwindigkeit*). A chaque dyname, ou vitesse de torsion, est attaché un complexe de droites du premier ordre, dont l'axe est la ligne d'action de la force ou l'axe instantané du mouvement hélicoïdal, et dont le paramètre est le rapport de l'axe du couple à la force ou, dans le mouvement hélicoïdal, de la vitesse de translation à la vitesse de rotation. L'expression symétrique du travail d'un dyname relativement à une vitesse de torsion virtuelle et la surface réglée à laquelle M. Cayley a donné le nom de *cylindroïde,* et qui est le lieu géométrique des axes des complexes du premier ordre qui admettent une congruence commune, jouent dans la théorie de M. Ball un rôle fondamental.

Le travail élémentaire du dyname s'obtient en multipliant la quantité

$$(p_\alpha + p_\beta) \cos\lambda - d \sin\lambda,$$

où p_α, p_β sont les paramètres des deux complexes relatifs au dyname et à la vitesse de torsion, λ et d l'angle et la plus courte distance de leurs axes, par le produit par dt de la force et de la vitesse de rotation; lorsque le *coefficient virtuel* (ou l'*invariant*)

$$(p_\alpha + p_\beta) \cos\lambda - d \sin\lambda$$

des deux complexes est nul, les deux complexes sont dits en involution, ou encore leurs axes (auxquels on doit supposer, comme dans tout ce qui suit, que les paramètres sont attachés) sont dits *réciproques*. La considération du cylindroïde conduit à une règle simple pour la composition de deux dynames ou de deux vitesses de torsion. Lorsqu'un axe est réciproque à deux axes donnés, il est réciproque à tous les axes appartenant au cylindroïde déterminé par les deux premiers.

Lorsque les mouvements possibles d'un corps solide doivent satisfaire à certaines conditions, il ne peut pas prendre de mouvement de torsion autour d'un axe quelconque, mais autour d'axes appartenant à un certain système dont la nature dépend des conditions imposées et qui est déterminé quand on se donne un certain nombre de ses axes (avec leurs paramètres); le nombre s de ces axes qui déterminent le système d'axes de la nature considérée est la dimension (*Stufe*) de ce système; un axe réciproque à s axes d'un système de la $s^{\text{ième}}$ dimension est réciproque à tous les axes de ce système; l'ensemble de tous les axes réciproques aux axes d'un système de dimension s constitue un système d'axes de la dimension $6 - s$. Tout système de forces équivalent à un dyname dont l'axe appartient au système réciproque laisse le corps solide en équilibre. Enfin la dimension de la mobilité d'un système, ou, si l'on veut, son degré de liberté, est égal à la dimension du système d'axes autour desquels il peut prendre un mouvement hélicoïdal. M. Schell examine chacun des degrés de liberté possibles, et développe les propriétés géométriques et mécaniques qui correspondent aux différents cas.

Si l'on considère un corps solide auquel des forces sont appliquées en des points déterminés, de telle façon que, si le corps vient à changer de position, la grandeur et la direction des forces restent invariables, on peut se proposer d'étudier les conditions et les positions d'équilibre du corps solide, etc. Cette étude a été l'objet des travaux de Möbius, de Minding et de M. Darboux; elle est liée à l'étude de la stabilité de l'équilibre d'un corps solide, dans le cas où, après un déplacement infiniment petit, les forces appliquées aux mêmes points du corps conservent la même grandeur et la même direction : ce dernier problème conduit à l'introduction du *viriel*. M. Schell expose avec détail les principaux résultats de ces diverses recherches.

La théorie de l'attraction et du potentiel est traitée avec les développements qu'elle comporte : on trouvera dans ce Chapitre, outre de nombreux exemples, le résumé des recherches géométriques et analytiques de Chasles et de Lejeune-Dirichlet sur l'attraction exercée sur un point par un ellipsoïde, les conditions analytiques par lesquelles on peut, d'après Dirichlet, définir le potentiel, et l'application de ces conditions à la vérification de la formule qui donne le potentiel d'une couche ellipsoïdale.

Enfin la première Partie se termine par un Chapitre consacré au frottement.

La seconde Partie comprend la dynamique du corps solide et des systèmes, la dynamique du point ayant été faite dans le premier Volume sous le nom de *Cinématique*.

Quatre Chapitres sont consacrés à la dynamique du corps solide. Dans les deux premiers, l'auteur s'occupe de la réduction des forces instantanées et des forces du premier ordre : en d'autres termes, en désignant par m la masse d'un des points invariablement liés qui constituent le corps solide, par v et y les segments de droite qui figurent sa vitesse et son accélération, et traitant, par exemple, les segments tels que mv comme des forces appliquées au corps solide, il se propose de trouver la force unique et le couple unique qui peuvent remplacer l'ensemble des forces mv ; de même pour les forces my. Cette réduction le conduit, par une voie naturelle, aux propositions fondamentales qui concernent le mouvement d'un corps solide et aux équations dont ce mouvement dépend. Les deux Chapitres suivants sont consacrés aux applications les plus connues, touchant le mouvement d'un corps solide libre ou soumis à certaines liaisons : mouvement dans son plan d'une figure plane solide, qui n'est soumise à aucune force, qui est soumise à l'action d'un couple constant ou de la pesanteur; mouvement d'un corps solide libre (sans forces extérieures); mouvement d'un corps pesant, ou soumis à l'influence d'un couple, dans le cas où l'ellipsoïde central est de révolution; pendule composé; mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe ; mouvement d'une sphère sur un plan horizontal, d'un cylindre sur un plan gauche, etc.

L'exposition concise des principaux résultats obtenus par M. Ball sur la dynamique du corps solide a été rejetée après le développement des principes généraux de la dynamique des systèmes.

Le développement de ces principes comprend trois Chapitres : on y trouvera, outre les propositions élémentaires qui sont la base de cette théorie, le principe de Gauss (*Princip des kleinsten Zwanges*), le théorème dû à Newton touchant la similitude en Mécanique, la démonstration due à Lejeune-Dirichlet du critérium de la stabilité de l'équilibre, les équations générales de Lagrange avec de nombreuses applications, le principe d'Hamilton et le principe de la moindre action, les équations canoniques d'Hamilton, la réduction aux quadratures, obtenue par Jacobi, des problèmes de Dynamique qui ne dépendent que de deux variables, lorsqu'il existe une fonction des forces et que l'on connaît une intégrale des équations différentielles autres que l'équation des forces vives.

Enfin, dans le dernier Chapitre sont traités quelques problèmes relatifs au mouvement d'un système variable : mouvement d'une corde vibrante; mouvement d'un fluide élastique en général et dans des cas particuliers, dans un cylindre limité ou illimité, etc; mouvement oscillatoire dans un milieu élastique indéfini ; figure d'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation.

DINI (U.). — SERIE DI FOURIER e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale. — 1 vol. in-8°, 328 p. Pise, 1880.

La multitude de travaux, dispersés dans des Recueils divers, qui, pour chaque question particulière, va sans cesse en grandissant, rend de temps en temps nécessaire la publication d'un Livre qui réunisse l'ensemble des résultats acquis sur cette question, et marque en quelque sorte une étape dans le progrès incessant des Mathématiques. Par sa connaissance approfondie du sujet, comme par ses recherches personnelles, M. Dini était parfaitement préparé pour écrire un tel Livre sur les divers modes de représentation analytique d'une fonction arbitrairement donnée dans un intervalle déterminé. Celui qu'il donne au public se distingue par une recherche extrême de la généralité et de la rigueur.

Lejeune-Dirichlet a fondé, comme on sait, la représentation d'une telle fonction au moyen d'une série de Fourier sur l'étude des intégrales définies

$$\int_0^a f(x)\,\frac{\sin hx}{\sin x}\,dx,\quad \int_a^b f(x)\,\frac{\sin hx}{\sin x}\,dx$$

et des limites vers lesquelles tendent ces intégrales quand h augmente indéfiniment par des valeurs impaires. Pénétrant plus avant dans une voie déjà ouverte par M. P. du Bois-Reymond (¹), M. Dini étudie les intégrales analogues

$$\int_0^a f(x)\,\varphi(x,h)\,dx,\quad \int_a^b f(x)\,\varphi(x,h)\,dx,$$

où a, b sont des nombres différents de zéro, de même signe et habituellement compris entre des limites déterminées, et où $\varphi(x,h)$ est une fonction qui, pour toute valeur finie de h, est, dans l'intervalle considéré, susceptible d'intégration, qui pour x différent de zéro reste finie, même pour h infini, qui dans le voisinage du point $x = 0$, à droite ou à gauche suivant que a est positif ou né-

(¹) *Journal de Borchardt*, t. 79.

gatif, prend des valeurs d'autant plus grandes que h est plus grand, telle enfin que, pour toutes les valeurs considérées de a et de b, on ait

$$\lim_{h=\infty} \int_a^b \varphi(x, h)\, dx = 0,$$

$$\lim_{h=\infty} \int_0^a \varphi(x, h)\, dx = G,$$

G étant une quantité déterminée, finie, différente de zéro et indépendante de a; telles sont les fonctions $\frac{\sin hx}{\sin x}$, he^{-hx}, $\frac{h}{1+h^2x^2}$, etc. M. Dini parvient ainsi, par la généralisation de l'idée de Lejeune-Dirichlet, à fonder une méthode uniforme pour trouver une infinité de développements (en séries de fonctions spéciales) propres à représenter analytiquement une fonction arbitrairement donnée dans un intervalle déterminé.

Cette méthode est fondée sur les égalités

$$(1) \qquad \lim_{h=\infty} \int_a^b f(x)\, \varphi(x, h)\, dx = 0,$$

$$(2) \qquad \lim_{h=\infty} \int_0^b f(x)\, \varphi(x, h)\, dx = f(+0) \lim_{h=\infty} \int_0^b \varphi(x, h)\, dx;$$

la première égalité subsiste toutes les fois que, de a à b, la fonction $f(x)$ reste finie et susceptible d'intégration; quant à la seconde, il faut tout d'abord que $f(+0)$ ait un sens; cette condition étant remplie ainsi que les précédentes, elle aura toujours lieu, ainsi que l'a démontré M. du Bois-Reymond, si la fonction $\varphi(x, h)$, outre qu'elle satisfait aux conditions générales qui lui sont toujours imposées, est telle que l'intégrale $\int_0^\varepsilon \varphi_1(x, h)\, dx$, où figure la valeur absolue φ_1 de la fonction φ, étendue à un intervalle $0, \varepsilon$ à droite du point 0, reste toujours inférieure à un nombre fini, lors même que h croît indéfiniment. Si la fonction $\varphi(x, h)$ n'est pas astreinte à cette dernière condition, la formule (2) ne subsiste plus pour toutes les fonctions $f(x)$, assujetties seulement à être finies et susceptibles d'intégration; mais il existe des conditions de formes très diverses et qui laissent encore à la fonction $f(x)$ une généralité singulière et telles que, sous le bénéfice de l'une d'entre elles, la formule (2) subsiste; M. Dini fait un examen détaillé de ces conditions.

La première application que fait l'auteur de ces principes généraux concerne naturellement les séries de Fourier.

D'autres applications mettent en évidence ce fait qu'il existe une infinité de développements en série qui permettent de représenter analytiquement une fonction continue arbitrairement donnée dans un intervalle donné. La série de Fourier, comme on sait, ne conduit pas toujours à une telle représentation.

Une application, importante par son extrême généralité, concerne les développements en série d'une fonction arbitrairement donnée $f(x)$ pour un intervalle a, b, où figurent, au lieu des quantités $\sin nx$, $\cos nx$, les valeurs que prennent m fonctions monodromes et continues de la variable imaginaire z, $H_1(z, x)$, $H_2(z, x)$, $\ldots$, $H_m(z, x)$, aux points $z = \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, points pour lesquels ces fonctions ont des valeurs réelles, et qui sont données comme les infinis simples (ou une partie de ces infinis) d'une fonction méromorphe $w(z)$; M. Dini donne, pour ces développements, un théorème très général, dont l'énoncé, il est vrai, est assez compliqué (il tient près de deux pages) : cette complication, toutefois, semble être dans la nature des choses.

Il traite, en particulier, des développements de la forme

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty (a_n \cos\lambda_n x + b_n \sin\lambda_n x),$$

dans le cas général qui vient d'être indiqué et dans le cas plus spécial où les quantités $0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont les racines positives, supposées toutes du premier ordre, de l'équation

$$F(z)\cos\pi z + F_1(z)\sin\pi z = 0,$$

où les fonctions $F(z)$, $F_1(z)$ sont monodromes et continues à distance finie, l'une étant impaire et l'autre paire.

Une application plus importante de la même méthode se rapporte au problème, posé par Sturm (*Journal de Liouville*, t. I), de la représentation d'une variable réelle $f(x)$, donnée dans l'intervalle a, b, en séries de la forme $\Sigma q_n \mathrm{H}(\lambda_n, x)$, où

$$q_n = \frac{\displaystyle\int_a^b \mathrm{F}(x) f(x) \mathrm{H}(\lambda_n, x)\, dx}{\displaystyle\int_a^b \mathrm{F}(x) \mathrm{H}^2(\lambda_n, x)\, dx},$$

lorsque, pour toutes les valeurs de m différentes de n et pour une fonction réelle convenable $\mathrm{F}(x)$, on a

$$\int_a^b \mathrm{F}(x) \mathrm{H}(\lambda_m, x) \mathrm{H}(\lambda_n, x)\, dx = 0,$$

et que la fonction $\mathrm{H}(z, x)$, pour les valeurs de x comprises entre a et b, est une fonction monodrome et continue de z, réelle pour les valeurs de z égales à $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et satisfaisant, au moins pour ces valeurs, à l'équation différentielle

$$\frac{d}{dx}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathrm{H}}{dx}\right) + g\mathrm{H} = 0,$$

où K est une quantité indépendante de z; les développements en séries de fonctions de Bessel, de fonctions sphériques, etc., sont compris dans cet énoncé.

Enfin, comme dernière application, M. Dini donne la formule remarquable

$$f(\alpha) = \frac{k'}{\pi} \sum_0^\infty \frac{\Theta(\alpha + \lambda_n)}{\Theta(\alpha)\Theta^2(\lambda_n)(1 - \zeta \operatorname{sn}^2 \lambda_n)} \int_0^{2\mathrm{K}} f(x) \frac{\Theta(x - \lambda_n)}{\Theta(x)}\, dx,$$

où les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sont les racines de l'équation $\mathrm{H}'(z) = 0$ qui se trouvent sur l'axe des y, où enfin on a posé

$$\zeta = \frac{1}{\mathrm{K}} \int_0^{\mathrm{K}} k^2 \operatorname{sn}^2 z\, dz,$$

les quantités k, k', K, K$'$, Θ, H ayant le sens qu'on leur donne habituellement dans la théorie des fonctions elliptiques. M. Dini a été conduit par ses propres recherches à cette formule, que M. Hermite avait fait connaître dans son Cours à la Sorbonne de l'année 1873-1874, sans donner d'ailleurs les conditions précises sous lesquelles elle est applicable.

CHARVE (L.). — DE LA RÉDUCTION DES FORMES QUADRATIQUES TERNAIRES POSITIVES ET DE SON APPLICATION AUX IRRATIONNELLES DU TROISIÈME DEGRÉ.

L'auteur s'est proposé de trouver pour les irrationnelles du troisième degré un algorithme périodique analogue à celui que fournit pour les irrationnelles du second degré la théorie des fractions continues. Guidé dans ses recherches par les travaux et les conseils de M. Hermite, il a développé et éclairci par des exemples la méthode indiquée par M. Hermite à la fin de sa seconde Lettre à Jacobi sur la théorie des nombres.

Voici les principaux résultats de son travail.

La méthode de M. Hermite exige la réduction de formes quadratiques ternaires positives, et M. Charve emploie le système de réduction de M. Selling, qu'on peut résumer ainsi :

Soit une forme quadratique ternaire positive

$$f = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2gyz + 2hzx + 2kxy;$$

l'introduction d'une quatrième variable t par le changement de x, y, z en $x-t$, $y-t$, $z-t$, et l'emploi de trois nouveaux coefficients l, m, n permettent d'écrire cette forme ainsi,

$$g(y-z)^2 + h(z-x)^2 + k(x-y)^2 + l(x-t)^2 + m(y-t)^2 + n(z-t)^2,$$

et des substitutions convenablement choisies conduisent toujours par un nombre fini d'opérations à une forme équivalente à f, et dans laquelle g, h, k, l, m, n sont tous positifs. Cette forme, qui, abstraction faite des permutations possibles entre les variables x, y, z, t, est unique parmi les formes équivalentes à f, est choisie par M. Selling pour forme réduite.

Cela posé, M. Charve passe à la théorie des irrationnelles du troisième degré, pour lesquelles il convient d'examiner séparément les équations du troisième degré à coefficients entiers, dont une seule racine est réelle et celles dont les trois racines sont réelles.

Soit d'abord une équation ayant une racine réelle α et deux racines imaginaires β et γ.

Considérons la forme positive f,

$$(x + \alpha y + \alpha^2 z)^2 + 2\Delta(x + \beta y + \beta^2 z)(x + \gamma y + \gamma^2 z),$$

où Δ est une arbitraire positive.

Attribuons à Δ une valeur Δ_1; pour cette valeur, il existe, parmi les formes équivalentes à f, une forme réduite φ

$$\begin{gathered}(g + g'\Delta)(y - z)^2 + (h + h'\Delta)(z - x)^2 + (k + k'\Delta)(x - y)^2 \\ + (l + l'\Delta)(x - t)^2 + (m + m'\Delta)(y - t)^2 + (n + n'\Delta)(z - t)^2.\end{gathered}$$

Cette forme est réduite pour $\Delta = \Delta_1$, c'est-à-dire qu'alors tous les coefficients $g + g'\Delta$, $h + h'\Delta$, ... sont positifs. Si Δ varie, cette forme pourra demeurer encore réduite pour des valeurs voisines de Δ_1; mais on démontre qu'il arrive toujours que φ cesse d'être réduit si Δ croît ou décroît indéfiniment.

Soient donc A et A_1 les valeurs entre lesquelles doit être compris Δ pour que φ soit réduit; si Δ devient supérieur à la plus grande des deux limites et devient, par exemple, égal à $A_1 + \varepsilon$, φ cessera d'être réduit, et une substitution convenable conduira à une forme φ_1,

$$\begin{gathered}(g_1 + g'_1\Delta)(y - z)^2 + (h_1 + h'_1\Delta)(z - x)^2 + (k_1 + k'_1\Delta)(x - y)^2 \\ + (l_1 + l'_1\Delta)(x - t)^2 + (m_1 + m'_1\Delta)(y - t)^2 + (n_1 + n'_1\Delta)(z - t)^2,\end{gathered}$$

réduite lorsque $\Delta = A_1 + \varepsilon$, et plus généralement lorsque Δ reste compris entre A_1 et une autre quantité A_2 supérieure à A_1.

Si Δ varie et dépasse A_2, la forme φ_1 cessera d'être réduite, et il se présentera une nouvelle forme φ_2, réduite lorsque Δ est compris entre A_2 et un nombre A_3 supérieur à A_2; et ainsi de suite indéfiniment. Or on démontre qu'en continuant ainsi on trouve nécessairement une forme réduite φ_i,

$$\begin{gathered}(g_i + g'_i\Delta)(y - z)^2 + (h_i + h'_i\Delta)(z - x)^2 + (k_i + k'_i\Delta)(x - y)^2 \\ + (l_i + l'_i\Delta)(x - t)^2 + (m_i + m'_i\Delta)(y - t)^2 + (n_i + n'_i\Delta)(z - t)^2,\end{gathered}$$

telle que, après avoir fait au besoin préalablement une permutation des lettres x, y, z, t, on ait

$$\frac{g_i}{g} = \frac{h_i}{h} = \frac{k_i}{k} = \frac{l_i}{l} = \frac{m_i}{m} = \frac{n_i}{n},$$
$$\frac{g'_i}{g'} = \frac{h'_i}{h'} = \frac{k'_i}{k'} = \frac{l'_i}{l'} = \frac{m'_i}{m'} = \frac{n'_i}{n'}.$$

Appelons λ la valeur commune des premiers rapports, et $\frac{\lambda}{\mu}$ la valeur commune des seconds; on voit alors que φ_i n'est autre chose que φ multiplié par λ après avoir changé Δ en $\frac{\Delta}{\mu}$, et, comme la multiplication par λ ne change pas les conditions de réduction, on voit que, si φ est réduit lorsque Δ est compris entre A et A_1, φ_i sera réduit lorsque Δ sera compris entre $A\mu$ et $A_1\mu$.

Appliquant alors à la forme φ_i la substitution qui de φ conduit à φ_1, on trouvera une forme φ_{i+1}, qui sera réduite lorsque Δ est compris entre $A_1\mu$ et $A_2\mu$.

La substitution qui conduit de φ_1 à φ_2, appliquée à φ_{i+1}, donne une forme φ_{i+2}, réduite lorsque Δ est compris entre $A_2\mu$ et $A_3\mu$, et ainsi de suite. Parvenu à la forme φ_{2i}, qui sera réduite lorsque Δ est compris entre $A\mu^2$ et $A_1\mu^2$, on obtiendra la forme réduite φ_{2i+1} en appliquant à φ_{2i} la substitution qui de φ_i conduit à φ_{i+1}, c'est-à-dire la substitution qui de φ conduit à φ_1. Ainsi, après avoir employé de φ_i à φ_{2i} la série des substitutions par lesquelles on passe de φ à φ_1, puis à $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_i$, on emploiera la même série de substitutions pour obtenir toutes les formes réduites comprises entre φ_{2i} et φ_{3i}, et ainsi de suite indéfiniment. Donc, lorsque Δ parcourt toutes les valeurs depuis A jusqu'à $+\infty$, les formes réduites s'obtiennent en répétant périodiquement et indéfiniment une certaine sériè de substitutions.

Inversement, les substitutions qui ramèneraient de φ_i à φ en passant par les réduites intermédiaires $\varphi_{i-1}, \varphi_{i-2}, \ldots$ permettront, par leur emploi périodique et indéfini, d'obtenir toutes les formes réduites correspondant à des valeurs de Δ comprises entre A et o.

Le calcul de réduction de la forme considérée pour la suite indéfinie des valeurs de Δ met donc en évidence une périodicité analogue à celle que présente pour les irrationnelles du second degré l'emploi des fractions continues, et l'analogie devient plus marquée encore si l'on rappelle que le développement en fraction continue d'une racine α d'une équation du second degré, dont la deuxième racine est β, se ramène à la réduction successive, pour toutes les valeurs de Δ, de la forme binaire,

$$(x - \alpha y)^2 + \Delta(x - \beta y)^2.$$

Après avoir donné divers exemples de cette théorie, M. Charve étudie les équations du troisième degré ayant trois racines réelles α, β, γ. Le nouvel algorithme présente alors une double périodicité dont la singularité se manifeste mieux par un exemple que par des explications difficiles à donner dans une théorie si nouvelle.

Nous choisirons, pour servir d'exemple, les racines α, β, γ de l'équation

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0,$$

et nous considérerons la forme positive

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + A(\beta x + \gamma y + \alpha z)^2 + B(\gamma x + \alpha y + \beta z)^2,$$

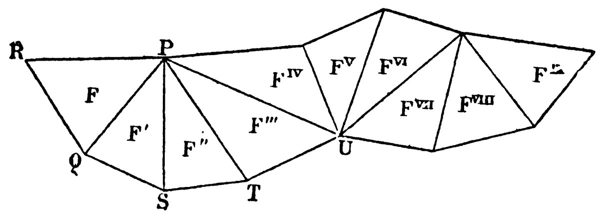
dans laquelle A et B désignent des arbitraires positives.

Si l'on remplace x, y, z respectivement par $x - t, y - t, z - t$, on obtient une forme F,

$$\begin{aligned}(g + g'A + g''B)(y - z)^2 &+ (h + h'A + h''B)(z - x)^2 \\ + (k + k'A + k''B)(x - y)^2 &+ (l + l'A + l''B)(x - t)^2 \\ + (m + m'A + m''B)(y - t)^2 &+ (n + n'A + n''B)(z - t)^2,\end{aligned}$$

qui est réduite pour tout système de valeurs de A et B rendant positifs tous les coefficients de cette forme F. Or, si l'on regarde A et B comme les coordonnées d'un point par rapport à deux axes rectangulaires, les divers coefficients égalés à zéro représenteront des droites, et, pour que ces coefficients soient positifs, il faudra attribuer à A et B les valeurs des coordonnées d'un point pris d'un côté déterminé par rapport à chacune de ces droites.

Dans le cas qui nous occupe, on trouve que la forme F est réduite si le point de coordonnées A et B est à l'intérieur d'un certain triangle PQR. Mais, si le point (A, B) traverse le côté PQ, la forme F cesse d'être réduite, et une certaine substitution donne une forme F′ réduite quand le point (A, B) est à l'intérieur d'un certain triangle PQS. Si le point (A, B) traverse le côté PS, la forme F′ cesse d'être réduite, et une nouvelle substitution fournit une forme F″ réduite à l'intérieur du triangle PST. Enfin, si l



point (A, B) traverse le côté PT, une dernière substitution conduit à une forme F‴ réduite à l'intérieur du triangle PTU. Nous écrirons ainsi cette forme F‴

$$\begin{aligned}&(g_3 + g'_3\mathrm{A} + g''_3\mathrm{B})(y-z)^2 + (h_3 + h'_3\mathrm{A} + h''_3\mathrm{B})(z-x)^2\\ &\quad + (k_3 + k'_3\mathrm{A} + k''_3\mathrm{B})(x-y)^2 + (l_3 + l'_3\mathrm{A} + l''_3\mathrm{B})(x-t)^2\\ &\quad + (m_3 + m'_3\mathrm{A} + m''_3\mathrm{B})(y-t)^2 + (n_3 + n'_3\mathrm{A} + n''_3\mathrm{B})(z-t)^2.\end{aligned}$$

Or il arrive que l'on a

$$\frac{g_3}{g} = \frac{h_3}{h} = \frac{k_3}{k} = \frac{l_3}{l} = \frac{m_3}{m} = \frac{n_3}{n},$$

$$\frac{g'_3}{g'} = \frac{h'_3}{h'} = \frac{k'_3}{k'} = \frac{l'_3}{l'} = \frac{m'_3}{m'} = \frac{n'_3}{n'},$$

$$\frac{g''_3}{g''} = \frac{h''_3}{h''} = \frac{k''_3}{k''} = \frac{l''_3}{l''} = \frac{m''_3}{m''} = \frac{n''_3}{n''}.$$

Appelons λ la valeur commune des premiers rapports, $\frac{\lambda}{\mu}$ celle des deuxièmes et $\frac{\lambda}{\nu}$ celle des derniers; on voit alors que la forme F‴ n'est autre chose que la forme F, dans laquelle on a remplacé A par $\frac{\mathrm{A}}{\mu}$, B par $\frac{\mathrm{B}}{\nu}$, et qu'on a multipliée par λ. La multiplication par λ n'intervient pas dans les conditions de réduction, et l'on voit alors que, si F est réduit quand on a $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1$, $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1$, la forme F‴ sera réduite quand on aura $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1\mu$, $\mathrm{B} = \mathrm{B}_1\mu$. Le triangle dans lequel F‴ est réduit peut donc se déduire par une transformation très simple du triangle relatif à la forme F.

Si l'on applique à la forme F''' la substitution par laquelle on passe de la forme F à la forme F', on obtiendra une forme F^{IV}, qui sera réduite dans un triangle que la même transformation fournira, au moyen du triangle relatif à F'. De même la substitution qui mène de F' à F'', appliquée à F^{IV}, fournira une forme F^{V}, réduite dans un triangle qu'on déduira du triangle relatif à F'' par cette même transformation que donne le changement de A en $A\mu$ et de B en $B\nu$. En continuant ainsi, on obtiendra une série indéfinie de triangles formant une chaîne dans le plan des coordonnées, et, si le point (A, B) se meut indéfiniment à l'intérieur de cette chaîne, les formes réduites relatives aux différentes positions de (A, B) s'obtiendront toutes en employant périodiquement et indéfiniment les substitutions qui conduisent de F à F', F'' et F''', ou les substitutions inverses de celles-ci, si l'on parcourt la chaîne en sens inverse.

Mais la chaîne de triangles obtenue par cette période de substitutions ne couvrira pas entièrement le plan.

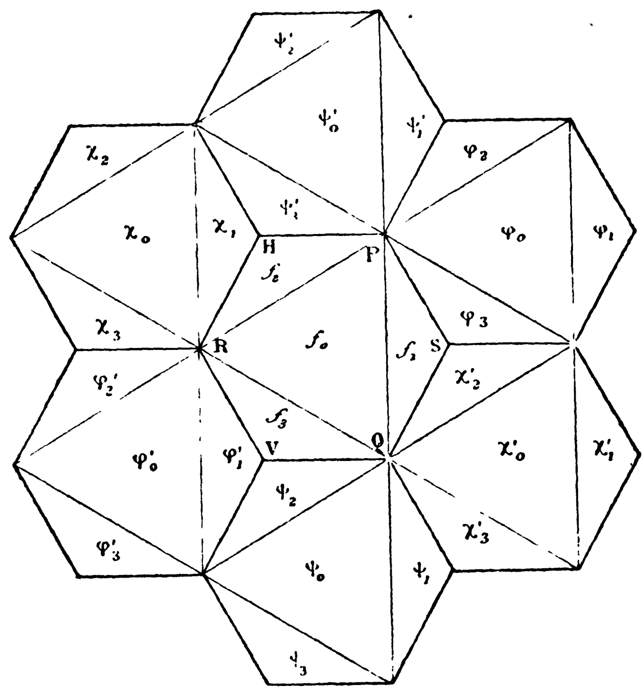
Si le point (A, B), d'abord situé dans le triangle PQR, traverse le côté PR, la forme F cesse d'être réduite, et une certaine substitution conduira à une forme F_1, réduite dans un nouveau triangle, et, en poursuivant la même marche que plus haut, on arriverait à trouver une deuxième chaîne de triangles, engendrée par l'emploi périodique et indéfiniment répété de trois nouvelles substitutions.

Ainsi apparaissent, dans cette théorie, deux périodes de substitutions. Au lieu de prendre le triangle PQR pour origine des deux chaînes, on pourrait prendre un quelconque des triangle, déjà obtenus, et l'on verrait facilement qu'on couvrirait le plan d'un réseau de triangles. L'étude de ce réseau conduit au résultat suivant.

Qu'on imagine un carrelage hexagonal et qu'on inscrive dans chaque hexagone un triangle; on obtiendra la représentation suivante, où, pour simplifier, nous figurerons les hexagones égaux et réguliers, bien qu'ils soient, en réalité, inégaux et irréguliers.

Les formes relatives à un point quelconque du plan peuvent toutes être déduites de quatre formes fondamentales qui sont les formes relatives aux quatre triangles inscrits dans un quelconque des hexagones qui couvrent le plan. Nous prendrons par exemple, pour formes fondamentales, les formes f_0, f_1, f_2, f_3. Nous avons écrit f_0 dans le triangle relatif à la forme f_0, f_1 dans le triangle relatif à la forme f_1, et ainsi de suite. La substitution qui conduit de f_0 à f_1 est aussi celle qui conduirait de φ_0 à φ_1, de φ'_0 à φ'_1, de ψ_0 à ψ_1, ..., et, en général, la même substitution lie les formes affectées des mêmes indices dans chaque hexagone.

Il en résulte que, les formes affectées de l'indice zéro étant obtenues, il sera facile d'obtenir toutes les autres au moyen des substitutions qui font passer de f_0 à f_1, f_2 ou f_3.



Appelons S l'ensemble des substitutions par lesquelles on passe de f_0 à f_1, puis à φ_3 et à φ_0, c'est-à-dire la substitution par laquelle on passerait directement de f_0 à φ_0; on trouve que cette même substitution permet aussi de passer de φ'_0 à f_0, c'est-à-dire que la substitution inverse de S, que nous désignerons par S^{-1}, conduirait de f_0 à φ'_0. Et de même χ'_0 et ψ'_0 se déduiraient de f_0 par des substitutions inverses de celles qui permettent d'obtenir χ_0 et ψ_0. Soit T la substitution qui conduit de f_0 à ψ_0; on trouve alors qu'on obtient χ_0 en appliquant à f_0 la substitution T^{-1} suivie de la substitution S^{-1}. De sorte qu'il n'y a en réalité que deux séries de substitutions, celles qui conduisent de f_0 à φ_0 en passant par f_1 et φ_3, et celles qui conduisent de f_0 à ψ_0 en passant par f_3 et ψ_2. Une forme relative à un point quelconque du plan peut être déduite des formes fondamentales f_0, f_1, f_2, f_3 en répétant, dans un certain ordre, ces deux séries de substitutions, car, ces deux séries de substitutions permettant d'entourer l'hexagone fondamental $f_0 f_1 f_2 f_3$ de six nouveaux hexagones, on voit qu'en partant d'un des hexagones déjà obtenus on couvrirait le plan d'un réseau hexagonal indéfini.

Ainsi les irrationnelles relatives à des équations dont les trois racines sont réelles conduiront à des formes ternaires dont la réduction indéfinie s'opère au moyen de deux périodes de substitutions, et, si l'analogie avec les fractions continues est manifeste, la double périodicité marque aussi la différence entre les irrationnelles du second degré et les irrationnelles du troisième.

Dans l'exemple précédent, les polygones limitatifs des formes réduites sont des triangles. M. Charve donne d'autres exemples où s'offrent des quadrilatères, et, dans le cas général, les polygones limitatifs sont des hexagones.

Mais, dans tous les cas, M. Charve montre qu'il y aura toujours deux et seulement deux périodes de substitutions, permettant d'obtenir toutes les formes réduites au moyen d'un certain nombre de formes fondamentales réduites.

Le travail que nous analysons se termine par une application de la théorie précédente aux unités complexes formées avec les racines d'équations du troisième degré à coefficients entiers, le coefficient du premier terme étant l'unité.

M. Charve démontre que, pour les équations n'ayant qu'une racine réelle, les unités complexes sont des puissances entières positives ou négatives d'une certaine unité complexe, et, pour les équations dont les trois racines sont réelles, les unités complexes peuvent toutes être formées par le produit des puissances entières positives ou négatives de deux d'entre elles.

FAVARO (Prof. ANTONIO). — INEDITA GALILEIANA. Frammenti tratti dalla Biblioteca nazionale di Firenze. — Venezia, tipografia di Giuseppe Antonelli, 1880; 143 pages, 1 pl.

Il y a quelque temps, M. Favaro, dont les travaux sur l'histoire des sciences exactes sont connus et appréciés de tous les savants, annonça dans une petite brochure qu'il pensait publier bientôt des Communications sur des manuscrits encore inédits de Galilée. Cette nouvelle dut paraître d'autant plus étonnante, qu'il était universellement admis que tous les fragments de cette nature avaient été insérés dans la célèbre édition complète d'Albèri.

L'écrit d'une certaine étendue que nous avons sous les yeux, et qui est un tirage à part, extrait des *Atti del R. Istituto Veneto,* réalise pourtant de tout point la promesse de l'éditeur. M. Favaro a compulsé avec soin les deux cent quatre-vingt-treize volumes de la Bibliothèque nationale de Florence qui, outre les manuscrits proprement dits du maître et des exemplaires de ses œuvres imprimées, contiennent encore tous les écrits possibles se rapportant à lui et à son école, et il a reconnu que sous l'ordre merveilleux qui semble régner dans le Catalogue de cette Collection se cachent certaines irrégularités, en conséquence desquelles un grand nombre de fragments sont restés inaperçus. Ainsi il nous fait connaître d'abord le *Procemium* inédit de la Notice historique de Viviani sur Galilée, dans lequel on remarque cette circonstance peu connue que le grand physicien portait le plus vif intérêt à l'Agriculture et à la pratique rationnelle de cet art. Les études sorties de la plume même de Galilée et que M. Favaro nous fait connaître sont de trois espèces différentes, hydrostatiques, géométriques et hydrotechniques. Dans un Appendice, non encore imprimé, à la *Bilancetta,* on trouve des indications étendues sur la perte de poids des substances les plus diverses dans l'eau ; ces déterminations de poids spécifiques, où l'on aperçoit évidemment les efforts de l'auteur pour atteindre la plus grande exactitude, ne peuvent qu'être du plus haut intérêt pour l'histoire de la Physique. Viennent ensuite certaines constructions et propositions de Géométrie élémentaire, auxquelles Galilée avait l'habitude de renvoyer, dans ses célèbres Leçons sur la fortification. Il est à remarquer que, pour le pentagone régulier, il reproduit la construction au moyen d'une seule ouverture de compas que Chasles (1) attribue à Albert Dürer; que, pour l'heptagone régulier, il enseigne la construction approximative d'Aboul Wefâ (2); qu'enfin il fait voir aussi comment un polygone régulier de n côtés, que l'on sait déjà inscrire dans un cercle, peut être construit sur un côté donné. Le théorème, presque évident d'ailleurs, qu'*un triangle construit sur l'hypoténuse d'un triangle rectangle équivaut à la somme de deux triangles semblables construits sur les deux autres côtés* est donné avec une démonstration très élégante, visiblement calquée sur celle que donne Euclide du théorème de Pythagore. On trouve encore dans cet écrit quelques remarques sur le nivellement. En troisième lieu, enfin, l'éditeur nous fait connaître un Rapport rédigé par Galilée sur l'amélioration de la rivière du Bisenzio, et dont on ne possédait jusqu'ici qu'une partie; cette pièce est d'une véritable importance au point de vue de l'Hydraulique. Dans un Appendice, on trouve une Lettre autographe, adressée probablement à Cioli, ainsi que des matériaux nouvellement découverts pour l'histoire de Galilée. Ces nouveaux documents sont particulièrement intéressants pour l'histoire de la première horloge à pendule.

Nous croyons pouvoir conclure, de quelques indications de l'éditeur, que ses recherches sur les fragments de Galilée ne sont pas encore près d'être terminées. Nous souhaitons à cette entreprise méritoire une continuation de succès, et nous ne doutons pas que nos vœux ne soient partagés par tous ceux qui s'intéressent à la Science historique.

S. G.