

# BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

J. TANNERY

## Sur la suite de Schwab

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2<sup>e</sup> série,*  
tome 5, n° 1 (1881), p. 454-456

[http://www.numdam.org/item?id=BSMA\\_1881\\_2\\_5\\_1\\_454\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_454_1)

© Gauthier-Villars, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

**SUR LA SUITE DE SCHWAB;**

PAR M. J. TANNERY.

Dans le Volume consacré à la mémoire de Chelini, M. Borchardt a traité la question suivante :

*Étant donnés deux nombres positifs  $a_1, b_1$ , on fait*

$$a_1 = \frac{a + b}{2}, \quad b_1 = \sqrt{a_1 b},$$

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}, \quad b_2 = \sqrt{a_2 b_1},$$

.....;

*trouver la limite de la suite indéfinie,*

$$a, b, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$$

L'Analyse de M. Borchardt est fort élégante; toutefois, je ne crois pas inutile de faire remarquer qu'on peut parvenir par une voie entièrement élémentaire à la solution du problème que l'illustre géomètre n'a pas cru indigne de ses efforts.

Soit d'abord  $a < b$ ; je pose

$$a = b \cos \alpha, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2};$$

on aura

$$a_1 = b \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad b_1 = b \cos \frac{\alpha}{2}, \quad a_1 = b_1 \cos \frac{\alpha}{2},$$

et, par suite,

$$b_2 = b_1 \cos \frac{\alpha}{4},$$

.....,

$$b_n = b_{n-1} \cos \frac{\alpha}{2^n} = b \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \dots \cos \frac{\alpha}{2^n},$$

ou

$$b_n = \frac{b \sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}},$$

puis

$$a_n = b_n \cos \frac{\alpha}{2^n}.$$

De là résulte immédiatement que  $a_n$  et  $b_n$  ont, pour  $n$  infini, la limite commune

$$\frac{b \sin \alpha}{\alpha}.$$

Soit maintenant  $a > b$ ; je pose

$$a = b \operatorname{ch} \alpha, \quad \operatorname{ch} \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2}, \quad \operatorname{sh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2},$$

$\alpha$  étant un nombre positif.

On aura de même

$$\frac{b \operatorname{sh} \alpha}{2^n \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2^n}}, \quad a_n = b_n \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2^n},$$

et l'on voit que la limite commune de  $a_n$  et  $b_n$ , pour  $n$  infini, est

$$\frac{b \operatorname{sh} \alpha}{\alpha}.$$

Enfin, on arriverait à des propositions du même genre, plus ou moins simples, en prenant pour point de départ, non les expressions de  $\sin 2x$ ,  $\operatorname{sh} 2x$ , mais les formules qui donnent  $\operatorname{tang} 2x$ ,  $\sin 3x$ ,  $\operatorname{sn} 2x$ , etc.

